

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CAMPUS PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE ITABAIANA

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E APLICAÇÕES

JOSÉ ADENUALDO DOS SANTOS JÚNIOR

Itabaiana - Sergipe
2026

JOSÉ ADENUALDO DOS SANTOS JÚNIOR

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento do Curso de Licenciatura em Matemática de Itabaiana como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Éder Mateus de Souza.

Coorientadora: Profa. Dra. Marta Lizeth Calvache Hoyos.

Itabaiana - Sergipe
2026

JOSÉ ADENUALDO DOS SANTOS JÚNIOR

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Sergipe, ao Departamento de Matemática de Itabaiana, como requisito avaliativo para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Éder Mateus de Souza
Examinador 1 (Presidente)
UFS - Itabaiana

Prof. Dr. Bruno Luiz de Andrade Santos
Examinador 2
UFS - Itabaiana

Prof. Dr. Charles Braga Amorim
Examinador 3
UFS - Itabaiana

Prof. Dr. Fábio Lima Santos
Examinador 4 (Suplente)
UFS - Itabaiana

Resultado concedido pela Banca: 10.0 (dez pontos). Data (defesa): 23 de Julho de 2026.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer à minha mãe, Maria de Lurdes (Lurdinha), por todo o apoio e conselhos. Que, apesar de ter estudado apenas até o quinto ano do ensino fundamental devido ao trabalho e à infância difícil no campo, sempre me incentivou a estudar e a buscar um futuro melhor. De fato, não há palavras para descrever a minha gratidão por ser seu filho. Para mim, a senhora é um exemplo, pois sempre me ensinou a fazer o que é certo, a ajudar quem precisa e a nunca desistir. Acredito que, se Deus decidisse escolher uma palavra para descrever e personificar a bondade, com certeza seria Lurdes. Quero que saiba que, se eu tivesse mil outras vidas, em todas elas eu desejaria ser seu filho. Além da senhora, agradeço também à pessoa que considero a minha segunda mãe, vó Zefinha, por tudo o que já fez e faz por mim, por sempre acreditar em mim mantendo uma imagem quase utópica a meu respeito.

Aos meus irmãos Juliane, Adryan e Keyla, agradeço por todos os momentos de conversa e companheirismo. À minha irmã Juliane, por ser o meu "braço direito", por sempre me ouvir quando precisei e por ter dividido tantos momentos desafiadores. Você foi um exemplo de irmã e de pessoa, características que acho que foram herdadas da nossa mãe. Fiquei muito feliz por você e Natan terem me escolhido para ser o padrinho da minha sobrinha que tanto amo, Laura. Não posso deixar de comentar que você foi como uma mãe para o nosso irmão mais novo, Adryan. E, falando dele, lembro-me bem de quando a nossa mãe estava grávida e você torcia para que fosse menina, enquanto eu torcia por um menino... bom, o desfecho dessa história já sabemos. Ao meu irmão caçula, agradeço por toda a experiência de ser o irmão mais velho e responsável, além de me apresentar ao jogo *Brawl Stars*, junto com Kauan. Hoje, o nosso dilema é descobrir quem é o melhor entre nós. Não posso deixar de falar da Keyla, minha irmã caçula: admiro a mulher carinhosa e verdadeira que você se tornou. Apesar de não termos tanto contato devido à nossa rotina, preciso dizer que você é um exemplo de superação e força.

Além de vocês, agradeço a toda a minha família. Às minhas tias: Márcia, Bel, Cristina, Zefa, Maria, Neide, Aldenora e Denise; e aos meus tios: Chico, Messias, José e Márcio, por me proporcionarem momentos valiosos e extremamente importantes. Saibam que carregarei essas memórias por onde eu for. Aos meus primos Felipe, Laís, Ariely, Layanne, Adriel, Arthur, Pedro Henrique, Paulo César, Raiane e Kauan (e tantos outros), por serem o alívio cômico e os momentos de descontração: vocês são incríveis e amo todos vocês.

Aos amigos que a UFS me concedeu, agradeço por serem como uma segunda família para mim. À Beatriz (Bia), por ser a minha dupla perfeita nas disciplinas: dividimos muitos fardos e angústias, mas também momentos muito felizes. Você é e sempre será uma inspiração de resiliência. Sem você, a minha caminhada teria sido, de fato, mais

árdua. Para mim, você é a personificação do aluno perfeito para o curso de Matemática: aquele que ama todas as áreas: pura, aplicada e educação. À Larissa (Lari), por sempre mergulhar de cabeça nas minhas loucuras: você foi o meu braço direito na UFS (e Bia, o esquerdo). Nos projetos, no LEPEM e nos eventos, você transformou muitos momentos em excelentes lembranças. Obrigado por sempre confiar em mim e por me cobrar para ser uma pessoa melhor. À Suelaine (Suuh), a primeira pessoa com quem fiz amizade na UFS: agradeço por todos os momentos vividos dentro e fora da universidade, e por me encorajar a convidar meus orientadores, você foi essencial para que este trabalho iniciasse. Ao Rafael e à Maira, por todas as oportunidades e conversas no trajeto de ida e volta da UFS: confesso que esse é um dos momentos de que sentirei falta nesta nova etapa da minha formação. Admiro muito a força de vontade e a história de vocês dois, e agradeço por todo o apoio, conversas e por me aturarem. À Clara (Branca), agradeço por toda a amizade e sinceridade. Gosto bastante das nossas conversas e histórias; você fez muita falta nas tardes da UFS.

Além de vocês, quero expressar a minha mais sincera gratidão à Matias, Paloma, Nayane, Núbia, Greyse, Grasiele, Mateus, Jéssica, Graziela, Dênisson, Jeferson, Mariane, Gabrielly, Cleisiane, Juliana, Iasmin, Luzia, Tayslaine, Crislaine, Maira, Natan, Arthur, Ronaelton, Fernanda, David, Gabriele, Gustavo, Karol, Adrielly, Aparecido, Vínicius, Emilly, José, Cleverton, Albert, Alyce, Cauã, Kleber, Kely, Jênisson, Larissa, Maria Clara (E muitos outros) sou imensamente grato por toda confiança e apoio, sem vocês muitas dessas etapas não seriam vencidas.

No mais, quero agradecer aos Professores(as) do Departamento de Matemática de Itabaiana por todos ensinamentos e oportunidades; vocês foram cruciais para a minha formação, crescimento e amadurecimento profissional; em especial à Teresa, Marta, Rafael, Ricardo, Alejandro, Wagner, Mateus e Érica. Ao meu orientador Prof. Dr. Éder Mateus de Souza, por ter acreditado no meu potencial desde o início, permitindo grande autonomia e decisão, o que me fez amadurecer para a pesquisa. E um agradecimento extremamente especial à minha coorientadora, Profa. Dra. Marta Lizeth Calvache Hoyos, que trouxe da Colômbia não apenas toda a sua genialidade e rigor acadêmico, mas também uma generosidade e entusiasmo; o seu olhar atento, sua contribuição e dedicação, nos ajudaram para que este trabalho atingisse o nível que alcançou. Esse resultado foi fruto dos esforços do nosso trio e fico muito satisfeito por termos nos reunido para esta pesquisa; ter vocês dois ao meu lado foi o maior diferencial dessa jornada.

Por fim, agradeço à banca examinadora, Prof. Dr. Charles Braga Amorim e Prof. Dr. Bruno Luiz de Andrade Santos, pela disponibilidade, leitura atenta e pelas considerações tão ricas e valiosas que agregaram bastante ao meu estudo. Ao Prof. Dr. Fábio Lima Santos por toda ajuda durante o curso e pelo incentivo, você é um exemplo de profissional.

Dedico este trabalho a Deus, fonte de toda sabedoria e sustentáculo da minha vida, e a todos que, com amor, paciência e incentivo, me ajudaram ao longo desta caminhada acadêmica.

"Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível." (São Francisco de Assis)

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo". (Galileu Galilei)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução abrangente às equações de diferenças e à teoria da estabilidade, explorando desde os fundamentos matemáticos até aplicações em cenários contemporâneos. A pesquisa inicia-se com a exposição do cálculo de diferenças finitas, definindo operadores de diferença (Δ) e avanço (E) e a importância da discretização de modelos contínuos para fins computacionais. O estudo aprofunda-se na resolução de equações lineares de primeira ordem e de ordem superior, utilizando ferramentas como o Casoratiano e o critério de Schur-Cohn para determinar a estabilidade das soluções. Na fase aplicada, o trabalho demonstra a utilidade dessas equações em métodos numéricos (Newton-Raphson e Euler) e em análises socioeconômicas relevantes para a realidade brasileira, como a comprovação matemática da inevitabilidade da ruína do jogador em plataformas de apostas ("Jogo do Tigrinho") e a modelagem da Renda Nacional (PIB) através do modelo de Samuelson. Os resultados reforçam a capacidade das equações de diferenças de prever comportamentos complexos e diagnosticar trajetórias de sistemas dinâmicos discretos.

Palavras-chave: Equações de Diferenças. Teoria da Estabilidade. Aplicações.

ABSTRACT

This work presents a comprehensive introduction to difference equations and stability theory, exploring everything from mathematical foundations to applications in contemporary scenarios. The research begins with the exposition of finite difference calculus, defining difference (Δ) and shift (E) operators and the importance of discretizing continuous models for computational purposes. The study delves into the resolution of first-order and higher-order linear equations, using tools such as the Casoratian and the Schur-Cohn criterion to determine the stability of solutions. In the applied phase, the work demonstrates the utility of these equations in numerical methods (Newton-Raphson and Euler) and in socio-economic analyses relevant to the Brazilian reality, such as the mathematical proof of the inevitability of player ruin in betting platforms ("Fortune Tiger") and the modeling of National Income (GDP) through Samuelson's model. The results reinforce the capacity of difference equations to predict complex behaviors and diagnose trajectories of discrete dynamic systems.

Keywords: Difference Equations. Stability Theory. Applications.

RESUMEN

Este trabajo presenta una introducción integral a las ecuaciones de diferencias y a la teoría de estabilidad, explorando desde los fundamentos matemáticos hasta sus aplicaciones en escenarios contemporáneos. La investigación comienza con la exposición del cálculo de diferencias finitas, definiendo los operadores de diferencia (Δ) y de desplazamiento (E), así como la importancia de discretizar modelos continuos con fines computacionales. El estudio profundiza en la resolución de ecuaciones lineales de primer orden y de orden superior, utilizando herramientas como el Casoraciano y el criterio de Schur-Cohn para determinar la estabilidad de las soluciones. En la fase aplicada, el trabajo demuestra la utilidad de estas ecuaciones en métodos numéricos (Newton-Raphson y Euler) y en análisis socioeconómicos relevantes para la realidad brasileña, tales como la demostración matemática de la inevitabilidad de la ruina del jugador en plataformas de apuestas ("Fortune Tiger") y la modelación del Ingreso Nacional (PIB) a través del modelo de Samuelson. Los resultados refuerzan la capacidad de las ecuaciones de diferencias para predecir comportamientos complejos y diagnosticar trayectorias de sistemas dinámicos discretos.

Palabras clave: Ecuaciones de Diferencias. Teoría de Estabilidad. Aplicaciones.

Sumário

Introdução **12**

1 Preliminares **16**

1.1 Sequências de Números Reais 16

1.2 Limite de uma sequência 20

1.3 Polinômios Fatoriais 22

2 Cálculo de Diferenças Finitas **27**

2.1 Operador de Diferença e Deslocamento 27

2.1.1 Regras Operatórias 36

2.1.2 Diferenças de Funções Elementares 37

2.2 Operador Antidiferença 42

2.3 Discretização da Equação Logística 45

2.3.1 O Processo de Discretização 46

3 Equações de Diferenças **48**

3.1 Classificação de Equações de Diferenças 48

3.2 Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem 52

3.2.1 Solução da Equação Homogênea 54

3.2.2 Solução da Equação não Homogênea 56

3.3 Estudo Assintótico das soluções 60

3.3.1 Pontos de Equilíbrio 60

3.3.2 Estabilidade e Atração 62

3.3.3 Pontos e Ciclos Periódicos 72

3.4 Equação Logística e Bifurcações 74

3.4.1 Pontos de Equilíbrio da Equação Logística 75

3.4.2 Segunda Iteração e o 2 - Ciclos da Equação Logística 76

4 Equações de Diferenças Lineares de Ordem Superior **79**

4.1 Equações de Diferenças Escalares Lineares Homogêneas 90

4.1.1 Solução Geral 91
4.2 Equações de Diferenças Escalares Lineares Não Homogêneas 95
4.2.1 Método dos Coeficientes Indeterminados 97
4.2.2 Método das Funções Geradoras 102
4.3 Estabilidade de Equações de Diferenças Escalares de Ordem Superior . . . 105
4.3.1 O Critério de Schur-Cohn para segunda ordem 107

5 Aplicações **110**
5.1 Métodos Numéricos 110
5.1.1 O Método de Newton-Raphson 110
5.1.2 O Método Explícito de Euler 113
5.2 A Ruína do Jogador e o " Jogo do Tigrinho" 119
5.2.1 Modelagem por Equações de Diferenças 120
5.2.2 Parametrização para o "Jogo do Tigrinho" 121
5.2.3 Estudo Qualitativo 122
5.3 Renda Nacional Brasileira 123
5.3.1 Estimação dos Parâmetros α e β 124
5.3.2 Modelagem para a Renda Nacional 125
5.3.3 Estudo Qualitativo 126
5.3.4 Projeções para o Período 2023-2026 126

Considerações Finais **129**

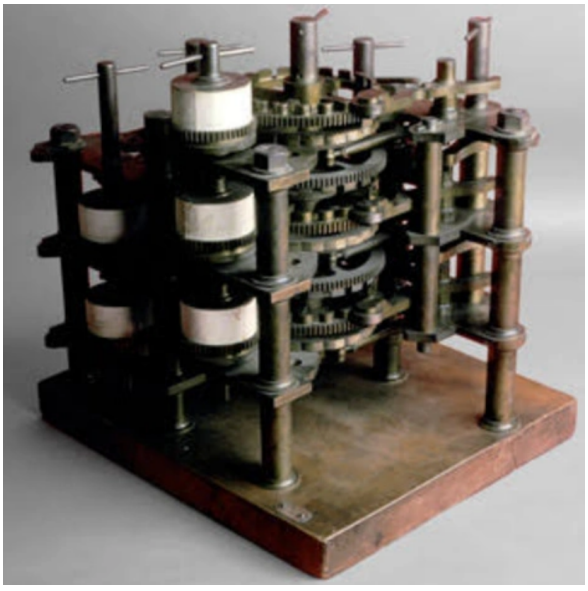
Bibliografia **130**

Introdução

Historicamente, segundo [9] e [11], a precisão matemática era uma questão de vida ou morte, especialmente nas navegações marítimas, que dependiam de tabelas de dados geradas a partir de funções polinomiais para determinar a longitude. Como essas tabelas eram calculadas e transcritas manualmente pelos chamados "computadores humanos", elas continham erros frequentes que podiam levar a desastres, comparados pelo astrônomo *John Herschel* a "rochas submersas"no mar. Foi diante dessa falibilidade humana que *Charles Babbage* idealizou uma solução mecânica, expressando seu famoso desejo de que tais cálculos pudessem ser realizados "a vapor"para garantir velocidade e precisão.

A ponte fundamental entre o esforço humano e o nascimento do computador moderno reside no método das diferenças finitas, uma aplicação de equações de diferenças. Babbage percebeu que poderia simplificar o cálculo de funções complexas ao reduzi-lo estritamente à adição mecânica. Ao "programar"uma função na *Máquina Diferencial*, o dispositivo utilizava a lógica (ou método) das diferenças para resolver polinômios de forma iterativa, eliminando a necessidade de multiplicações ou divisões complexas durante o processamento.

Figura 1: Parte da Máquina Diferencial.



Fonte: Museu Whipple de História da Ciência.

Embora a *Máquina Diferenciail* fosse limitada a funções polinomiais, essa técnica de discretização permitia aproximar logaritmos e funções trigonométricas essenciais para a ciência da época. Essa transição da computação manual para a automação baseada em regras matemáticas discretas pavimentou o caminho para projetos mais ambiciosos, como a *Máquina Analítica*, cuja arquitetura e programabilidade a tornaram uma precursora direta dos computadores eletrônicos modernos. Assim, as equações de diferenças serviram como o algoritmo primordial que permitiu que o pensamento matemático fosse, traduzido em engrenagens e movimentos automáticos. Hoje, na era da computação, as máquinas processam informações de forma discretizada, exigindo a conversão de modelos contínuos para formatos que possam ser resolvidos numericamente com precisão e essa é a primeira relação das equações de diferenças e a atualidade.

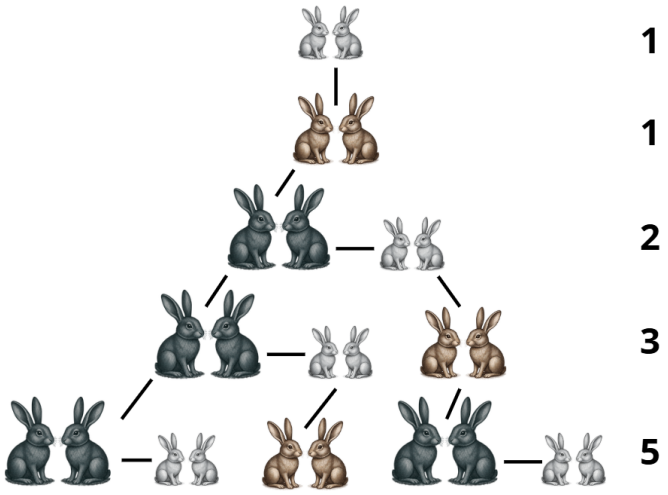
Por esse ângulo, o estudo das equações de diferenças constitui o análogo discreto do cálculo diferencial, focando nas variações de sequências em domínios discretos em vez de taxas de variação instantâneas em domínios contínuos. Enquanto o cálculo infinitesimal domina a modelagem de fenômenos que evoluem de forma contínua, as equações de diferenças surgem como ferramentas essenciais para descrever sistemas que operam em etapas ou intervalos de tempo definidos. Outrossim, as equações de diferenças, quando aplicadas por meio do Método Explícito de Euler (MEE), permitem calcular a solução aproximada de equações diferenciais cuja a resolução por métodos tradicionais seria difícil ou até impossível, como:

$$y'(t) = e^{t^2}, \ t \in [1, 3] \tag{1}$$

o que estreita as relações entre essas teorias, além de permitir a automação e otimização da solução de problemas descritos por equações diferenciais. Adicionalmente, apresentamos a discretização da equação (1) no último capítulo deste trabalho. No entanto, a teoria das equações de diferenças tornou-se independente em relação às equações diferenciais, apesar de toda semelhança.

Nesse sentido, o primeiro problema envolvendo equações de diferenças, em conformidade com [8], consistiu em uma questão envolvendo o crescimento populacional de coelhos, com base nas seguintes condições: Inicia com um casal de coelhos recém-nascidos, com um mês de vida, eles tornam-se maduros para procriar e com dois meses de vida geram um novo casal de coelhos que são regidos pelas mesmas regras, sabendo que nenhum coelho morre, quantos casais de coelhos teríamos ao final de 12 meses (1 ano)? Esse problema foi proposto por *Leonardo de Pisa* em 1202.

Figura 2: Ilustração do crescimento da população de coelhos.



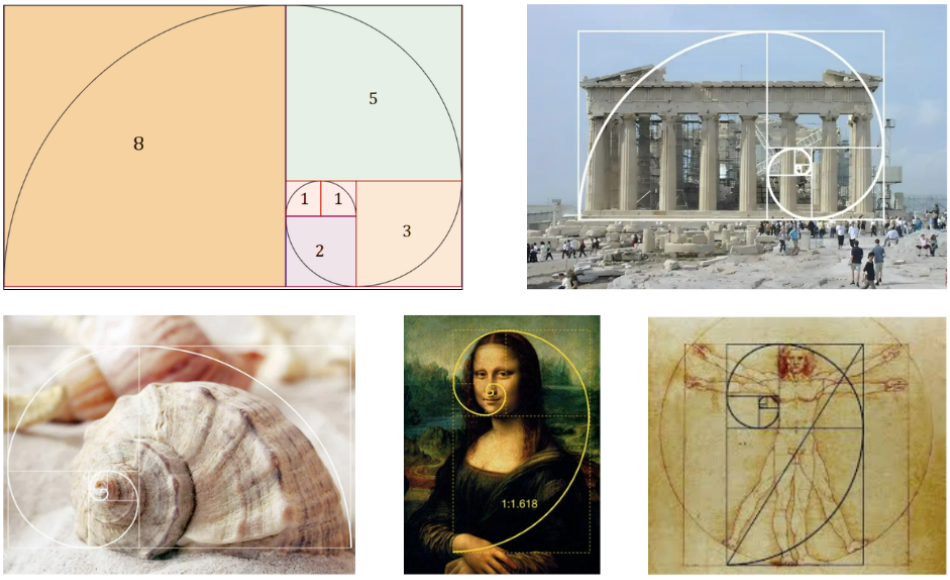
Fonte: Produção do Autor.

Na Figura 2, o coelho de cor cinza representa o casal recém-nascido, o marron, o casal maduro; e o preto o casal que já reproduziu ao menos uma vez. Ao analisar a sequência de números gerados pela quantidade de casais a cada mês (números na lateral direita da Figura 2), *Leonardo de Pisa* percebeu que a partir do terceiro termo desta sequência, qualquer termo pode ser determinado com a soma da quantidade de casais dos dois meses anteriores, ou seja, basta ter conhecimento dos dois primeiros termos que os demais são obtidos pela soma dos seus dois anteriores. Dessa forma, nasceu a seguinte equação de diferenças:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \text{ com } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1. \tag{2}$$

A resposta para o problema é 144 casais. *Leonardo de Pisa* ficou conhecido por *Fibonacci*, devido ao sobrenome do seu pai *Bonacci* mais o *Fi* derivado (ou abreviado) de *filius* ou *figlio* que significa filho, isto é, *Fibonacci* é o mesmo que filho de *Bonacci*. Por isso, a sequência de números gerada pela equação 2 é conhecida como *Sequência de Fibonacci*. Uma curiosidade dessa sequência é que a razão entre termos consecutivos desses números converge para o *número de ouro* ou *razão áurea* ($\approx 1,618$). Este número está presente em vários padrões no mundo, o qual observamos a partir da *Espiral de Fibonacci* como na Figura 3. A *Espiral de Fibonacci* é construída desenhando arcos de circunferência dentro de quadrados adjacentes cujos lados seguem os números da sequência $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$. O processo geométrico cria um retângulo perfeito que pode se expandir continuamente, como podemos observar na Figura 3.

Figura 3: Espiral de Fibonacci.



Fonte: Adaptado da Infoescola.

Nesta esfera, o presente trabalho tem como objetivo explorar os fundamentos teóricos das equações de diferenças e da teoria da estabilidade, analisando como o comportamento das soluções a longo prazo pode ser previsto. A importância desta análise reside na sua capacidade de modelar fenômenos complexos em diversas áreas do conhecimento, desde o crescimento populacional e a dinâmica financeira até a convergência de métodos numéricos. O foco central recai sobre a estabilidade assintótica, que permite determinar se um sistema retornará ao equilíbrio após sofrer pequenas perturbações.

Para fundamentar essa análise, o texto está estruturado em cinco capítulos. Inicialmente, serão apresentados os conceitos de sequências reais e polinômios fatoriais, que servem de base para o cálculo de diferenças finitas. Em seguida, detalha-se o funcionamento dos operadores de diferença (Δ) e avanço (E), fundamentais para a discretização de modelos. Por esta perspectiva, a teoria é aprofundada no estudo de equações de primeira ordem e de ordem superior, abordando critérios de estabilidade, como o de *Schur-Cohn*.

Por fim, buscamos demonstrar a relevância da teoria através de aplicações em cenários contemporâneos para a realidade brasileira, utilizando a modelagem para analisar a inevitabilidade da "Ruína do Jogador"em plataformas de apostas digitais, como o popular "Jogo do Tigrinho"e para projetar a Renda Nacional Brasileira com base no modelo de *Samuelson*. Dessa forma, este trabalho almeja unir o rigor dos conceitos abordados à análise crítica de problemas socioeconômicos, evidenciando o poder preditivo das equações de diferenças.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentados os conceitos e resultados fundamentais que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho. Em particular, serão abordados os tópicos de sequências numéricas reais e polinômios fatoriais, essenciais para a compreensão dos resultados apresentados nos capítulos seguintes.

A elaboração deste capítulo teve como principais referências [7] e [5], cujos conceitos e resultados forneceram o embasamento teórico necessário para este estudo.

1.1 Sequências de Números Reais

As sequências de números reais constituem uma das estruturas fundamentais no estudo das equações de diferenças. Por meio da aplicação dos operadores de diferenças (Δ) e de avanço (E), que serão apresentados posteriormente, é possível transformar modelos contínuos em modelos discretos, isto é, substituir funções de variável contínua por sequências que descrevem a evolução de um fenômeno em instantes discretos. Nesse contexto, faz-se necessário apresentar a definição formal de sequência de números reais, bem como alguns de seus principais resultados, que servirão de base para o desenvolvimento dos conceitos abordados nas seções seguintes.

Definição 1.1. Uma sequência de números reais é uma função $y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $y(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é chamado o termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência.

Ao longo deste trabalho, utilizaremos as notações $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente $\{y(n)\}$ para representar uma sequência de números reais. Além disso, representaremos por T_y o conjunto dos valores assumidos pelos termos da sequência $\{y(n)\}$, isto é,

$$T_y = \{y(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que o conjunto T_y pode possuir infinitos elementos, um número finito de elementos ou, ainda, ser constituído por um único elemento.

Exemplo 1.1. Considere a sequência definida por

$$y(n) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nesse caso,

$$T_y = \{y(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{y(1), y(2), y(3), \ldots\} = \{1, 4, 9, \ldots\}.$$

Portanto, o conjunto T_y possui infinitos elementos.

Exemplo 1.2. Considere a sequência

$$l(n) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como os termos da sequência alternam entre -1 e 1, temos

$$T_l = \{l(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}.$$

Assim, o conjunto T_l possui exatamente dois elementos.

Exemplo 1.3. Seja a sequência constante

$$s(n) = 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como todos os seus termos são iguais a 2, segue que

$$T_s = \{s(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{2\}.$$

Logo, o conjunto T_s é constituído por um único elemento.

Observação 1.1. A função

$$y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por $y(n) = n^2$, é injetiva. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$y(n) = y(m).$$

Então,

$$n^2 = m^2,$$

o que implica

$$n^2 - m^2 = (n - m)(n + m) = 0.$$

Como $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $n + m > 0$. Logo,

$$n - m = 0,$$

isto é, $n = m$.

Por outro lado, as funções

$$l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},$$

apresentadas nos Exemplos 1.2 e 1.3, não são injetivas. De fato,

$$l(1) = l(3) = -1 \quad \text{e} \quad s(1) = s(2) = 2.$$

Definição 1.2. Uma sequência $\{y(n)\}$ é dita *limitada* quando o conjunto de seus termos

$$T_y = \{y(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

é limitado, isto é, existem números reais a e b tais que

$$a \leq y(n) \leq b, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário, a sequência é chamada de *ilimitada*.

Nos Exemplos 1.2 e 1.3, as sequências $\{l(n)\}$ e $\{s(n)\}$ são limitadas, pois

$$T_l = \{-1, 1\} \subset [-1, 1],$$

e

$$T_s = \{2\} \subset [2, 3].$$

Definição 1.3. Uma sequência $\{y(n)\}$ é *limitada superiormente* quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$y(n) \leq b,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, $\{y(n)\}$ é *limitada inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$y(n) \geq a,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

O comportamento dos termos de uma sequência em relação aos seus termos subsequentes permite classificá-la em crescente ou decrescente. Essa classificação define o conceito de monotonicidade, apresentado a seguir.

Definição 1.4. Uma sequência $\{y(n)\}$ é dita *monótona* quando seus termos satisfazem uma das seguintes condições:

i. *Crescente*: $y(n) < y(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii. *Não decrescente*: $y(n) \leq y(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

iii. *Decrescente*: $y(n) > y(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

iv. *Não crescente*: $y(n) \geq y(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.4. Considere a sequência

$$y(n) = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Temos que

$$y(n+1) = n+1.$$

Como

$$n < n+1,$$

segue que

$$y(n) < y(n+1),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência é crescente e, consequentemente, monótona.

Exemplo 1.5. Considere a sequência

$$y(n) = -n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$y(n+1) = -(n+1) = -n-1.$$

Como

$$-n > -n-1,$$

temos que

$$y(n) > y(n+1),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência é decrescente e, portanto, monótona.

Exemplo 1.6. Considere a sequência

$$y(n) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se n é ímpar, então

$$y(n) = -1,$$

enquanto que, se n é par, temos

$$y(n) = 1.$$

Assim, os termos da sequência alternam entre os valores -1 e 1, não apresentando um comportamento crescente ou decrescente. Portanto, a sequência não satisfaz nenhuma das condições da definição de monotonicidade e, consequentemente, não é monótona.

1.2 Limite de uma sequência

Intuitivamente, dizer que o número real L é limite da sequência $\{y(n)\}$ significa afirmar que, à medida que o índice n cresce, os termos $y(n)$ tornam-se e permanecem tão próximos de L quanto se deseje. Em outras palavras, a distância entre $y(n)$ e L, dada por

$$|y(n) - L|,$$

torna-se menor que qualquer número positivo ε, por menor que seja, desde que o índice n seja suficientemente grande.

Definição 1.5. Dizemos que o número real L é o limite da sequência $\{y(n)\}$, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = L \ \ ou \ \ \lim y(n) = L,$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y(n) - L| < \varepsilon,$$

sempre que $n > N$.

Quando uma sequência $\{y(n)\}$ possui limite L, dizemos que ela *converge* para L ou que é uma sequência *convergente*. Caso contrário, a sequência é denominada *divergente*. Dessa forma, estudar o limite de uma sequência consiste em analisar seu comportamento quando n assume valores suficientemente grandes.

Exemplo 1.7. Considere as seguintes sequências $y(n) = n^2$ e $x(n) = \dfrac{n+1}{n}$

A primeira sequência definida por $y(n) = n^2$ é divergente. Pois, para qualquer $A \in \mathbb{R}$, que for estipulado sempre existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $y(n) > A$. Assim, o $\lim y(n) = \infty$.

A segunda sequência definida por $x(n) = \frac{n+1}{n}$ converge para 1, isto é, $\lim x(n) = 1$. Pois, pela propriedade arquimediana dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\epsilon} < N$. Dessa

forma, para qualquer $n > N$ teremos $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$:

$$|x(n) - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon.$$

Portanto, o $\lim x(n) = 1$, como queríamos mostrar.

Um resultado importante é a garantia da unicidade do limite de uma sequência quando este existe, ou seja, se uma sequência $\{y(n)\}$ é convergente então esta converge para um único número real, o qual é abordado pelo Teorema abaixo:

Teorema 1.1. (Unicidade do limite) Se $\lim y(n) = L_1$ e $\lim y(n) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Demonstração: Vamos mostrar que se uma sequência $\{y(n)\}$ é tal que $\lim y(n) = L_1$ e $\lim y(n) = L_2$ então $L_1 = L_2$. Para tanto, suponha por contradição que $L_1 \neq L_2$, com isso escolha $\varepsilon = |L_1 - L_2| > 0$.

Como $\lim y(n) = L_1$, então dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$, temos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|y(n) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ desde que } n > N_1.$$

Por outro lado, $\lim y(n) = L_2$ então dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$, temos que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|y(n) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ desde que } n > N_2.$$

Se escolhermos $N = \max\{N_1, N_2\}$ então a definição será satisfeitas para os dois casos descritos acima. Dessa forma,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - y(n) - L_2 + y(n)| \leq |y(n) - L_1| + |y(n) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = |L_1 - L_2|.$$

Contradição, logo $L_1 = L_2$. Portanto, se uma sequência é convergente então seu limite é único. ■

Teorema 1.2. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Suponha que $\lim y(n) = L$. Tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|y(n) - L| < 1$. Da desigualdade triangular, temos:

$$|y(n)| = |y(n) - L + L| \leq |y(n) - L| + |L| < 1 + |L| \text{ para todo } n > N.$$

Dessa forma, $-1 - |L| < y(n) < 1 + |L|$. Seja,

$$M = \max\{y(1), \ldots, y(N), 1 + |L|\} \text{ e } m = \min\{y(1), \ldots, y(N), -1 - |L|\}.$$

Segue que $m \leq y(n) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que prova que a sequência é limitada. ■

Teorema 1.3. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração: Consideremos o caso em que $\{y(n)\}$ é não-decrescente e limitada. Seja $T_y = \{y(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Como T_y é limitado, tome $L = \sup T_y$ e $\lim y(n) = L$

Dado $\epsilon > 0$, temos $L - \epsilon < L$, dessa forma, $L - \epsilon$ não é cota superior, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L - \epsilon < y(N)$. Pela monotonia, para todo $n > N$, temos $y(N) \leq y(n)$. Como L é cota superior, $y(n) \leq L < L + \epsilon$. Assim: $L - \epsilon < y(n) < L + \epsilon$, ou melhor, $|y(n) - L| < \epsilon$. Portanto, $\lim y(n) = L$.

