



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
NPGEICIMA

ANTONIO JAILSON DOS SANTOS FONSECA

O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

São Cristóvão, 2015

ANTONIO JAILSON DOS SANTOS FONSECA

**O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

Dissertação apresentada como requisito
parcial para a obtenção do título de
Mestre em Ensino de Ciências e
Matemática.

Orientadora: Prof^a Dr^a Divanízia do Nascimento Souza

São Cristóvão, 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
NPGEICIMA

ANTONIO JAILSON DOS SANTOS FONSECA

**O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

Prof^a Dr^a. Divanízia do Nascimento Souza
(Orientadora)

Prof^a. Dr^a. Veleida Anahi Da Silva
(Interno ao Programa)

Prof.^a Dr.^a Marlene Alves Dias
(Externo ao Programa)

SÃO CRISTÓVÃO, 2015

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo exemplo!

Aos meus irmãos, pela amizade!

Aos familiares, pela compreensão!

Aos amigos, pelo apoio!

Aos alunos que participaram deste trabalho, pela colaboração!

Ao professor da turma e à direção da Escola onde realizei a pesquisa, pela confiança!

Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo!

Aos professores do programa, por partilharem seus conhecimentos!

À minha orientadora, Prof^a Dr^a Divanízia do Nascimento Souza, pelos ensinamentos e dedicação!

À minha esposa, pela paciência, pelo carinho, pelo apoio, enfim, por tudo!

Aos meus filhos, Antonio Mateus e Antonio Pedro, razão pela qual vivo, por me deixar amá-los!

A Deus, pela VIDA!

O que atrai o homem à pesquisa, à ciência é o desejo de ser útil, a excitação advinda da exploração de um novo território, a esperança de encontrar ordem e o impulso para testar o conhecimento estabelecido.

Thomas S. Kuhn

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo geral investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica em uma proposta de ensino de Análise Combinatória construída com base na resolução de problemas para alunos da 2º série do ensino médio. O referencial teórico desta investigação esteve relacionado com o processo de ensino e aprendizagem da disciplina matemática, utilizando os Registros de Representação Semiótica, Níveis de conhecimento esperados dos estudantes e Resolução de Problemas. Para o desenvolvimento desse estudo foram utilizados aspectos metodológicos da Engenharia Didática. A análise se desenvolveu numa perspectiva qualitativa. Participaram dessa pesquisa os alunos da segunda série do ensino médio do Colégio Estadual Vitória de Santa Maria em Aracaju/SE. Ficou comprovado na aplicação da sequência didática que o ensino baseado em experiências de aulas que estimule a mobilização dos registros semióticos e com atividades relacionadas ao cotidiano do discente contribuiu de forma efetiva para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Educação Matemática; Registro de Representação Semiótica; Engenharia Didática.

RÉSUMÉ

Cette recherche visait à étudier le potentiel des transformations de représentation sémiotique d'enregistrements dans une analyse combinatoire de la proposition de l'enseignement intégré sur la résolution pour les étudiants de 2e année de l'école secondaire problème. Le cadre théorique de cette recherche a été liée à l'enseignement et l'apprentissage des cours de mathématiques en utilisant la Représentation Sémiotique registres, les niveaux de connaissance attendus des étudiants et de dépannage. Pour le développement de cette étude ont été utilisés aspects méthodologiques de génie didactique. L'analyse a été développé à partir d'un point de vue qualitatif. Participé à cette étude, les élèves de la deuxième année de l'école secondaire de la State College Victoire de Santa Maria à Aracaju / SE. Il a été prouvé dans l'application de la séquence d'enseignement que l'enseignement basé sur les leçons de l'expérience qui stimule la mobilisation des dossiers sémiotiques et les activités liées à la quotidienne de l'étudiant a contribué efficacement à l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse combinatoire.

Mots-clés: analyse combinatoire; L'enseignement des mathématiques; Sémiotique d'inscription de la représentation; Ingénierie didactique.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Técnicas de Contagem	18
Tabela 2 - Quantidades de trabalhos encontrados na BDTD nacional	20
Tabela 3 - Representações Semiótica	25
Tabela 4 - Classificação dos problemas	32
Tabela 5 - PNLD 2015	38
Tabela 6 - Principais elementos do livro escolhido	39
Tabela 7 – Tratamentos mobilizados nos exercícios	40
Tabela 8 – Conversões mobilizadas no livro em estudo	41

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de exercício de nível Técnico	29
Figura 2 – Exemplo de nível Mobilizável	29
Figura 3 – Exemplo de nível Disponível	30
Figura 4 – Filme “De malas prontas”	47
Figura 5 – Filme “desejos”	55

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO I	
1.1 Análise Combinatória: aspectos históricos, campo de atuação e definição	14
1.2 Recorte sobre o estado da arte	19
CAPÍTULO II	
2.1 Sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica	24
2.2 Nível de Conhecimento esperado dos alunos	29
2.3 Resolução de problemas no ensino de Análise Combinatória	31
CAPÍTULO III	
3.1 Contexto da pesquisa: Os sujeitos e a escola	35
3.2 Análise do livro didático de Matemática	36
3.3 Procedimentos metodológicos	43
3.4 A dinâmica utilizada na pesquisa	46
CAPÍTULO IV	
4.1 Concepção e Análise a priori	47
4.2 A experimentação	48
4.3 Análise a Posteriori e Validação da sequência Didática	61
CONCLUSÃO	64
REFERÊNCIAS	67
APÊNDICES	72

INTRODUÇÃO

Com alguns anos lecionando a disciplina matemática no ensino médio e também no pré-vestibular da rede estadual de ensino de Sergipe, foi possível verificar a dificuldade dos alunos na resolução de problemas do conteúdo programático Análise Combinatória.

É notório que para ensinar matemática somente saber o conteúdo da disciplina não é o suficiente para conduzir a aprendizagem dos discentes, pois é necessário considerar alguns aspectos como: estratégias de ensino, meios e métodos utilizados em sala de aula.

Tem sido possível também perceber que os resultados dos alunos em avaliações dos conteúdos de Análise Combinatória não são bons, porque essas avaliações são compostas, de maneira geral, de questões relacionadas ao cotidiano, ou seja, contextualizadas e no formato de situações-problemas.

A LDB¹ enfatiza sobre o caráter do Ensino Médio como uma etapa final da educação básica, sendo este nível de ensino um complemento dos estudos que teve início na educação infantil e ensino fundamental. Sobre esse nível de ensino os PCN² destacam que “Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal e não somente de sentido profissionalizante” (BRASIL, 2000, p.4).

Considerando aqui exposto, elaboramos uma proposta de ensino voltada para a valorização do raciocínio combinatório, com ideias que possam contribuir para o desenvolvimento no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo programático proposto, ou seja, Análise Combinatória.

Pretendemos verificar a hipótese de que a aplicação de uma sequência didática que possibilite a articulação entre os diferentes registros de representação semiótica propicia aos alunos uma melhor compreensão do objeto matemático Análise Combinatória.

Nesse sentido, a abordagem do conteúdo através de problemas que retratem situações do cotidiano do aluno irá proporcionar a ele significado para a aprendizagem dos conteúdos de matemática.

¹Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - 9.394/96.

²Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)

Sendo assim, esta pesquisa foi norteada pela seguinte questão: “Quais competências e habilidades uma proposta de ensino que enfatiza a mobilização dos registros de representação semiótica pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma da 2ª série do ensino médio de uma escola da rede pública de Aracaju, SE?”.

Para desenvolver a pesquisa, temos como o objetivo geral: investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica em uma proposta de ensino de Análise Combinatória construída com base na resolução de problemas.

Para isso, estabelecemos alguns objetivos específicos:

- 1- Verificar a contribuição da coordenação dos registros de representação semiótica para o ensino de Análise Combinatória;
- 2- Identificar as principais estratégias utilizadas na resolução dos problemas propostos;
- 3- Analisar os argumentos apresentados pelos alunos nas atividades desenvolvidas na sequência de ensino a partir de registro dos protocolos de pesquisa.

Para desenvolver essa pesquisa lançamos mãos de um referencial teórico que fundamentasse as ideias pretendidas para alcançar os objetivos geral e específico elencados nesse trabalho, e com isso, buscamos contribuir para um ensino e uma aprendizagem dos conteúdos de Análise Combinatória, compatível com uma sociedade que podemos chamar de sociedade do conhecimento, ou a chamada geração da informação, em que inovações e informações serão tratadas de forma rápida e contínua (MISKULIN, 2003).

D'Ambrosio (1996, p.79) salienta que “pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática”. Este trabalho terá seu desenvolvimento com as características de pesquisa experimental, onde o pesquisador faz uma análise do problema, elabora suas hipóteses e trabalha manipulando os possíveis fatores que são as variáveis do fenômeno observado, para avaliar as relações colocadas pelas hipóteses (ALMOULOU, 2007).

Este trabalho pretende somar-se a outros que procuraram melhorar o ensino e a aprendizagem com ênfase no desenvolvimento do raciocínio combinatório, no funcionamento cognitivo da compreensão do conteúdo em questão e na utilização

de recursos pedagógicos tecnológicos que auxiliem na visualização e motivação para o estudo, em detrimento ao ensino memorístico baseado em definições, fórmulas e exercício de fixação sobre atividades descontextualizadas.

CAPÍTULO I

Neste capítulo serão apresentados os aspectos históricos, campo de atuação e definições relativo ao tema pesquisado. Também apresentado um recorte do panorama didático matemático de pesquisas sobre Análise Combinatória.

1.1. Análise Combinatória: aspectos históricos, campo de atuação e definição.

A Análise Combinatória não é considerada um conteúdo de fácil assimilação pelos alunos nem simples de ser ensinada pelos professores.

De acordo com Lima *et al.* (2013, p. 140):

Problemas de contagem estão entre os considerados mais difíceis pelos alunos (e professores) do Ensino Médio. Em parte, isto se deve ao fato de que este assunto é introduzido apenas na segunda série do Ensino Médio, apesar das técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão.

As pesquisas voltadas às questões envolvendo o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória veem se configurando como importantes investigações em educação matemática, por terem o intuito de amenizar as dificuldades enfrentadas por discentes e docentes no ambiente escolar. Em se tratando do conteúdo Análise Combinatória, por exemplo, podemos apresentar algumas dessas pesquisas, como as a seguir.

Barreto e Borba (2012) investigaram a influência de diferentes representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios, usando formas de representação distintas tais como: listagem e /ou árvore de possibilidades, levando os alunos a refletir sobre propriedades e relações combinatórias.

As autoras Borba e Azevedo (2010) defendem que o uso de árvore de possibilidades pode ser um rico meio de entendimento de diferentes situações combinatórias utilizando um software para construção de árvore, levando à reflexão das relações combinatórias, concluindo que esse método pode ser uma ferramenta para ampliação do conhecimento matemático adquirido pelos discentes.

Pessoa e Borba (2009) buscaram levantar dados sobre a compreensão de problemas combinatórios por alunos e observaram as estratégias por eles utilizadas na resolução das atividades propostas que envolveram os diferentes tipos de

propriedades de Análise Combinatória, tais como produto cartesiano, arranjos, combinação e permutação. Na pesquisa observaram que problemas que os alunos necessitam considerar a ordem dos elementos, ou seja, se são arranjo ou combinação, apresentaram baixos percentuais de acertos, isso pela dificuldade que os estudantes tiveram em levantar todas as possibilidades. As autoras concluem, enfatizando, que se deve reconhecer que o raciocínio combinatório se desenvolve dentro e fora da escola, por isso é necessário que os alunos desenvolvam atividades com resolução dos problemas, de modo sistematizado, considerando todas as possibilidades em uma situação-problema de combinatória. Enfatiza também que esse conteúdo seja introduzido nas séries iniciais de escolarização, o ensino fundamental anos iniciais, destacando que ensinar a partir da resolução problemas favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório e auxilia, inclusive, em outras disciplinas.