Para o caso em que $\{y(n)\}$ é não-crescente e limitada. Seja $T_y = \{y(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Como T_y é limitado, tome $L = \inf T_y$ e $\lim y(n) = L$

Dado $\epsilon > 0$, temos $L < L + \epsilon$, dessa forma, $L + \epsilon$ não é cota inferior, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y(N) < L + \epsilon$. Pela monotonia, para todo $n > N$, temos $y(N) \geq y(n)$. Como L é cota inferior, $L - \epsilon < L \leq y(n)$. Assim: $L - \epsilon < y(n) < L + \epsilon$, ou melhor, $|y(n) - L| < \epsilon$. Portanto, $\lim y(n) = L$. ■

O Teorema apresentado acima nos fornece um critério bem conhecido, quando o assunto é garantir a convergência de uma sequência e, portanto, indiretamente o valor numérico do seu limite. Por esse lado, podemos ampliar tal resultado à teoria das equações de diferenças para integrar o estudo da estabilidade das suas soluções.

Na próxima seção definiremos os polinômios fatorias, os quais destacam-se como uma estrutura especial, mediante ao seu comportamento perante aos operadores supracitados no início da presente seção. Nesse sentido, apresentaremos sua definição e algumas propriedades, que no capítulo 2 serão utilizadas.

1.3 Polinômios Fatoriais

O conceito de fatorial, fundamental na Análise Combinatória, é tradicionalmente aplicado a números inteiros. Os polinômios fatoriais surgem como uma generalização funcional desse operador. Enquanto a potenciação convencional envolve a multiplicação de fatores idênticos, os polinômios fatoriais descendentes operam reduzindo o valor da variável de forma unitária a cada etapa do produto.

Definição 1.6. Sejam n e k inteiros não negativos. O *polinômio fatorial* de ordem k é definido por

$$n^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)), & \text{se } k \geq 1, \\ 1, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Observação 1.2. O polinômio fatorial $n^{(k)}$ é formado pelo produto de k fatores consecutivos decrescentes, iniciando em n e reduzindo uma unidade a cada fator. Assim, pode ser escrito, como

$$n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i).$$

Além disso, por definição, tem-se $n^{(0)} = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, incluindo o caso particular $0^{(0)} = 1$. Sempre que $n \geq k$, segue diretamente da definição que

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Em particular, quando $k = n$, obtém-se

$$n^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!,$$

uma vez que $0! = 1$.

Os exemplos a seguir ilustram as ideias abordada até o presente momento.

Exemplo 1.8. Considere os polinômios fatoriais $(n+1)^{(k)}$ e $(n-1)^{(3)}$. Pela definição, tem-se

$$(n+1)^{(k)} = (n+1)n(n-1)\cdots\big(n-(k-2)\big),$$
$$(n-1)^{(3)} = (n-1)(n-2)(n-3).$$

Exemplo 1.9. O polinômio fatorial $1^{(k-1)}$ é dado por

$$1^{(k-1)} = (1)(1-1)(1-2)\cdots\big(1-(k-2)\big) = (1)(0)(-1)\cdots(-k+3).$$

Consequentemente,

$$1^{(k-1)} = \begin{cases} 1, & \text{se } k-1 < 2, \\ 0, & \text{se } k-1 \geq 2, \end{cases}$$

pois, quando $k-1 \geq 2$, um dos fatores do produto é igual a zero.

Observação 1.3. O exemplo anterior sugere investigar o caso em que $k > n$. Nessa situação,

$$n^{(k)} \equiv 0.$$

De fato, como $k > n$, o fator $(n-n) = 0$ aparece no produtório, isto é,

$$n^{(k)} = (n-0)(n-1)\cdots\underbrace{(n-n)}_{=0}\cdots(n-(k-1)) = 0.$$

Exemplo 1.10. Considere o polinômio fatorial $11^{(5)}$. Pela definição,

$$11^{(5)} = (11)(10)(9)(8)(7) = 55440.$$

Até o presente momento, consideramos apenas polinômios fatoriais com expoentes não negativos. A seguir, estenderemos essa definição para expoentes negativos, cuja motivação será apresentada posteriormente no estudo do operador de diferenças.

Definição 1.7. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$. O *polinômio fatorial de ordem* $-k$ é definido por

$$n^{(-k)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(k-1))}.$$

Observação 1.4. Na definição de $n^{(-k)}$, é necessário que $n \neq 0$, pois, caso contrário, o denominador seria nulo. Além disso, o polinômio fatorial com expoente negativo pode ser escrito como

$$n^{(-k)} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(n+i)\right)^{-1}.$$

Assim, $n^{(-k)}$ é o inverso do produto de k fatores consecutivos crescentes, iniciando em n.

Exemplo 1.11. O polinômio fatorial $(n-3)^{(-2k)}$ é dado por

$$(n-3)^{(-2k)} = \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)\cdots(n+2k-4)} = \left(\prod_{i=0}^{2k-1}(n-3+i)\right)^{-1}.$$

Exemplo 1.12. Considere o polinômio $(2n-1)^{(-5)}$. Pela definição, obtém-se

$$(2n-1)^{(-5)} = \frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \left(\prod_{i=0}^{4}(2n-1+i)\right)^{-1}.$$

Exemplo 1.13. O polinômio fatorial $10^{(-k-1)}$ é dado por

$$10^{(-k-1)} = \frac{1}{10\cdot 11\cdot 12\cdots(10+k)} = \left(\prod_{i=0}^{k}(10+i)\right)^{-1}.$$

Exemplo 1.14. Como exemplo numérico,

$$4^{(-5)} = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{1}{6720}.$$

As identidades obtidas para os polinômios fatoriais com expoentes não negativos admitem versões análogas para expoentes negativos. Para estabelecê-las, expandimos o fatorial $(n+k-1)!$, obtendo

$$(n+k-1)! = (n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)\cdots(n+2)(n+1)n(n-1)!.$$

Reorganizando obtemos,

$$(n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)\cdots(n+2)(n+1)n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}.$$

Portanto,

$$n^{(-k)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(k-1))} = \frac{(n-1)!}{(n+k-1)!}.$$

Assim,

$$n^{(-n)} = \frac{(n-1)!}{(n+n-1)!} = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}.$$

Com base nas identidades apresentadas anteriormente, enunciaremos o Lema a seguir, que descreve o comportamento da soma de expoentes nos casos de expoentes positivos e negativos, além de estabelecer o inverso multiplicativo dos polinômios fatoriais.

Lema 1.1. Sejam $r, k, n \in \mathbb{Z}_+$ então a relações a seguir são verdadeiras:

i. $n^{(k+r)} = n^{(k)}(n-k)^{(r)}$.

ii. $n^{(-k-r)} = n^{(-k)}(n+k)^{(-r)}$.

iii. $n^{(-k)}(n+k-1)^{(k)} = 1$.

Demonstração: Para a relação i, observe a aplicação da definição em $n^{(k)}$ e $(n-k)^{(r)}$. Dessa forma,

$$n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \quad \text{e} \quad (n-k)^{(r)} = (n-k)(n-k-1)\cdots(n-k-(r-1)).$$

É possível ver que,

$$\begin{aligned} n^{(k)}(n-k)^{(r)} &= n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \cdot (n-k)(n-k-1)\cdots(n-k-(r-1)) \\ &= \underbrace{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}_{k \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(n-k)(n-(k+1))\cdots(n-(k+r-1))}_{r \text{ fatores}} \\ &= n^{(k+r)}. \end{aligned}$$

Portanto, o item i é verdadeiro. Para provar o item ii, basta seguir a mesma ideia do item anterior, cuja a relação ii nos fornece:

$$n^{(-k)} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+(k-1))} \quad \text{e} \quad (n+k)^{(-r)} = \frac{1}{(n+k)(n+k+1)\cdots(n+k+(r-1))}.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} n^{(-k)}(n+k)^{(-r)} &= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+(k-1))} \cdot \frac{1}{(n+k)(n+k+1)\cdots(n+k+(r-1))} \\ &= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+(k-1))(n+k)(n+k+1)\cdots(n+k+(r-1))} \\ &= n^{(-k-r)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a segunda relação é verdadeira. O item iii nos mostra a relação entre o polinômio fatorial de expoente negativo com os polinômios de expoente não negativo.

$$\begin{aligned} n^{(-k)} &= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+(k-1))} \\ &= \frac{1}{(n+k-1)(n+k-1-1)\cdots(n+k-1-(k-2))(n+k-1-(k-1))} \\ &= \frac{1}{(n+k-1)^{(k)}}. \end{aligned}$$

O que implica,

$$n^{(-k)}(n+k-1)^{(k)} = 1.$$

Assim, observa-se que $(n+r-1)^{(k)}$ é o inverso multiplicativo de $n^{(-k)}$. ■

A definição do polinômios fatorial $n^{(-k)}$ são essenciais para abordar um resultado: o comportamento dos polinômios fatoriais sobre a aplicação do operador de diferenças. Veremos que este comportamento se assemelha aos do operador derivada sobre os polinômios convencionais.

Capítulo 2

Cálculo de Diferenças Finitas

O estudo das equações de diferenças pode ser compreendido como o análogo discreto do cálculo diferencial. Enquanto o cálculo diferencial se ocupa de taxas de variação instantâneas em domínios contínuos, o cálculo de diferenças finitas foca nas variações de pontos discretos de uma sequência. Neste capítulo, estabeleceremos as bases formais para o manuseio de sequências através dos operadores de diferença (Δ) e avanço (E), que desempenham papéis análogos ao operador derivada no cálculo infinitesimal. A introdução desses operadores não apenas simplifica a notação das equações que serão abordadas nos capítulos subsequentes, mas também revela uma estrutura algébrica formidável e paralela às regras de derivação de funções, como as regras do produto e do quociente, entre outras. Para esta seção serão abordado resultados provenientes das referências [5] e [6].

2.1 Operador de Diferença e Deslocamento

Os operadores de diferenças e avanço são bem úteis quando o assunto é discretizar modelos contínuos ligados ao cálculo infinitesimal, algo que será feito nas aplicações da teoria deste trabalho. Mas por que discretizar esses modelos? a motivação é simples e direta, por conta da sua aplicação, especialmente, computacional. Pois, computadores não resolvem problemas ou trabalham diretamente com o contínuo, as máquinas se utilizam da discretização desses modelos para obter as respostas que precisamos com uma precisão ímpar. No mais, definamos tais operadores:

Definição 2.1. Seja $y(n)$ uma função real, com domínio em $\mathbb{Z}_+$. O operador de diferença Δ é definido por

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n).$$

O operador acima definido tem grande importância na teoria das equações de diferenças, tal qual o operador diferencial no cálculo tradicional, pois ele auxilia no estudo

das equações de diferenças de ordem superior, assunto do quarto capítulo. Em sequência, vejamos a dinâmica do operador Δ, por meio do exemplo:

Exemplo 2.1. Considere a equação $y(n) = 5n + 1$. Por definição, temos:

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n) = 5(n+1) + 1 - [5n+1] = 5,$$

logo, a expressão que representa $\Delta y(n)$ é a constante 5.

Exemplo 2.2. Considere a equação $y(n) = n^2 + 1$, para esse exemplo faremos a composição, ou seja, $\Delta^2 y(n) = \Delta(\Delta y(n))$:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(n) = \Delta(\Delta y(n)) = \Delta(y(n+1) - y(n)) &= \Delta((n+1)^2 + 1 - (n^2+1)) \\ &= \Delta(2n+1) \\ &= 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2,\end{aligned}$$

logo a expressão que representa $\Delta^2 y(n)$ é a constante 2.

Ressalta-se que apesar dos dois exemplos pontuados anteriormente indicarem expressões constantes, isso não quer dizer que sempre vai acontecer. Além disso, a ordem do operador diferenças é a quantidade de vezes devemos aplicar o operador sucessivamente,

$$\Delta^k y(n) = \underbrace{\Delta\Delta\cdots\Delta}_{k\ vezes}\ y(n).$$

Por conseguinte, vamos definir o operador avanço, ou também conhecido por operador de deslocamento.

Definição 2.2. Seja $y(n)$ uma função real, com domínio em $\mathbb{Z}_+$. O operador avanço E é definido por

$$Ey(n) = y(n+1).$$

Se fizermos a comparação entre as definições do operador de diferenças e o operador avanço, é imediato que podemos escrever um em função do outro, porém é preciso definir *o operador identidade* I que conserva a equação, em outras palavras:

$$Iy(n) = y(n).$$

Para esclarecer essa ideia, vejamos a comparação a seguir:

$$Ey(n) = y(n+1) \quad e \quad \begin{aligned}\Delta y(n) &= y(n+1) - y(n)\\ &= Ey(n) - Iy(n)\\ &= (E-I)y(n),\end{aligned}$$

de forma objetiva $\Delta = E - I$, enquanto $E = \Delta + I$. Essas igualdades vão auxiliar na escrita da expressão que representa E^k e Δ^k. Para encontrar tais expressões iniciaremos pelo operador avanço, pois é mais simples de ser encontrada, por aplicações sucessivas.

$$\begin{aligned}Ey(n) &= y(n+1)\\ E^2y(n) &= E(Ey(n)) = Ey(n+1) = y(n+2)\\ E^3y(n) &= E(E^2(n)) = Ey(n+2) = y(n+3)\\ &\vdots\\ E^ky(n) &= y(n+k).\end{aligned}$$

Para estabeler essa relação provaremos por indução sobre $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$ a igualdade é verdadeira, pois remete a própria definição do operador avanço. Suponha por hipótese de indução (HI), que para um certo k natural a expressão seja verdadeira, ou seja, $E^ky(n) = y(n+k)$. Verifiquemos a validade para seu sucessor $(k+1)$:

$$E^{k+1}y(n) = E(E^ky(n)) \underset{HI}{=} E(y(n+k)) = y(n+k+1).$$

Portanto, a relação $E^ky(n) = y(n+k)$ é verdadeira para todo k natural. Para prosseguirmos, vamos encontrar a expressão que representa $\Delta^ky(n)$, para isso usaremos a igualdade $\Delta = E - I$, $I^ky(n) = y(n)$ e o binômio de Newton.

$$\begin{aligned}\Delta^ky(n) = (E-I)^ky(n) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\ C_{k,i}\ E^{k-i}\ I^i\ y(n)\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\ C_{k,i}E^{k-i}\ y(n)\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\ C_{k,i}\ y(n+k-i).\end{aligned}$$

Daí,

$$\boxed{\Delta^ky(n) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\ C_{k,i}\ y(n+k-i)} \tag{2.1}$$

Se fizermos o mesmo para o operador avanço na notação de somatório, usando o $E = \Delta + I$, teremos a seguinte relação:

$$E^k y(n) = (\Delta + I)^k y(n) = \sum_{i=0}^{k} C_{k,i}\ \Delta^{k-i}\ I^i\ y(n) = \sum_{i=0}^{k} C_{k,i}\Delta^{k-i}\ y(n).$$

Logo,

$$\boxed{E^k y(n) = \sum_{i=0}^{k} C_{k,i}\ \Delta^{k-i}\ y(n)} \tag{2.2}$$

Por convenção, definimos $\Delta^0 y(n) = y(n) = E^0(n)$. A relação 2.1, reduz o tempo que poderíamos levar para encontrar a solução que necessite compor o operador de diferença consigo mesmo, uma quantidade finita de vezes. Porém a relação 2.2 vai pelo caminho oposto, principalmente para um número significativo de aplicações, deste modo, para encontrar a expressão que representa $E^k y(n)$ utlizaremos a igualdade $E^k y(n) = y(n+k)$. Para mostrar essa ideia ponderemos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.3. Considere $y(n) = \cos(n)$, o objetivo é encontrar a expressão de $\Delta^5 y(n)$, para isso utilizaremos as relação 2.1. Vamos iniciar pelo operador de diferenças:

$$\begin{aligned}
\Delta^5 y(n) &= \sum_{i=0}^{5} (-1)^i\ C_{5,i}\ y(n+5-i) \\
&= C_{5,0}\ y(n+5) - C_{5,1}\ y(n+4) + C_{5,2}\ y(n+3) - \cdots - C_{5,5}\ y(n) \\
&= y(n+5) - 5y(n+4) + 10y(n+3) - 10y(n+2) + 5y(n+1) - y(n) \\
&= \cos(n+5) - 5\cos(n+4) + 10\cos(n+3) - 10\cos(n+2) + 5\cos(n+1) - \cos(n).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.4. A partir da mesma equação $y(n) = \cos(n)$, vamos determinar $E^5 y(n)$ através da relação 2.2, assim:

$$\begin{aligned}
E^5 y(n) &= \sum_{i=0}^{5} C_{5,i}\ \Delta^{5-i}\ y(n) \\
&= C_{5,0}\ \Delta^5 y(n) + C_{5,1}\ \Delta^4 y(n) + \cdots + C_{5,5}\Delta^0 y \\
&= C_{5,0}[y(n+5) - 5y(n+4) + 10y(n+3) - 10y(n+2) + 5y(n+1) - y(n)] + \\
&\quad C_{5,1}[y(n+4) - 4y(n+3) + 6y(n+2) - 4y(n+1) + y(n)] + \\
&\quad C_{5,2}[y(n+3) - 3y(n+2) + 3y(n+1) - y(n)] + \\
&\quad C_{5,3}[y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)] + \\
&\quad C_{5,4}[y(n+1) - y(n)] + C_{5,5}y(n) = y(n+5) = \cos(n+5).
\end{aligned}$$

A outra forma que poderíamos resolver seria utilizando a relação $E^k y(n) = y(n+k)$,

ou seja, $E^5y(n) = y(n+5) = \cos(n+5)$. À vista disso, para encontrar a expressão pela equação 2.2 é nítido que aumentará consideravelmente o trabalho com as operações algébricas. No entanto, é importante ter conhecimento dela, pois pode nos auxiliar em algumas demonstrações.

Uma propriedade notável que o operador de diferença e avanço possuem é a linearidade, assim como o operador derivada. E este será o nosso próximo passo, isto é, abordar o Teorema da linearidade dos operadores aludidos.

Teorema 2.1. Os operadores Δ e E são operadores lineares.

Demonstração: Para mostrar que os operadores Δ e E são lineares é preciso mostrar que:

$$\Delta[x(n) + ay(n)] = \Delta x(n) + a\Delta y(n) \quad \text{e} \quad E[x(n) + by(n)] = Ex(n) + bEy(n),$$

onde $x(n)$ e $y(n)$ são funções reais, com domínio $\mathbb{Z}_+$ e $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

$$\begin{aligned}\Delta[x(n) + ay(n)] &= [x(n+1) + ay(n+1)] - [x(n) + ay(n)] \\ &= [x(n+1) - x(n)] + a[y(n+1) - y(n)] \\ &= \Delta x(n) + a\Delta y(n),\end{aligned}$$

logo, Δ é um operador linear. Façamos o mesmo para E:

$$\begin{aligned}E[x(n) + by(n)] &= x(n+1) + by(n+1) \\ &= Ex(n) + bEy(n),\end{aligned}$$

dessa forma, E é um operador linear, como queríamos mostrar. ■

Um questionamento que pode ser feito é: as composições dos operadores de diferença e avanço também são lineares? A resposta é afirmativa e essa ideia é apresentada no Teorema a seguir.

Teorema 2.2. Os operadores Δ^k e E^k são operadores lineares, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração: A demonstração seguirá um caminho similar a demonstração do Teorema anterior, a principal diferença entre as duas é o uso do princípio de indução sobre $k \in \mathbb{Z}_+$. Vamos iniciar pelo operador avanço, ou seja, precisamos mostrar que é verdade:

$$E^k[x(n) + ay(n)] = E^k x(n) + aE^k y(n),$$

para toda função $x(n)$, $y(n)$ real e para qualquer constante real a. Complementarmente, é assumi-se que

$$E^{m+1}y(n) = E(E^m y(n)),$$

para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, faremos o mesmo para o operador de diferenças. Para $k = 0$ a igualdade é verdadeira, pois:

$$E^0[x(n) + ay(n)] = x(n) + ay(n) = E^0x(n) + aE^0y(n).$$

Suponha por hipótese de indução (HI) que para um certo $k \in \mathbb{Z}_+$, seja garantido a validade da seguinte igualdade:

$$E^k[x(n) + ay(n)] = E^kx(n) + aE^ky(n).$$

Verifiquemos para o seu sucessor $(k+1)$. Assim,

$$\begin{aligned} E^{k+1}[x(n) + ay(n)] = E(E^k[x(n) + ay(n)]) &\underset{HI}{=} E[E^kx(n) + aE^ky(n)] \\ &= E(E^kx(n)) + aE(E^ky(n)) \\ &= E^{k+1}x(n) + aE^{k+1}y(n). \end{aligned}$$

Logo, E^k é um operador linear para todo k, pelo princípio de indução. Agora, vamos mostrar que Δ^k é linear, ou melhor:

$$\Delta^k[x(n) + by(n)] = \Delta^kx(n) + b\Delta^ky(n),$$

para toda função $x(n)$ e $y(n)$ real e para qualquer constante $b \in \mathbb{R}$. Para $k = 0$ a igualdade é verdadeira, uma vez que:

$$\Delta^0[x(n) + ay(n)] = x(n) + ay(n) = \Delta^0x(n) + a\Delta^0y(n).$$

Suponha por hipótese de indução (HI) que para algum $k \in \mathbb{Z}_+$ a igualdade seja verdadeira:

$$\Delta^k[x(n) + by(n)] = \Delta^kx(n) + b\Delta^ky(n),$$

Precisamos nos certificar da validade para seu sucessor $(k+1)$:

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1}[x(n) + by(n)] = \Delta(\Delta^k[x(n) + by(n)]) &\underset{HI}{=} \Delta[\Delta^kx(n) + b\Delta^ky(n)] \\ &= \Delta^{k+1}x(n) + b\Delta^{k+1}y(n). \end{aligned}$$

Portanto, Δ^k é um operador linear, pelo princípio de indução. ■

O Teorema a seguir abordar algumas propriedades básicas entre os operadores apresentados até aqui. Durante sua demonstração, especialmente do item iii, utilizamos a linearidade do operador avanço e assumimos que

$$\Delta^{m+1}y(n) = \Delta^m(\Delta y(n)) = \Delta(\Delta^m y(n)),$$

para todo $m \in \mathbb{Z}_+$.

Teorema 2.3. As propriedades a seguir são verdadeiras:

i. $\Delta^{m+k}y(n)=\Delta^m(\Delta^k y(n))$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$.

ii. $E^{m+k}y(n) = E^m(E^k y(n))$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$.

iii. $\Delta E y(n) = E\Delta y(n)$, para todo $y(n)$.

iv. $\Delta^k c = 0$ e $E^k c = c$, para uma constante real arbitrária c e para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para o item i vamos provar por indução sobre k. Para $k = 1$ a validade imediata, pois $\Delta^{m+1}y(n)=\Delta^m(\Delta^1 y(n))$. Suponha que a igualdade seja verdadeira para um certo k natural. Vejamos a validade para o seu sucessor $(k+1)$.

$$\begin{aligned}\Delta^{m+k+1}y(n) = \Delta(\Delta^{m+k}y(n)) &= \Delta(\Delta^m(\Delta^k y(n)))\\ &= \Delta^{m+1}(\Delta^k y(n))\\ &= \Delta^m(\Delta(\Delta^k y(n)))\\ &= \Delta^m(\Delta^{k+1}y(n)).\end{aligned}$$

Portanto, o item i é verdadeiro. A demonstração do item ii segue-se de forma análoga ao item i e, por esse motivo não será apresentada. Passemos para o item iii,

$$\begin{aligned}\Delta E y(n) = \Delta y(n+1) = y(n+2) - y(n+1) &= Ey(n+1) - Ey(n)\\ &= E(y(n+1) - y(n))\\ &= E\Delta y(n).\end{aligned}$$

Logo, o item iii é verdadeiro, este item ainda pode ser complementado da seguinte forma: $\Delta^m E^k = E^k\Delta^m$, onde m e k são inteiros não negativos, não necessariamente distintos. Para o último item faremos a demonstração por meio de indução sobre k, iniciemos pelo operador de diferença, o operador avanço seguirá de forma semelhante. Para $k = 1$ a igualdade é verdadeira, uma vez que, $\Delta c = c - c = 0$. Suponha que a igualdade

seja verdadeira para um certo k natural, em outras palavras $\Delta^k c = 0$. Verifiquemos a validade para $(k+1)$:

$$\Delta^{k+1}c = \Delta(\Delta^k c) \underset{HI}{=} \Delta 0 = 0 - 0 = 0.$$

Portanto, pelo princípio de indução $\Delta^k c = 0$ para todo k natural. Para $k = 1$ a igualdade é satisfeita, devido a $E^1 c = E(c) = c$. Suponha que para algum k natural, seja válida a relação $E^k c = c$. Mostremos a validade para $(k+1)$.

$$E^{k+1}c = E(E^k c) \underset{HI}{=} E(c) = c,$$

dessa forma, pelo princípio de indução $E^k c = c$, para todo k natural. ■

Com o intuito de avançar na discussão, será apresentado uma propriedade polinomial que o operador de diferença e o operador derivada têm em comum: se $k \in \mathbb{N}$, a uma constante real e $f(x) = ax^k$ então $f^{(k)}(x) = ak!$ e $f^{(k+i)}(x) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. A propriedade semelhante a essa é descrita pelo Teorema 2.4.

Teorema 2.4. Seja $p(n) = an^k$, onde $n, k \in \mathbb{Z}_+$ e $a \in \mathbb{R}$ constante arbitrária, então $\Delta^k p(n) = ak!$ e $\Delta^m p(n) = 0$, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > k$.

Demonstração: Na demonstração será utilizado o princípio de indução na segunda forma e duas propriedades do operador diferença:

$$\Delta^{m+k} y(n) = \Delta^m(\Delta^k y(n)),$$

para todo $m, k \in \mathbb{N}$ e $\Delta^k c = 0$, onde c é uma constante real qualquer e para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$, temos:

$$p(n) = an, \text{ implica que } \Delta^1 p(n) = \Delta an = a(n+1) - an = a \cdot 1 = a \ \cdot 1!.$$

Logo a implicação é verdadeira para $k = 1$. Suponha que para todo número natural menor que $k \in \mathbb{N}$ a implicação seja verdadeira, ou seja, $p(n) = an^r$ implica em $\Delta^r p(n) = ar!$, desde que $r < k$. Vejamos a prova para k, assim $p(n) = an^k$, implica que

$$\begin{aligned}
\Delta^k p(n) = a\Delta^k n^k = a\Delta^{k-1}[\Delta n^k] &= a\Delta^{k-1}[(n+1)^k - n^k] \\
&= a\Delta^{k-1}\left[\sum_{i=0}^{k} C_{k,i} n^{k-i} - n^k\right] \\
&= a\Delta^{k-1}\sum_{i=1}^{k} C_{k,i} n^{k-i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a\Delta^{k-1}C_{k,1}n^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} C_{k,i}\Delta^{i-1}(\Delta^{k-i}an^{k-i}) \\
&\underset{HI}{=} C_{k,1}a(k-1)! + \sum_{i=2}^{k} C_{k,i}\Delta^{i-1}a(k-i)! \\
&= ka(k-1)! + \sum_{i=2}^{k} C_{k,i} \underbrace{\Delta^{i-1}a(k-i)!}_{=0,\ \text{para todo } 2\leq i\leq k} = ak!.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, a implicação é verdadeira para todo k natural. A igualdade $\Delta^m p(n) = 0$, para $m > k$, será provada com base na anterior. Além disso, se $m, k \in \mathbb{N}$ e $m > k$ então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $m = k + s$. Assim,

$$\Delta^m p(n) = \Delta^{k+s}p(n) = \Delta^{k+s}an^k = \Delta^s(\Delta^k an^k) = \Delta^s ak! = 0, \text{ para todo } s \geq 1.$$

Vale lembrar que $ak!$ é uma constante, por esse motivo $\Delta ak! = 0$. Portanto, as propriedades apresentadas por este Teorema são verdadeiras. ■

Como extensão imediata deste Teorema, estende-se tal propriedade para o caso de um polinômio qualquer de grau k, por exemplo:

$$p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \cdots + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k,$$

donde os $a_i's$ são constantes reais. Então, $\Delta^k p(n) = a_k\ k!$ e para $\Delta^m p(n) = 0$, sempre que $m > k$. A demonstração é um tanto imediata, basta utilizar a linearidade do operador Δ^k e o Teorema 2.4, que nos garante que se a ordem do operador de diferenças coincidir com o grau do monômio o resultado será o coeficiente da respectiva potência de n multiplicado pelo fatorial do grau, por outro lado, se a ordem das diferenças for maior que o grau do monômio então o resultado sempre será zero, isto é:

$$\Delta^k p(n) = \underbrace{\Delta^k a_0}_{=0} + \underbrace{\Delta^k a_1 n}_{=0} + \underbrace{\Delta^k a_2 n^2}_{=0} + \underbrace{\Delta^k a_3 n^3}_{=0} + \cdots + \underbrace{\Delta^k a_{k-1}n^{k-1}}_{=0} + \underbrace{\Delta^k a_k n^k}_{=a_k k!} = a_k k!.$$

Exemplo 2.5. Considere o seguinte polinômio $p(n) = 10n^7 + 2n^4 + 17n^3 - 3n^2 - n + 100$, para encontrar a expressão $\Delta^7 p(n)$, utiliza-se o Teorema 2.4 e a linearidade de Δ^7, a resposta será:

$$\Delta^7 p(n) = 10\Delta^7 n^7 + 2\Delta^7 n^4 + 17\Delta^7 n^3 - 3\Delta^7 n^2 - \Delta^7 n + \Delta^7 100 = 10 \cdot 7! = 50400.$$

Exemplo 2.6. Considere $p(n) = n^{12} + n^8 + 3n^3 - n^2$, almeja-se $\Delta^{13} p(n)$, utilizando o

Teorema 2.4 e a linearidade de Δ^{13}:

$$\Delta^{13}p(n) = \Delta^{13}n^{12} + \Delta^{13}n^{8} + 3\Delta^{13}n^{3} - 3\Delta^{13}n^{2} = 0,$$

uma vez que, a ordem do operador é maior que o grau de cada parcela do polinômio.

Os tópicos abordados recentemente, resumem-se a uma combinação linear de potências de inteiros não negativos ou melhor polinômios na variável n e a dinâmica dos operadores sobre eles. Nas preliminares deste trabalho, foi definido uma nova classe de polinômios, *os polinômios fatoriais*, que comporta-se diante do operador de diferenças, assim como os polinômios convencionais perante ao operador derivada, isto é apenas um dos pontos tratados na próxima seção.

2.1.1 Regras Operatórias

Para essa seção iremos exibir o conjunto de regras sobre a operação de diferenças, por exemplo, regra do produto e regra do quociente, além do análogo discreto do Teorema fundamental do cálculo. Junto a isso, temos a integração por partes. Esses são um dos principais temas que serão abordados posteriormente e estes revelam, ainda mais, a relação intrínseca entre o cálculo infinitesimal e o cálculo de diferenças.

Lema 2.1. (Regra do produto e quociente) sejam $x(n), y(n)$ funções reais, então

i. $\Delta[x(n)y(n)] = \Delta x(n)y(n) + Ex(n)\Delta y(n)$.

ii. $\Delta\left[\dfrac{x(n)}{y(n)}\right] = \dfrac{\Delta x(n)y(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}$, com $y(n) \neq 0$ para todo n.