Depois da invenção da escrita o homem começou a desenvolver os sistemas numéricos, muitos de cada povo deram sua contribuição, e a partir daí o homem começou a desenvolver os métodos de contagem (ROONEY, 2012).

A Análise Combinatória nos primórdios era considerada como suporte para efetuar alguns cálculos de questões práticas, como multiplicação e adição. Por isso não era considerada como uma teoria com corpo próprio, com definições e teoremas. Pode-se dizer que a estrutura atual tenha surgido no final da Idade Média e início da Renascença na Europa, com alguns matemáticos, tais como: Luca Pacioli, Girolamo Cardano, Niccolo Tartaglia, Pierre Fermat e Blaise Pascal; sendo esse período considerado o central no desenvolvimento da Análise Combinatória. (MARTINES; BONFIM, 2011)

Assim, podemos perceber que os estudos históricos sobre Análise Combinatória têm sido considerados de pouca exploração pelos historiadores na área de educação matemática. Sendo assim, Biggs destaca que:

Combinatória tem sido negligenciada pelos historiadores da matemática. No entanto, há boas razões para estudar suas origens, pois há um tipo de subcultura matemática, não exatamente paralela em seu desenvolvimento com as grandes disciplinas da aritmética, álgebra e geometria. (BIGGS apud MARTINES; BONFIM, 2011. P.9)

Morgado *et al.* (2004) fizeram um apanhado histórico sobre o desenvolvimento da Análise Combinatória, destacando que o binômio de $(1+x)^n$ foi um dos primeiros

problemas desenvolvidos com relação à Análise Combinatória, e que o caso particular $n=2$ já tinha sido descrito nos *Elementos de Euclides*³, aproximadamente 300 antes de Cristo. O matemático hindu Báskhara (1114-1185?), conhecido por uma fórmula que resolve equações de segundo grau, já resolvia problemas de permutação, arranjos e combinação de n objetos. Jaime Bernoulli (1654-1705) dedica a segunda parte de seu livro, intitulado *Ars Conjectandi*, ao desenvolvimento da teoria das combinações e permutações. Morgado *et al* ainda destacam que os matemáticos Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) apontaram a forma de construir a sequência de *Fibonacci*, e que para isso De Moivre utilizou técnicas das funções geradoras, desenvolvidas por Euler (1707-1783). Porém, outras obras de Euler sobre probabilidade trazem contribuição considerável para o desenvolvimento da Análise Combinatória, como por exemplo, o *Problema das Sete Pontes de Königsberg*⁴, um teorema da *Teoria dos Grafos*, sendo esse muito importante, nos dias atuais, para a Análise Combinatória e para o desenvolvimento da computação e informática.

O matemático húngaro-americano George Pólya (1887-1985) desenvolveu e introduziu uma nova e importante técnica de enumeração, com várias aplicações na área de teoria dos grafos. Outra teoria de Combinatória que contribuiu no desenvolvimento desse conteúdo matemático foi desenvolvida por Ramsey (1903-1930); a teoria garante a existência de certas configurações na área de geometria. (MORGADO *et al.* 2004).

As demais contribuições ao longo da história de Analise Combinatória se referem a autores que desenvolveram estudos sobre probabilidades, visto que, geralmente, o espaço amostral de certas probabilidades é enumerado com os princípios de contagem.

Então, as técnicas de contagem, que levam a desenvolver o raciocínio combinatório, têm origem na necessidade de resolução de problemas do cotidiano. Contudo, Morgado *et al.* (2004, p.6) salientam que “Em verdade, o desenvolvimento

³É um tratado matemático e geométrico, consistindo de 13 livros escritos pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.

⁴É um famoso problema histórico da matemática resolvido por Leonhard Euler em 1736, cuja solução negativa originou a teoria dos grafos.

da Análise Combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades”.

Sobre o ensino de Análise Combinatória, Morgado *et al.* (2004,) destaca que desde o início das primeiras séries de escolarização, no ensino fundamental anos iniciais, a escola já aborda as técnicas de contagem, quando se trabalha a contagem ou enumeração, soma ou partição dos elementos de um conjunto. No entanto, sem utilização de fórmulas mais complicadas, e sim desenvolvendo o raciocínio combinatório com questões apropriadas ao nível desses alunos.

Então o que é mesmo Análise Combinatória?

Para Hazzan (2004, p.1), “A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições”.

Morgado *et al.* (2004, p.1) apresenta a definição que Análise Combinatória “é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”

Sobre o avanço e aplicação de Análise Combinatória nas diversas áreas do conhecimento, e principalmente, na tecnologia, Morgado *et al.* (2004, p.5) salienta que:

A Análise Combinatória tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido enormemente, devido a necessidades em teoria dos grafos, em análise de algoritmos, etc.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio fazem uma abordagem sobre a importância e crescimento da utilização de Combinatória, ou seja, a Matemática discreta na ciência e tecnologia. E salientam sobre a importância que esse tema seja trabalhado no ambiente escolar na educação básica, e mais precisamente, no ensino médio, conforme pode ser observado no seguinte texto:

No entanto, no decorrer do século XX, novas necessidades tecnológicas advindas da introdução dos computadores – que têm uma matemática discreta no seu funcionamento – provocaram um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos discretos.

Desse processo decorre um desenvolvimento significativo da área de combinatória, que é a matemática dos conjuntos finitos. No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples

entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver.
(BRASIL, 2008, p. 94)

Nesse trabalho abordaremos os tópicos: Princípio Fundamental de Contagem (P.F.C.), Arranjos, Combinações e Permutações, no nível do ensino médio, que são partes integrante do conteúdo análise combinatória. E por que é dada ênfase a esses tópicos no ensino da Análise Combinatória? Podemos justificar essa ênfase de acordo com Morgado *et al.* (2004, p. 2)

Por que privilegiar o estudo das combinações, arranjos e permutações em um primeiro curso de Análise Combinatória? Em primeiro lugar, entre os vários tipos de “números para contagem” da Análise Combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade desses números a problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória.

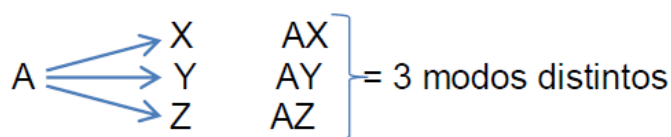
Assim, o estudo dessas técnicas é justificado pelo fato de sua aplicabilidade na área de informática, problemas de probabilidades finitas, entre outros, que são importantes em diversos campos do conhecimento. Nesse contexto, os problemas de combinatória obedecem ao princípio de contagem, e “dizemos que se desejarmos contar um conjunto de objetos, poderemos dividi-lo em duas partes, contar as partes separadamente e somar os resultados.” (MARTINES; BONFIM, 2011. P.10).

Alguns problemas de Análise Combinatória utilizam Princípio Fundamental de Contagem, que lezzi *et al.* (2002, p. 357) apresentam como:

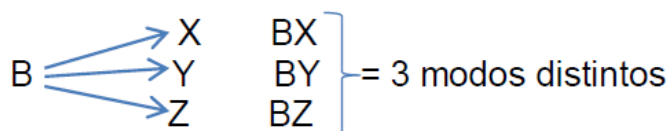
Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por $n \times m$.

Por exemplo, na situação problema: “De quantos modos distintos podemos entrar numa casa que tem 2 portões e 3 portas?” Esquematizando o problema: Portões A e B; Portas X, Y e Z, podemos perceber então que pelo portão A, teremos três possibilidades de caminhos: AX ou AY ou AZ. E pelo portão B, BX ou BY ou BZ. Ou seja, teremos seis modos distintos de entrar na casa. Então, matematicamente

seria $2 \times 3 = 6$. (MARTINES E BONFIM, 2011, P. 10). Resolvendo por diagrama de árvore, teríamos:



Logo $3 + 3 = 6$ modos distintos



Então, na resolução de alguns problemas empregando-se o princípio fundamental de contagem, que é considerado o instrumento básico para a Análise Combinatória, a aplicação direta desse princípio pode se tornar muito trabalhosa. Sendo assim, algumas definições de modos de formar agrupamentos são importantes para auxiliar na resolução de diversos problemas de contagem (Hazzan, 2004).

Os problemas de contagem podem ser resolvidos com as técnicas de contagem informadas na **tabela 1** a seguir. A tabela também apresenta a fórmula básica de cada técnica.

Tabela 1: Técnicas de contagem, em que m , r e n são números naturais.

Técnicas de contagem	Fórmula
Arranjos	$A_{m,r} = m \times (m - 1) \times \dots \times [m - (r - 1)]$
Permutações	$P_m = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
Permutações com elementos repetidos	$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$
Combinações	$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r! (m-r)!}$

Fonte: (Hazzan, 2004)

1.2. Recorte sobre o panorama didático matemático

Com o intuito de conhecer o que se tem de investigação no nível *Stricto Sensu*⁵, fizemos um levantamento bibliográfico em uma plataforma de uso aberto ao público. Para isso, foi feita uma pesquisa de revisão sistemática descritiva, realizada

⁵São as pós-graduações que compreendem programas de Mestrado e Doutorado.

Fonte: (<http://portal.mec.gov.br>)

em trabalhos científicos indexados na base de dados eletrônica Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, de âmbito nacional, tendo como enfoque da pesquisa e descritor nuclear a *Análise Combinatória*.

De acordo com Sória (2006), a revisão sistemática descritiva procura responder a uma pergunta específica e utiliza métodos explícitos e sistemáticos para identificar, selecionar e avaliar criticamente os estudos e para coletar e analisar os dados dessas pesquisas a serem utilizados na revisão.

Para realização da busca dos trabalhos sobre a temática desse estudo foi considerado como recorte temporal um período compreendido entre janeiro de 1999 e novembro de 2014. Esse marco temporal, podemos considerar extenso, mas o objetivo desse trabalho é justamente identificar a produção científica *stricto sensu* das universidades brasileiras nesse período.

Foram utilizados também livros-textos, artigos de periódicos científicos e documentos oficiais do Ministério da Educação para apresentar a definição de *Análise Combinatória* e suas diversas áreas de aplicação, uma vez que esse conteúdo programático se mostra de grande importância para o avanço da tecnologia e da sociedade na atualidade.

Para conhecer a produção *stricto sensu*, após o levantamento dos dados disponíveis na base citada anteriormente, procedeu-se a tabulação dos dados, que foram organizados por categorias: ensino- aprendizagem e aplicação nas diversas áreas dos conhecimentos. Levou-se em consideração a quantidade de trabalhos apresentados e publicados em cada uma das instituições onde foram realizadas e desenvolvidas as pesquisas.

Para a seleção dos trabalhos, a partir da leitura dos resumos, foram contabilizados e utilizados para análise os que continham relação com o ensino-aprendizagem ou aplicação em outras áreas do conhecimento do objeto matemático em estudo.

Para tratamento dos dados, foi utilizada uma organização dos trabalhos por área de ensino-aprendizagem, área de aplicação e instituições onde foram realizadas as pesquisas, possibilitando uma visão panorâmica sobre e onde estão sendo realizadas pesquisas com essa temática no Brasil, de acordo com a biblioteca digital de teses e dissertações (BDTD) da CAPES.

Foram encontrados 111 trabalhos, sendo 31 teses e 80 dissertações. Desses documentos, 16 tinham relação com a área de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, o que representa 14,4% dos trabalhos. No total, 3 teses e 13 dissertações são voltadas para o ensino-aprendizagem; 28 teses e 67 para aplicações nas diversas áreas do conhecimento.