Demonstração: Para demonstrar a regra do produto das diferenças vamos utilizar as relações:

$$(1)\ y(n+1) = \Delta y(n) + y(n),\ (2)\ x(n) = Ex(n) - \Delta x(n)\ e\ (3)\ Ex(n) = x(n+1).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\Delta[x(n)y(n)] &= x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n) \\
&\underset{(1)}{=} x(n+1)[\Delta y(n) + y(n)] - x(n)y(n) \\
&\underset{(2)}{=} x(n+1)[\Delta y(n) + y(n)] - [Ex(n) - \Delta x(n)]y(n) \\
&\underset{(3)}{=} Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n).
\end{aligned}$$

Uma vez deduzida a regra do produto, faremos a demonstração para regra do quociente, a qual utilizaremos as relações:

$$(4)\ x(n+1) = \Delta x(n) + x(n),\ (5)\ y(n+1) = \Delta y(n) + y(n)\ e\ (6)\ Ey(n) = y(n+1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{x(n)}{y(n)}\right] = \frac{x(n+1)}{y(n+1)} - \frac{x(n)}{y(n)} &= \frac{y(n)x(n+1) - x(n)y(n+1)}{y(n)y(n+1)} \\ &\underset{(4)}{=} \frac{y(n)[\Delta x(n) + x(n)] - x(n)y(n+1)}{y(n)y(n+1)} \\ &\underset{(5)}{=} \frac{y(n)[\Delta x(n) + x(n)] - x(n)[\Delta y(n) + y(n)]}{y(n)y(n+1)} \\ &\underset{(6)}{=} \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}.\end{aligned}$$

Com isso, acabamos de demonstrar a validade da regra do produto e quociente. ■

Exemplo 2.7. Considere $x(n) = n+1$ e $y(n) = n^2$, para calcular $\Delta[x(n)y(n)]$ aplicaremos diretamente as regras expostas pelo Lema 2.1. Assim,

$$\begin{aligned}\Delta[(n+1)n^2] &= \Delta(n+1)\cdot n^2 + E(n+1)\cdot\Delta n^2 \\ &= [(n+2) - (n+1)]n^2 + (n+2)[(n+1)^2 - n^2] \\ &= 3n^2 + 5n + 2.\end{aligned}$$

Exemplo 2.8. Com base nas mesmas funções do exemplo 2.7 calcularemos $\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right)$:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{n+1}{n^2}\right) &= \frac{[\Delta(n+1)]\cdot n^2 - (n+1)\Delta n^2}{n^2 En^2} \\ &= \frac{n^2 - (n+1)(2n+1)}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{-n^2 - 3n - 1}{(n^2+n)^2}.\end{aligned}$$

Em suma, esta seção restringiu-se ao estudo das regras do produto e do quociente para o operador de diferença. Com o intuito de dar continuidade à fundamentação teórica deste trabalho, as diferenças de funções elementares serão abordadas na seção subsequente.

2.1.2 Diferenças de Funções Elementares

Para presente estabelece as regras operatórias do operador de diferença quando aplicado às funções discretas elementares, tais como funções *exponenciais*, *trigonométricas*,

logarítmicas e *polinomiais fatoriais*. Adicionalmente, apresenta-se a versão discreta do *Teorema Fundamental do Cálculo*, que consolida a ponte analítica entre as operações de soma finita e diferença.

Lema 2.2. Sejam $k, n \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in \mathbb{N}$ as afirmações abaixo são verdadeiras:

i. $\Delta n^{(k)} = kn^{(k-1)}$.

ii. $\Delta^r n^{(k)} = k(k-1)\cdots(k-(r-1))n^{(k-r)}$.

iii. $\Delta n^{(-k)} = -kn^{(-k-1)}$.

iv. $\Delta^r n^{(-k)} = (-1)^r k(k+1)\cdots(k+(r-1))n^{(-k-r)}$.

Demonstração: A demosntração para o item i é imediata:

$$\begin{aligned}\Delta n^{(k)} &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} \\ &= (n+1)n(n-1)\cdots(n-(k-2)) - n(n-1)\cdots(n-(k-2))(n-(k-1)) \\ &= [(n+1)-(n-k+1)]n(n-1)\cdots(n-(k-2)) = kn^{k-1}.\end{aligned}$$

Dessa maneira, o item i é verdadeiro. O item ii será demonstrado por meio do princípio de indução sobre r, como forma equivalente usaremos a notação de produtório. Logo,

$$\Delta^r n^{(k)} = \prod_{i=0}^{r-1}(k-i)n^{(k-r)}.$$

Para $r = 1$ retornamos ao item i, o qual está demonstrado. Suponha, por hipótese de indução, que para um certo r a relação acima seja verdadeira. Analisemos para $(r+1)$ a sua validade:

$$\begin{aligned}\Delta^{r+1} n^{(k)} = \Delta[\Delta^r n^{(k)}] = \Delta\left[\prod_{i=0}^{r-1}(k-i)n^{(k-r)}\right] &= \prod_{i=0}^{r-1}(k-i)[(n+1)^{(k-r)} - n^{(k-r)}] \\ &= \prod_{i=0}^{r-1}(k-i)[k-r]n^{(k-r-1)} \\ &= \prod_{i=0}^{r}(k-i)n^{(k-(r+1))}.\end{aligned}$$

Portanto, o item ii é verdadeiro. O item iii, não será demonstrado, já o item iv segue uma demonstração semelhante ao item ii, vejamos a partir da notação em produtório,

$$\Delta^r n^{(-k)} = (-1)^r \prod_{i=0}^{r-1}(k+i)n^{(-k-r)}.$$

Para $r = 1$ retornamos ao item iii, o qual assumimos que é verdadeiro. Suponha, por hipótese de indução, que para um certo r a relação acima seja verdadeira. Analisemos para $(r+1)$ a sua validade:

$$\begin{aligned}\Delta^{r+1}n^{(-k)} = \Delta[\Delta^r n^{(-k)}] &= \Delta\left[(-1)^r \prod_{i=0}^{r-1}(k+i)n^{(-k-r)}\right] \\ &= (-1)^r \prod_{i=0}^{r-1}(k+i)[(n+1)^{(-k-r)} - n^{(-k-r)}] \\ &= (-1)^r \prod_{i=0}^{r-1}(k+i)[-k-r]n^{(-k-r-1)} \\ &= (-1)^{r+1} \prod_{i=0}^{r}(k+i)n^{(-k-(r+1))}.\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é verdadeira para todo r natural. Dessa forma, as afirmações feitas por este Lema, de fato, são válidas. ■

Após a demonstração do Lema, é possível observar que sem a definição dos polinômios fatoriais para expoentes negativos, não seria possível tratar do item ii ou iv do Lema acima, uma vez que o mesmo engloba os expoentes negativos. Ainda sobre o Lema, se tomarmos $r = k$ teremos $\Delta^k n^{(k)} = k!$.

Exemplo 2.9. A expressão que representa $\Delta^3 5^{(k)}$, para este exemplo, temos:

$$\Delta^3 5^{(k)} = \Delta^2\left[5^{(k)} - 5^{(k)}\right] = \Delta^2 0 = 0.$$

Exemplo 2.10. A diferença $\Delta^4 n^{(5)}$, é dada por:

$$\Delta^4 n^{(5)} = (5)(4)(3)(2)n^{(5-4)} = 120n^{(1)}.$$

Exemplo 2.11. a partir da diferença $\Delta^3 n^{(-2)}$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\Delta^3 n^{(-2)} = (-1)^3(2)(3)(4)n^{(-2-3)} = -24n^{(-5)}.$$

O próximo Lema retrata a regra de diferenças sobre algumas funções elementares como: exponencial, logaritmo, cosseno e seno. Vale lembrar que o operador de diferenças age sobre a variável n, sendo k uma constante e, portanto, invariante a ação do operador em relação as funções discretas.

Lema 2.3. Seja r uma constante real e n inteiro não negativo, então

i. $\Delta\ r^n = (r-1)r^n$.

ii. $\Delta\ \text{sen}(rn) = 2\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\cos\left(rn+\frac{r}{2}\right)$.

iii. $\Delta\ \cos(rn) = -2\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\text{sen}\left(rn+\frac{r}{2}\right)$.

iv. $\Delta\log(rn) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, para todo $r>0$ *e* $n\in\mathbb{N}$.

v. $\Delta e^{rn} = [e^r-1]e^{rn}$.

Demonstração: As demonstrações do item i, iii e v não serão apresentadas por serem imediatas ou semelhantes aos outros casos. Nesse sentido, demonstraremos o item ii e iv, para esses dois itens utilizaremos uma identidade trigonométrica que diz:

$$(1)\ \text{sen}(A)-\text{sen}(B) = 2\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta\ \text{sen}(rn) &= \text{sen}(r(n+1))-\text{sen}(rn)\\ &\underset{(1)}{=} 2\text{sen}\left(\frac{r(n+1)-rn}{2}\right)\cos\left(\frac{r(n+1)+rn}{2}\right)\\ &= 2\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\cos\left(rn+\frac{r}{2}\right).\end{aligned}$$

Desse modo o item ii é verdadeiro. Para a demonstração do item iv usaremos a propriedade da diferença dos logaritmos, isto é,

$$(2)\ \log(A)-\log(B) = \log\left(\frac{A}{B}\right).$$

Portanto,

$$\Delta\log(rn) = \log(r(n+1))-\log(rn) \underset{(2)}{=} \log\left(\frac{rn+r}{rn}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Dessa forma, as afirmações feitas por este Lema são verdadeiras. ■

Exemplo 2.12. Considere a diferença $\Delta\ 2^n$, utilizaremos as regras demonstradas anteriormente. Este caso merece destaque, pois pode causar um pouco de confusão, no que tange à diferença da função 2^n, que é a própria 2^n. Esse fato pode induzir a ideia que sempre ocorrerá para outras funções de mesma natureza, por exemplo 3^n, o que não é verdade, uma vez $\Delta 3^n = 2\cdot 3^n$. Retomando a diferença, podemos observar que:

$$\Delta\ 2^n = [2-1]2^n = 2^n.$$

Exemplo 2.13. A expressão de $\Delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}n\right)$, é obtida por:

$$\begin{aligned}\Delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}n\right) &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}n+\frac{\pi}{10}\right)\\ &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{10}\right).\end{aligned}$$

Exemplo 2.14. Para diferença $\Delta \log\left(\sqrt{11}n\right)$, temos o seguinte resultado:

$$\Delta \log(\sqrt{11}n) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

o interessante do terceiro item deste exemplo é que para qualquer que seja o valor positivo de r, $\Delta \log(rn)$ sempre será $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Doravante, traremos da versão discreta do Teorema Fundamental do Cálculo. O qual assume uma tarefa importante, principalmente, para próxima seção que trataremos do operador antidiferença, que assemelha-se a integral indefinida. Dessa forma, o Teorema a seguir nos garante a existência do resultado da aplicação do operador antidiferença, posteriormente essas informações serão melhor explicadas.

Teorema 2.5. Seja $y(n)$ uma função real, então

$$1)\ \sum_{i=n_0}^{n-1}\Delta y(i) = y(n)-y(n_0) \qquad \text{e} \qquad 2)\ \Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i)\right) = y(n).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{n-1}\Delta y(i) &= \Delta y(n_0)+\Delta y(n_0+1)+\cdots+\Delta y(n-1)\\ &= [y(n_0+1)-y(n_0)]+[y(n_0+2)-y(n_0+1)]+\cdots+[y(n)-y(n-1)]\ (I)\\ &= y(n)-y(n_0).\end{aligned}$$

Observe que (I) os termos vão se cancelando até que reste apenas $y(n)$ e $y(n_0)$. Dessa forma, o item 1) está demonstrado. Para o item 2) usaremos apenas a definição do Δ e veremos que os termos se anularam:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i)\right) &= \sum_{i=n_0}^{n} y(i)-\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i)\\ &= y(n)+\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i)-\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) = y(n).\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.15. Considere $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta 5^i$, utilizando as relações do Teorema 2.5, obtemos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta 5^i = 5^n - 5^0 = 5^n - 1.$$

Exemplo 2.16. Seja $\Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} \cos(\pi i)\right)$, o qual é expressado por:

$$\Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} \cos(\pi i)\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n.$$

Como discorrido anteriormente, essas relações serão bastante utilizadas na próxima seção, a qual trataremos do *operador antidiferença* (Δ^{-1}), em outras palavras, o modelo discreto da integral indefinida.

2.2 Operador Antidiferença

Assim como no cálculo infinitesimal a integração surge como a operação inversa da diferenciação, no cálculo de diferenças define-se o operador antidiferença, denotado por Δ^{-1}. Este operador busca identificar a função original cuja variação local corresponde a uma sequência dada, desempenhando um papel central na resolução de equações de diferenças e na obtenção de somas de formas fechadas. A compreensão deste operador é o que permite transpor o conceito de primitiva para o domínio das funções de variável discreta, estabelecendo o uso para o análogo discreto do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Definição 2.3. O operador antidiferença é a operação inversa do operador de diferença, o qual definimos da seguinte forma: Se $\Delta Y(n) = y(n)$ então $\Delta^{-1}y(n) = Y(n) + c$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

Observa-se que $\Delta\Delta^{-1}y(n) = y(n)$ e $\Delta^{-1}\Delta Y(n) = Y(n) + c$, dessa forma, $\Delta\Delta^{-1} = I$, porém $\Delta^{-1}\Delta \neq I$. Além disso, podemos expressar o operador de antidiferença em notação de somatório, utilizando a relação segunda relação do Lema 2.5.

$$\Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i)\right) = y(n), \text{ implica que } \Delta^{-1}y(n) = \Delta^{-1}\Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i)\right) = \sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) + c.$$

Pode-se entender por operador antidiferença, a soma acumulada dos termos da respectiva função $y(n)$. Portanto,

$$\boxed{\Delta^{-1}y(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) + c} \tag{2.3}$$

Uma propriedade fundamental, que muitas vezes é usada de forma natural em demonstrações é a linearidade, por esse motivo, abordaremos o Teorema 2.6 que a garante para o operador antidiferença e da suas composições.

Teorema 2.6. Os operadores Δ^{-1} e Δ^{-k} são lineares, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para mostrar que Δ^{-1} é linear é preciso mostrar que:

$$\Delta^{-1}[x(n) + ay(n)] = \Delta^{-1}x(n) + a\Delta^{-1}y(n),$$

para quaisquer funções reais $x(n)$ e $y(n)$, para toda constante real a. Com essa finalidade, estabelecemos as igualdades abaixo:

$$\Delta^{-1}x(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) + c_1 \quad e \quad \Delta^{-1}y(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) + c_2.$$

Além disso, para concluir a linearidade de Δ^{-1}, usaremos a relação $c = c_1 + ac_2$, isto é, a constante c escrita como soma de c_1 e c_2.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}[x(n) + ay(n)] = \sum_{i=n_0}^{n-1}[x(i) + ay(i)] + c &= \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) + a\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) + c \\ &= \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) + c_1 + a\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) + c_2\right) \\ &= \Delta^{-1}x(n) + a\Delta^{-1}y(n).\end{aligned}$$

Portanto, Δ^{-1} é linear. Para a demonstração da linearidade de Δ^{-k}, para todo k natural, utilizaremos um caminho diferente da indução, em outras palavras, aplicaremos a linearidade de Δ^{-1} sucessivas vezes, paramos assim que atingirmos o resultado almejado. Para tanto, precisamos nos certificar da veracidade da igualdade:

$$\Delta^{-k}[x(n) + by(n)] = \Delta^{-k}x(n) + b\Delta^{-k}y(n),$$

para qualquer constante real b.

$$\begin{aligned}\Delta^{-k}[x(n) + by(n)] = \Delta^{-k+1}\left(\Delta^{-1}[x(n) + by(n)]\right) &= \Delta^{-k+1}[\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n)] \\ &= \Delta^{-k+2}[\Delta^{-1}(\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n))] \\ &= \Delta^{-k+2}[\Delta^{-2}x(n) + b\Delta^{-2}y(n)] \\ &\vdots \\ &= \Delta^{-1}[\Delta^{-k+1}x(n) + b\Delta^{-k+1}y(n)] \\ &= \Delta^{-k}x(n) + b\Delta^{-k}y(n).\end{aligned}$$

Dessa forma, Δ^{-k} é linear. Destaca-se que foi assumido como verdade a relação $\Delta^{-1}(\Delta^{-k}) = \Delta^{-k-1} = \Delta^{-k}(\Delta^{-1})$. ■

Lema 2.4. Para todo k natural são válidas as seguintes afirmações:

i. $\Delta^{-k}0 = c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_0$.

ii. $\Delta^{-k}1 = \dfrac{n^k}{k!} + c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_0$.

iii. $\Delta^{-1}n^{(k)} = \dfrac{n^{(k+1)}}{k+1} + c$.

Demonstração: Para demonstrar o item i, utilizaremos a linearidade do operado Δ^k e a propriedade $\Delta^k n^p = 0$, para todo $k > p$. Assim,

$$\Delta^k\left(c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_1 n\right) = c_{k-1}\Delta^k n^{k-1} + c_{k-2}\Delta^k n^{k-2} + \cdots + \Delta^k c_1 n = 0,$$

dessa forma, podemos concluir que

$$\Delta^{-k}0 = c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0, \text{ para algum } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o item i é verdadeiro. A demonstração do item ii segue o mesmo raciocínio que o item i, logo não será apresentada. Para o item iii utilizaremos a primeira relação do Lema 2.2. Por certo,

$$\Delta\left(\frac{n^{(k+1)}}{k+1}\right) = \frac{\Delta n^{(k+1)}}{k+1} = \frac{(k+1)n^{(k)}}{k+1} = n^{(k)},$$

por definição concluímos que,

$$\Delta^{-1}n^{(k)} = \frac{n^{(k+1)}}{k+1} + c, \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, o Lema está demonstrado. ■

O Lema a seguir, nada mais é que o análogo discreto da fórmula de integração por partes.

Lema 2.5. Seja $x(n)$ e $y(n)$ funções reais e c uma constante real qualquer, então

$$\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) = x(n)y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c.$$

Demonstração: Por meio da regra do produto sabemos que $\Delta[x(n)y(n)]$ é igual a $\Delta x(n)y(n) + x(n+1)\Delta y(n)$, logo podemos afirmar que:

$$y(n)\Delta x(n) = \Delta(x(n)y(n)) - x(n+1)\Delta y(n).$$

Aplicando Δ^{-1} em ambos os lados e, posteriormente utilizando a notação de somatório do operador antdiferença, encontramos:

$$\Delta^{-1}[y(n)\Delta x(n)] = \Delta^{-1}[\Delta(x(n)y(n))] - \Delta^{-1}[x(n+1)\Delta y(n)].$$

E isto resulta em,

$$\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) = x(n)y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c.$$

■

Para estreitar a relação e utilidade do operador de diferenças será apresentado a discretização da equação logística, amplamente conhecida no estudo das equações diferenciais ordinárias.

2.3 Discretização da Equação Logística

A transição do modelo contínuo para o discreto é uma aplicação fundamental dos operadores de diferença definidos anteriormente neste capítulo. A referência [3], focada no estudo das *Equações Diferenciais Elementares*, será utilizado para introduzir o crescimento populacional proposto por *Malthus* (1766-1834) e, posteriormente por *Verhulst* (1804-1849).

Malthus propôs que se $y = f(t)$ é a população de uma certa espécie no instante t então a taxa de variação de y é proporcional ao valor atual de y:

$$\frac{dy}{dt} = ry, \quad y(0) = y_0, \tag{2.4}$$

donde $r > 0$ é a taxa de crescimento. A solução é dada pela seguinte igualdade:

$$y = y_0 e^{rt}.$$

O modelo proposto por *Malthus* é consideravelmente preciso para algumas populações, porém sobre certas condições, por exemplo, intervalo de tempo finito. Todavia, não podemos deixar de notar a população crescerá exponencialmente sem limte à medida que o tempo evolui, no entanto, isso pode não modelar muito bem a realidade, uma vez que não leva em consideração a capacidade do espaço e suprimento.

Entretando, o crescimento populacional limitado por recursos é classicamente descrito pela *equação diferencial de Verhulst* ou também conhecida por equação logística:

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \tag{2.5}$$

onde r representa a taxa de crescimento intrínseca e K a capacidade de carga do meio. Para analisar este sistema sob a ótica do cálculo de diferenças, devemos considerar intervalos de tempo discretos $t_n = n\Delta t$.

2.3.1 O Processo de Discretização

Utilizando a definição do operador de diferença (Δ) com passo unitário, isto é, $\Delta t = 1$ aproximamos a derivada t emporal pela diferença finita:

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n) \approx \frac{dy}{dt}, \tag{2.6}$$

agora, vamos discretizar os modelos supracitados para obter as equações de diferenças:

$$\frac{dy}{dt} = ry$$
$$y(n+1) - y(n) = ry(n).$$

Portanto, a *equação de Malthus discreta* é:

$$\boxed{y(n+1) = (1+r)y(n)} \tag{2.7}$$

Façamos para a segunda equação:

$$\begin{aligned} y(n+1) - y(n) &= ry(n)\left(1 - \frac{y(n)}{K}\right) \\ y(n+1) - y(n) &= ry(n) - \frac{r}{K}y^2(n) \\ y(n+1) &= (1+r)y(n) - \frac{r}{K}y^2(n) \\ y(n+1) &= (1+r)y(n)\left(1 - \frac{r}{K(1+r)}y(n)\right). \end{aligned}$$

Para simplificar a análise e chegar à forma canônica do mapa logístico, realizamos uma mudança de variável:

$$y(n) = \frac{K(r+1)}{r}x(n),$$

e o parâmetro de controle $\mu = 1 + r$. Após a manipulação algébrica, chegamos forma iterativa:

$$\frac{K\mu}{r}x(n+1) = \frac{K\mu^2}{r}x(n)(1 - x(n)).$$

Logo, a *equação de Verhulst discreta* é:

$$\boxed{x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n))} \tag{2.8}$$

Esse processo pode ser reaplicado para outras equações, permitindo a computação do problema o que pode otimizar o estudo qualitativo dos modelos almejados.

Capítulo 3

Equações de Diferenças

As equações de diferenças, assim como as equações diferenciais ordinárias (EDOs), podem ser classificadas quanto à ordem, ao grau e à linearidade. Neste capítulo são introduzidos os conceito fundamentais dessa teoria, com ênfase nas equações de diferenças de primeira ordem. Inicialmente, serão apresentadas suas definições, seguidas do estudo das equações lineares homogêneas e não homogêneas, bem como dos métodos para obtenção de suas soluções.

Na parte final do capítulo, será desenvolvida uma análise qualitativa dessas equações por meio do estudo da estabilidade e da atratividade de suas soluções, utilizando o conceito de pontos de equilíbrio. Para o desenvolvimento deste capítulo, foram utilizadas como principais referências [5], [7] e [6].

3.1 Classificação de Equações de Diferenças

As equações de diferenças constituem uma importante ferramenta da Matemática Discreta, embora sua nomenclatura não seja amplamente conhecida, especialmente fora do meio acadêmico. Na literatura, também é comum encontrá-las sob outras denominações, como *equações de recorrências* ou *equações a diferenças*. Apesar disso, muitos estudantes da educação básica e do ensino superior já tiveram contato com esse tipo de equação, ainda que sob diferentes contextos e nomenclaturas.

Na educação básica, por exemplo, as progressões aritméticas e geométricas podem ser descritas por meio de equações de diferenças lineares de primeira ordem. No ensino superior, as sequências definidas por recorrência constituem outro exemplo clássico, destacando-se a sequência de Fibonacci. Além disso, em Cálculo Numérico, diversos métodos iterativos para aproximação de raízes de funções, como o Método de Newton-Raphson e o Método Explícito de Euler, são fundamentados em equações de diferenças.

Esses exemplos evidenciam a ampla aplicabilidade das equações de diferenças, cuja

utilização ultrapassa o contexto da Matemática, estando presente em áreas como Computação, Economia, Biologia, Engenharia e Outras ciências. Diante dessa diversidade de aplicações, torn-se natural iniciar o estudo por sua definição formal e, posteriormente, apresentar os principais critérios de classificação.

Definição 3.1. Uma *equação de diferenças* é uma relação funcional que envolve os valores de uma sequência em instantes discretos. De modo geral, uma equação de diferenças de ordem k pode ser escrita na forma

$$f(y(n+k), y(n+k-1), \ldots, y(n), n) = 0, \tag{3.1}$$

em que $n, k \in \mathbb{Z}_+$, f é uma função dada e

$$y(n),\ y(n+1), \ldots,\ y(n+k)$$

representam os valores da variável dependentes.

Ao longo deste trabalho, será adotada uma forma equivalente à expressão (3.1), obtida ao isolar o termo de maior índice. Assim, uma equação de diferenças de ordem k será escrita na forma de recorrência

$$y(n+k) = F(y(n+k-1), \ldots, y(n), n), \tag{3.2}$$

em que F é uma função definida a partir de f. Nessa representação, observa-se que o valor da sequência no instante $n+k$ é determinado pelos k valores anteriores e, eventualmente, pelo índice n.

Exemplo 3.1. Exemplos de equações de diferenças:

1. $y(n+1) = 2y(n) + r$.
2. $y(n+1) = n^2\ y(n) + y(n-1)$.
3. $y(n+2) = \dfrac{y(n)}{y(n-1)}$, com $y(n-1) \neq 0$.
4. $y(n+1) = y^2(n) + y(n-1)y(n-2)$.
5. $y(n) = y(n-1)\ y(n-2)\ y(n-3)$.

Definição 3.2. Uma equação de diferenças é autônoma se não depende de n explicitamente, caso contrário é não autônoma.

No exemplo 3.1 temos que a primeira equação é autônoma, pois não depedem diretamente da variável independente n, enquanto a segunda é não autônoma, uma vez que depende diretamente de n^2, isto é, do tempo n. Equações autônomas são mais simples de serem estudadas quando comparadas com as não autônomas, isso deve-se ao fato de que para cada n diferente o comportamento da equação de diferenças pode mudar, dificultando o seu estudo.

Definição 3.3. A ordem de uma equação de diferenças corresponde ao valor obtido ao subtrair o menor argumento do maior argumento presente nas variáveis dependentes.

Exemplo 3.2. Progressão Aritmética é descrita pela equação de diferenças

$$y(n) = y(n-1) + r.$$

Essa é uma equação de diferenças de primeira ordem, pois o maior índice é n, o menor é $n-1$ e a diferença entre eles é $n-(n-1) = 1$.

Exemplo 3.3. Sequência de Fibonacci satisfaz a recorência

$$y(n+1) = y(n) + y(n-1).$$

Trata-se de uma equação de diferenças de segunda ordem, uma vez que o maior índice é $n+1$, o menor é $n-1$ e $n+1-(n-1) = 2$.

Exemplo 3.4. Sequência de Tribonacci é definida pela equação

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + y(n-3).$$

Nesse caso, a equação é de terceira ordem, pois o maoir índice é n, o menor é $n-3$ e $n-(n-3) = 3$.

Definição 3.4. O grau de uma equação de diferenças, em formato polinomial, é a maior potência presente na variável dependente de maior ordem.

Observação 3.1. A forma polinomial é extremamente importante para determinar o grau da equação, uma vez que as variáveis dependentes não podem aparecer sob operações como divisões entre si ou com expoentes que não sejam inteiros positivos. Caso a equação original apresente alguma dessas características, ela deve ser racionalizada e simplificada algebricamente antes da extração do seu grau. Para entender essa ideia melhor observe o exemplo 3.5.

Embora o conceito de *grau* seja frequentemente omitido nos textos contemporâneos de equações de diferenças, sua formalização fundamentou-se na referência [2]. Conforme a autor estabelece no capítulo VII, a ordem de uma equação de diferenças é dada pela sua maior diferença, enquanto o seu grau é definido estritamente pelo expoente da potência à qual essa maior diferença está elevada, assumindo que a equação se apresente em formato polinomial.

A principal nuance entre os conceitos de ordem e grau está onde estes atuam, enquanto a ordem provém de operações algébricas com os índices da equação de diferenças, o grau está intimamente ligado ao expoente da variável dependente.

Exemplo 3.5. Seja $a(n)$ uma função real, a equação:

$$y(n+1) = a(n)y(n),$$

tem grau 1, pois $y(n+1)$ é a variável dependente de maior ordem que possui potência igual a 1. Além disso, $a(n)$ é uma função real que atua como coeficiente da variável $y(n)$.

Exemplo 3.6. Seja $b(n)$ uma função real, a equação definida por:

$$[y(n+2)]^2 = b(n)y(n+1)[y(n)]^3 + y(n-1),$$

tem grau 2, pois a equação encontra-se em formato polinomial e a variável dependente de maior ordem está elevada ao expoente 2.

Exemplo 3.7. Considere a equação de diferenças:

$$y(n+3) = \frac{[5y(n-1)]^2}{[y(n+3)]^2} + y(n-2),$$

observe que a equação não está em formato polinomial, o qual é obtido por

$$[y(n+3)]^3 = [5y(n-1)]^2 + y(n-2)[y(n+3)]^2,$$

assim o grau é 3, pois a variável dependente de maior ordem é $y(n+3)$ e apresenta potência igual a 3.

Por meio da definição de grau, podemos abordar o conceito de *linearidade*. Em síntese, equações lineares são equações diferenças de grau 1 em todas suas variáveis depentes, com uma forma de escrita específica, a qual veremos subsequentemente.

Definição 3.5. A equação 3.2 é dita linear, se a função F é linear em relação às variáveis dependentes $y(n), y(n+1), \cdots, y(n+k-1)$. Em outras palavras, a equação é linear se puder

ser expressa da seguinte forma:

$$F = a_1(n)\ y(n) + a_2(n)\ y(n+1) + \cdots + a_k(n)\ y(n+k-1),$$

em que $a_i(n)$ é uma função real, para todo $1 \leq i \leq k$. Caso contrário é não linear.

Exemplo 3.8. Seja $a(n)$ uma função real, a equação de diferenças:

$$y(n+2) = a(n)y(n) + 5y(n+1),$$

é linear, uma vez que $a(n)$ é uma função real que atua como coeficiente da variável $y(n)$.

Exemplo 3.9. A seguinte equação

$$y(n+2) = 2y(n+1) + y(n)y(n-1),$$

é não é linear, visto que há um produto entre as variáveis dependentes $y(n)$ e $y(n-1)$.

Exemplo 3.10. Sejam $b(n)$ e $c(n)$ funções reais, a equação

$$y(n+3) = 5[y(n-1)]^2 + b(n)y(n-2) + c(n)y(n-3),$$

é não linear, porque a variável $y(n-1)$ tem potência maior que 1.

Estabelecidos os critérios da classificação das equações de diferenças, torna-se posssível delimitar o estudo a uma classe de particular interesse: as equações de diferenças lineares de primeira ordem.

3.2 Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem

Nesta seção, estudam-se as equações de diferenças lineares de primeira ordem, as quais podem ser classificadas em *homogêneas* e *não homogênea*. Inicialmente, será apresentada sua forma geral e, em seguidaa, serão discutidos métodos para obtenção de suas soluções em alguns caos particulares.

A forma geral de uma equação de diferenças linear de primeira ordem é dada por

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \tag{3.3}$$

em que $a(n)$ e $g(n)$ são funções reais definidas para

$$n \in \mathrm{Dom}(y) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \geq n_0\},$$

com $n_0 \geq 0$ e $a(n) \neq 0$ para todo $n \in \text{Dom}(y)$. O inteiro n_0 representa o instante inicial da sequência e, ao longo deste trabalho, a notação $\text{Dom}(y)$ será utilizada para indicar o domínio em que a solução está definida.

Definição 3.6. Uma equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea é uma equação da forma

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \in \text{Dom}(y). \tag{3.4}$$

E a equação não homogênea associada é expressa por

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \in \text{Dom}(y). \tag{3.5}$$

A equação 3.4 é denominada *homogênea* por não possuir termo independente, isto é, sem a presença de uma função externa $g(n)$, enquanto a equação 4.15 é denominada *não homogênea*, em virtude da inclusão do termo adicional $g(n)$. Vale destacar que a condição inicial $y(n_0) = y_0$ é algo crucial para encontrar a solução da equação de diferenças.

Exemplo 3.11. Exemplos de equações de diferenças homogêneas e não homogêneas:

1. $y(n+1) = n^3 y(n) + n + 1$ é não homogênea, pois $g(n) = n + 1 \neq 0$.
2. $y(n+1) = \sqrt{2}\, y(n)$ é homogênea, pois $g(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Posteriormente, faremos a dedução das fórmulas que permitem encontrar as soluções de equações de diferenças lineares de primeira ordem, tanto no caso homogêneo quanto no não homogêneo. Mas antes precisamos entender o que é a solução de uma equação de diferenças.

Definição 3.7. Uma solução de uma equação de diferenças é uma sequência $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ que satisfaz a equação para todo n em seu domínio.