Para detalhamento dos trabalhos encontrados, foi elaborada a tabela 2, que apresenta as instituições em que foram desenvolvidas as teses e dissertações discutindo análise combinatória. Na tabela, as instituições marcadas com * são aquelas em que foram desenvolvidas pesquisas relacionadas com ensino e aprendizagem desse conteúdo:

Tabela 2: Quantidade de trabalhos encontrados na BDTD nacional,

BDTD nacional		
INSTITUIÇÃO	TESE	DISSERTAÇÃO
UFOP, UFS, UFPA, UFSM, *UFAL, UFSC UNICENTRO, UNIVALI, PUCPR	0	1
*PUCSP	1	10
UFV, UNB	0	5
*UFSCAR	1	6
UFRN, UFMG	1	4
*UFRGS	0	3
UFPB, ITA, *UNIFOR, UFJF, UFES, UNISINOS	0	2
*NICAMP	7	13
USP	11	4
UFPE, INPE, UEL	1	1
PUCRIO	3	2
UERJ	2	0
MACKENZIE	1	0
TOTAL	31	80

Fonte: BDTD nacional

O resultado do estudo evidencia que as pesquisas realizadas com o objeto matemático Análise Combinatória tiveram um maior destaque nas dissertações, porém mostra também um percentual baixo de trabalhos voltados para a investigação na área de ensino e aprendizagem. O maior enfoque das pesquisas foi na aplicação de Análise Combinatória nas diversas áreas do conhecimento. Isso evidencia a importância desse conteúdo programático para o avanço da ciência e da tecnologia.

Entre as dissertações que relatam pesquisas sobre Análise Combinatória, encontradas na coleta de dados, relacionadas com teorias, metodologias e técnicas de contagem que contribuem para o ensino e a aprendizagem do referido conteúdo em sala de aula do ensino médio, destacamos os seguintes trabalhos:

Sturn (1999) desenvolveu uma pesquisa com foco nos procedimentos apresentados pelos alunos e por ele enquanto professor, através de atividades em sua própria turma, levando em consideração predominância do pensamento combinatório em detrimento de fórmulas.

A autora Almeida (2010) desenvolveu um estudo sobre o pensamento combinatório e a comunicação matemática, por meio de sequência didática. Foi evidenciado que todos os participantes da pesquisa apresentaram um significativo progresso na compreensão dos conceitos e na resolução dos problemas combinatórios.

Santos Filho (2010) apresentou a construção e a aplicação de um jogo eletrônico educacional no formato de objeto de aprendizagem, visando a aprendizagem significativa de Análise Combinatória. Foi verificado que os discentes construíram novos conhecimentos matemáticos e entenderam o significado do princípio multiplicativo desenvolvendo raciocínio combinatório.

Campos (2011) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de avaliar os tipos de problemas de contagem presentes no Caderno da Rede Estadual Paulista de Ensino. Foi constatada que mesmo o Caderno contendo um elenco grande de problemas de contagem, muitos deles envolviam situações semelhantes.

É notório que até hoje os docentes norteiam suas aulas pelo livro didático, deixando um vasto material bibliográfico produzido, como as dissertações e teses, sem utilização ou contribuição para as atividades em sala de aula.

Neste estudo verificamos uma escassez na produção científica no que diz respeito ao ensino de Análise Combinatória, no entanto, as pesquisas que temos voltadas para o ensino-aprendizagem dessa temática contribuem significativamente para uma melhoria do ensino no ambiente escolar da educação básica.

CAPÍTULO II

Este capítulo tem por objetivo apresentar o referencial teórico utilizado para o embasamento dessa pesquisa.

2.1. Registros de Representação Semiótica

Atualmente se fala muito das dificuldades de aprendizagem dos conteúdos programáticos da disciplina Matemática, e especificamente, Análise Combinatória é considerada o conteúdo mais difícil para ensinar e aprender no ensino médio (Lima *et al*, 2013). Essa é uma das justificativas para pesquisar sobre teorias e metodologias que possam contribuir para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo em uma perspectiva do funcionamento cognitivo em matemática.

A compreensão dessas dificuldades se faz necessária, pela exigência de uma melhor formação matemática inicial dos discentes no ensino básico, a fim de prepará-los para lidar com uma sociedade cada vez mais informatizada e tecnologicamente cada dia mais avançada. (DUVAL, 2003)

Para Damm (2012, p. 167), existe uma relação estreita entre a matemática e a forma como se estabelece seu ensino, destacando a diferença entre o objeto matemático de sua representação.

Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Para D'Amore (2005, p.55), o ensino de matemática “trata-se de uma necessidade tipicamente humana, uma elaboração (com características internas ou sociais ou ambas) que se organiza ao redor ou nos sistemas semióticos de representações.” Então, “Torna-se necessário refletir profundamente sobre o fato de que na aprendizagem matemática conceitual não é possível existir noesis⁶ sem semiosis⁷.” (D'AMORE, 2005, p. 64)

⁶Aquisição conceitual de um objeto

⁷Representação realizada por meio de signos

Damm (2012, p.177) destaca que para se estabelecer a aquisição do conhecimento de objeto matemático “é necessário que a noesis (conceitualização) ocorra através de significativas semiosis (representações)”.

Nesse sentido, Semiótica é a “ciência que estuda os sinais, suas combinações, seus significados e suas interpretações” (FIORENTINI, 2009, p.226).

Um registro de representação constitui-se de um “sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente” (ALMOULOU, 2007, p. 71). Então, os registros estão relacionados com os objetos matemáticos e sua aprendizagem e, conseqüentemente, deixam mais acessível a compreensão em matemática.

Duval (2003) destaca que é imprescindível uma abordagem cognitiva no ensino de matemática porque o objetivo da educação matemática no ensino básico não é formar somente o matemático, nem oferecer instrumentos que serão úteis somente no futuro e sim oferecer para o desenvolvimento geral competências de raciocínio, de análise e de visualização. Para o autor:

A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em situação de ensino (DUVAL, 2003, p.12).

Assim, o referido autor enfatiza as várias formas de representação semiótica utilizado em matemática, dentre elas destaca: o sistema de numeração e as escritas algébricas formais; as figuras geométricas; representações gráficas e a língua natural. Ele salienta também que existem quatro tipos diferentes de registros, dois deles classificados em Registros Multifuncionais e os outros dois em Registros Monofuncionais.