Exemplo 3.12. Considere a equação de diferenças

$$y(n+1) = y(n) + 10, y(0) = 5.$$

A sua solução é $y(n) = 5 + 10n$. Pois,

$$\begin{aligned}
y(1) &= y(0) + 10 = 5 + 10 \\
y(2) &= y(1) + 10 = (5 + 10) + 10 = 5 + 2 \cdot 10 \\
y(3) &= y(2) + 10 = (5 + 2 \cdot 10) + 10 = 5 + 3 \cdot 10 \\
&\vdots \\
y(n) &= 5 + n \cdot 10.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.13. Considere a equação de diferenças

$$p(n+1) = \sqrt{2}\ p(n), p(0) = 1.$$

A sua solução é $p(n) = (\sqrt{2})^n$. Pois,

$$\begin{aligned} p(1) &= \sqrt{2}\ p(0) = \sqrt{2} \\ p(2) &= \sqrt{2}p(1) = \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ p(3) &= \sqrt{2}p(2) = \left(\sqrt{2}\right)^3 \\ &\vdots \\ p(n) &= \left(\sqrt{2}\right)^n. \end{aligned}$$

A ideia de resolver uma equação de diferenças consiste em determinar uma expressão explícita para a sequência, isto é, obter uma fórmula que descreva seus termos em função da variável independente n e das condições iniciais. Em outras palavras, busca-se passar da representação por recorrência para uma representação explícita da solução.

Nas próximas seções, serão estudadas as equações de diferenças lineares homogêneas e não homogêneas de primeira ordem. Para cada caso, analisaremos o comportamento das iterações a fim de identificar um padrão para a solução, cuja validade será demonstrada por meio do Princípio da Indução Matemática. Por fim, as fórmulas obtidas serão aplicadas à resolução de problemas clássicos, como a determinação do termo geral das progressões aritméticas e geométricas, a modelagem do crescimento de uma população de bactérias e a evolução do saldo devedor em um sistema de amortização por prestações constantes.

3.2.1 Solução da Equação Homogênea

O objetivo é encontra a solução da equação homogênea 3.4 com a condição inicial $y(n_0) = y_0$, a qual será obtida por iterações sucessivas. Vejamos:

$$\begin{aligned} y(n_0+1) &= a(n_0)y(n_0) = a(n_0)\ y_0 \\ y(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)\ y_0 \\ y(n_0+3) &= a(n_0+2)y(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)\ y_0 \\ &\vdots \\ y(n) &= a(n-1)y(n-1) = a(n-1)a(n-2)\cdots a(n_0)\ y_0. \end{aligned}$$

A recorrência nos faz estabeler a seguinte relação

$$\boxed{y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0.} \tag{3.6}$$

Provemos a validade para todo o domínio, por meio de indução. Para tanto, suponha por hipótese de indução que a igualdade 3.6 seja válida para um certo $n = k \geq n_0$. Analisemos a sua validade para o sucessor $k+1$:

$$y(k+1) = a(k)y(k) = a(k)\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0.$$

Assim, conclui-se que a igualdade 3.6 é válida em todo o domínio. Desse modo, essa equação descreve a solução geral das equações de diferenças lineares de primeira ordem homogênea. Na sequência, serão apresentados alguns exemplos para ilustrar sua aplicação.

Exemplo 3.14. A Progressão Geométrica (PG) é definida como uma sequência numérica em que cada termo subsequente é determinado pela multiplicação do termo anterior por uma constante não nula, denominada razão da progressão. A modelagem por recorrência é a seguinte

$$y(n+1) = q\ y(n),\ y(0) = y_0,\ n \geq 0\ e\ q \in \mathbb{R}^*.$$

A PG é uma equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea, por isso podemos nos basear na equação 3.6 para encontrar sua solução. Além disso, sabemos que $a(n) = q$, $y(0) = y_0$ (primeiro termo da PG) e $n_0 = 0$:

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 = \left[\prod_{i=0}^{n-1} q\right] y_0 = \underbrace{(q.q.q\cdots q)}_{n\ vezes}\ y_0 = q^n y_0. \tag{3.7}$$

Dessa forma, a progressão geométrica é um caso particular de equação de diferenças linear homogênea em que o coeficiente $a(n)$ é constante. Em situações como essa, é possível empregar diretamente a solução da PG, substituindo a necessidade de utilizar a solução geral apresentada anteriormente.

Exemplo 3.15. Imagine que um laboratório está estudando a reprodução de uma cultura de bactérias. A cada hora, a quantidade de bactéria dobra, sabendo que, inicialmente, existem 500 bactérias. O nosso objetivo é determinar a população de bactérias após 12 horas. Sabemos que a população futura de bactérias $(y(n+1))$ dobra ao passar de uma hora em relação a anterior $(y(n))$ e que há 500 bactérias inicialmente $(y(0))$, ao modelar nosso problema teremos:

$$y(n+1) = 2y(n), \quad y(0) = 500.$$

Note que trata-se de uma PG de razão 2, cujo o primeiro termo é 500. Por isso, podemos utilizar a equação 3.7 para obter a solução:

$$y(n) = q^n\ y_0 = (2)^n\ 500.$$

Para calcular a quantidade de bactérias após 12 horas, basta tomarmos $n = 12$ na equação acima. Dessa forma,

$$y(12) = (2)^{12}\ 500 = 4096 \cdot 500 = 2048000 \text{ bactérias.}$$

Portanto, após 12 horas, a população bacteriana atinge 2,048 milhões de individuos, o que evidencia o crescimento exponencial modelado pela progressão geométrica.

Após apresentarmos a solução da equação homogênea, passamos agora ao estudo do caso não homogêneo, em que há a presença do termo $g(n)$.

3.2.2 Solução da Equação não Homogênea

Para determinar as soluções para as equações do tipo 4.15, utilizaremos a recorrência para indicar uma expressão geral para a solução, algo semelhante ao que foi feita para o caso homogêneo:

$$\begin{aligned}
y(n_0) &= y_0 \\
y(n_0+1) &= a(n_0)\,y(n_0) + g(n_0) = a(n_0)\,y_0 + g(n_0) \\
y(n_0+2) &= a(n_0+1)a(n_0)\ y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\boxed{y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r)} \tag{3.8}$$

Para estabelecer isso, provaremos por indução para todo $n \geq n_0$. Dessa forma, suponha que a fórmula acima vale para $n = k$ (hipótese de indução). Então, da equação 4.15, temos:

$$y(k+1) = a(k)y(k) + g(k).$$

E pela fórmula 3.8, obtemos:

$$y(k+1) = a(k)\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\ y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right) g(r)\right] + g(k)$$

$$\begin{aligned} y(k+1) &= a(k)\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 + a(k)\sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right) g(r) + g(k) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r) + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right) g(k) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r). \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula 3.8 vale para todo o domínio. Dessa forma, a equação 3.8 é a solução geral para equações de diferenças lineares de primeira ordem não homogênea. É interessante chamar a atenção para solução geral, a qual é composta por uma parcela que traz a solução geral homogênea, mais uma outra parcela com a solução particular que age como um fator de correção ligado ao caso não homogêneo.

Observação 3.2. Vale destacar que, na demonstração da validade da equação 3.8 pelo princípio de indução, utilizam-se implicitamente as seguintes relações:

$$\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0.$$

Exemplo 3.16. A Progressão Aritmética (PA) é definida como uma sequência numérica em que cada termo subsequente é obtido pela soma do termo anterior por uma constante real, a qual recebe o nome de razão da progressão (p). A modelagem é dada por:

$$y(n+1) = y(n) + p,\ y(0) = y_0,\ n \geq 0 \text{ e } p \in \mathbb{R}.$$

A PA é uma equação de diferenças linear de primeira ordem não homogênea, por isso, podemos utilizar a equação 3.8 para encontrar sua solução. Com base na modelagem da PA, temos as igualdades: $a(n) = 1,\ g(n) = p,\ y(0) = y_0$ (1^{o} termo da PA) e $n_0 = 0$

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 1\right] y_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} 1\right] p \\ &= 1^n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} 1^{n-r-1} p \\ &= y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} p = y_0 + np. \end{aligned}$$

A Progressão Aritmética é uma caso particular de equação de diferenças linear de

primeira ordem não homogênea, com as funções $a(n)$ e $g(n)$ constantes. O presente exemplo é importante, pois sempre que a função $a(n) = 1$ e a $g(n)$ for constante podemos utilizar a solução geral da Progressão Aritmética (ou termo geral), em vez da equação 3.8.

Exemplo 3.17. Amortização é o processo pelo qual um empréstimo é pago através de uma sequência de pagamentos periódicos, onde cada pagamento é parcialmente destinado ao pagamento dos juros e parcialmente à redução do saldo devedor. seja $p(n)$ o saldo devedor após o n-ésimo pagamento $g(n)$. Suponha que os juros sejam compostos à taxa r por período de pagamento. A equação de diferenças que descreve o saldo devedor é:

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n) = (1+r)p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0. \tag{3.9}$$

A solução para esse exemplo é obtida através da fórmula 3.8. Sabemos que $a(n) = 1+r$, $p(0) = p_0$ e $n_0 = 0$. Assim, $p(n)$ é:

$$p(n) = \prod_{i=0}^{n-1}(1+r)p_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}(1+r)\right]g(k) = (1+r)^n p_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^{n-k-1}g(k).$$

Essa é a solução para a equação 3.9, ela serve para qualquer tipo de pagamento, seja ele constante ou não. Agora, vamos analisar para o caso dos pagamentos $g(n)$ forem constantes, com $g(n) = C$ a solução fica:

$$p(n) = (1+r)^n p_0 - [(1+r)^{n-1} + \cdots + (1+r) + 1]C = (1+r)^n p_0 - \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot C,$$

ainda, se quisermos quitar o empréstimo exatamente após n pagamentos, basta tomar $p(n) = 0$ e calcular o valor da parcela :

$$C = \frac{(1+r)^n p_0 r}{(1+r)^n - 1} = \frac{p_0 r}{[(1+r)^n - 1](1+r)^{-n}} = p_0 \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}. \tag{3.10}$$

Essa dedução demonstra como equações de diferenças podem ser utilizadas para modelar processos financeiros, permitindo prever o comportamento do saldo devedor ao longo do tempo.

Exemplo 3.18. Para o caso numérico suponha que uma pessoa solicitou um empréstimo de $R\$$ 10.000, a uma taxa de juros mensal de $1,5\%$ e que possui 12 meses para quitar, sem período de carência. O solicitante do empréstimo quer saber: qual o valor da prestação? com tanto que seja constante. Com base no exemplo anterior, especificamente na equação 3.10, precisamos encontrar o valor de C, além disso, sabemos que saldo devedor inicial $p(0) = p_0 = 10.000$ reais, a uma taxa de juros mensal de $r = 1,5\%$, durante $n = 12$ meses.

Assim, o valor de C é:

$$C = \frac{p_0\ r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{10.000 \cdot 0,015}{1-(1+0,015)^{-12}} = 10.000 \cdot 0,091680 = R\$\ 916,80.$$

Além disso, podemos definir o valor da prestação como a soma do valor da amortização e o juro

$$C = A(n) + r(n), \tag{3.11}$$

como estamos no modelo de prestação constante, o seu valor mensal sempre será $916,80$ reais durante os 12 meses. Em contrapartida, o juros é calculado sob o saldo devedor do mês anterior

$$r(n) = \frac{1,5}{100} \cdot p(n-1),$$

por exemplo, no primeiro mês o valor do juros é

$$r(1) = \frac{1,5}{100} \cdot p(0) = \frac{1,5}{100} \cdot 10000 = 150,$$

conhecendo o valor da prestação e do juros é possível determinar a amortização que no primeiro mês será de $A = C - r = 916,80 - 150 = 766,80$. Na tabela a seguir, é possível observar o saldo devedor de cada mês, depois de cada amortização.

Tabela 3.1: Saldo Devedor ao longo de um ano

Mês (n)	**Saldo (p(n))**	**Amortização**	**Juros (r)**	**Prestação (C)**
0	10000,00	0,00	0,00	0,00
1	9233,20	766,80	150,00	916,80
2	8454,90	778,30	138,50	916,80
3	7664,92	789,98	126,82	916,80
4	6863,10	801,83	114,97	916,80
5	6049,24	813,85	102,95	916,80
6	5223,18	826,06	90,74	916,80
7	4384,73	838,45	78,35	916,80
8	3533,70	851,03	65,77	916,80
9	2669,90	863,79	53,01	916,80
10	1793,15	876,75	40,05	916,80
11	903,25	889,90	26,90	916,80
12	0,00	903,25	13,55	916,80

Fonte: Produção do Autor.

Essa tabela mostra também a dinâmica do sistema de prestação/pagamento constante

(SPC), além de confirmar que o saldo devedor no 12º mês é de fato 0.

3.3 Estudo Assintótico das soluções

O estudo assintótico das soluções de equações de diferenças lineares de primeira ordem possui grande importância para determinar o comportamento da solução a longo prazo. Um exemplo notável é a modelagem do crescimento populacional; por meio dessas equações, podemos analisar o comportamento da população e verificar se ela crescerá sem precedentes, permanecerá estável, ou se extinguirá.

Essa análise baseia-se em projeções a partir de dados iniciais. No entanto, muitas vezes é necessário adicionar variáveis externas como capacidade de suporte, taxa de natalidade e fecundidade, ou considerar quaisquer outros fatores que possam perturbar o padrão da projeção, o que de fato, não é uma tarefa tão simples. Vale ressaltar que o estudo proposto por essa seção restringe-se as equações diferenças autônomas.

3.3.1 Pontos de Equilíbrio

O principal conceito, ou melhor ferramenta, utilizado para o estudo assintótico das soluções de equações de diferenças é o *ponto fixo* (y^*), no escopo da teoria de equação de diferenças é também chamado de *ponto de equilíbrio*. Dessa forma, como o próprio termo sugere, ponto fixo é um número real que é solução constante para uma determinada equação de diferenças, além disso se a condição inicial $y(n_0)$ for igual a este ponto (y^*) as evoluções se tornam invariantes. Para ilustrar essa ideia, considere a seguinte equação de primeira ordem

$$y(n+1) = F(y(n)),\ n \geq n_0 \ e\ y(n_0) = y^* \tag{3.12}$$

Em que a condição inicial é o ponto fixo da função F, em outras palavras $F(y^*) = y^*$. Em posse disso, vamos calcular alguns valores da equação de diferença dada

$$\begin{aligned} y(n_0) &= y^* \\ y(n_0+1) &= F(y(n_0)) = F(y^*) = y^* \\ y(n_0+2) &= F(y(n_0+1)) = y^* \\ &\vdots \\ y(n+1) &= y^*, \text{ para todo } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Por este motivo, o ponto fixo recebe o nome de solução constante. No mais, definamos esses dois conceitos, isto é, ponto fixo e ponto de equilíbrio.

Definição 3.8. Um ponto y^*, no domínio de F, é chamado de ponto fixo se $F(y^*) = y^*$.

Definição 3.9. Um ponto y^*, no domínio de F, é chamado de ponto de equilíbrio da equação 3.12, se for um ponto fixo de F.

Exemplo 3.19. Considere a seguinte equação de diferenças

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^* \text{ e } a \neq 1.$$

Para encontrar o ponto de equilíbrio da equação acima devemos igualar todas as variáveis dependentes a y^*, ou seja, $y^* = y(n) = y(n+1)$. Dessa forma,

$$y^* = ay^* + b \quad \text{implica que} \quad y^* = \frac{b}{1-a}.$$

Esse exemplo nos fornece a forma geral de um ponto de equilíbrio para equações de diferenças lineares de primeira ordem não homogênea com coeficientes constantes. Além disso, um fato interessante no estudo assintótico das soluções, no caso homogêneo com coeficientes constantes é que o único ponto de equilíbrio é 0, pois se

$$y(n+1) = ay(n),$$

com $a \in \mathbb{R}^*$ e $a \neq 1$ então

$$y^* = ay^* \text{ o que implica em } (1-a)y^* = 0, \text{ ou melhor } y^* = 0,$$

uma vez que $a \neq 1$. Porém, o que acontece se o coeficiente a for igual a um? tanto para caso homogêneo e não homogêneo. Vejamos,

$$y(n+1) = y(n) \qquad e \qquad y(n+1) = y(n) + b$$

Ao calcular o ponto de equilíbrio, de ambas equações, encontramos que no caso homogêneo todo número real é ponto de equilíbrio, pois $y^* = y^*$. Entretanto, para o caso não homogêneo, com as condições impostas, não teremos pontos de equilíbrio, visto que $y^* = y^* + b$ implicará $b = 0$, o que significa que a equação é homogênea e isso contradiz a definição da equação não homogênea.

Proposição 3.1. Seja a equação $y(n+1) = ay(n) + b$ com $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ e $a \neq 1$ então o ponto de equilíbrio y^* existe e é único.

Demonstração: A existência foi apresentada pelo exemplo 3.19, em outras palavras, o ponto de equilíbrio sempre existe, uma vez que as condições impostas sejam cumpridas. Dessa forma, vamos mostrar a unicidade, suponha que a equação $y(n+1) = ay(n) + b$

admite dois pontos de equilíbrio, digamos y_1^* e y_2^*, como são pontos de equilíbrio ambos devem satisfazer:

$$y_1^* = ay_1^* + b \quad e \quad y_2^* = ay_2^* + b$$

Subtraindo as duas equações encontramos o seguinte

$$\begin{aligned} ay_1^* + b - (ay_2^* + b) &= y_1^* - y_2^* \\ a(y_1^* - y_2^*) &= y_1^* - y_2^* \\ a(y_1^* - y_2^*) - (y_1^* - y_2^*) &= 0 \\ (a-1)(y_1^* - y_2^*) &= 0 \end{aligned}$$

Donde discorre que $a-1=0$ ou $y_1^* - y_2^* = 0$, mas por hipótese $a \neq 1$, logo $a-1 \neq 0$ então nos resta $y_1^* - y_2^* = 0$, o que implica em $y_1^* = y_2^*$. Portanto, se as hipóteses desta proposição são satisfeitas então a equação de diferenças linear de primeira ordem com coeficientes constantes possui um único ponto de equilíbrio. ■

Apesar de não ser o foco deste capítulo, é natural que o grau da equação de diferenças com coeficientes constantes decida a quantidade máxima de pontos de equilíbrio, desde que o grau seja maior que 1. Pois,

$$\begin{aligned} y^k(n+k) + a_{k-1}y^{k-1}(n+k-1) + \cdots + a_1y(n+1) + a_0 &= 0 \\ (y^*)^k + a_{k-1}(y^*)^{k-1} + \cdots + a_1y^* + a_0 &= 0 \\ P(y^*) &= 0 \end{aligned}$$

Onde $P(y^*)$ é um polinômio de grau k em termos de y^* com coeficientes sobre os reais, portanto, possui no máximo k raízes, ou equivalentemente pontos de equilíbrio.

3.3.2 Estabilidade e Atração

Definição 3.10. (Estabilidade) O ponto de equilíbrio y^* da equação 3.12 é estável se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que:

$$|y_0 - y^*| < \delta \quad \text{implica} \quad |F^n(y_0) - y^*| < \epsilon$$

Para todo $n > 0$. Se y^* não for estável, então ele é chamado de **instável**.

Em termos práticos, a definição de estabilidade diz que um ponto de equilíbrio y^* de uma equação de diferenças $y(n) = F^n(y_0)$ é estável se as evoluções que começam suficientemente próximas a y^* permanecem próximas a este ponto por todo o tempo subsequente ($n \geq 0$). Enquanto, com a Instabilidade, as evoluções que começam em

uma vizinhança arbitrária, por menor que seja, do ponto de equilíbrio não permanecem próximas a ele; elas se afastam do ponto de equilíbrio ao longo do tempo.

Para exemplificar o conceitos de estabilidade, será abordados um exemplo. Em sua resolução, faremos a análise geométrica do problema, a qual permitirá confirmar visualmente o comportamento previsto pela definição de estabilidade. Desta forma, o comportamento da solução será validado por meio da demonstração presente na resolução exemplo.

Exemplo 3.20. Considere a equação de diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n).$$

Vamos determinar seu ponto de equilíbrio y^* o qual deve satisfaz a equação:

$$y^* = \frac{1}{2}y^* \text{ que implica em } y^* = 0$$

Agora vamos verificar se o ponto de equilíbrio encontrado é estável. Para tanto, defina $y(n) = F(y(n-1)) = F^n(y_0)$, por outro lado $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0$, ao utilizarmos a fórmula 3.7:

$$F^n(y_0) = y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0$$

Para verificar a estabilidade de $y^* = 0$, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrário e escolhamos $\delta = \varepsilon$. Se $|y_0 - 0| < \delta$, então

$$|F^n(y_0) - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |y_0| \leq |y_0| < \delta = \varepsilon, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Portanto, $y^* = 0$ é um ponto de equilíbrio estável. O Gráfico 3.1 mostra as evoluções da equação de diferenças dada, quando a condição inicial é 1. Ao analisar seu comportamento é possível inferir que a medida que o n cresce a solução da equação de diferenças se aproxima do seu ponto de equilíbrio, ou seja, do zero.

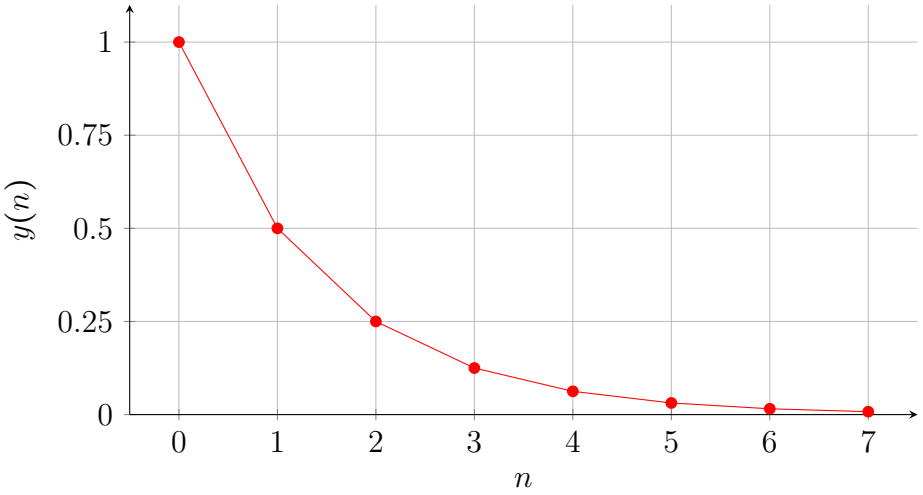
Outra definição que iremos abordar no estudo das soluções é a Atração, a qual trará o quanto um ponto de equilíbrio é atrator.

Definição 3.11. (Atração) O ponto y^* é dito atrator se existir $\eta > 0$ tal que:

$$|y_0 - y^*| < \eta \quad \text{implica} \quad \lim_{n\to\infty} y(n) = y^*.$$

Se $\eta = \infty$, então y^* é chamado de atrator global ou globalmente atrator.

Figura 3.1: $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ com $y(0) = y_0 = 1$.



Fonte: Produção do Autor.

Observação 3.3. Afirmar que $|y_0 - y^*| < \eta$ é análogo a dizer que $y_0 \in (y^* - \eta, y^* + \eta)$, o qual é um intervalo centrado em y^* com raio η.

A definição de atração equivale a dizer que se a condição inicial $y(0) = y_0$ estiver na vizinhança do ponto de equilíbrio y^*, definida pelo intervalo $(y^* - \eta, y^* + \eta)$, e se isso for suficiente para que as evoluções convirjam para o ponto de equilíbrio y^* à medida que n se torna arbitrariamente grande, então y^* é classificado como atrator.

Porém, se para $\eta = \infty$, em outras palavras, se a condição inicial y_0 pode ser qualquer número no domínio e o ponto de equilíbrio y^* continuar sendo atrator, então o concebemos como atrator global. Para entender melhor a definição e sua aplicação faremos dois exemplo, o objetivo é analisar quando o ponto fixo será atraente e globalmente atraente.

Exemplo 3.21. Considere as seguintes equações, indique seu parecer quanto a atração:

$$y_1(n+1) = \frac{2}{5}y_1(n) + 3 \quad e \quad y_2(n+1) = 2y_2(n) + 1, \text{ com } y_1(0) = y_2(0) = 2.$$

Ambas equações satisfazem as condições da proposição 3.1, logo o ponto de equilíbrio destas existem e são únicos. Dessa forma, os pontos de equilíbrio são $y_1^* = 5$ para equação na variável dependente y_1, já para a equação na variável dependente y_2 o ponto de equilíbrio é $y_2^* = -1$.

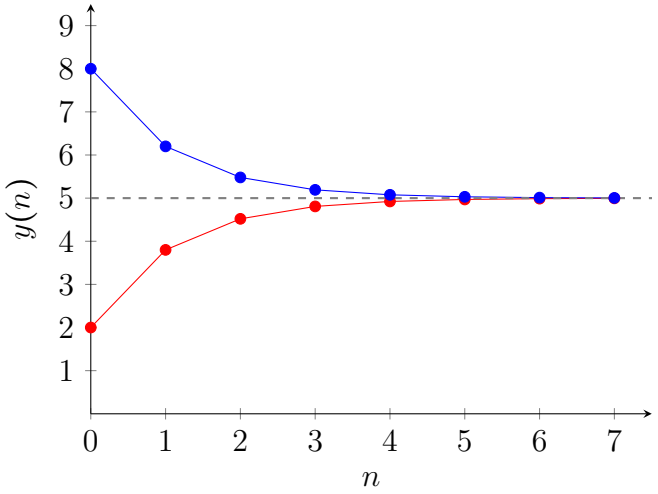
Caso 1: $y_1(n+1) = \frac{2}{5}y_1(n) + 3$, com condição inicial $y_1(0) = 2$.

A solução para esta equação é dada por $y(n) = -3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$, então:

$$\lim y(n) = \lim\left[-3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right] = 5 = y^*$$

Dessa forma, o ponto de equilíbrio é atrator global. Vejamos esse comportamento no Gráfico 3.2, vale ressaltar que os pontos em vermelho são as evoluções a partir da condição inicial $y_1(0) = 2$, enquanto os pontos em azul representam as evoluções a partir de $y_1(0) = 8$.

Figura 3.2: $y(n+1) = \frac{2}{5}y(n) + 3$ com $y_1(0) = 2$ e $y_1(0) = 8$.



Fonte: Produção do Autor.

Após visualizar o Gráfico 3.2, é possível percerber que a medida que o n cresce as evoluções se aproximam cada vez mais da reta horizontal que presenta o ponto de equilíbrio. Ao pegar duas condições iniciais $y_1(0) = 2$ e $y_1(0) = 8$, uma maior que o ponto de equilíbrio e a outro menor, foi possível perceber que graficamente que as evoluções se aproximam do estado de equilíbrio independentemente da condição inicial tomada. Assim, o gráfico nos permite ter uma noção intuitiva da solução e, principalmente, do poder de "sucção"quando o ponto de equilíbrio é atrator global.

Caso 2: $y_2(n) = 2y_2(n) + 1$, com condição inicial $y_2(0) = 2$

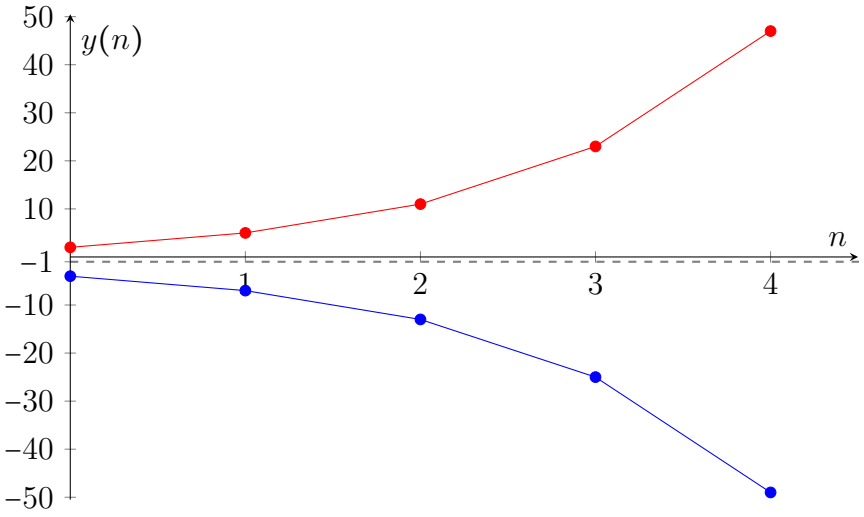
A solução é dada por $y(n) = 3\,(2)^n - 1$, então:

$$\lim y(n) = \lim \left[3\,(2)^n - 1\right]$$

O $\lim y(n)$ não existe, a menos do caso em que $y(0) = y^*$ e, isso implica que y^* não é atrator. Dessa forma, temos que $y_2^* = -1$ não é atrator.

Agora, vamos observar o comportamento no Gráfico 3.3, destaca-se que os pontos em vermelho são as evoluções a partir da condição inicial $y_2(0) = 2$, enquanto os pontos em azul representam as evoluções a partir de $y_2(0) = -4$.

Figura 3.3: $y_2(n+1) = 2y_2(n) + 1$ com $y_2(0) = 2$ e $y_2(0) = -4$.



Fonte: Produção do Autor.

Após visualizar o Gráfico 3.3, é possível percerber que a medida que o n cresce as evoluções se afastam cada vez mais da reta horizontal que presenta o ponto de equilíbrio. Neste caso o ponto de equilíbrio não possui nenhuma atração, graficamente isso é justificado pelo afastamento das evoluções a medida que o tempo cresce.

É sempre proveitoso estabelecer condições que possibilitem inferir quando um ponto de equilíbrio é atrator ou não. Por esse ângulo, abordaremos o Teorema abaixo, o qual estabelece tais condições que nos auxiliará no estudo da atração.

Teorema 3.1. Para qualquer equação de diferenças da forma $y(n+1) = ay(n) + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, considere y^* sendo seu ponto de equilíbrio (caso exista). As seguintes afirmações são verdadeiras:

i. Se $|a| < 1$, então y^* é atrator global.

ii. Se $|a| \geq 1$, então y^* não existe ou é não atrator.

Demonstração: Considere a seguinte equação

$$y(n+1) = ay(n) + b, \text{ com } y(0) = y_0.$$

A solução é dada por

$$y(n) = a^n y_0 + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) = a^n(y_0 - y^*) + y^*, \text{ desde que } y^* = \frac{b}{1-a}.$$

Observe que $\lim y(n) = y^*$, sempre que $|a| < 1$, logo y^* é atrator global. Por outro lado, o $\lim y(n)$ "explode"ou não existe, se $|a| > 1$, portanto o y^* não é atrator. Nos resta analisar o caso em que $|a| = 1$, ou melhor, $a = 1$ ou $a = -1$.

Caso homogêneo: Temos as seguintes equações

$$y(n+1) = y(n) \text{ e } y(n+1) = -y(n).$$

A primeira equação é constante, em outras palavras, admite qualquer número real como ponto de equilíbrio, no entanto, isso não garante atração por menor que seja a vizinhaça em torno do ponto de equilíbrio estudado. Para segunda equação é alternada, cuja solução é dada por $y(n) = (-1)^n y_0$ e o único ponto de equilíbrio é $y^* = 0$, porém o $\lim y(n)$ não existe, a menos que $y_0 = 0$. Dessa forma, y^* não é atrator.

Caso não homogêneo: As equações são $y(n+1) = y(n) + b$ e $y(n+1) = -y(n) + b$

A primeira equação já foi comentada anteriormente que o ponto de equilíbrio não existe, assim, não é possível analisar a atração. Em contrapartida, a segunda equação possui $y^* = \frac{b}{2}$ e solução $y(n) = (-1)^n(y_0 - y^*) + y^*$, entretanto, o $\lim y(n)$ não existe, exceto para o caso $y_0 = y^*$, logo y^* não é atrator. Com isso, acabamos de demonstrar a validade do Teorema. ■

O Teorema 3.1 apresenta um padrão íntimo as equação de diferenças lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, pois a partir da constante real a é possível concluir se o ponto de equilíbrio é atrator global ou não. Dessa forma, o ponto de equilíbrio, quando existir, atrairá todos os pontos ou não nenhum, isto é, não existe um raio η finito, sempre será os extremos ou atrai tudo ou não atrai nada.

Definição 3.12. Se o ponto de equilíbrio y^* for estável e atrator então este é *assintoticamente estável*. Se y^* for estável e atrator global então este é *globalmente assintoticamente estável*.

O exemplo 3.20 desta seção abordar uma equação com ponto de equilíbrio $y^* = 0$ que é estável e atrator global, portanto é globalmente assintoticamente estável. Mais à frente vamos abordar critérios para determinar a estabilidade assintótica.

Teorema 3.2. Seja y^* um ponto de equilíbrio da equação de diferenças $y(n+1) = F(y(n))$ onde $F \in C^1$ em uma vizinhaça de y^*. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

i. Se $|F'(y^*)| < 1$, então y^* é assintoticamente estável.

ii. Se $|F'(y^*)| > 1$ então é instável.

Demonstração: i) Suponha que $|F'(y^*)| < M < 1$. Então existe um intervalo $J = (y^* - \gamma, y^* + \gamma)$ contendo y^* tal que $|F'(y)| \leq M < 1$ para todo $y \in J$. Pois, caso contrário, para cada intervalo aberto $I_n = (y^* - \frac{1}{n}, y^* + \frac{1}{n})$ (para n grande), existiria um ponto $y_n \in I_n$

tal que $|F'(y_n)| > M$. Como $n \to \infty$, $y_n \to y^*$. Uma vez que F' é uma função contínua, segue que

$$\lim_{n\to\infty} F'(y_n) = F'(y^*).$$

Consequentemente,

$$M \leq \lim |F'(y_n)| = |F'(y^*)| < M,$$

O que é uma contradição. Isto prova nossa afirmação. Para $y_0 \in J$, temos

$$|y(1) - y^*| = |F(y_0) - F(y^*)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe ξ entre y_0 e y^* tal que

$$|F(y_0) - F(y^*)| = |F'(\xi)||y_0 - y^*|.$$

Assim,

$$|F(y_0) - y^*| \leq M|y_0 - y^*|.$$

Portanto,

$$|y(1) - y^*| \leq M|y_0 - y^*|. \tag{3.13}$$

Como $M < 1$, a desigualdade 3.13 mostra que $y(1)$ está mais próximo de y^* do que y_0. Consequentemente, $y(1) \in J$. Por indução, concluímos que

$$|y(n) - y^*| \leq M^n|y_0 - y^*|.$$

Sabendo que $M^n < 1$ e para $\epsilon > 0$, seja $\delta = \min\{\gamma, \epsilon\}$. Assim, $|y_0 - y^*| < \delta$ implica que $|y(n) - y^*| < \epsilon$ para todo $n > 0$. Esta conclusão sugere estabilidade. Além disso, $\lim |y(n) - y^*| = 0$, e assim $\lim y(n) = y^*$; concluímos a estabilidade assintótica. O item ii segue de maneira análoga e, por este motivo não será apresentada. ■

Exemplo 3.22. A partir do Teorema 3.2 determine se as equações a seguir são assintótica estáveis

i. $y(n+1) = \frac{7}{10}y(n) + 20$

ii. $y(n+1) = \pi y(n) - 5$

A primeira equação tem o seguinte ponto de equilíbrio $y^* = \frac{200}{3}$, o qual é caracterizado por assintoticamente estável, pois

$$F(y(n)) = \frac{7}{10}y(n) + 20,$$

assim, $F'(y^*) = \frac{7}{10} < 1$. Em contrapartida, o ponto de equilíbrio $y^* = \frac{5}{\pi-1}$ da segunda equação é instável, uma vez que, $F'(y^*) = \pi > 1$.

O Teorema 3.2 apresenta dois casos com extremos opostos, a partir da derivada $|F'(y^*)|$ quando é maior ou menor que 1, mas o que acontece se $|F'(y^*)| = 1$? Esse é o caso conhecido como não hiperbólico e para responder a pergunta almejada vejamos o Teorema subsequente.

Teorema 3.3. Suponha que, para um ponto de equilíbrio y^* de $y(n+1) = F(y(n))$, $F'(y^*) = 1$. As seguintes afirmações são válidas

i. Se $F''(y^*) \neq 0$, então y^* é instável.

ii. Se $F''(y^*) = 0$ e $F'''(y^*) > 0$, então y^* é instável.

iii. Se $F''(y^*) = 0$ e $F'''(y^*) < 0$, então y^* é assintoticamente estável.

Demonstração: i) Se $F''(y^*) \neq 0$ então $F''(y^*) < 0$ ou $F''(y^*) > 0$. Com base na fórmula de taylor infinitesimal, temos que em $I = (y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon)$ três vezes derivável em $y^* \in I$. Então para todo h tal que $y^* - h \in I$, tem-se

$$F(y^* + h) = F(y^*) + F'(y^*)h + \frac{F''(y^*)h^2}{2} + r(h),$$

onde,

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0,$$

observe que podemos tomar $h = y - y^*$, quando $h \to 0$ então $y \to y^*$. Assim,

$$F(y) = F(y^*) + F'(y^*)(y - y^*) + \frac{F''(y^*)(y - y^*)^2}{2} + r(y - y^*),$$

em que,

$$\lim_{y\to y^*} \frac{r(y - y^*)}{(y - y^*)^2} = 0.$$

Além disso, sabemos que $F(y^*) = y^*$ e $F'(y^*) = 1$, com isso, a fórmula de taylor infinitesimal resulta em

$$F(y) - y^* = (y - y^*) + \frac{F''(y^*)(y - y^*)^2}{2} + r(y - y^*).$$

Se $y \to y^*$, independentemente se pela direita ou esquerda, então $(y - y^*)^2 > 0$, por hipótese $F''(y^*) > 0$ e $r(y - y^*) \to 0$, então $F(y) - y^* > y - y^*$, as iterações divergem unilateralmente à direita.

Se $y \to y^*$, independente do sinal de $(y-y^*)$, então $(y-y^*)^2 > 0$, por hipótese $F''(y^*) < 0$ e $r(y-y^*) \to 0$, então $F(y)-y^* < y-y^*$, as iterações divergem unilateralmente à esquerda. Para ambos os casos as iterações estão se afastando do ponto de equilíbrio, portanto é instável.

ii) Na demonstração do primeiro item usamos a fórmula de taylor até a derivada de segunda ordem, no entanto, para demonstração do item ii e iii usaremos a expansão até a derivada de ordem 3, vejamos

$$F(y) = F(y^*) + F'(y^*)(y-y^*) + \frac{F''(y^*)(y-y^*)^2}{2} + \frac{F'''(y^*)(y-y^*)^3}{6} + r(y-y^*),$$

em que,

$$\lim_{y \to y^*} \frac{r(y-y^*)}{(y-y^*)^3} = 0.$$

Substituindo $F(y^*) = y^*$, $F'(y^*) = 1$ e $F''(y^*) = 0$, teremos a seguinte igualdade

$$F(y) - y^* = (y-y^*) + \frac{F'''(y^*)(y-y^*)^3}{6} + r(y-y^*).$$

Se $y \to y^{*+}$ então $y - y^* > 0$, o que implica que $(y-y^*)^3 > 0$, por hipótese $F'''(y^*) > 0$ e $r(y-y^*) \to 0$. Dessa forma, $F(y) - y^* > y - y^* > 0$, isto é, a evolução está mais distantes do ponto de equilíbrio y^*, logo este é instável.

Se $y \to y^{*-}$ então $y - y^* < 0$, o que resulta em $(y-y^*)^3 < 0$, por hipótese $F'''(y^*) > 0$ e $r(y-y^*) \to 0$. Dessa forma, $F(y) - y^* < y - y^* < 0$, ou seja, a evolução está se afastando do ponto de equilíbrio y^*, assim, y^* é instável. Portanto, sob as condições deste item o ponto de equilíbrio é, de fato, instável.

iii) Com base na mesma fórmula de taylor do item anterior, provemos o item iii

Se $y \to y^{*+}$ então $y - y^* > 0$, o que implica que $(y-y^*)^3 > 0$, por hipótese $F'''(y^*) < 0$ e $r(y-y^*) \to 0$. Dessa forma, $F(y) - y^* < 0$, isto é, $F(y) < y^*$, $F(y)$ está convergindo para o ponto de equilíbrio à esquerda, Logo é assintóticamente estável.

Se $y \to y^{*-}$ então $y - y^* < 0$, o que implica que $(y-y^*)^3 < 0$, por hipótese $F'''(y^*) < 0$ e $r(y-y^*) \to 0$. Dessa forma, $F(y) - y^* > 0$, ou melhor, $F(y) > y^*$, $F(y)$ está convergindo para o ponto de equilíbrio à direita, Logo é assintóticamente estável. Portanto, o item iii é válido, assim, está demonstrado o presente Teorema. ■

Acabamos de tratar de um resultado que abrange o caso quando $F'(y^*) = 1$, mais adiante abordaremos o último caso $F'(y^*) = -1$. Para tanto, é imperioso que definamos a *Derivada Schwarziana da função F.*

Definição 3.13. A *derivada schwarziana* da função F é dada por

$$SF(y) = \frac{F'''(y)}{F'(y)} - \frac{3}{2}\left[\frac{F''(y)}{F'(y)}\right]^2.$$

Se impormos a condição $F'(y^*) = -1$, ação necessária para analisar o presente caso, a derivada schwarziana da função F será

$$SF(y) = -F'''(y) - \frac{3}{2}[F''(y)]^2 \tag{3.14}$$

Usaremos a relação 3.14 para demonstrar a validade do Teorema 3.4, que discorre sobre os critérios utilizados para determinar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio quando $F'(y^*) = -1$.

Teorema 3.4. Suponha que, para o ponto de equilíbrio y^* de $y(n+1) = F(y(n))$ e $F'(y^*) = -1$. As seguintes afirmações são verdadeiras

i. Se $SF(y^*) < 0$, então y^* é assintoticamente estável.

ii. Se $SF(y^*) > 0$, então y^* é instável.

Demonstração: i) Considere $y(n+1) = g(y(n))$, onde $g(y) = F^2(y) = F(F(y))$, é importante que não esqueçamos que $F(y^*) = y^*$ e $F'(y^*) = -1$, pois usaremos de forma natural essas informações. Observe que a primeira derivada de g em relação a y é

$$g'(y) = F'(F(y))F'(y) \quad \text{o que implica em} \quad g'(y^*) = F'(F(y^*))F'(y^*) = [F'(y^*)]^2 = 1.$$

Dessa forma, como $g'(y^*) = 1$ podemos usar o resultado do Teorema 3.3, para isso, precisamos determinar as derivadas de segunda e terceira ordem da g. A segunda derivada de g em relação a y é dada por

$$g''(y) = F''(F(y))F'(y)F'(y) + F'(F(y))F''(y).$$

Logo,

$$\begin{aligned} g''(y^*) &= F''(F(y^*))F'(y^*)F'(y^*) + F'(F(y^*))F''(y^*) \\ &= F''(y^*)F'(y^*)F'(y^*) + F'(y^*)F''(y^*) \\ &= F''(y^*) - F''(y^*) = 0. \end{aligned}$$

Como $g''(y^*) = 0$, pelo Teorema anterior o sinal da terceira derivada decidirá se o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável ou não. Assim, vejamos a terceira derivada

de g em relação a y:

$$g'''(y) = F'''(F(y))F'(y)[F'(y)]^2 + 2F''(F(y))F'(y)F''(y) + F''(F(y))F'(y)F''(y) + F'(F(y))F'''(y)$$

Dessa forma,

$$g'''(y^*) = F'''(F(y^*))F'(y^*)[F'(y^*)]^2 + 2F''(F(y^*))F'(y^*)F''(y^*) + F''(F(y^*))F'(y^*)F''(y^*) + F'(F(y^*))F'''(y^*)$$

$$\begin{aligned} g'''(y) &= -F'''(y^*) - 2[F''(y^*)]^2 - [F''(y^*)]^2 - F'''(y^*) \\ &= -2F'''(y^*) - 3[F''(y^*)]^2 = 2SF(y^*) \quad \text{(observe a relação 3.14)} \end{aligned}$$

Sob posse das derivadas da função g, façamos a expanção utilizando a fórmula de taylor infinitesimal em torno de y^*. Com efeito,

$$g(y) = g(y^*) + g'(y^*)(y - y^*) + g''(y^*)\frac{(y-y^*)^2}{2} + g'''(y^*)\frac{(y-y^*)^3}{6} + r(y - y^*),$$

em que,

$$\lim_{y \to y^*} \frac{r(y-y^*)}{(y-y^*)^3} = 0.$$

Assim, como $g(y^*) = y^*$, $g'(y^*) = 1$, $g''(y^*) = 0$ e $g'''(y^*) = 2SF(y^*)$

$$g(y) - y^* = (y - y^*) + \frac{SF(y^*)(y-y^*)}{3} + r(y - y^*).$$

No Teorema 3.3 mostramos que a estabilidade assintótica será decidida pelo sinal da derivada de terceira ordem, a qual coincide com o sinal da derivada schwarziana de F para o nosso caso, pois $g'''(y^*) = 2SF(y^*)$. Portanto, com base no Teorema aludido podemos concluir que, se $SF(y^*) < 0$ então y^* é assintoticamente estável, enquanto, se $SF(y^*) > 0$ então y^* é instável. ■

3.3.3 Pontos e Ciclos Períódicos

Até o momento, observamos que nas equações lineares de primeira ordem, o comportamento assintótico é determinado unicamente pelo coeficiente a. No entanto, ao lidarmos com equações não lineares do tipo $y(n+1) = F(y(n), \mu)$, onde μ é um parâmetro de controle, o sistema pode sofrer mudanças qualitativas drásticas em sua estrutura de equilíbrio.

Essas mudanças são denominadas bifurcações.

Definição 3.14. Seja p um ponto no domínio de $y(n+1) = F(y(n))$. Então,

i. p é chamado de *ponto periódico* de $F(y(n))$, se para algum inteiro positivo k, $F^k(p) = p$. Portanto, um ponto de equilíbrio se for um ponto fixo de F^k, isto é, se for um ponto de equilíbrio da equação de diferenças $y(n+1) = F^k(y(n))$. Chamamos de *k-ciclo da órbita perídica* de p, dada por $O(p) = \{p, F(p), F^2(p), F^3(p), \ldots, F^{k-1}(p)\}$.

ii. p é *eventualmente k-periódico* se, para algum inteiro positivo m, $F^m(p)$ for um ponto $k-$periódico. Isto é, p é *eventualmente k−periódico* se $F^{m+k}(p) = F^m(p)$.

Definição 3.15. Seja p um ponto *k−periódico* de F. Então p é

i. Estável se for um ponto de equilíbrio estável de F^k.

ii. Assintoticamente estável se for um ponto de equilíbrio estável de F^k.

iii. Instável se for um ponto de equilíbrio instável de F^k.

Teorema 3.5. Seja $O(p) = \{p = y(0), y(1), \ldots, y(k-1)\}$ um $k-$ciclo de uma função continuamente diferenciável de F. Então as seguintes afirmações são válidas

i. O $k-$ciclo $O(p)$ é assintoticamente estável se

$$|F'(y(0))F'(y(1))\ldots F'(y(k-1))| < 1.$$

ii. O $k-$ciclo $O(p)$ é instável se

$$|F'(y(0))F'(y(1))\ldots F'(y(k-1))| > 1.$$

Demonstração: Defina a seguinte relação

$$y(i) = F^i(p), \text{ com } 0 \leq i \leq k-1.$$

Além disso, a função

$$g(y) = F^k(y) = F(F^{k-1}(y)), \text{ com } y_0 = p,$$

sendo p o seu ponto de equilíbrio. Aplicando a regra da cadeia temos,

$$\begin{aligned} g'(y) &= \left(F(F^{k-1}(p))\right)' \\ &= F'(F^{k-1}(p))(F^{k-1}(p))' \quad (\text{use } F^{k-1}(p) = F(F^{k-2}(p))) \\ &= F'(F^{k-1}(p))F'(F^{k-2}(p))(F^{k-2}(p))' \\ &\vdots \\ &= F'(F^{k-1}(p))F'(F^{k-2}(p))\dots F'(F(p))F'(p), \end{aligned}$$

utilizando a relação definida $y(i) = F^i(p)$ e aplicando o y_0 na derivada da função g, teremos

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= F'(F^{k-1}(p))F'(F^{k-2}(p))\dots F'(F(p))F'(y_0) \\ &= F'(y(k-1))F'(y(k-2))\dots F'(y(1))F'(y_0) \\ &= F'(y_0)F'(y(1))\dots F'(y(k-2))F'(y(k-1)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2, podemos concluir que $y_0 = p$ é assintoticamente estável se $|g'(y_0)| < 1$, no entanto, y_0 é instável se $|g'(y_0)| > 1$. Vale lembrar que,

$$g'(y_0) = F'(y_0)F'(y(1))\dots F'(y(k-2))F'(y(k-1)).$$

Portanto, o Teorema está demonstrado. ■

O estudo assintótico proposto por este capítulo aplica-se a qualquer equação de diferenças de primeira ordem, seja ela linear ou não. De fato, o foco até aqui foram essas equações, devido a facilidade de analisar o comportamento de suas soluções. Todavia, para a próxima seção trataremos de uma das equações mais importantes deste capítulo: a *Equação Logística e as bifurcações*, a qual adianto ser classificada como não linear.

3.4 Equação Logística e Bifurcações

Uma vez apresentado o processo de discretização de modelos contínuos (capítulo 2). A equação logística discretizada é dada por

$$y(n+1) = \mu y(n)[1 - y(n)],$$

que surge da iteração da função

$$F_\mu(y) = \mu y(1-y), \quad y \in [0,1], \quad \mu > 0.$$

3.4.1 Pontos de Equilíbrio da Equação Logística

Para encontrar os pontos de equilíbrio de $F_\mu(y)$ tomamos $y = y^*$ e $F_\mu(y^*) = y^*$. Assim,

$$F_\mu(y^*) = \mu y^*(1 - y^*) \quad \text{implica em} \quad y^* \cdot (\mu - 1 - \mu y^*) = 0.$$

Dessa forma, podemos concluir que os pontos de equilíbrio são

$$y^* = 0 \text{ ou } y^* = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Em seguida, vamos analisar cada um desses pontos de equilíbrio para inferir algo sobre a estabilidade. Para tanto, usaremos os resultados da seção anterior para nos auxiliar.

Análise da estabilidade do ponto de equilíbrio $y^* = 0$

$$F'_\mu(y) = \mu - 2y\mu \text{ aplicando o ponto de equilíbrio } y^* = 0, \text{ temos } F'_\mu(0) = \mu.$$

Pelo Teorema 3.2, se $0 < \mu < 1$ o ponto de equilíbrio $y^* = 0$ é assintoticamente estável, porém se $\mu > 1$ o ponto de equilíbrio será instável. Caso $\mu = 1$, então

$$F'_\mu(0) = 1 \text{ e } F''_1(y) = -2\mu = -2 \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema 3.3, $y^* = 0$ é instável.

Análise da estabilidade do ponto de equilíbrio $y^* = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$

Vamos analisar o outro ponto de equilíbrio $y^* = \frac{\mu-1}{\mu}$, com $\mu \neq 1$. Para que $y^* \in (0, 1]$ é necessário que $\mu > 1$. Assim

$$F'_\mu\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = \mu - 2 \cdot \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)\mu = 2 - \mu,$$

pelo Teorema 3.2 o ponto y^* é assintoticamente estável se

$$-1 < 2 - \mu < 1 \text{ implica que } 1 < \mu < 3.$$

O ponto y^* é instável se

$$|2 - \mu| > 1 \text{ implica que } \mu < 1 \text{ ou } \mu > 3.$$

Se $\mu = 1$ então y^* é instável, pois $F''_\mu(y) = F''_1(y) = -2 \neq 0$. Se $\mu = 3$, pela derivada

schwarziana teremos

$$SF_\mu(y) = -\underbrace{F'''_\mu(y)}_{0} - \frac{3}{2}[F''_\mu(y)]^2,$$

assim, aplicando ao nosso presente caso, obtemos

$$SF_3(y^*) = -\frac{3}{2}\cdot[-2\cdot 3]^2 = -\frac{3}{2}\cdot[-6]^2 = -54 < 0.$$

Portanto, pelo Teorema 3.4, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Acabamos aqui de estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio da primeira iteração da equação Logística, para prosseguirmos faremos a análise da segunda iteração, ou melhor, $F^2_\mu(y)$ e o seu 2–Ciclos.

3.4.2 Segunda Iteração e o 2 - Ciclos da Equação Logística

Para encontrar a segunda iteração da equação Logística e os seus 2-ciclos resolvemos a equação $F^2_\mu(y) = y$.

$$F_\mu(F_\mu(y)) = F_\mu(\mu y(1-y)) \text{ implica que } F^2_\mu(y) = \mu^2 y(1-y)(1-\mu y(1-y)).$$

Assim,

$$\mu^2 y(1-y)(1-\mu y(1-y)) - y = 0$$
$$\mu^2 y - \mu^3 y^2 + \mu^3 y^3 - \mu^2 y^2 + \mu^3 y^3 - \mu^3 y^4 - y = 0.$$

O qual podemos fatorar da seguinte forma,

$$y(\mu - 1 - \mu y)(\mu^2 y^2 - (\mu^2 + \mu)y + (\mu + 1)) = 0.$$

Observer que $y(\mu - 1 - \mu y)$ gera os pontos de equilíbrio da primeira iteração, cuja a análise já foi executada. Em outras palavras, vamos concentrar a atenção nos valores concebidos pela equação $\mu^2 y^2 - (\mu^2 + \mu)y + (\mu + 1) = 0$.

A equação quadrática em questão pode ser resolvida pelos métodos tradicionais, os quais resultaram nos seguintes pontos de equilíbrio:

$$y(0) = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \quad \text{e} \quad y(1) = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}$$

Se $0 < \mu < 3$ então não existe ponto 2-periódico, pois teríamos a raiz quadrada de um número negativo, ou seja, não real. Agora o que acontece se $\mu = 3$? Bom, para esse caso

teremos $y(0) = y(1)$, pois

$$y(0) = \frac{1+3}{2\cdot 3} = \frac{4}{6} = y(1).$$

Aplicando isto a primeira derivada,

$$F'_\mu(y) = \mu - 2y\mu \text{ implica que } F'_3(y(0)) = F'_3\left(\frac{4}{6}\right) = 3 - 2\cdot 3\cdot\left(\frac{4}{6}\right) = -1.$$

Dessa maneira, pela derivada schwarziana, com $\mu = 3$, $F''_\mu(y) = -2\mu$ e $F'''_\mu(y) = 0$:

$$SF_\mu(y) = -F'''_\mu(y) - \frac{3}{2}(F''_\mu(y))^2.$$

Logo, $SF_3(y(0)) = -54 < 0$, assim, o Teorema 3.4 nos garante que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Em $\mu = 3$, ocorre uma bifurcação de dobramento de período. Embora o ponto fixo ainda seja assintoticamente estável devido à derivada de Schwarz negativa, para $\mu > 3$ ele perde a estabilidade em favor de um ciclo de período 2. Nos resta analisar a estabilidade do 2-ciclo $\{y(0), y(1)\}$ para $\mu > 3$, com base no Teorema 3.5. Note que $F'_\mu(y) = \mu - 2y\mu$. Assim,

$$F'_\mu(y(0)) = \mu(1 - 2y(0)) \quad \text{e} \quad F'_\mu(y(1)) = \mu(1 - 2y(1)),$$

dessa forma,

$$|F'_\mu(y(0))\cdot F'_\mu(y(1))| < 1 \text{ implica em } -1 < \mu^2[1 - 2(y(0) + y(1)) + 4y(0)y(1)] < 1,$$

observe que $y(0) + y(1) = \dfrac{\mu+1}{\mu}$ e $y(0)y(1) = \dfrac{\mu+1}{\mu^2}$. Ou seja,

$$-1 < \mu^2\left[1 - 2\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) + 4\left(\frac{\mu+1}{\mu^2}\right)\right] < 1 \text{ implica em } 3 < \mu^2 - 2\mu < 5,$$

separando em dois casos $3 < \mu^2 - 2\mu$ e $\mu^2 - 2\mu < 5$. Para primeira desigualdade obtemos

$$3 < \mu^2 - 2\mu, \quad \text{assim, } \mu < -1 \text{ ou } \mu > 3.$$

Por outro lado, a segunda desigualdade

$$\mu^2 - 2\mu < 5 \text{ implica em } 1 - \sqrt{6} < \mu < 1 + \sqrt{6},$$

juntando as duas informações $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Mas o que acontece se $\mu = 1 + \sqrt{6}$?

$$|F^2_\mu(y(0))| = |F'_\mu(y(0))\cdot F'_\mu(y(1))| = -1.$$

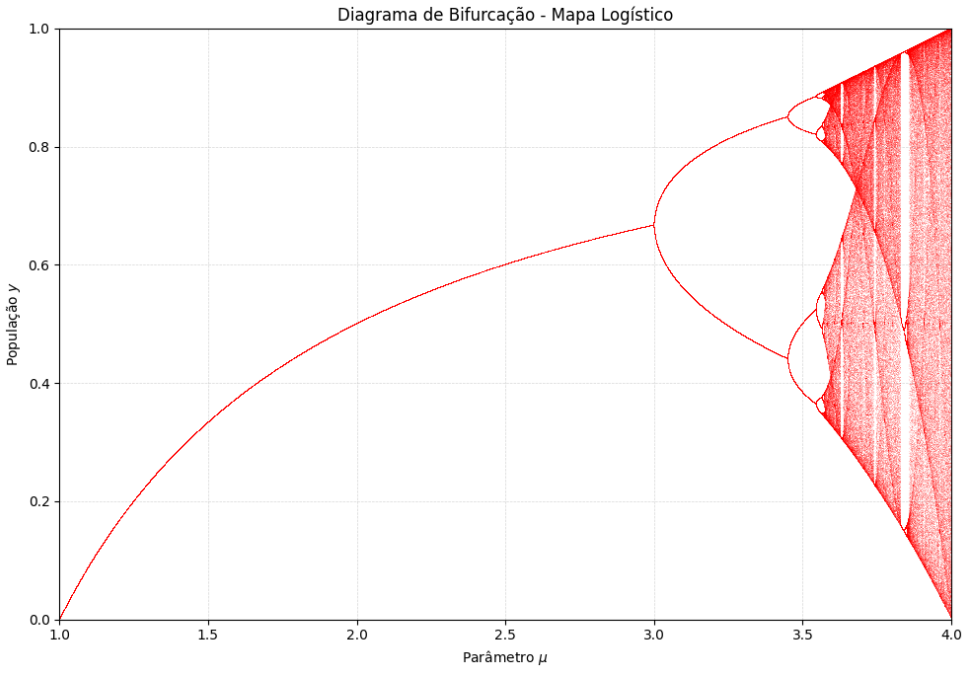
Para o mapa logístico $F_\mu(y) = \mu y(1-y)$, a derivada de Schwarz é sempre negativa para $\mu > 0$.

$$SF_\mu(y) = \frac{F'''_\mu(y)}{F'_\mu(y)} - \frac{3}{2}\left[\frac{F''_\mu(y)}{F'_\mu(y)}\right]^2 = 0 - \frac{3}{2}\left[\frac{-2\mu}{\mu(1-2y)}\right]^2 = \frac{-6}{(1-2y)^2} < 0$$

Dessa forma, o 2-ciclo é atrator. Considerando $\mu_1 = 1 + \sqrt{6}$, pode-se observar que torna-se instável quando $\mu > \mu_1 = 1 + \sqrt{6}$.

Poderíamos prosseguir analisando os ciclos subsequentes, como o 2^2-ciclo ou o 2^3-ciclo; contudo, à medida que ocorre o dobramento de período, a complexidade algébrica para determinar a estabilidade desses pontos aumenta exponencialmente. Nesse cenário, o uso de ferramentas computacionais como o *Python* torna-se indispensável para otimizar a análise e visualizar a convergência do sistema. Com base na referência [5], a equação logística e suas bifurcações exemplificam como sistemas simples podem exibir comportamentos extremamente complexos. O diagrama de bifurcação revela visualmente a funcionalidade do parâmetro μ, ele atua como um 'ajuste de controle' que, ao ultrapassar valores críticos, desencadeia o dobramento de ciclos até atingir o regime de caos determinístico.

Figura 3.4: Diagrama de Bifurcações (Mapa Logístico).



Fonte: Adaptado de Elaydi (2005, p.46-47).

Observa-se, portanto, que a teoria da estabilidade é o alicerce para compreender o comportamento de longo prazo da equação. Ela nos permite distinguir entre o equilíbrio estático, a oscilação periódica e a sensibilidade extrema às condições iniciais, características que definem a transição da ordem para o caos.

Capítulo 4

Equações de Diferenças Lineares de Ordem Superior

O Capítulo 3 foi dedicado ao estudo das equações de diferenças lineares de primeira ordem, apresentando os principais conceitos e resultados que fundamentam sua análise qualitativa. Neste capítulo, ampliaremos esse estudo para as equações de diferenças lineares de ordem superior. A organização seguirá, em linhas gerais, a mesma estrutura adotada anteriormente, porém serão introduzidas novas ferramentas matemáticas que desempenham um papel fundamental na obtenção e na análise de suas soluções. As principais referências utilizadas são [5], [1], [10] e [8].

A forma geral de uma equação de diferenças linear não homogênea de ordem k é dada por

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n). \tag{4.1}$$

No caso particular em que o termo não homogêneo é identicamente nulo, obtém-se a equação de diferenças linear homogênea de ordem k:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0. \tag{4.2}$$

Em ambas as equações, as funções $p_i(n)$, para $i = 1, \ldots, k$, e $g(n)$ são reais e definidas para todo $n \geq n_0$, admitindo-se ainda que $p_k(n) \neq 0,\ n \geq n_0$. Observe que a equação 4.1 é homogênea se, e somente se, $g(n) \equiv 0$; caso contrário, ela é denominada não homogênea.

Além disso, isolando o termo de maior índice, a equação 4.1 pode ser reescrita na forma de recorrência

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - \cdots - p_k(n)y(n) + g(n), \tag{4.3}$$

o que evidencia que cada termo da sequência é determinado pelos k termos anteriores e pelo termo não homogêneo $g(n)$.

A forma de recorrência 4.3 evidencia a relação entre a ordem da equação e a quantidade de condições iniciais necessárias para determinar sua solução. De fato, uma equação de diferenças linear de ordem k requer o conhecimento de k condições iniciais para que todos os termos da sequência possam ser obtidos recursivamente. Em outras palavras, conhecendo-se os valores

$$y(n_0),\, y(n_0+1),\, \ldots,\, y(n_0+k-1),$$

a equação 4.3 permite calcular sucessivamente os demais termos da solução. Nesse caso, diz-se que a equação está associada a um problema de valor inicial (PVI). A ideia é ilustrada no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. Considere a equação $y(n+2) - 2^n y(n+1) + 5y(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, com as seguintes condições iniciais $y(1) = 0$ e $y(2) = 1$. Vamos determinar os termos de $y(3)$ a $y(5)$. O primeiro passo é isolar o termo de maior ordem, logo:

$$y(n+2) = 2^n y(n+1) - 5y(n) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Sabemos que os dois primeiros são $y(1) = 0$ e $y(2) = 1$, então encontrar os termos de $y(3)$ a $y(5)$, basta variar o n. Assim,

$$y(3) = y(1+2) = 2^1 y(2) - 5y(1) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot 1 - 5\cdot 0 + 0 = 2.$$
$$y(4) = y(2+2) = 2^2 y(3) - 5y(2) + \cos(\pi) = 4\cdot 2 - 5\cdot 1 - 1 = 2.$$
$$y(5) = y(3+2) = 2^3 y(4) - 5y(3) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 8\cdot 2 - 5\cdot 2 - 0 = 6.$$

Portanto, $y(3) = 2$, $y(4) = 2$ a $y(5) = 6$. Da mesma forma, como calculamos estes termos, podemos prosseguir e encontrar termos quaisquer, porém é notável que seria uma tarefa desafiadora para fazer o mesmo para uma quantidade maior.

Para contornar essa limitação, é preciso encontrar a solução da equação 4.3, pois através dela podemos calcular o valor de qualquer termo, uma vez que, estaremos sob posse do que é necessário para encontrá-los. No entanto, encontrar uma forma analítica da solução para equações de diferenças de ordem k, para k suficientemente grande, não é algo simples de executar, a menos que as funções coeficientes $p_i(n)$ em 4.1 sejam constantes. De antemão, definamos o que é a solução de uma equação diferença de ordem k.

Definição 4.1. A sequência $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é solução de 4.3 se a satisfaz.