Tabela 3: Representações Semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: - argumentação a partir de observações, de crenças; - dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). - apreensão operatória e não somente perceptiva; - construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: - numéricas (binária, decimal, fracionária ...); - algébricas; - simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos - mudanças de sistemas de coordenadas; - interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2003, p. 14

Para analisar a atividade matemática numa perspectiva de ensino e aprendizagem, Duval (2003) apresenta dois tipos de transformações das representações semióticas: Os *Tratamentos* e as *Conversões*.

O *Tratamento* é a transformação da representação em outra equivalente, porém permanecendo no mesmo registro abordado inicialmente, ou seja, é uma transformação interna a um registro. Um exemplo da transformação de tratamento é apresentado a seguir:

Resolver uma equação, efetuando a resolução de um cálculo através do algoritmo.

Exercício resolvido em Paiva (2009, p. 180)

Calcular $C_{7,5}$.

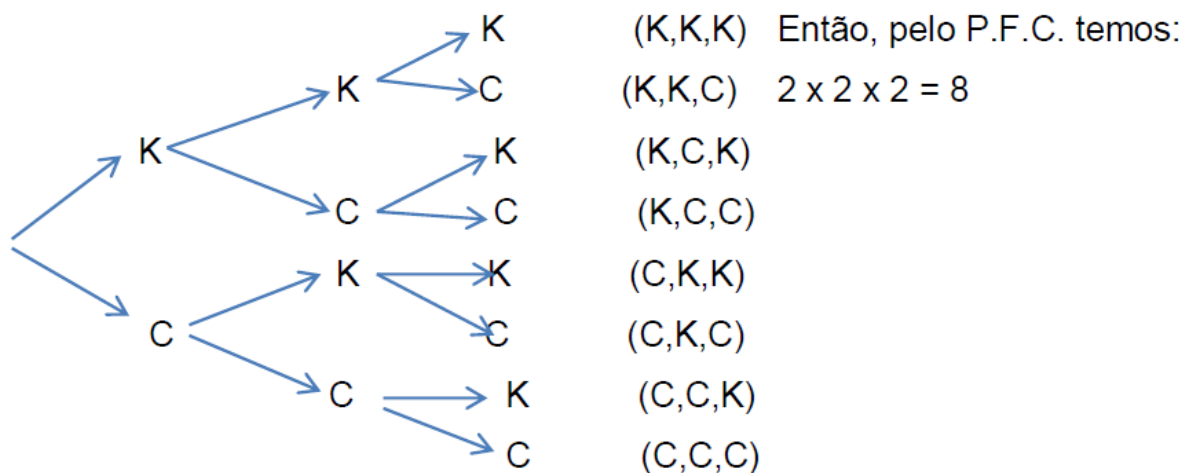
$$C_{7,5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$$

A *Conversão* é a transformação de representação em que se muda de registro conservando o objeto matemático denotado, por exemplo:

Passar uma situação-problema na língua natural para a escrita algébrica, representar uma situação-problema na língua natural para o diagrama de árvore.

Exemplo em Hazzan (2004, p 6): Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

Resolvendo aqui, podemos mostrar a solução por dois registros. Indicamos por K o resultado de cara e por C o resultado de Coroa.



Silva (2003, p. 110) discorre sobre o registro de representação semiótica:

... um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo não somente a comunicação, mas também o tratamento da informação e a objetivação. Nem todo sistema de signos constitui um registro. Por exemplo, as placas de trânsito das estradas são significantes (triângulo → perigo, vermelho → proibição...) e não podem se caracterizar como um registro no sentido de Duval, uma vez que não há a possibilidade de transformar um elemento em outro, diferentemente do que ocorre com todo elemento de um registro, que pode se transformar em outra representação do mesmo registro (tratamento) ou em uma representação de outro registro (conversão).

Duval (2003) coloca que os fracassos ou os bloqueios de entendimento dos discentes aumentam quando é necessária a mudança de registro ou quando a mobilização simultânea de dois registros é requisitada. Assim, o referido autor enfatiza que “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro” (DUVAL, 2003, p. 21). Então, podemos concluir que o acesso aos objetos matemáticos será através das representações matemática, a mobilização e coordenação de um registro para outro registro, proporcionando a capacidade de visualização do objeto matemático em dois ou mais registros de representação semiótica.

Os fenômenos cognitivos inerentes à atividade matemática levam à mobilização de vários registros de representação semiótica e, conseqüentemente, à transformação dessas representações (DUVAL, 2003).

A atividade matemática tem como característica a diversidade dos registros de representação semiótica que são mobilizados obrigatoriamente. Logo, para analisar as dificuldades na aprendizagem em matemática é necessário dar prioridade ao estudo das Conversões das representações semióticas e não os Tratamentos dessas representações, pois a articulação dos registros constitui o não enclausuramento em um determinado registro (DUVAL, 2003).

Flores (2006) faz uma reflexão sobre o desenvolvimento histórico da representação dos objetos matemáticos com a seguinte abordagem: Na idade antiga e média a matemática era escrita de maneira quase que inteiramente retórica, desde Viète⁸ e Descartes⁹ no fim do século XVI e início do século XVII que a matemática começou a ser sistematizada. Será com Leibniz¹⁰ que ocorrerá uma abstração do objeto matemático em relação à escrita.

Colombo, Flores e Moretti (2008) trazem reflexões sobre a forma de utilização dos estudos de Raymond Duval do papel dos registros de representação semiótica no ensino e na aprendizagem da matemática. Seguindo esta tendência, o presente trabalho aborda também outras pesquisas brasileiras que têm sido feitas com base nessa teoria, como forma de apontar possibilidades de utilização dela no currículo de matemática e também na formação de professores que ensinam essa disciplina. A seguir, são apresentadas algumas dessas pesquisas.

Santos e Curi (2012) apresentam como ocorrem as mobilizações de conhecimentos matemáticos na resolução de atividades de física, levando em consideração os registros de representação semiótica. Trazem uma análise enfocando a transformabilidade dos registros e seus aspectos didáticos. As autoras apresentam algumas considerações que apontam para a dificuldade que os alunos podem ter ao resolver as atividades da disciplina física. De acordo com as autoras, de certa forma, os estudantes apresentam dificuldade de mobilização, no sentido de conversão, e também nos tratamentos das atividades propostas em situações de ensino.