Exemplo 4.2. Mostraremos que a sequência $y(n) = 2^n$ satisfaz a equação

$$y(n+3) - 7y(n+1) + 6y(n) = 0.$$

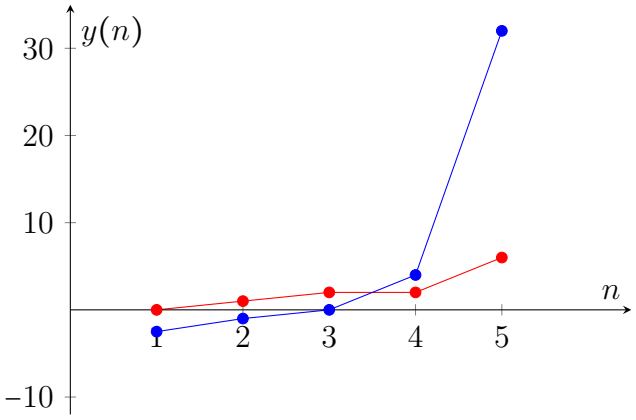
Substituindo 2^n na equação

$$2^{n+3} - 7 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n = 8 \cdot 2^n - 14 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^n = 0.$$

A solução de uma equação de diferenças pode não ser única, isto é, mais de uma sequência pode satisfazer uma determinada equação de diferenças, por exemplo, a equação acima possui outra sequência como solução: $y(n) = 1$. Não obstante, quando é fornecido as condições iniciais a situação muda de figura, visto que, agora, teremos a solução única para o PVI. Pois, condições iniciais diferentes geram conjunto de valores distintos, assim como os problemas de valor inicial em EDO's. Nesse sentido, observe o exemplo,

Exemplo 4.3. considere a equação $y(n+2) = 2^n y(n+1) - 5y(n) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ com esses dois pares de condições iniciais $y(1) = 0$ e $y(2) = 1$; $y(1) = -2,5$ e $y(2) = -1$

Figura 4.1: Poligonais a partir de condições iniciais diferentes.



Fonte: Produção do Autor.

A poligonal em vermelho liga os pontos da equação $y(n+2) = 2^n y(n+1) - 5y(n) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ com $y(1) = 0$ e $y(2) = 1$; enquanto a poligonal em azul une os pontos da mesma equação, porém com $y(1) = -2,5$ e $y(2) = -1$. Dessa forma, é possível compreender visualmente que, de fato, condições iniciais distintas formam um conjunto de valores distintos. Essa ideia é reforçada pelo Teorema 4.1.

Teorema 4.1. Os problemas de valor inicial têm solução única $y(n)$.

Demonstração: Por ser um PVI as k condições iniciais são conhecidas, digamos: $y(i) = a_i \in \mathbb{R}$, para todo $n_0 \leq i \leq n_0 + k - 1$. Além disso, as funções $p_i's$ e $g(n)$ são bem definidas

no domínio, isso possibilita a construção dos outros termos

$$\begin{aligned} y(n_0+k) &= -p_1(n_0)y(n_0+k-1) - \cdots - p_k(n_0)y(n_0) + g(n_0) \\ &= -p_1(n_0)a_{n_0+k-1} - \cdots - p_k(n_0)a_{n_0} + g(n_0) \\ &= a_{n_0+k}. \end{aligned}$$

O cálculo do próximo termo

$$\begin{aligned} y(n_0+k+1) &= -p_1(n_0+1)y(n_0+k) - \cdots - p_k(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= -p_1(n_0+1)a_{n_0+k} - \cdots - p_k(n_0+1)a_{n_0+1} + g(n_0+1) \\ &= a_{n_0+k+1}. \end{aligned}$$

Seguindo da mesma forma, podemos concluir que

$$\begin{aligned} y(n) &= -p_1(n-k)y(n-1) - \cdots - p_k(n-k)y(n-k) + g(n-k) \\ &= -p_1(n-k)a_{n-1} - \cdots - p_k(n-k)a_{n-k} + g(n-k) \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Isto é, a solução existe e podemos determiná-la por recorrência, como feito anteriormente. Nos resta provar a unicidade da solução, para tal intuito, definamos a seguinte equação $z(n) = y_1(n) - y_2(n)$, onde y_1 e y_2 são duas soluções do PVI que compartilham das mesmas condições iniciais, por suposição. Dessa forma,

$$\begin{aligned} z(n) &= y_1(n) - y_2(n) \\ &= -p_1(n-k)y_1(n-1) - \cdots - p_k(n-k)y_1(n-k) + g(n-k) \\ &\quad - \left[-p_1(n-k)y_2(n-1) - \cdots - p_k(n-k)y_2(n-k) + g(n-k)\right] \\ &= -p_1(n-k)\underbrace{\left[y_1(n-1) - y_2(n-1)\right]}_{z(n-1)} - \cdots - p_k(n-k)\underbrace{\left[y_1(n-k) - y_2(n-1)\right]}_{z(n-k)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$z(n) = -p_1(n-k)z(n-1) - \cdots - p_k(n-k)z(n-k). \tag{4.4}$$

Observe que,

$$z(n_0) = y_1(n_0) - y_2(n_0) = 0, \ldots, z(n_0+k-1) = y_1(n_0+k-1) - y_2(n_0+k-1) = 0,$$

ou seja, $z(m) = 0$, para todo $n_0 \leq m \leq n_0 + k - 1$, essas são nossas condições iniciais. Essa

informação, com a abordagem recorrêncial da equação 4.4 resulta em $z(n) = 0$, para todo $n \geq n_0$. Pois,

$$\begin{aligned}
z(n_0 + k) &= -p_1(n_0)z(n_0 + k - 1) - \cdots - p_k(n_0)z(n_0) = -p_1(n_0) \cdot 0 - \cdots - p_k(n_0) \cdot 0 = 0. \\
z(n_0 + k + 1) &= -p_1(n_0 + 1)z(n_0 + k) - \cdots - p_k(n_0 + 1)z(n_0 + 1) = 0. \\
&\vdots \\
z(n) &= -p_1(n - k)z(n - 1) - \cdots - p_k(n - k)z(n - k) = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $y_1(n) - y_2(n) = 0$, para todo $n \geq n_0$, assim, $y_1(n) = y_2(n)$. Portanto, a solução existe e é única. ■

Definição 4.2. Um conjunto de k soluções linearmente independentes de 4.1 é chamado de conjunto fundamental de soluções.

Para auxiliar na verificação da independência linear das soluções usaremos o análogo discreto do *Wronskiano*, o *Casoratiano*. Assim, como no estudo de equações diferenciais ordinárias, com base nas derivadas, o Casoratiano é o resultado obtido no cálculo do determinante da matriz de casorati, a qual é formada pelas evoluções das suas soluções.

Definição 4.3. O Casoratiano $W(n)$ das soluções $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_r(n)$ é dado por:

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \ldots & y_n(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_n(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+r-1) & y_2(n+r-1) & \ldots & y_n(n+r-1) \end{pmatrix}_{r \times r}.$$

Exemplo 4.4. Considere a equação de diferenças $y(n+3) - 7y(n+1) + 6y(n) = 0$. As seguintes sequências $1, (-3)^n$ e 2^n são soluções da equação. Encontre o Casoratiano das sequências.

$$\begin{aligned}
W(n) &= \det \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix} - (-3)^n \begin{vmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{vmatrix} + 2^n \begin{vmatrix} 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} \end{vmatrix} \\
&= (-3)^{n+1}2^{n+2} - (-3)^{n+2}2^{n+1} - (-3)^n 2^{n+2} + (-3)^n 2^{n+1} + (-3)^{n+2}2^n - (-3)^{n+1}2^n \\
&= -12(-3)^n 2^n - 18(-3)^n 2^n - 4(-3)^n 2^n + 2(-3)^n 2^n + 9(-3)^n 2^n + 3(-3)^n 2^n \\
&= -20(-3)^n 2^n = (-1)^{n+1} \cdot 20 \cdot 6^n.
\end{aligned}$$

É natural que nos questionemos, como calcular o casoratiano $W(n)$ ajuda a determinar se uma conjunto de soluções são linearmente independente? Bom, para responder essa questão precisaremos tratar de alguns resultados, como a *fórmula de Abel* e outros resultados.

Lema 4.1 (Lema de Abel)**.** Sejam $y_1(n), \ldots, y_k(n)$ soluções de 4.1 e seja $W(n)$ seu Casoratiano. Então, para $n \geq n_0$:

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} P_k(i) \right) W(n_0). \tag{4.5}$$

Demonstração: Sejam $y_1(n), \ldots, y_k(n)$ soluções de

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0.$$

O casoratiano $W(n+1)$ delas é dado por

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \ldots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k) & y_2(n+k) & \ldots & y_k(n+k) \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Podemos estabeler a relação de recorrência, para substituir a última linha

$$y_i(n+k) = -[p_1(n) y(n+k-1) + \cdots + p_{k-1} y(n+1)] - p_k y_i(n). \tag{4.6}$$

Denote por $L_i = -[p_1(n) y_i(n+k-1) + \cdots + p_{k-1} y_i(n+1)]$, ou seja, uma forma quase linear das evoluções de $y_i(n)$. Dessa forma,

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \ldots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \\ L_1 - p_k y_1(n) & L_2 - p_k y_2(n) & \ldots & L_k - p_k y_k(n) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \ldots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \\ -p_k y_1(n) & -p_k y_2(n) & \ldots & -p_k y_k(n) \end{pmatrix}$$

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \dots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \end{pmatrix} [-p_k(n)]$$

$$= \det \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \dots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \end{pmatrix} [-p_k(n)(-1)^{k-1}]$$

$$= -p_k(n)(-1)^{k-1} W(n).$$

Portanto, $W(n+1) = (-1)^k p_k(n) W(n)$, nada mais que uma equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea. Logo, a solução é

$$W(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^k p_k(i) \right] W(n_0) = (-1)^{k(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) W(n_0).$$

■

Observe que durante a demonstração do Lema anterior tratamos do caso geral homogêneo com as funções $p_k's$ não necessariamente constantes. Porém, para esse caso teremos a seguinte igualdade

$$W(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^k p_k \right] W(n_0) = (-1)^{k(n-n_0)} p_k^{n-n_0} W(n_0).$$

Em consequência da fórmula de Abel abordaremos o Corolário 4.1, que mais tarde servirá de critério para verificação de independência linear.

Corolário 4.1. Suponha que $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. O casoratiano $W(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ se, e somente se, $W(n_0) \neq 0$.

Demonstração: Pelo Lema de Abel, o Casoratiano é dado por

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} P_k(i) \right) W(n_0). \tag{4.7}$$

Por hipótese, $P_k(n) \neq 0$, logo o produtório acima nunca será zero. Assim, $W(n) \neq 0$ se, e somente se, $W(n_0) \neq 0$. Se $W(n_0) = 0$, então $W(n)$ será identicamente nulo para todo $n \geq n_0$. ■

Como mencionado anteriormente, o objetivo é tratar de resultados que nos ajudem

a indicar a independência linear, por meio do casoratiano $W(n)$. Para entender melhor, considere a combinação linear

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \cdots + a_ky_k(n) = 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Podemos gerar um sistema de equações deslocando n:

$$\begin{aligned} a_1y_1(n+1) + a_2y_2(n+1) + \cdots + a_ky_k(n+1) &= 0 \\ a_1y_1(n+2) + a_2y_2(n+2) + \cdots + a_ky_k(n+2) &= 0 \\ &\vdots \\ a_1y_1(n+k-1) + a_2y_2(n+k-1) + \cdots + a_ky_k(n+k-1) &= 0, \end{aligned}$$

esse conjunto pode ser transcrito na forma matricial como $Y(n)V = 0$, onde:

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \dots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Observe que $W(n) = \det Y(n)$, sendo $Y(n)$ é a matriz de casorati. Dessa igualdade, teremos $V = 0$ apenas quando a matriz de casorati for invertível e, uma vez invertível, teremos o $W(n) = \det Y(n) \neq 0$, para todo $n \geq n_0$.

Teorema 4.2. O conjunto de soluções $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ é um conjunto fundamental se, e somente se, para algum $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, o Casoratiano $W(n_0) \neq 0$.

Demonstração: $\Longrightarrow$) Se $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ são soluções fundamentais então são linearmente independente para qualquer que seja n a partir de n_0. Assim,

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k) & y_2(n+k) & \dots & y_k(n+k) \end{pmatrix}_{k\times k}, n \geq n_0.$$

Observe que $Y(n)$ é invertível, pois $y_i's$ são LI para todo $n \geq n_0$. Isso significa que o $W(n) = \det Y(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Dessa forma, de fato, existe n_0 tal que $W(n_0) \neq 0$.

$\Longleftarrow$) Suponha que exista $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $W(n_0) \neq 0$, o que implica em $\det Y(n_0) \neq 0$, logo $Y(n_0)$ é invertível. Note que, se para $c_i's \in \mathbb{R}$, a independência linear ocorrer

$$c_1y_1(n) + c_2y_2(n) + \cdots + c_ky_k(n) = 0, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Em particular para $n = n_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1$, então

$$Y(n_0)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ com } V = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $Y(n_0)$ é invertível, então a única solução é $V = 0$. Pois,

$$Y(n_0)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ implica que } V = Y^{-1}(n_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, as soluções $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ são linearmente independentes e, portanto, formam um conjunto fundamental de soluções. ■

Exemplo 4.5. Verifiquemos se $\{n, 2^n\}$ são soluções fundamentais da equação

$$y(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}y(n+1) + \frac{2n}{n-1}y(n) = 0.$$

Calculamos o Casoratiano $W(n)$

$$W(n) = \det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Escolhendo $n = 2$ para evitar indeterminação no coeficiente:

$$W(2) = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = (2\cdot 8) - (4\cdot 3) = 16 - 12 = 4 \neq 0.$$

Portanto, as soluções são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções.

O princípio da superposição também é válido para equações de diferenças de ordem superior, através dele e da independência linear definiremos a solução geral dessas equações. Para tal finalidade, vejamos a Teorema 4.3.

Teorema 4.3 (Princípio da Superposição)**.** Se $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ são soluções de 4.2, então a combinação linear

$$y(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \cdots + a_ky_k(n).$$

Também é uma solução de 4.2 para constantes reais quaisquer a_i.

Demonstração: Para demonstração adotaremos a notação de somatório para a combinação linear das soluções:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n),$$

ao substituir essa relação na equação 4.2

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0,$$

obtemos,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n+k) + p_1(n)\sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n+k-1) + \cdots + p_k(n)\sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n) \tag{4.8}$$

Precisamos mostrar que o resultado da soma 4.8 é 0, para concluir que, de fato, a combinação linear das soluções também é solução. Para isso, usaremos a hipótese de y_i ser solução, então deve satisfazer a equação 4.2, o que resulta na seguinte relação

$$y_r(n+k) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)y_r(n) = 0, \text{ para todo } 1 \le r \le k. \tag{4.9}$$

Além disso, a relação acima é invariante pelo produto com qualquer que seja a constante real. Assim, usando isso na soma 4.8, depois de organizá-la em relção ao índice da constante a_i, teremos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n+k) + p_1(n)\sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n+k-1) + \cdots + p_k(n)\sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n) \\
&= a_1 y_1(n+k) + a_2 y_2(n+k) + \cdots + a_k y_k(n+k) \\
&+ p_1(n)a_1 y_1(n+k-1) + p_1(n)a_2 y_2(n+k-1) + \cdots + p_1(n)a_k y_k(n+k-1) \\
&\quad \vdots \\
&+ p_k(n)a_1 y_1(n) + p_k(n)a_2 y_2(n) + \cdots + p_k(n)a_k y_k(n) \\
&= a_1[y_1(n+k) + p_1(n)y_1(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_1(n)] \\
&+ a_2[y_2(n+k) + p_1(n)y_2(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_2(n)] \\
&\quad \vdots \\
&+ a_k[y_k(n+k) + p_1(n)y_k(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_k(n)] \\
&= a_1\left[y_1(n+k) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)y_1(n)\right] + a_2\left[y_2(n+k) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)y_2(n)\right] + \cdots + \\
&+ a_k\left[y_k(n+k) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)y_k(n)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Pela relação 4.9, certamente, podemos concluir que $y(n)$ também define uma solução para a equação 4.2. Portanto, o princípio de superposição está demonstrado. ■

Como mencionado anteriormente, defineremos do que se trata a solução geral de uma equação de ordem superior homogênea.

Teorema 4.4. (Teorema Fundamental) Se $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$, então a equação 4.2 admite um conjunto fundamental de soluções.

Demonstração: Para demonstrar esse Teorema é preciso escolher as condições iniciais, as quais defineremos para as $k's$ soluções da seguinte forma

$$y_i(n_0 + i - 1) = 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

As demais evoluções consideraremos nulas. A escolha é feita, de forma proposital para que o Casoratiano das evoluções resulte em um valor diferente de 0. Vejamos,

$$W(n_0) = \begin{vmatrix} y_1(n_0) & y_2(n_0) & \dots & y_k(n_0) \\ y_1(n_0+1) & y_2(n_0+1) & \dots & y_k(n_0+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \dots & y_k(n+k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dessa forma, podemos concluir que a equação admite um conjunto fundamental de soluções, uma vez que o $W(n_0) \neq 0$. ■

Observe que podemos definir outras condições iniciais de forma que o Casoratiano seja não nulo. Isso reforça a existência de mais conjuntos fundamentais de soluções.

Definição 4.4. Seja $\{y_1, \dots, y_k\}$ um conjunto fundamental de soluções. A solução geral de 4.2 é dada por

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n).$$

em que os $a_i's$ são constantes reais arbitrárias.

Teorema 4.5. O conjunto S de todas as soluções de 4.2 é um espaço vetorial.

Demonstração: Usaremos aqui um dos atalhos conceituais, que a teoria da álgebra linear nos oferece: para provar que um conjunto é espaço vetorial, basta mostrar que este é subespaço vetorial, ou seja, mostrar que o vetor nulo está nele, que é fechado para soma e para produto por escalar. A sequência $y(n) = 0$ (vetor nulo) é solução da equação 4.2, logo $0 \in S$. Demonstramos anteriormente que vale o princípio da superposição, dessa forma, podemos concluir que S é fechado para soma e produto por escalar. Assim, S é um subespaço vetorial e, portanto, um espaço vetorial. ■

4.1 Equações de Diferenças Escalares Lineares Homogêneas

Para está seção iremos focar nossos estudos para equações de diferenças lineares homogêneas cujas as funções de coeficientes são constantes. Para tal proposito, consideremos a equação de diferença de ordem k

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + p_2 y(n+k-2) + \cdots + p_k y(n) = 0, \tag{4.10}$$

em que os $p_i's$ são constantes e, para garantir que a equação acima seja de ordem k é necessário e suficiente que $p_k \neq 0$.

Como estamos tratando da equação homogênea podemos observar que a sequência $y(n) = 0$ é solução da equação 4.10, porém para encontrar o seu conjunto fundamental de soluções focaremos nas soluções não nulas. Para tanto, suponhamos que as soluções do tipo $y(n) = \lambda^n$, onde λ é um número complexo. Assim,

$$\begin{aligned} y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + p_2 y(n+k-2) + \cdots + p_k y(n) &= 0 \\ \lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + p_2 \lambda^{n+k-2} + \cdots + p_k \lambda^n &= 0 \\ \lambda^n \left(\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_k \right) &= 0, \end{aligned}$$

como mencionado, solucões nulas não nos interessam, dessa forma a equação resultará em

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_k = 0. \tag{4.11}$$

A equação acima recebe o nome de *equação característica* e as soluções desta equação são denominadas de *raízes características*. Note que, como $p_k \neq 0$, nenhuma das raízes características é igual 0. Mas, por quê? suponha por contradição que $\lambda = 0$ seja uma das raízes da equação característica, dessa forma

$$\begin{aligned} 0^k + p_1 0^{k-1} + p_2 0^{k-2} + \cdots + p_{k-1} 0 + p_k &= 0 \\ p_k &= 0, \end{aligned}$$

contradição, uma vez que, $p_k \neq 0$ por definição. De fato, podemos concluir que nenhuma das raízes características é 0.

4.1.1 Solução Geral

Para prosseguirmos com os nossos estudos analisaremos a forma da solução geral da equação 4.10 a partir das relações entre as raízes características.

Lema 4.2. (Determinante de Vandermonde) Se a

$$y_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}_{k\times k}$$

então,

$$y_k = \prod_{1\leq i<j\leq k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Demonstração: Vamos demonstra o Lema em questão por meio do princípio de indução sobre $k \geq 2$. Para $k = 2$ a afirmação é verdadeira, pois

$$y_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 = \prod_{1\leq i<j\leq 2} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Suponha por hipótese de indução que a afirmação seja verdadeira para um certo k, provemos para seu sucessor $(k+1)$. Assim,

$$y_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k & \lambda_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} & \lambda_{k+1}^{k-1} \\ \lambda_1^{k} & \lambda_2^{k} & \cdots & \lambda_k^{k} & \lambda_{k+1}^{k} \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$$

Vamos fazer a seguinte para cada linha L_r com $2 \leq r \leq k$ faremos a substituição $\lambda_{k+1}L_{r-1} - L_r$. Assim,

$$y_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_{k+1} - \lambda_1 & \lambda_{k+1} - \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k+1} - \lambda_k & \lambda_{k+1} - \lambda_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{k+1}\lambda_1^{k-2} - \lambda_1^{k-1} & \lambda_{k+1}\lambda_2^{k-2} - \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k+1}\lambda_k^{k-2} - \lambda_k^{k-1} & \lambda_{k+1}\lambda_{k+1}^{k-2} - \lambda_{k+1}^{k-1} \\ \lambda_{k+1}\lambda_1^{k-1} - \lambda_1^{k} & \lambda_{k+1}\lambda_2^{k-1} - \lambda_2^{k} & \cdots & \lambda_{k+1}\lambda_k^{k-1} - \lambda_k^{k} & \lambda_{k+1}\lambda_{k+1}^{k-1} - \lambda_{k+1}^{k+1} \end{vmatrix}$$

$$y_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_{k+1}-\lambda_1 & \lambda_{k+1}-\lambda_2 & \cdots & \lambda_{k+1}-\lambda_k & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{k+1}\lambda_1^{k-2}-\lambda_1^{k-1} & \lambda_{k+1}\lambda_2^{k-2}-\lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k+1}\lambda_k^{k-2}-\lambda_k^{k-1} & 0 \\ \lambda_{k+1}\lambda_1^{k-1}-\lambda_1^{k} & \lambda_{k+1}\lambda_2^{k-1}-\lambda_2^{k} & \cdots & \lambda_{k+1}\lambda_k^{k-1}-\lambda_k^{k} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ (\lambda_{k+1}-\lambda_1) & (\lambda_{k+1}-\lambda_2) & \cdots & (\lambda_{k+1}-\lambda_k) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2}(\lambda_{k+1}-\lambda_1) & \lambda_2^{k-2}(\lambda_{k+1}-\lambda_2) & \cdots & \lambda_k^{k-2}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) & 0 \\ \lambda_1^{k-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_1) & \lambda_2^{k-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_2) & \cdots & \lambda_k^{k-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando a expansão de determinantes a partir da coluna $(k+1)$ e pondo em evidência os termos $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)$, para $1 \le i \le k$. teremos a seguinte igualdade

$$y_{k+1} = \prod_{1\le i\le k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)y_k = \prod_{1\le i\le k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\prod_{1\le i<j\le k}(\lambda_j-\lambda_i) = \prod_{1\le i<j\le k+1}(\lambda_j-\lambda_i),$$

portanto, a afirmação é válida pelo princípio de indução. ■

O Lema 4.2 nos auxiliará na demonstração do Teorema 4.6, o qual vos fala da solução geral para as raízes características distintas.

Teorema 4.6. Se as raízes características $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são distintas, então o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções.

Demonstração: Para demonstrar o Teorema é suficiente que mostremos $W(0) \neq 0$. Note que $W(0)$ coincide com o determinante de Vandermonde, pois:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le k}(\lambda_j-\lambda_i),$$

como as raízes características são distintas, isto é $\lambda_j \neq \lambda_i$ desde que $j \neq i$ então, de fato, $W(0) \neq 0$. Dessa forma, $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções, consequentemente, a solução geral de 4.10 é

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_i^n, \text{ com } a_i's \text{ números complexos.} \tag{4.12}$$

■

Para o caso de raízes características com multiplicidade não necessariamente igual 1, faremos uma abordagem por meio da relação do operador avanço

$$E^k y(n) = y(n+k).$$

Assim, a equação 4.10 pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + p_2 y(n+k-2) + \cdots + p_k y(n) &= 0 \\ E^k y(n) + p_1 E^{k-1} y(n) + p_2 E^{k-2} y(n) + \cdots + p_k y(n) &= 0 \\ \left(E^k + p_1 E^{k-1} + p_2 E^{k-2} + \cdots + p_k\right) y(n) &= 0 \end{aligned}$$

$$h(E)y(n) = 0 \tag{4.13}$$

Sabemos que a solução geral dependerá da solução da equação $h(\lambda) = 0$ que nos dará as raízes características, não necessariamente distintas. Dessa forma, suponha que as raízes características sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ com multiplicidade $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Neste caso, a equação 4.13 é equivalente a:

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}\cdots(E-\lambda_r)^{m_r} y(n) = 0 \tag{4.14}$$

Observe que se $\Psi_1(n), \Psi_2(n), \ldots, \Psi_{m_i}(n)$ são soluções de $(E-\lambda_i)^{m_i} y(n) = 0$ então estes também serão solução de 4.14, pois

$$\begin{aligned} &(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}\cdots(E-\lambda_r)^{m_r}\Psi_s(n) \\ &(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}\cdots(E-\lambda_{i-1})^{m_{i-1}}(E-\lambda_{i+1})^{m_{i+1}}(E-\lambda_r)^{m_r}\underbrace{(E-\lambda_i)^{m_i}\Psi_s(n)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Uma vez capazes de encontra os conjuntos fundamentais de soluções de cada um desses fatores $(E-\lambda_i)^{m_i} y(n) = 0$, com $1 \le i \le r$, encontraremos o conjunto fundamental de soluções da equação 4.14, por meio da união dos conjuntos fundamentais de soluções dos fatores expressados.

Teorema 4.7. O conjunto $G_i = \left\{\lambda_i^n, n\lambda_i^{n-1}, \frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{n-2}, \ldots, \frac{n!}{(m_i-1)!(n-m_i+1)!}\lambda_i^{n-m_i+1}\right\}$ é um conjunto fundamental de soluções de $(E-\lambda_i)^{m_i} y(n) = 0$.

Demonstração: Para demonstrar o Teorema precisamos mostrar que o Casoratiano $W(0) \neq 0$ e que, de fato, os elementos de G_i são soluções da equação

$$(E-\lambda_i)^{m_i} y(n) = 0.$$

Assim,

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{m_i-1} & \frac{m_i-1}{1!}\lambda_i^{m_i-2} & \cdots & \frac{1}{2!3!\cdots(m_i-2)!} \end{vmatrix} = \frac{1}{2!3!\cdots(m_i-2)!} \neq 0.$$

Nos resta mostrar que $\frac{n!}{(n-r)!r!}\lambda_i^{n-r}$ é solução de $(E-\lambda_i)^{m_i}y(n) = 0$, assim:

$$\begin{aligned}(E-\lambda_i)^{m_i}\frac{n!}{(n-r)!r!}\lambda_i^{n-r} &= \lambda_i^{n-r}(E-\lambda_i)^{m_i}\frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \lambda_i^{n-r}(\lambda_i E-\lambda_i)^{m_i}\frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \lambda_i^{n+m_i-r}(E-I)^{m_i}\frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \lambda_i^{n+m_i-r}\Delta^{m_i}\frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto em questão é um conjunto fundamental de soluções. ■

O Teorema 4.8 aborda um outro tipo de conjunto fundamental de soluções de (4.14), o qual é aparentemente mais simples que o proposto anteriormente.

Teorema 4.8. O conjunto $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções de 4.14.

Demonstração: A demonstração detalhada deste resultado pode ser consultada na referência Luis (2006, *p.* 70 – 71). ■

Nos dois últimos teoremas encontramos conjuntos fundamentais de soluções para o fator $(E-\lambda_i)^{m_i}y(n) = 0$, o próximo passo é determinar o conjunto fundamental de soluções da equação (4.14), dessa forma emerge o Teorema 4.9.

Teorema 4.9. O conjunto

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i,$$

é um conjunto fundamental de soluções de 4.14.

Demonstração: Sabemos que as funções dos conjuntos $G_i's$ do Teorema 4.7 são soluções de 4.14. Agora,

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \lambda_1 & 1 & \cdots & \lambda_r & 1 & \cdots \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \cdots & \lambda_r^2 & 2\lambda_r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-2} & \cdots & \lambda_r^{k-1} & (k-1)\lambda_r^{k-2} & \cdots \end{vmatrix}_{k\times k} = \prod_{1\le i<j\le k} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_j m_i}.$$

Faremos a análise semelhante ao Teorema das raízes distintas, observer que as raízes $\lambda_j \neq \lambda_j$ sempre que $j \neq i$, dessa forma conseguimos garantir que o $W(0) \neq 0$. Assim, G define um conjunto fundamental de soluções de 4.14. ■

Acabamos de realizar uma tarefa crucial para encontrar a solução geral para equações com raízes características não necessariamente todas distintas, o próximo passo é expressar a solução geral.

Teorema 4.10. A solução geral de 4.14 é dada por

$$y(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \cdots + a_{i,m_i-1}n^{m_i-1}),$$

em que os $a_{i,,m_i-1}$ são constantes complexas.

Demonstração: A demonstração é imediata a partir do Teorema 4.9 e da definição da solução geral de uma equação de diferenças. No mais, basta agrupar os termos correspondentes a cada raíz característica e suas respectivas multiplicidades, dessa forma a solução geral surge naturalmente, consolidando a estrutura analítica apresentada neste Teorema. ■

4.2 Equações de Diferenças Escalares Lineares Não Homogêneas

Para continuar o estudo das equações de diferenças de ordem superior com coeficientes constantes, passamos agora a analisar o caso em que a equação é não homogênea. Esse tipo de equação descreve sistemas onde há uma influência externa agindo sobre o modelo temporal.

Definição 4.5. Chamamos de equação de diferenças linear não homogênea de ordem k com coeficientes constantes a relação da forma

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + p_2 y(n+k-2) + \cdots + p_k y(n) = g(n), \tag{4.15}$$

em que os coeficientes $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são constantes reais, com $p_k \neq 0$, e $g(n)$ é uma sequência dada, não identicamente nula.

Diferentemente do que ocorre no cenário homogêneo, as soluções de 4.15 não constituem um espaço vetorial. Isso significa que a soma de duas soluções não resulta em uma nova solução, tampouco a multiplicação por um escalar conserva essa propriedade. Contudo, o Teorema fundamental a seguir nos mostra como podemos caracterizar e construir a solução geral dessa equação utilizando a estrutura do caso homogêneo.

Teorema 4.11. Se $y_1(n)$ e $y_2(n)$ são soluções de 4.1 então $y_1(n) - y_2(n)$ é solução de 4.2.

Demonstração: Já que y_1 e y_2 são soluções de 4.1, assim

$$y_1(n+k) + p_1(n)y_1(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_1(n) = g(n)$$
$$y_2(n+k) + p_1(n)y_2(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_2(n) = g(n),$$

subtraindo e reorganizando com base nas funções coeficientes

$$[y_1(n+k) - y_2(n+k)] + \cdots + p_k(n)[y_1(n) - y_2(n)] = 0,$$

de fato, $y_1(n) - y_2(n)$ é solução de 4.2. ■

Este resultado nos auxiliará na demonstração da solução geral, a qual é abordada pelo teorema a seguir.

Teorema 4.12 (Estrutura da Solução Geral)**.** Se $\{y_1, \ldots, y_2\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogênea associada e $y_p(n)$ é uma solução particular da equação não homogênea 4.15, então a solução geral da equação 4.15 é dada por:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(n) + y_p(n) \tag{4.16}$$

com α_i complexo, $1 \leq i \leq k$. Em que $y_h(n)$ é a solução geral da equação homogênea associada e $y_p(n)$ é uma solução particular da equação não homogênea 4.15.

Demonstração: Represente-se por $y(n)$ uma solução qualquer da equação não homogênea 4.15. Por linearidade, a diferença $y(n) - y_p(n)$ é solução da equação homogênea associada. Sendo assim, essa diferença pertence ao espaço de soluções da homogênea e pode ser expressa de forma única como combinação linear do seu sistema fundamental $\{y_1, \ldots, y_2\}$, ou seja:

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n) \tag{4.17}$$

para a_i complexo, com $1 \leq i \leq k$, o que conclui a demonstração. ■

4.2.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

Como já sabemos determinar a solução complementar $y_h(n)$ através das raízes do polinômio característico, o nosso foco principal se resume a encontrar uma solução particular $y_p(n)$. Embora existam métodos gerais baseados em operadores inversos ou variação de parâmetros, o *Método dos Coeficientes Indeterminados* destaca-se pela sua simplicidade algébrica.

Este método consiste em realizar palpites estruturados sobre o formato que a solução particular deve assumir, baseando-se estritamente na forma matemática apresentada pelo termo forçante $g(n)$. Ele é perfeitamente aplicável quando $g(n)$ envolve combinações lineares ou produtos de funções elementares. Com a finalidade de justificar a funcionalidade do método dos coeficientes a determinar trataremos de um operador polinômial, o polinômio anulador.

Definição 4.6. Um operador polinômial $N(E)$, onde E é o operador avanço, é dito anulador de $g(n)$ se $N(E)g(n) = 0$.

Exemplo 4.6. O polinômio $N(E) = E - 5$ é o anulador de $g(n) = 5^n$, pois

$$N(E)g(n) = (E-5)5^n = E5^n - 5(5^n) = 5^{n+1} - 5^{n+1} = 0.$$

Exemplo 4.7. O polinômio $N(E) = E + 1$ é o anulador de $g(n) = \cos(n\pi)$, pois

$$\begin{aligned} N(E)g(n) = (E+1)\cos(n\pi) &= E\cos(n\pi) + \cos(n\pi) \\ &= \cos((n+1)\pi) + \cos(n\pi) \\ &= -\cos(n\pi) + \cos(n\pi) = 0. \end{aligned}$$

Como já vimos, as equações estudadas nesta seção podem ser reescritas na forma abaixo, mas agora com a presença da função $g(n)$

$$h(E)y(n) = g(n). \tag{4.18}$$

se aplicarmos o polinômio anulador de $g(n)$, teremos a seguinte relação

$$N(E)h(E)y(n) = 0, \tag{4.19}$$

com isso, teremos dois tipos de raízes características: as raízes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ provenientes de:

$$h(E)y(n) = 0, \tag{4.20}$$

e as raízes $\mu_1, \ldots, \mu_k$ associadas a equação:

$$N(E)y(n) = 0. \tag{4.21}$$

Observação 4.1. Nenhum dos λ_i é igual a qualquer um dos μ_i. Neste caso, escreva $y_p(n)$ a solução geral com constantes a determinar. Substituindo a solução particular estimada em 4.5, encontramos os valores das constantes.

Observação 4.2. $\lambda_i = \mu_j$ para alguns i, j. Neste caso, o conjunto de raízes características de 4.19 é igual à união dos conjuntos $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_j\}$ e, consequentemente, contém raízes de multiplicidade maior do que os dois conjuntos individuais de raízes características. Para determinar uma solução particular $y_p(n)$, primeiro encontramos a solução geral de 4.19 e depois descartamos todos os termos que aparecem em $y_h(n)$. Em seguida, procedemos como no Caso 1 para avaliar as constantes.

Exemplo 4.8. Considere a seguinte equação $(E^2 - 4)y(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, o objetivo é encontrar sua solução geral, sabendo que o polinômio anulador de $g(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ é $N(E) = E^2 + 1$.

Aplicando a dinâmica apresentada anteriormente precisaremos encontras as raízes característica λ_1 e λ_2, bem como as raízes μ_1 e μ_2. Para tanto, precisamos resolver, respectivamente, as equações

$$h(E)y(n) = 0 \quad \text{e} \quad N(E)y(n) = 0. \tag{4.22}$$

Ou equivalentemente,

$$(E^2 - 4)y(n) = 0 \quad \text{e} \quad (E^2 + 1)y(n) = 0.$$

A primeira equação fornece as seguintes raízes características $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, enquanto a segunda equação $\mu = i$ e $\mu = -i$. Como se tratam de equações homogêneas temos que a solução geral proposta no exemplo será a soma das soluções gerais das equações 4.22. Assim, a solução da primeira equação será dada por

$$y_h(n) = a_1 2^n + a_2(-2)^n, \text{ com } a_1 \text{ e } a_2 \text{ complexos.}$$

As constantes a_1 e a_2 podem ser determinandas por meio das condições iniciais, caso houvessem. Já para segunda temos raízes complexas $(\pm i)$, dessa forma, teremos a subse-

quente solução

$$y_p(n) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \text{ com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ complexos.}$$

Diferentemente da primeira equação, a segunda é possível determinar as constantes c_1 e c_2, basta substituir na equação proposta no exemplo

$$\begin{aligned}(E^2-4)y_p(n) &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ (E^2-4)[c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)] &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ -5c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 5c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ c_1 = \frac{-1}{5} \text{ e } c_2 &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, a solução particular é igual a $y_p(n) = \dfrac{-\cos(n\pi)}{5}$. Logo,a solução geral da equação proposta no exemplo será

$$y(n) = a_1 2^n + a_2(-2)^n + \frac{-\cos(n,\pi)}{5}, \text{ com } a_1 e\ a_2 \text{ complexos.}$$

O exemplo anterior ilustra a dinâmica do polinômio anulador aplicado à função externa $g(n)$ e explica o funcionamento do método dos coeficientes a determinar. Caso o processo não tenha ficado claro, basta analisar a forma proposta para $y_p(n)$ e observar como esta surge a partir das raízes do polinômio anulador $N(E)$; é justamente essa relação que justifica a existência da tabela de soluções estruturadas. Nesse sentido, a Tabela 4.1 apresenta os palpites referentes à forma analítica da solução particular e servirá de guia para a aplicação do método.

Tabela 4.1: Soluções Particulares $y_p(n)$.

$g(n)$	$y_p(n)$
a^n	$c_1 a^n$
n^k	$c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k$
$n^k a^n$	$(c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k)a^n$
$\sin(bn),\ \cos(bn)$	$c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$
$a^n \sin(bn),\ a^n \cos(bn)$	$(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn))a^n$
$a^n n^k \sin(bn),\ a^n n^k \cos(bn)$	$a^n(c_0 + \cdots + c_k n^k)\sin(bn) + a^n(d_0 + \cdots + d_k n^k)\cos(bn)$

Fonte: Adaptado de Elaydi (2005, p. 86).

Para compreender o funcionamento deste método, apresentaremos dois exemplos. O

primeiro caso aborda a situação em que a solução da parte homogênea não compartilha termos com a parte não homogênea $g(n)$. Já o segundo caso ilustra o cenário em que ocorre o inverso, ou seja, quando há sobreposição entre as soluções.

Exemplo 4.9. Determine a solução geral da equação de diferenças de segunda ordem dada por:

$$y(n+2) + 7y(n+1) + 12y(n) = n5^n.$$

Primeiramente, buscamos a solução da equação homogênea associada resolvendo a equação característica

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0, \text{ isto é, } (\lambda+3)(\lambda+4) = 0.$$

Logo, as raízes características são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -4$. Assim, a solução da parte homogênea é

$$y_h(n) = a_1(-3)^n + a_2(-4)^n,$$

observando a função $g(n) = n5^n$, notamos que sua base exponencial é 5. Como $\lambda = 5$ não é raiz da equação característica, podemos propor uma solução particular com a seguinte forma

$$y_p(n) = (c_0 + c_1 n)5^n,$$

substituindo $y_p(n)$ diretamente na equação original 4.9, obtemos

$$(c_0 + c_1(n+2))5^{n+2} + 7(c_0 + c_1(n+1))5^{n+1} + 12(c_0 + c_1 n)5^n = n5^n,$$

podemos simplificar a expressão dividindo todos os termos por 5^n

$$25(c_0 + c_1 n + 2c_1) + 35(c_0 + c_1 n + c_1) + 12(c_0 + c_1 n) = n$$

$$(25c_0 + 50c_1 + 25c_1 n) + (35c_0 + 35c_1 + 35c_1 n) + (12c_0 + 12c_1 n) = n.$$

Agrupando os termos semelhantes em relação à variável discreta n, temos

$$(72c_1)n + (72c_0 + 85c_1) = n.$$

Para que essa igualdade seja válida para todo $n \in \mathbb{N}$, montamos o sistema linear por igualdade de polinômios

$$\begin{cases} 72c_1 = 1 \\ 72c_0 + 85c_1 = 0 \end{cases}$$

observe que $c_1 = \frac{1}{72}$, substituindo c_1 na segunda equação

$$72c_0 + 85\left(\frac{1}{72}\right) = 0, \text{ logo } 72c_0 = -\frac{85}{72}, \text{ ou seja, } c_0 = -\frac{85}{5184}.$$

Portanto, a nossa solução particular é $y_p(n) = \left(-\frac{85}{5184} + \frac{n}{72}\right)5^n$. Unindo as partes, a solução geral da equação é dada por

$$y(n) = a_1(-3)^n + a_2(-4)^n + \left(-\frac{85}{5184} + \frac{n}{72}\right)5^n.$$

Caso as condições iniciais fossem fornecidas poderíamos encontrar os valores das constantes a_1 e a_2.

Exemplo 4.10. Considere a equação de diferenças dada pelo operador de deslocamento

$$(E-3)(E+2)y(n) = 5(3^n). \tag{4.23}$$

Reescrevendo o operador na forma polinomial tradicional, temos a equação característica

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Portanto, a solução complementar assume a forma:

$$y_h(n) = c_1 3^n + c_2(-2)^n.$$

Analisando o termo não homogêneo $g(n) = 5(3^n)$, vemos que a base da exponencial é 3. Contudo, note que $\lambda = 3$ já é uma das raízes da nossa equação homogênea, o que caracteriza o Caso 2. Se tentássemos um palpite simples da forma $a_2 \cdot 3^n$, ao substituir na equação, o resultado seria zero.

Para corrigir essa redundância, multiplicamos a nossa proposta original por n. Assim, definimos a nossa candidata à solução particular como

$$y_p(n) = a_2 n 3^n,$$

substituindo $y_p(n)$ na forma expandida da equação de diferenças:

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5(3^n).$$

Obtemos,

$$a_2(n+2)3^{n+2} - a_2(n+1)3^{n+1} - 6a_2 n 3^n = 5(3^n),$$

colocando os fatores em evidência e simplificando a potência de 3^n em ambos os lados

$$a_2(n+2)\cdot 9 - a_2(n+1)\cdot 3 - 6a_2 n = 5$$

$$9a_2 n + 18a_2 - 3a_2 n - 3a_2 - 6a_2 n = 5,$$

somando os termos que contêm n, observamos que eles se anulam perfeitamente, o que valida a correção efetuada pela multiplicação por n. Resta a seguinte equação linear para o coeficiente

$$15a_2 = 5, \text{ isto é, } a_2 = \frac{1}{3},$$

logo, a nossa solução particular é

$$y_p(n) = \frac{n3^n}{3} = n3^{n-1}.$$

Finalmente, a nossa solução geral é construída pela soma das soluções complementar e particular,

$$y(n) = c_1 3^n + c_2(-2)^n + n3^{n-1}.$$

Um outro método que nos auxilia no estudo das soluções gerais de equações com coeficientes constantes é o método da função geradora, a qual abordaremos na próxima seção.

4.2.2 Método das Funções Geradoras

O método das funções geradoras constitui uma abordagem analítica para a resolução de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes. A ideia central deste método consiste em associar os termos de uma sequência discreta aos coeficientes do desenvolvimento em série de potências de uma função contínua. Dessa forma, as operações de deslocamento temporal na equação de diferenças transformam-se em manipulações algébricas sobre a função associada. Para nos auxiliar neste estudo utizamos os tocantes excertos referentes a solução de equações por recorrências presentes nas referências [1] e [10].

Antes de formalizarmos o procedimento de resolução, faz-se necessário estabelecer os conceitos fundamentais sobre séries de potências e a definição estrita de uma função geradora.

Definição 4.7. Uma série de potências é uma série infinita da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4.24}$$

em que os coeficientes a_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ são números reais ou complexos e x designa uma variável independente contínua.

Sob este arcabouço, definimos a ferramenta principal desta seção: As *funções geradoras*, também conhecidas por *função geratriz*.

Definição 4.8. A função geradora para uma sequência de números $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ é a função $f(x)$ definida formalmente através da série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4.25}$$

Exemplo 4.11. Considere a equação de diferenças de segunda ordem dada por

$$(E+2)(E-3)y(n) = 5(3)^n,$$

com as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$. Expandindo o produto dos operadores de avanço, obtemos a forma equivalente:

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5(3)^n. \tag{4.26}$$

A qual devemos multiplicar por x^{n+2}, pois a ordem da nossa equação é 2, caso fosse de ordem k, deveríamos multiplicar por x^{n+k}. Assim,

$$y(n+2)x^{n+2} - y(n+1)x^{n+2} - 6y(n)x^{n+2} = 5(3)^n x^{n+2}.$$

No presente momento, imagine que estivéssemos calculando o valor da sequência para cada n e, depois, somássemos todos esses termos ponderados por potências de x continuadamente. Dessa forma, teríamos a seguinte igualdade que define a função geradora $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n+2)x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} y(n+1)x^{n+2} - 6\sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^{n+2} = 5x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

Definimos a função geradora $f(x)$ associada à sequência $y(n)$ como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n.$$

Aplicando as propriedades de deslocamento para as condições iniciais nulas ($y(0) =$

$y(1) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} y(n+1)x^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x^{n+1} + y(0)x - y(0)x \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n - y(0)x \\ &= xf(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} y(n+2)x^{n+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n - y(0) - y(1)x \\ &= f(x) - y(0) - y(1)x \\ &= f(x).\end{aligned}$$

$$(1-3x)\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = (1-3x)(1+3x+9x^2+27x^3+\cdots) = 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \frac{1}{1-3x}.$$

Substituindo na equação teremos a seguinte igualdade

$$f(x) - xf(x) - 6x^2 f(x) = \frac{5x^2}{1-3x}, \text{ logo } f(x)(1-3x)(1+2x) = \frac{5x^2}{1-3x}.$$

Isolando a função geradora $f(x)$,

$$f(x) = \frac{5x^2}{(1-3x)^2(1+2x)}, \tag{4.27}$$

Para efetuar a transformada inversa, expandimos a expressão em frações parciais

$$f(x) = \frac{5x^2}{(1-3x)^2(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{(1-3x)^2} + \frac{C}{1+2x}.$$

Multiplicando pelo denominador comum, determinamos as constantes pelos valores convenientes de x,

$$5x^2 = A(1-3x)(1+2x) + B(1+2x) + C(1-3x)^2.$$

Para $x = \frac{1}{3}$, teremos $B = \frac{1}{3}$, agora, se tomarmos $x = -\frac{1}{2}$ obtemos $C = \frac{1}{5}$ e, por último se $x = 0$ então $A = -\frac{8}{15}$. Substituindo as constantes em $f(x)$ e expandindo cada termo de

volta em séries de potências

$$f(x) = -\frac{8}{15}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^n x^n + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.$$

Coletando o coeficiente de x^n, obtemos a solução analítica geral da equação de diferenças

$$y(n) = -\frac{8}{15}(3^n) + \frac{1}{3}(n+1)3^n + \frac{1}{5}(-2)^n.$$

Ou melhor,

$$y(n) = n \cdot 3^{n-1} - \frac{3^n}{5} + \frac{(-2)^n}{5}$$

Com condições iniciais $y(0) = y(1) = 0$, mas vale a pena lembrar que para condições iniciais distintas teríamos soluções distintas.

4.3 Estabilidade de Equações de Diferenças Escalares de Ordem Superior

O estudo do comportamento qualitativo e da estabilidade das soluções de equações de diferenças escalares de ordem superior possui fundamental importância na análise de modelos discretos. Embora seja teoricamente possível converter uma equação escalar de ordem superior em um sistema de equações de primeira ordem de dimensão equivalente, na prática, essa abordagem nem sempre é viável ou conveniente. A análise direta da equação escalar preserva a estrutura original dos parâmetros e facilita a aplicação de critérios algébricos.

Considere a equação de diferenças linear autônoma de ordem k dada por

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + p_2 y(n+k-2) + \cdots + p_k y(n) = 0, \tag{4.28}$$

onde os coeficientes p_i são números reais para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, com $p_k \neq 0$. O comportamento assintótico das soluções da equação 4.28 é governado exclusivamente pelas raízes do seu polinômio característico associado

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_k = 0 \tag{4.29}$$

A partir do comportamento das raízes características λ_i, estabelecemos os critérios fundamentais de estabilidade para a solução nula.

Teorema 4.13. O ponto de equilíbrio de 4.28 é dito

i. **Estável:** Se todas as raízes características λ_i de 4.29 satisfizerem $|\lambda_i| \leq 1$, e para as

raízes com $|\lambda_i| = 1$ (raízes sobre o círculo unitário), a sua multiplicidade algébrica for igual a 1 (raízes simples).

ii. **Assintoticamente Estável:** Se todas as raízes características satisfizerem $|\lambda_i| < 1$. Isto é, todas as raízes devem estar localizadas estritamente no interior do círculo unitário do plano complexo. Neste caso, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = y^*$$

iii. **Instável:** Se existir pelo menos uma raiz característica tal que $|\lambda_i| > 1$, ou se alguma raiz com $|\lambda_i| = 1$ possuir multiplicidade algébrica maior do que 1.

Demonstração: As demonstrações dos resultados propostos pelos itens i e ii podem ser encontrados em Luis (2006, *p.* 84). A veracidade do item (iii) decorre da estrutura da solução geral, composta por combinações lineares de termos da forma

$$n^q\lambda_i^n, \text{ com } 0 \le q \le m_i - 1.$$

Se $|\lambda_i| > 1$, o termo λ_i^n cresce exponencialmente para o infinito quando n tende ao infinito. Já se $|\lambda_i| = 1$ com multiplicidade $m_i > 1$, a presença do termo polinomial n^q (com $q \ge 1$) força

$$|n^q\lambda_i^n| = n^q \longrightarrow +\infty.$$

Em ambos os casos, a solução diverge, o que caracteriza a instabilidade do sistema. ■

Exemplo 4.12. Considere a equação de diferenças linear não homogênea de segunda ordem:

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{1}{2}y(n) = 1. \tag{4.30}$$

O ponto de equilíbrio y^* é obtido assumindo a solução constante $y(n+2) = y(n+1) = y(n) = y^*$:

$$y^* - y^* + \frac{1}{2}y^* = 1 \implies \frac{1}{2}y^* = 1 \implies y^* = 2.$$

Para analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio $y^* = 2$ utilizando a Definição 4.13, extrai-se a equação característica a partir da componente homogênea associada

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0.$$

Dessa forma, encontram-se as seguintes raízes complexas conjugadas

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1/2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{2} \implies \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

Para verificar se as raízes estão localizadas no interior do círculo unitário, calcula-se o módulo (norma) do número complexo:

$$|\lambda_i| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,707.$$

Como o módulo das raízes satisfaz estritamente a condição $|\lambda_i| = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$, ambas estão localizadas no interior do círculo unitário. Portanto, com base no item **ii** da Definição 4.13, o ponto de equilíbrio $y^* = 2$ é assintoticamente estável, assegurando que:

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = 2.$$

A próxima seção aborda o critério de *Schur-Cohn* para equações de segunda ordem. O objetivo desta é apresentar as condições de estabilidade, as quais utilizaremos nas aplicações no último capítulo.

4.3.1 O Critério de Schur-Cohn para segunda ordem

A determinação exata das raízes de $P(\lambda)$ para ordens elevadas ($k \geq 3$) torna-se analiticamente complexa. Portanto, faz-se necessária a utilização de métodos determinísticos que avaliem se as raízes estão dentro do círculo unitário sem a necessidade de calculá-las explicitamente. O método analítico mais importante para esse fim é o Critério de *Schur-Cohn*. Para equações de ordens menores, o critério se traduz em desigualdades algébricas simples sobre os coeficientes p_i. Vamos detalhar o caso de segunda ordem ($k = 2$), amplamente utilizado em aplicações econômicas e biológicas. Para tanto, considere a equação de segunda ordem

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0, \tag{4.31}$$

cujo polinômio característico correspondente é

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0. \tag{4.32}$$

Teorema 4.14. O ponto de equilíbrio de 4.32 é assintoticamente estável se, e somente se, as seguintes condições forem simultaneamente satisfeitas

$$1 + p_1 + p_2 > 0, \quad 1 - p_1 + p_2 > 0 \quad \text{e} \quad p_2 < 1 \tag{4.33}$$

Demonstração: As raízes características são dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2},$$

Analisamos os dois casos possíveis para a natureza das raízes.

Caso 1: Para que as raízes sejam reais, é necessário que

$$p_1^2 - 4p_2 \geq 0, \quad \text{o que implica } \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \geq 0.$$

Para obter a estabilidade assintótica, exige-se que o módulo de todas as raízes seja estritamente menor que 1, isto é,

$$-1 < \lambda_2 \leq \lambda_1 < 1.$$

Analisando a condição $\lambda_1 < 1$, temos

$$\frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} < 1, \text{ o que implica em } \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1,$$

como a raiz quadrada é não negativa ($\sqrt{p_1^2 - 4p_2} \geq 0$), para que essa desigualdade possua solução real é necessário que o membro da direita seja estritamente positivo, ou seja, $2 + p_1 > 0$. Assim, podemos escrever

$$0 \leq \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1,$$

elevando ambos os membros ao quadrado, visto que ambos são não negativos, obtemos

$$\begin{aligned} p_1^2 - 4p_2 &< (2 + p_1)^2 \\ p_1^2 - 4p_2 &< 4 + 4p_1 + p_1^2 \\ -4p_2 &< 4 + 4p_1 \\ 0 &< 1 + p_1 + p_2 \end{aligned}$$

De forma análoga, da condição $-1 < \lambda_2$, obtemos

$$-1 < \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}, \text{ ou melhor } \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 - p_1,$$

pelo mesmo motivo, a existência da solução exige que $2 - p_1 > 0$, garantindo que $|p_1| < 2$. Dessa forma

$$0 \leq \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 - p_1,$$

elevando ambos os membros ao quadrado

$$\begin{aligned} p_1^2 - 4p_2 &< (2 - p_1)^2 \\ p_1^2 - 4p_2 &< 4 - 4p_1 + p_1^2 \\ -4p_2 &< 4 - 4p_1 \\ 0 &< 1 - p_1 + p_2. \end{aligned}$$

Caso 2: As raízes complexas conjugadas ($p_1^2 - 4p_2 < 0$), podem ser escritas na forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, o módulo ao quadrado é dado pelo produto das raízes, o qual corresponde ao termo p_2. Desse modo,

$$|\lambda| < 1 \text{ o que implica em } \ |\lambda|^2 < 1, \text{ isto é } p_2 < 1.$$

■

Vejamos os seguintes exemplos ilustrando a utilidade do critério apresentado anteriormente para equações escalares de segunda ordem.

Exemplo 4.13. A equação

$$y(n+1) + y(n) + 0,5 = 0,$$

tem pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, uma vez que $p_1 = 1$ e $p_2 = 0,5$. Assim,

$$1 + p_1 + p_2 = 2,5 > 0, \quad 1 - p_1 + p_2 = 0,5 > 0 \quad \text{e} \quad p_2 = 0,5 < 1.$$

Exemplo 4.14. A equação

$$y(n+1) + y(n) + 1 = 0,$$

não tem pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, pois $p_1 = p_2 = 1$. Logo,

$$1 + p_1 + p_2 = 3 > 0, \quad 1 - p_1 + p_2 = 1 > 0 \quad \text{e} \quad p_2 = 1 \text{ (não satisfaz a terceira desigualdade).}$$

Esse critério será utilizado, especialmente, na aplicação sobre a Renda Nacional Brasileira, a qual será abordada no próximo capítulo. A partir desse resultado almejamos analisar qualitativamente a modelagem do ponto de vista matemático e socioeconômico.

Capítulo 5

Aplicações

As equações de diferenças são amplamente utilizadas em métodos numéricos iterativos, cujo objetivo é obter aproximações de soluções com uma precisão previamente estabelecida, como na determinação dos zeros de uma função. Além disso, constituem uma ferramenta fundamental para a obtenção de soluções numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem formuladas como Problemas de Valor Inicial (PVIs). As aplicações dessa natureza apresentadas neste trabalho são baseadas em [4].

Com o objetivo de ampliar o conjunto de aplicações, serão ainda estudados dois modelos clássicos: a ruína do jogador e a renda nacional. Essas aplicações buscam ilustrar a utilização das equações de diferenças na modelagem e na análise qualitativa de situações relacionadas ao contexto brasileiro. Em particular, serão discutidos o jogo *Fortune Tiger* e a evolução do Produto Interno Bruto (PIB) nominal. A partir desses modelos, serão realizadas análises qualitativas de suas soluções e projeções, permitindo interpretar aspectos sociais e macroeconômicos sob a perspectiva da teoria das equações de diferenças. Essas aplicações têm como principal referência [5], que constitui a base teórica deste trabalho.

5.1 Métodos Numéricos

5.1.1 O Método de Newton-Raphson

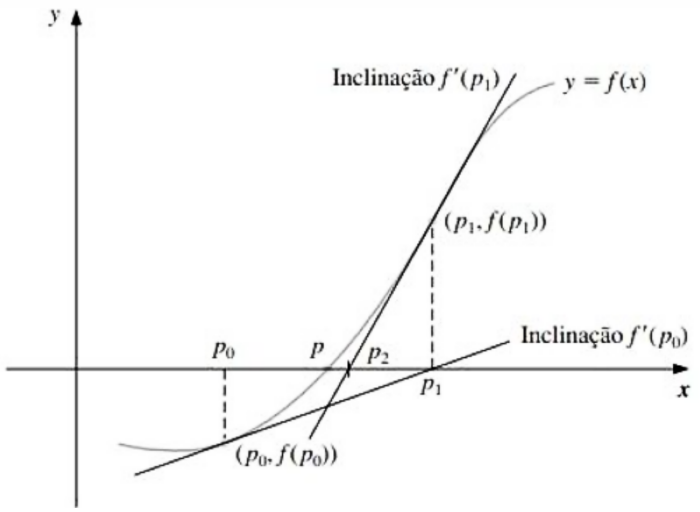
O método de Newton-Raphson é um dos algoritmos numéricos mais eficientes e amplamente utilizados para determinar aproximações de raízes de funções reais, isto é, para encontrar soluções da equação

$$f(x) = 0.$$

Sua principal característica é a convergência quadrática, desde que a aproximação inicial esteja suficientemente próxima da raiz procurada e que determinadas hipóteses sobre a função sejam satisfeitas.

A interpretação geométrica do método é apresentada na Figura 5.1. Em cada iteração, traça-se a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(p_n, f(p_n))$. A abscissa do ponto de interseção dessa reta com o eixo x fornece a próxima aproximação da raiz, denotada por p_{n+1}. Nesta seção, será utilizada a notação p_n para representar as aproximações sucessivas produzidas pelo método, embora ela seja equivalente à notação $p(n)$ empregada na teoria das equações de diferenças.

Figura 5.1: Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.



Fonte: Adaptado de Burden et al. (2015).

A dedução analítica do método é obtida por meio da expansão de Taylor da função f em torno de p_n. Suponha que $f \in C^2[a, b]$, que $p_0 \in [a, b]$ seja uma aproximação da raiz p, com $f'(p_0) \neq 0$, e que $|p - p_0|$ seja suficientemente pequeno. Então,

$$f(p) = f(p_n) + f'(p_n)(p - p_n) + \frac{f''(c)}{2}(p - p_n)^2, \tag{5.1}$$

em que c pertence ao intervalo determinado por p e p_n.

Desprezando o termo quadrático e utilizando o fato de que $f(p) = 0$, obtém-se

$$f(p_n) + f'(p_n)(p - p_n) \approx 0. \tag{5.2}$$

Isolando p e tomando essa aproximação como o próximo iterando, chega-se à equação de diferenças que define o método de Newton-Raphson:

$$\boxed{p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.} \tag{5.3}$$

Observe que a sequência de aproximações $\{p_n\}$ é definida por uma equação de diferenças não linear de primeira ordem. Assim, o método de Newton-Raphson pode ser inter-

pretado como o estudo da dinâmica da sequência gerada pela equação de diferenças dada em (5.3) e sua convergência corresponde ao comportamento assintótico dessa sequência. Dessa forma, a análise do método pode ser realizada por meio dos conceitos de pontos de equilíbrio, estabilidade e convergência, evidenciando sua estreita relação com a teoria das equações de diferenças desenvolvida neste trabalho.

Para que o método possa ser aplicado, é necessário que $f'(p_n) \neq 0$ em cada iteração. Além disso, sua convergência é local, isto é, depende da escolha da aproximação inicial p_0. Quando essa aproximação está suficientemente próxima da raiz e as hipóteses do método são satisfeitas, a sequência $\{p_n\}$ converge rapidamente. Por outro lado, uma escolha inadequada de p_0 ou a presença de pontos nos quais $f'(x)$ é nula ou muito próxima de zero podem comprometer a convergência ou até mesmo provocar divergência.

Na prática, o processo iterativo é interrompido quando a aproximação atinge uma precisão previamente estabelecida, representada por $\varepsilon > 0$. Entre os critérios de parada mais utilizados estão

$$|p_{n+1} - p_n| < \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad |f(p_{n+1})| < \varepsilon.$$

O processo é encerrado assim que um desses critérios é satisfeito. Observe que, quanto menor for o valor de ε, maior será a precisão da aproximação obtida, embora isso, em geral, implique um número maior de iterações.

Para ilustrar a eficiência e a convergência do método de Newton-Raphson, consideremos o problema clássico de aproximar a raiz quadrada positiva de 2.

Exemplo 5.1. Considere a função $f(x) = x^2 - 2$, cuja derivada é dada por $f'(x) = 2x$. Aplicando o método de Newton-Raphson, obtém-se a equação de diferenças

$$p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^2 - 2}{2p_n} = \frac{1}{2}\left(p_n + \frac{2}{p_n}\right).$$

Tomando a aproximação inicial $p_0 = 1,5$ e o critério de parada

$$|f(p_n)| < 5 \times 10^{-9},$$

a sequência de aproximações converge para a raiz positiva de 2. As primeiras iterações estão dadas a seguir.

Primeira Iteração: $n = 0$ e $p_0 = 1,5$

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{2}{p_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1,5 + \frac{2}{1,5}\right) = 1,416666667.$$

A primeira iteração não satisfaz a precisão desejada, pois $|f(p_1)| = 0,00694 > \varepsilon$, dessa forma, continuamos com as iterações.

Segunda Iteração: $n = 1$ e $p_1 = 1,416666667$

$$p_2 = \frac{1}{2}\left(1,416666667 + \frac{2}{1,416666667}\right) = 1,414215686.$$

A segunda iteração ainda não satisfaz a precisão desejada, pois $|f(p_2)| = 0,000006007 > \varepsilon$, com isso, continuamos com as iterações.

Terceira Iteração: $n = 2$ e $p_2 = 1,414215686$

$$p_3 = \frac{1}{2}\left(1,414215686 + \frac{2}{1,414215686}\right) = 1,414213562.$$

A partir da terceira iteração (p_3), o valor já atinge a precisão de nove casas decimais, uma vez que $|f(p_2)| = 0,000000001 < \varepsilon$. A pouca quantidade de iterações dos valores exibe perfeitamente a convergência inerente à formulação do método.

5.1.2 O Método Explícito de Euler

O Método Explícito de Euler é um dos algoritmos numéricos mais simples e tradicionais para a aproximação de soluções de Problemas de Valor Inicial (PVIs) associados a Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Assim como o método de Newton-Raphson, ele pode ser interpretado como uma equação de diferenças, uma vez que gera uma sequência de aproximações para a solução da EDO.

O método baseia-se na aproximação da derivada por meio da diferença finita progressiva,

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \tag{5.4}$$

em que $h > 0$ representa o tamanho do passo.

Considere o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), \\ y(a) = y_0, \end{cases} \qquad a \le t \le b, \tag{5.5}$$

onde $g \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$. O intervalo $[a,b]$ é particionado em N subintervalos de mesmo comprimento, sendo

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Essa partição determina os nós

$$t_n = a + nh, \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Substituindo a aproximação (5.4) na equação diferencial (5.5), obtém-se

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = g(t, y(t)),$$

ou, de forma equivalente,

$$y(t+h) = y(t) + hg(t, y(t)).$$

Para descrever o método como uma equação de diferenças, considera-se $t = t_n = a + nh$ e denota-se a aproximação de $y(t_n)$ por $y(n)$. Dessa forma, o Método Explícito de Euler é definido pela recorrência

$$\boxed{y(n+1) = y(n) + h\, g\big(t_n, y(n)\big),} \tag{5.6}$$

com condição inicial

$$y(0) = y_0.$$

Observa-se que a sequência $\{y(n)\}$ é gerada por uma equação de diferenças não autônoma de primeira ordem. Em cada iteração, a nova aproximação é obtida a partir da aproximação anterior, acrescida do produto entre o tamanho do passo h e a inclinação da solução no ponto $(t_n, y(n))$.