⁸ Advogado e matemático francês viveu entre 1540-1603.

⁹ Filósofo, físico e matemático francês viveu entre 1596-1650.

¹⁰ Matemático e filósofo alemão viveu entre 1646-1716.

Oliveira e Mariani (2013) investigaram se e como os registros de representação semiótica são mobilizados nos livros didáticos adotados nas escolas públicas quanto ao conteúdo geometria analítica, onde há predominância das conversões dos registros, partindo do algébrico e chegando ao geométrico. O estudo aponta que nessas atividades está presente o uso das conversões que possibilitam ao aluno uma compreensão de que um mesmo objeto pode ser representado em outros registros, tais como o algébrico, o geométrico, o gráfico e o numérico.

Santos (2013), utilizando sequência de ensino, desenvolveu uma pesquisa que objetivava identificar os registros de representação semiótica que são mobilizados pelos alunos do ensino médio quando solicitados a solucionar atividades que envolvam equações diofantinas lineares,. Os resultados apontam que os alunos priorizam conversões do registro na língua natural para o registro numérico e algumas vezes para os algébricos, mostrando dificuldades nas operações básicas de aritmética.

Enfatizamos que, se o ensino de matemática for direcionado para a mobilização dos registros de representação semiótica, isso pode contribuir significativamente para que o trabalho do professor de matemática venha a atingir os objetivos que foram planejados para suas aulas. Isso se dará por meio da utilização de estratégias metodológicas que diminuam as dificuldades de aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina.

2. 2. Níveis de conhecimentos esperados dos estudantes

Os níveis de conhecimentos esperados dos estudantes foram apresentados na França por Aline Robert em seu artigo “Quelques outils d’analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l’université”¹¹. (ROBERT, 1997).

De acordo com Gouveia (2014), os níveis de conhecimentos definidos por Robert são: técnico, mobilizável e disponível. A definição de cada um desses níveis é apresentada a seguir:

O Nível *Técnico* é aquele que corresponde o trabalho individual do discente, onde todas as informações para a resolução da tarefa estão claras no exercício

¹¹ROBERT, A. **Quelques outils d’analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l’université**. Actes de la IX école d’été de didactique des mathématiques. Houlgate. França.1997.

proposto. A **Figura 1** apresenta um exemplo de exercício em que é esperado que o aluno faça a substituição dos valores diretamente na fórmula do Princípio Fundamental de Contagem.

Figura 1: Exemplo de questão do nível técnico

Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?

Fonte: Hazzan (2004, p.3)

O *Nível Mobilizável* corresponde à utilização de ferramentas específicas para cada problema proposto ao aluno. Assim, está explícito o que se pretende saber no problema, porém o aluno deve escolher a forma da resolução do problema. . Na **Figura 2** tem-se um exemplo de questão em que se espera que o aluno escolha para resolução do problema o registro algébrico ou o diagrama de árvore.

Figura 2: Exemplo de questão do nível mobilizável

Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de *Cara* e *Coroa*?

Fonte: Hazzan, (2004, p.6)

O *Nível Disponível* é aquele que o aluno precisa possuir para que consiga entender que as informações para a resolução do problema estão no enunciado, mas não é disponibilizada nenhuma maneira que auxilie o aluno na resolução do problema proposto. Nesse nível o aluno é mobilizado a pensar em uma possível solução, cabendo nesse caso à experimentação e/ou contra exemplos. Um exemplo de questão que pode requerer que o aluno demonstre o nível de conhecimento disponível é apresentado na **Figura 3**.

Figura 3: Exemplo de questão do nível Disponível

Uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram duas caras consecutivas, ou quatro lançamentos sejam feitos, o que primeiro ocorrer. Quais as sequências de resultados possíveis?

Fonte: Hazzan, (2004, p.8)

Em relação aos níveis de conhecimento, alguns autores brasileiros já vêm desenvolvendo pesquisas, como as apresentadas a seguir:

Kamiya e Dias (2005) apresentaram o referencial teórico sobre os níveis de conhecimentos esperados pelos estudantes de Aline Robert. A pesquisa analisava os conteúdos da disciplina de matemática Análise Combinatória e Probabilidades em algumas obras para o ensino desses conteúdos, onde foi identificada uma tendência dos níveis mobilizável e disponível para os objetos matemáticos em estudo.

Barros (2011) apresentou os resultados de uma pesquisa sobre as relações pessoais esperadas pelos discentes no estudo da noção de derivada de uma função. Dentre os referenciais teóricos que embasaram a pesquisa, foi utilizado *Níveis de conhecimento esperados dos estudantes*, para análise de atividades propostas aos alunos em situação de ensino. Barros quis mostrar a importância do nível correto das questões para atingir os objetivos de ensino.

Santos e Curi (2009) fizeram um estudo sobre a articulação entre algumas teorias francesas, tais como: Níveis de conhecimentos esperados pelos alunos, de Robert (1997); Registros de representação semiótica de Duval (1993), sobre mudanças de quadro de Douady (1992). Os autores evidenciaram também como relevante a abordagem teórica de Robert na indicação das dificuldades encontradas pelos discentes na resolução de tarefas matemáticas.

Teixeira e Santos (2013) fizeram uma análise do Saresp¹² para o 9º ano do ensino fundamental, em relação à mobilização de conhecimentos de matemática ensinados a esses alunos. Para isso, os autores recorreram à abordagem teórica de Robert (1998) sobre os níveis de conhecimentos esperados. A forma de resolução dos conteúdos matemáticos empregando essa teoria é de cunho cognitivo. O estudo concluiu que a dificuldade que os discentes apresentam em mobilizar os conhecimentos matemáticos para a resolução ocorre quando a aplicação dos conhecimentos matemáticos não é direta.