O método pressupõe que a inclinação da solução permaneça aproximadamente constante em cada subintervalo de comprimento h. Consequentemente, a sequência produzida fornece apenas uma aproximação da solução exata da EDO, sendo sua precisão influenciada pela escolha do passo h. Em geral, quanto menor o valor de h, maior tende a ser a precisão da aproximação, embora isso implique um número maior de iterações.

Antes de analisar o erro associado ao método, apresentaremos alguns exemplos que ilustram sua aplicação.

Exemplo 5.2. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = -0,5\ y(t) + \cos(t),\ t \in [0,2] \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Aplique o método de Euler com o passo de $0,5$. Pelo método explícito de Euler e com um passo $h = 0,5$, temos o seguinte algoritmo:

$$y(n+1) = y(n) + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot y(n) + \cos(t_n)]$$

Donde $y(0) = 3$, $n = 0, 1, 2$ e 3 e $t_n = 0 + 0,5 \cdot n = 0,5 \cdot n$. Agora, vamos iniciar as iterações a partir das informações dadas.

Primeira iteração: $n = 0$, $y(0) = 3$ e $t_0 = 0$, temos pelo algoritmo que

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0) + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot y(0) + \cos(t_0)] \\ &= 3 + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot 3 + \cos(0)] \\ &= 2,750 \end{aligned}$$

Segunda iteração: $n = 1$, $y(1) = 2,750$ e $t_1 = 0,5$, temos pelo algoritmo que

$$\begin{aligned} y(2) &= y(1) + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot y(1) + \cos(t_1)] \\ &= 2,750 + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot 2,750 + \cos(0,5)] \\ &= 2,501 \end{aligned}$$

Terceira iteração: $n = 2$, $y(2) = 2,501$ e $t_2 = 1$, temos pelo algoritmo que

$$\begin{aligned} y(3) &= y(2) + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot y(2) + \cos(t_2)] \\ &= 2,501 + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot 2,501 + \cos(1)] \\ &= 2,146 \end{aligned}$$

Quarta iteração: $n = 3$, $y(3) = 2,146$ e $t_3 = 1,5$, temos pelo algoritmo que

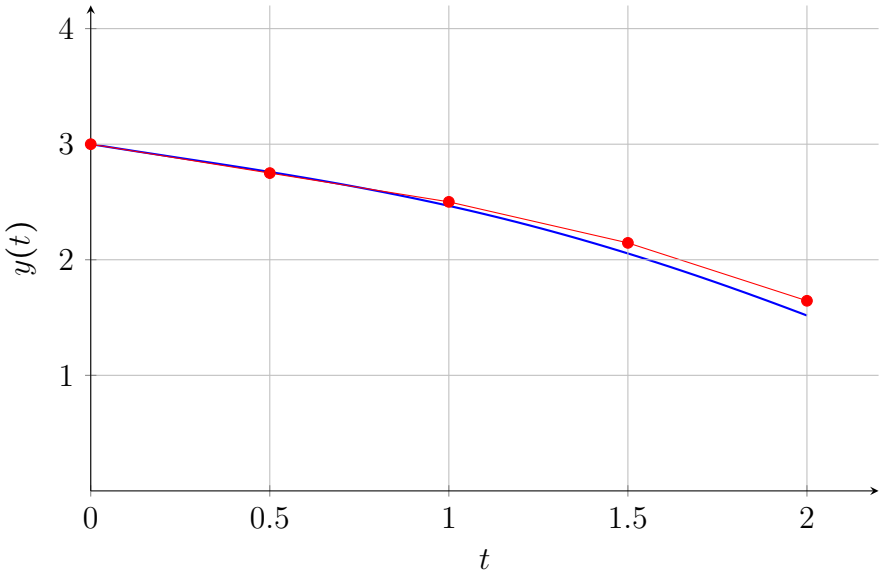
$$\begin{aligned} y(4) &= y(3) + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot y(3) + \cos(t_3)] \\ &= 2,146 + 0,5 \cdot [-0,5 \cdot 2,146 + \cos(1,5)] \\ &= 1,644 \end{aligned}$$

Por meio das iterações obtidas pelo Método de Euler, construiu-se o Gráfico 5.2, que compara a solução exata, representada pela curva em azul,

$$y(t) = \frac{2\cos(t)}{5} + \frac{4\sin(t)}{5} + \frac{13e^{-0,5t}}{5},$$

com a solução numérica, representada em vermelho. Esta última é obtida pela poligonal formada pelos pontos $(t_n, y(n))$, evidenciando a aproximação da solução exata nos nós da discretização.

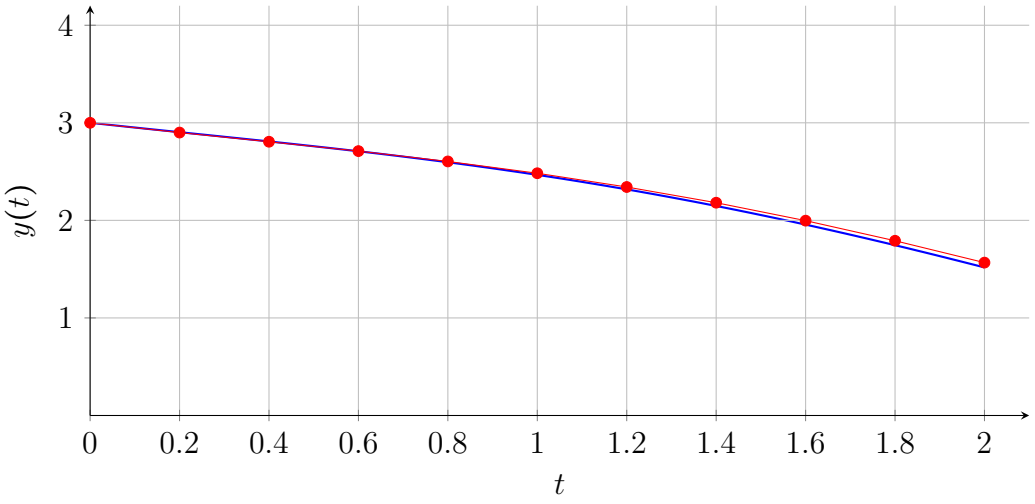
Figura 5.2: Solução exata e numérica com $h = 0,5$.



Fonte: Produção do Autor.

Para termos uma aproximação melhor, basta diminuir o tamanho do passo, por exemplo, para $h = 0,2$ teremos o Gráfico 5.3.

Figura 5.3: Solução exata e a solução numérica com $h = 0,2$.



Fonte: Produção do Autor.

A partir do Gráfico 5.3 é perceptível que a solução numérica se aproximou ainda mais da solução exata. A ressalva deste método é a exaustão para conseguir uma solução cada vez melhor, porém podemos utilizar *softwares* como o *Python* para contornar essa situação. Porém, além desse ponto é possível identificar outra limitação do Método Explícito de Euler, uma vez que, depois de aplicar o algoritmo de Euler teremos um conjunto discreto de aproximações, isto é, os pontos $(t_n, y(n))$, e não uma forma fechada

como solução aproximada do PVI. A pergunta que emerge é: através do Método de Euler é possível encontrar uma representação analítica aproximada da solução do PVI?

A resposta é afirmativa, há alguns métodos de interpolação ou ajuste de curvas que podem ser aplicados ao conjunto de pontos gerados pelo MEE para obter uma representação analítica aproximada da solução do PVI, no entanto, a depender do método ele não respeitará a natureza do problema, por exemplo, a interpolação pelo Polinômio de Lagrange dará um polinômio como forma aproximada o que é distinto da exponencial. Esse polinômio pode representar bem o comportamento da solução númerica, porém em intervalos pequenos, pois em intervalos maiores o polinômio pode não acompanhar o crescimento da exponencial, um compartamento intuitivamente esperado.

Exemplo 5.3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = e^{t^2}, \ t \in [1,3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplique outra vez o método de Euler com o passo de $0,2$. Pelo método explícito de Euler e com um passo $h = 0,2$, temos o seguinte algoritmo:

$$y(n+1) = y(n) + 0,2 \cdot [e^{t_n^2}],$$

donde $y(0) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$ e $t_n = 1 + 0,2 \cdot n$. Agora, vamos iniciar as iterações a partir das informações dadas.

Primeira iteração: $n = 0$, $y(0) = 1$ e $t_0 = 1$, temos pelo algoritmo que

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0) + 0,2 \cdot e^{t_0^2} \\ &= 1 + 0,2 \cdot e^{1^2} \\ &= 1,544. \end{aligned}$$

Segunda iteração: $n = 1$, $y(1) = 1,544$ e $t_1 = 1,2$, temos pelo algoritmo que

$$\begin{aligned} y(2) &= y(1) + 0,2 \cdot e^{t_1^2} \\ &= 1,544 + 0,2 \cdot e^{1,2^2} \\ &= 2,388. \end{aligned}$$

Terceira iteração: $n = 2$, $y(2) = 2,388$ e $t_2 = 1,4$, temos pelo algoritmo que

$$\begin{aligned} y(3) &= y(2) + 0,2 \cdot e^{t_2^2} \\ &= 2,388 + 0,2 \cdot e^{1,4^2} \\ &= 3,808. \end{aligned}$$

Os resultados das demais iterações encontram-se na Tabela 5.1:

Tabela 5.1: Iteração do MEE do exemplo 3.2

Iteração (n)	t_n	$y(n)$
0	1,0	1,000
1	1,2	1,544
2	1,4	2,388
3	1,6	3,808
4	1,8	6,395
5	2,0	11,502
6	2,2	22,421
7	2,4	47,715
8	2,6	111,185
9	2,8	283,713
10	3,0	791,754

Fonte: Produção do Autor.

Em posse do conjunto de pontos fornecidos pelo método de Euler podemos construir a poligonal que os une. Todavia, o diferencial deste exemplo é que a sua solução exata não possui uma forma fechada, ou seja, não é possível fazer a comparação gráfica entre a solução numérica e exata, como no exemplo anterior.

5.2 A Ruína do Jogador e o “ Jogo do Tigrinho”

A fim de ampliar o conjunto de aplicações das equações de diferenças lineares, esta seção apresenta o problema clássico da *Ruína do Jogador*, adaptado dos conceitos desenvolvidos em [5]. Como forma de aproximar a discussão de uma realidade contemporânea, o modelo será contextualizado no cenário das plataformas de apostas digitais, tomando como exemplo o *Fortune Tiger*, popularmente conhecido no Brasil como “Jogo do Tigrinho”, ilustrado na Figura 5.4.

Figura 5.4: Interface do jogo *Fortune Tiger*.



Fonte: Adaptado de O Globo.

O objetivo desta seção é utilizar a teoria das equações de diferenças para analisar, de forma qualitativa, a evolução do capital de um apostador ao longo de sucessivas apostas. Em particular, será demonstrado que, sob as hipóteses do modelo, a perda total do capital — conhecida como *ruína do jogador* — constitui um desfecho inevitável no longo prazo. Dessa forma, além de ilustrar uma aplicação clássica das equações de diferenças lineares, o modelo fornece uma fundamentação matemática para a compreensão dos riscos inerentes aos jogos de azar.

5.2.1 Modelagem por Equações de Diferenças

Considere um apostador com capital inicial de n reais. A cada rodada, o jogador ganha R$ 1,00 com probabilidade q ou perde R$ 1,00 com probabilidade $p = 1 - q$.[1] O jogo prossegue até que o jogador atinja a ruína, isto é, seu capital se torne nulo, ou alcance uma meta de capital fixada em N reais.

Seja $P(n)$ a probabilidade de o jogador atingir a ruína quando seu capital atual é igual a n. Pelo Teorema da Probabilidade Total, essa probabilidade satisfaz a recorrência

$$P(n) = qP(n+1) + pP(n-1).$$

Reescrevendo a expressão, obtém-se a equação de diferenças linear homogênea

$$qP(n+1) - P(n) + pP(n-1) = 0.$$

Deslocando os índices, chega-se à forma

$$P(n+2) - \frac{1}{q}P(n+1) + \frac{p}{q}P(n) = 0,$$

sujeita às condições de contorno

$$P(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad P(N) = 0.$$

Propõe-se uma solução da forma

$$P(n) = \lambda^n.$$

Substituindo-a na equação de diferenças, obtém-se a equação característica

$$q\lambda^2 - \lambda + p = 0.$$

Como $p + q = 1$, segue que

$$q\lambda^2 - (p+q)\lambda + p = (q\lambda - p)(\lambda - 1),$$

de modo que as raízes características são

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{p}{q}.$$

[1] Para Viabilizar a aplicação analítica do modelo da *Ruína do Jogador*, assumiu-se a simplificação de apostas simétricas de valor unitário refletindo a assimetria exata do RTP do jogo real.

No contexto dos jogos de cassino, assume-se que a banca possui vantagem matemática, isto é,

$$p > q.$$

Assim, as raízes são reais e distintas, e a solução geral é dada por

$$P(n) = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^n.$$

Aplicando as condições de contorno, $A + B = 1$ e $A + B\left(\frac{p}{q}\right)^N = 0$.

Daí,

$$B = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}$$

e

$$A = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^N}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1}.$$

Portanto, a probabilidade de ruína é dada por

$$\boxed{P(n) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^n - \left(\frac{p}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}.}$$

5.2.2 Parametrização para o "Jogo do Tigrinho"

Nas plataformas digitais de *slots*, os algoritmos são programados com base no conceito de RTP. Utilizando os dados reais do "Jogo do Tigrinho" (*Fortune Tiger*), o RTP oficial é estipulado em $96,81\%$. Ao transpor a vantagem da casa de $3,19\%$, a probabilidade de ganho do usuário em uma rodada isolada é de $q = 0,484$ $(48,4\%)$, o que resulta em uma probabilidade de perda de $p = 0,516$ $(51,6\%)$.

É fundamental destacar que o RTP de $96,81\%$ não signifca que, ao realizar uma única jogada de R\$100,00 o usuário receberá exatamente R\$96,81 de volta. O algoritmo do jogo opera de forma binária em cada rodada: Ou se perde a aposta ou ganha um prêmio múltiplo. O RTP é uma métrica estatística e assintótica, calculada sobre o volume acumulado de milhões de rodadas.

Na realidade de um apostador comum, o dinheiro é movimentado em frações menores ao longo de várias rodadas consecutivas. Se o jogador começa com R\$50,00 e ganha algumas rodadas, ele pode reinvestir esses ganhos na plataforma. Assim, ele pode girar a manivela centenas de vezes, acumulando um volume total movimentado bem maior que sua banca inicial. A cada ciclo em que R\$1,00 é apostado e reinvestido, a vantagem da

casa consome silenciosamente cerca de R\$0,0319. Dessa forma, a razão de desvantagem do jogador é dada por:

$$\frac{p}{q} = \frac{0,516}{0,484} \approx 1,066115.$$

Para ilustrar o comportamento assintótico, a Tabela 5.2 simula a probabilidade de ruína ($P(n)$) para um jogador que entra na plataforma com diferentes capitais iniciais (n), estipulando uma meta de ganho de R\$ 100,00 ($N = 100$) ou um cenário sem limite superior ($N \to \infty$).

Tabela 5.2: Probabilidade de Ruína ($P(n)$) no "Jogo do Tigrinho"

Banca (n)	**Meta (N)**	**Fórmula ($P(n)$)**	**Prob. de Ruína (R_n)**
R\$ 1,00	R\$ 100,00	$\frac{(1,066115)^1-(1,066115)^{100}}{1-(1,066115)^{100}}$	99,99%
R\$ 5,00	R\$ 100,00	$\frac{(1,066115)^5-(1,066115)^{100}}{1-(1,066115)^{100}}$	99,94%
R\$ 10,00	R\$ 100,00	$\frac{(1,066115)^{10}-(1,066115)^{100}}{1-(1,066115)^{100}}$	99,84%
R\$ 50,00	R\$ 100,00	$\frac{(1,066115)^{50}-(1,066115)^{100}}{1-(1,066115)^{100}}$	96,02%
Qualquer $n < \infty$	Sem limite	$\lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^n-\left(\frac{p}{q}\right)^N}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^N}$	**100,00%**

Fonte: Produção do Autor.

5.2.3 Estudo Qualitativo

O estudo assintótico da solução homogênea revela um comportamento importante. Como $\frac{p}{q} > 1$, o termo $\left(\frac{p}{q}\right)^N$ cresce geometricamente rumo ao infinito à medida que a meta de capital N aumenta ou que o jogador estende o seu tempo de permanência na plataforma girando o *slot*.

A aparente atratividade do jogo decorre da percepção de que a probabilidade de vitória, por exemplo, $48,4\%$, está muito próxima da de um jogo justo (50%). Entretanto, essa pequena diferença é suficiente para conferir uma vantagem matemática à banca. Embora essa vantagem seja pouco perceptível em uma única rodada, seus efeitos acumulam-se ao longo das sucessivas apostas, reduzindo progressivamente as chances de sucesso do jogador. Do ponto de vista probabilístico, esse comportamento é evidenciado pelo limite da probabilidade de ruína quando a meta de capital N tende ao infinito:

$$\lim_{N\to\infty} P(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^n - \left(\frac{p}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} = 1.$$

Este resultado prova que, sob a ótica das equações de diferenças, a ruína do apostador em plataformas como o "Jogo do Tigrinho" não é uma questão de má sorte, mas sim um evento assintoticamente certo (100% de probabilidade). Embora possam ocorrer ganhos temporários no curto prazo, eles são insuficientes para alterar a tendência de longo prazo, determinada pela vantagem matemática da plataforma.

5.3 Renda Nacional Brasileira

Esta seção apresenta uma aplicação baseada na formulação teórica do Modelo de Multiplicador-Acelerador de Samuelson, adaptada a partir do texto clássico de [5]. O objetivo consiste em parametrizar e analisar qualitativamente o comportamento dinâmico do Produto Interno Bruto (PIB) utilizando dados reais da economia brasileira. Para esta modelagem, foram coletadas as séries históricas oficiais de Contas Nacionais obtidas junto ao IPEADATA para o período de 2011 a 2022. A Renda Nacional ($Y(n)$) foi calculada por meio da identidade macroeconômica fundamental:

$$Y(n) = C(n) + I(n) + G(n).$$

Onde $C(n)$ representa o consumo final das famílias, $I(n)$ denota a Formação Bruta de Capital Fixo (FBCF) e $G(n)$ corresponde ao consumo final do governo. Para realizar o estudo da presente aplicação é importante que façamos algumas suposições aceitas pelos economistas:

A) $C(n) = \alpha Y(n-1)$, onde $\alpha > 0$ é propensão marginal a consumir. Em outras palavras, o consumo final é proporcional a Renda Nacional do ano anterior.

B) $I(n) = \beta[C(n) - C(n-1)]$, ou seja, a FBCF é proporcional ao aumento de consumo, onde $\beta > 0$ é chamado de relação.

C) $G(n) = k$ é constante e não negativa, ou pelo menos pode ser tomado com um valor médio aproximado. Por exemplo, estipular o valor aproximado gasto por ano a partir dos últimos 10 anos.

Utilizando essas informações podemos reformular a equação da Renda Nacional:

$$\begin{aligned} Y(n) &= \alpha Y(n-1) + \beta[C(n) - C(n-1)] + G(n) \\ &= \alpha Y(n-1) + \beta\alpha Y(n-1) - \beta\alpha Y(n-2) + k \\ &= \alpha(1+\beta)Y(n-1) - \beta\alpha Y(n-2) + k. \end{aligned}$$

Dessa forma, a nossa equação toma a seguinte forma:

$$Y(n+2) - \alpha(1+\beta)Y(n+1) + \beta\alpha Y(n) = k.$$

A solução homogênea dependerá do valor entre assumido pela propensão marginal e a relação, uma vez que temos uma equação característica associada de segundo grau, logo as raízes características são:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha(1+\beta) + \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\beta\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\alpha(1+\beta) - \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\beta\alpha}}{2}.$$

Assim, a solução homogênea será dada por:

i) Se $\alpha^2(1+\beta)^2 > 4\beta\alpha$, temos o caso das raízes características reais e distintas, então $Y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.

ii) Se $\alpha^2(1+\beta)^2 = 4\beta\alpha$, temos o caso das raízes características reais de dupla multiplicidade, então $Y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$.

iii) Se $\alpha^2(1+\beta)^2 < 4\beta\alpha$, temos o caso das raízes características complexas conjugadas, então $Y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = r^n[(c_1+c_2)\cos(n\theta) + i(c_1-c_2)\sin(n\theta)]$. Se $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ então $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ e $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)$.

Um outro ponto é analizar se o ponto de equilíbrio é ou não estável. Para determinar esse resolvemos:

$$Y^* - \alpha(1+\beta)Y^* + \beta\alpha Y^* = k, \text{ logo } Y^* = \frac{k}{1-\alpha} \text{ desde que } \alpha \neq 1.$$

Com estas informações busca-se fazer uma análise da Renda Nacional Brasileira e entender se a mesma é estável a partir das três condições abaixo:

$$\alpha < 1, \quad 1 + \alpha + 2\alpha\beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha\beta < 1.$$

Para continuarmos com o nosso estudo é preciso determinar as constantes α e β associadas a Renda Brasileira e este é o proposito da próxima seção.

5.3.1 Estimação dos Parâmetros α e β

A adaptação do arcabouço de [5] ao cenário real exige a estimação da propensão marginal a consumir (α) e do acelerador de investimento (β) diretamente das séries históricas

brasileiras. As funções comportamentais subjacentes são dadas por:

$$\alpha_n = \frac{C(n)}{Y(n-1)} \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{I(n)}{C(n) - C(n-1)}$$

A Tabela 5.3 apresenta os valores anuais extraídos das séries temporais e o passo a passo do cálculo algébrico para cada período. Cabe destacar que o ano de 2020 foi desconsiderado no cálculo da média do parâmetro β devido à contração atípica do consumo gerada pela crise da Covid-19, a qual resultou em uma distorção matemática (denominador negativo) que não reflete a tendência estrutural de longo prazo do acelerador.

Tabela 5.3: Contas Nacionais (R$ Milhões) e Estimação de α e β (2011-2022)

Ano (n)	$C(n)$	$I(n)$	$G(n)$	$Y(n)$	α_n	β_n
2011	2.573.419	901.927	817.038	4.292.384	—	—
2012	2.883.929	997.460	892.180	4.773.569	0,6719	3,2123
2013	3.213.817	1.114.944	1.007.275	5.336.036	0,6733	3,3798
2014	3.555.352	1.148.453	1.106.874	5.810.679	0,6663	3,3626
2015	3.747.870	1.069.397	1.185.776	6.003.043	0,6450	5,5548
2016	3.939.208	973.271	1.277.645	6.190.124	0,6562	5,0867
2017	4.156.152	958.779	1.327.758	6.442.689	0,6714	4,4195
2018	4.423.548	1.057.409	1.393.480	6.874.437	0,6866	3,9545
2019	4.705.528	1.143.185	1.476.613	7.325.326	0,6845	4,0541
2020	4.700.085	1.260.228	1.532.205	7.492.518	0,6416	*(Outlier)*
2021	5.415.523	1.614.782	1.671.536	8.701.841	0,7228	2,2571
2022	6.356.658	1.794.223	1.854.884	10.005.765	0,7305	1,9064
Média	—	—	1.295.272	—	**0,6773**	**3,7188**

Fonte: Adaptado do IPEADATA.

5.3.2 Modelagem para a Renda Nacional

Utilizando os valores médios estimados ($\alpha \approx 0,6773$ e $\beta \approx 3,7188$), estruturamos a equação de diferenças linear de segunda ordem que rege o comportamento dinâmico do PIB. Substituindo os parâmetros na forma canônica detalhada em [5], temos:

$$Y(n+2) - \alpha(1+\beta)Y(n+1) + \alpha\beta Y(n) = 1.295.272.$$

Calculando os coeficientes numéricos a partir das médias observadas na Tabela 5.3:

$$\alpha(1+\beta) = 0,6773 \times (1 + 3,7188) = 3,1960$$
$$\alpha\beta = 0,6773 \times 3,7188 = 2,5187.$$

Portanto, a dinâmica macroeconômica estimada para o caso brasileiro é dada por:

$$Y(n+2) - 3,1960Y(n+1) + 2,5187Y(n) = 1.295.272.$$

Para estabelecer a solução precisamos encontrar a solução homogênea e a particular, algo interessante é que essa última coincide com o ponto de equilíbrio. Assim,

$$Y_p(n) = Y^* = \frac{k}{1-\alpha} = \frac{1.295.272}{0,3227} = 4.013.858,07.$$

Agora, basta encontrar a solução homogênea em que as raízes aproximadas são: $\lambda_1 = 1,785$ e $\lambda_2 = 1,411$. Logo, a solução homogênea é dada por

$$Y_h(n) = c_1 1,785^n + c_2 1,411^n.$$

Portanto a solução geral é:

$$Y(n) = c_1 1,785^n + c_2 1,411^n + 4.013.858,07.$$

5.3.3 Estudo Qualitativo

A partir dos coeficientes determinados pela série histórica, realiza-se o estudo assintótico das soluções do sistema aplicando os critérios analíticos de estabilidade discutidos na literatura de equações de diferenças. Observa-se que o termo constante da equação característica, dado por $\alpha\beta = 2,5187$, viola a condição de estabilidade para equações de segunda ordem ($\alpha\beta < 1$).

No contexto macroeconômico, essa divergência realça que, embora a estrutura analítica clássica proposta na literatura teórica forneça uma excelente base de modelagem de tendências iniciais, os dados empíricos de séries correntes de longo prazo demandam a inclusão posterior de restrições não lineares para amortecer o comportamento puramente explosivo da equação linear de segunda ordem.

5.3.4 Projeções para o Período 2023-2026

Para testar a aderência do modelo adaptado de [5], realizou-se a simulação dinâmica da equação de diferenças para o período de 2023 a 2026. Introduziu-se na equação o valor médio de 2011 até 2022 de despesas do governo ($G(n)$), com intuito de torná-la uma constante. Tabela 5.5 apresenta os resultados nominais gerados pelo modelo ($Y(n)$) a partir das condições iniciais reais de 2021 e 2022.

Tabela 5.4: Projeções do PIB Nominal Brasileiro (R$ Milhões)

Ano (n)	**Gasto ($G(n)$)**	**PIB ($Y(n)$)**	**Comportamento**
2021	1.671.536	8.701.841	Dado Real
2022	1.854.884	10.005.766	Dado Real
2023	1.295.272	11.356.373	Projeção
2024	1.295.272	12.388.717	Projeção
2025	1.295.272	12.286.317	Projeção
2026	1.295.272	9.358.878	Projeção

Fonte: Produção do Autor.

Sob a ótica da taxa de crescimento real, as projeções históricas do Fundo Monetário Internacional (FMI) apontam que, após o ciclo de recuperação pós-pandemia em 2021 ($+4,76\%$), a economia brasileira iniciou uma trajetória de convergência, registrando crescimentos reais (sem inflação) de $+3,24\%$ em 2023, $+3,41\%$ em 2024 e sofrendo uma desaceleração explícita para $+2,29\%$ em 2025.

Essa desaceleração real corrobora a análise qualitativa das equações de diferenças lineares, pois o declínio da taxa de crescimento observado nos dados do FMI valida a hipótese apresentada pelas projeções. Portanto, a comparação dos valores absolutos nominais demonstra a eficiência do modelo no curto prazo, por exemplo no ano de 2023, o modelo estimou um PIB de aproximadamente R$ 11,356 trilhões, enquanto o PIB nominal verificado de mercado situou-se em R$ 10,9 trilhões, o que representa um erro de aproximação aceitável de $+4,18\%$.

Contudo, a partir de 2025, as projeções teóricas descolam-se severamente da realidade de mercado, revelando a instabilidade da trajetória de longo prazo inerente ao modelo. Na tabela a seguir podemos comprar as projeções concebidas pelo modelo proposto nesta seção e o valor real divulgado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Tabela 5.5: Porcentagens de erros do PIB Nominal (R$ trilhões)

Ano (n)	**Projeção**	**Valor real**	**Erro**
2023	11,356	10,9	+4,18%
2024	12,389	11,7	+5,89%
2025	12,286	12,7	-3,26%
2026	9,359	-	-

Fonte: Produção do Autor.

Em vez de manter uma estabilidade ou um crescimento sustentado, a combinação linear das raízes sob as condições iniciais dadas força o modelo a um declínio aparentemente irreal e abrupto, caindo para R$ 9,36 trilhões em 2026, porém segundo dados do IBGE no primeiro trimestre de 2026 o PIB nominal em torno do valor de R $ 3,3 trilhões, se a tendência persistir o PIB nomimal acumulado durante o ano será um valor de, apro-

ximadamente, R$ 13 trilhões. Essa divergência ocorre porque, na formulação clássica, assume-se que o acelerador β e a propensão ao consumo atuam de forma perfeitamente linear.

Em suma, a divergência verificada entre a projeção do modelo e os dados observados a partir de 2025 não invalida a metodologia, mas reforça sua validade epistemológica. Este modelo comporta-se como uma ferramenta de diagnóstico que evidencia como a propensão ao consumo e o acelerador de investimentos conduzem a traajetória do PIB a extremos que a economia real e seu contexto tende a mitigar.

Considerações Finais

O presente trabalho explorou a teoria das equações de diferenças, estabelecendo um paralelo com o cálculo diferencial. Ao longo desta pesquisa, demonstrou-se que a discretização de modelos não é apenas uma necessidade computacional, mas uma abordagem que pode revelar comportamentos complexos, como bifurcações e caos, que muitas vezes permanecem ocultos em modelos puramente contínuos.

Nos primeiros capítulos, a fundamentação sobre polinômios fatoriais e os operadores de diferença (Δ) e avanço (E) permitiu consolidar a base necessária para a resolução de equações de ordem superior. A aplicação do critério de *Schur-Cohn* e o estudo da estabilidade assintótica mostraram-se cruciais para prever o comportamento de longo prazo das soluções, permitindo identificar se um sistema tende ao equilíbrio ou à instabilidade.

As aplicações desenvolvidas no Capítulo 5 evidenciaram a versatilidade da teoria. Pois, através dos métodos de *Newton-Raphson* e *Euler*, ficou clara a importância da precisão e do tamanho do passo (h) na obtenção de aproximações confiáveis para problemas sem solução analítica fechada. Adicionalmente, a modelagem aplicada ao cenário do "Jogo do Tigrinho" trouxe uma conclusão matemática contundente: a vantagem da casa, por menor que seja, torna a ruína do apostador um evento assintoticamente certo no longo prazo, desmistificando a ilusão de ganhos sustentáveis em plataformas de apostas digitais. Por fim, O uso do Modelo de *Samuelson* para o PIB brasileiro demonstrou a capacidade de diagnóstico da teoria. Embora o modelo linear tenha apresentado boa aderência no curto prazo, como o erro de apenas 4,18% para 2023, as divergências em projeções futuras ressaltaram a necessidade de considerar a instabilidade inerente ao sistema econômico e a influência de variáveis não lineares.

Sob uma visão holística, este trabalho cumpriu seu objetivo de unir o rigor da teoria à análise crítica de problemas ligados a realidade brasileira. As equações de diferenças revelaram-se essenciais para traduzir a realidade discreta em que vivemos, oferecendo um campo fértil para futuras investigações, especialmente na integração de modelos estocásticos e ferramentas computacionais em *Python*, fundamentais para o tratamento de sistemas de alta complexidade.

Bibliografia

[1] Mateus Alegri, Irene Magalhães Craveiro, and Elen Viviane Pereira Spreafico. *Alguns tópicos de combinatória enumerativa*, volume 1. [s. n.], [S. l.], 2026.

[2] George Boole. *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*. Macmillan and Co., Cambridge, 1ª edition, 1860.

[3] William E. Boyce and Richard C. Di Prima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, Rio de Janeiro, 9ª edition, 2010.

[4] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, and Annette M. Burden. *Análise Numérica*. Cengage Learning, São Paulo, 3ª edition, 2015.

[5] Saber Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer Science+Business Media, Inc., New York, third edition, 2005.

[6] Walter G. Kelley and Allan C. Peterson. *Difference Equations: An Introduction with applications*. Academic Press, San Diego, 2ª edition, 2001.

[7] Elon Lages Lima. *Análise Real: Funções de uma Variável*, volume 1 of *Coleção matemática universitária*. IMPA, Rio de Janeiro, 1ª edition, 2014.

[8] Rafael Domingos Garanito Luís. Equações de diferenças e aplicações. Dissertação (mestrado em matemática), Departamento de Matemática e Engenharias, Universidade da Madeira, Funchal, 2006.

[9] Mikey McGovern. Charles babbage's difference engine.

[10] José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, and Idani T. C. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 4ª edition, 2007.

[11] Science Museum. Charles babbage's difference engines and the science museum, 2023.