2. 3. Resoluções de problemas no ensino de Análise Combinatória

A resolução de problemas vem sendo considerada como metodologia de ensino em matemática, em que o professor propõe questões do cotidiano ao aluno. Essa metodologia possui a característica de ensino investigativo, e por explorar

¹²Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

novos caminhos para a aquisição do conhecimento (MENDES, 2008). Considerando essa metodologia, Polya¹³ (2006, p. 3) coloca dois objetivos essenciais que os professores devem observar em suas aulas em relação ao aluno: “primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio”. O referido autor ainda orienta que é preciso visualizar o problema como um todo, com muita clareza e nitidez, ou seja, “É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo.” (POLYA, 2006, p. 29).

Incentivar o aluno a elaborar as próprias estratégias de aquisição do conhecimento por meio da análise e discussão de situações-problema é uma alternativa a ser buscada pelos professores. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam:

Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando as etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 1998, p. 266).

Matos e Serrazina (apud MENDES, 2008) definiram os tipos de problemas que são resolvidos em sala de aula, relacionados ao conteúdo matemático. A **Tabela 4** descreve os tipos de problema e as definições apresentados pelos autores:

¹³Matemático Húngaro (1887 – 1985)

Tabela 4: Classificação dos problemas.

Tipos de problemas	Definição
Exercício	São problemas descontextualizados, em que se utilizam somente as regras e algoritmos para resolução.
Problemas palavras	São os que se diferenciam do exercício por serem apresentados de forma escrita, porém, fechados.
Problemas para descobrir	São formulados para apresentar contextos explícitos, que necessitam de utilização de estratégias para descobrir um caminho para resolver o problema.
Problemas de provar uma conjectura	Apresentam-se de forma explícita, na qual a solução é uma regra geral única.
Problemas da vida real	São enunciados de forma e contexto que não são explícitos, exigindo de quem vai resolver uma interpretação para solucionar cada problema, proporcionando aulas investigativas em sala de aula.
Situações problemas	São aqueles em que o contexto é parcialmente explícito e as estratégias para resolver um problema exploram vários contextos.

Fonte: Mendes (2008 p. 32-33)

Alguns pesquisadores em educação matemática, como Polya (2006), Mendes (2008) e Onuchic (1999), enfatizam que essa tendência para o ensino de matemática visa o desenvolvimento de habilidades metacognitivas¹⁴, levando os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem a terem autonomia na construção do conhecimento matemático.

Assim, essa forma de ensinar se contrapõe ao ensino memorístico, levando o aluno a pensar por si mesmo, levantando hipóteses, analisando-as e chegando a conclusões em meio a uma discussão com os colegas de classe (MENDES, 2008).

¹⁴De acordo com Ribeiro (2003) “diz respeito, entre outras coisas, ao conhecimento do próprio conhecimento, à avaliação, à regulação e à organização dos próprios processos cognitivos”.

Nesse sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sinalizam para a articulação entre contextualização e resolução de problemas, salientando que “a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola” (BRASIL, 2008, p.83).

Trabalhar a análise combinatória por meio de resolução de problemas, destacando aquelas situações problemas que utilizam fatos e situações que tenham significado para aluno, é uma forma de desmitificar esse conteúdo. A resolução de problemas favorece ao aluno o desenvolvimento cognitivo, contribuindo para a construção de conceitos e trabalhando habilidades que ajudarão na formação de sua estrutura de pensamento matemático.

CAPÍTULO III

Este capítulo apresenta os sujeitos envolvidos na pesquisa, a análise do livro didático utilizado pelos alunos da escola onde foi desenvolvida a pesquisa e os aspectos metodológicos utilizados.

3.1. Contexto da pesquisa: a escola e os sujeitos envolvidos na investigação

A pesquisa teve sua parte experimental desenvolvida no Colégio Estadual Vitória de Santa Maria, localizado no bairro Santa Maria, na cidade de Aracaju, Sergipe. O colégio oferece o ensino fundamental (6º, 7º, 8º e 9º anos), ensino médio em duas modalidades (ensino médio regular e ensino médio integral)¹⁵ e projetos educacionais como: Projeto de Música Clássica, Mais Educação e Escola Comunidade.

Na época da pesquisa, a instituição de ensino contava com uma equipe diretiva composta por um diretor, três coordenadores, uma pedagoga e dois secretários, responsáveis por administrar e orientar pedagogicamente aos professores e funcionários.

Em relação à estrutura física, o colégio tem 16 salas de aulas, biblioteca, laboratório de informática educativa, laboratório de ciências, sala de vídeos, sala de recurso para atendimento a alunos especiais, sala dos professores, pátio com cozinha, quadra de esportes, sala da direção e sala da secretaria. A instituição funciona nos três turnos de ensino.

Na modalidade de ensino médio integral, em 2014 o colégio tinha quatro turmas de 1ª série, duas turmas de 2ª série e uma turma de 3ª série, totalizando sete turmas.

De acordo com o Guia de livros didáticos PNLD 2012, o conteúdo Análise Combinatória aparece no livro da 2ª série do ensino médio, então, como o planejado para o desenvolvimento do projeto foi trabalhar somente com uma turma, por razões de disponibilidade de tempo, decidimos desenvolver a pesquisa com apenas uma delas, que foram identificadas como turma A e turma B. Como a turma A tinha os horários da disciplina matemática no período da manhã e a turma B pela manhã e

¹⁵Ensino regular é aquele onde o aluno estuda somente um turno na escola. O ensino integral é aquele onde o aluno estuda dois turnos na escola.

tarde, decidimos desenvolver a pesquisa na 2ª série A do ensino integral, por levar em consideração a praticidade do horário das aulas nessa turma.

O professor regente da turma é licenciado em matemática e especialista em matemática financeira, lecionando a disciplina matemática no ensino médio há 10 anos.

A turma 2ª série A onde se desenvolveu as sessões de ensino era representada por 31 alunos; porém, dois alunos abandonaram a escola logo no início do ano letivo, ficando 29 frequentando regularmente as aulas. Quanto ao sexo, tínhamos 21 femininos e 8 masculinos.

As sessões de ensino foram desenvolvidas na sala de aula e no laboratório de informática educativa, para a exibição de filmes relacionados ao conteúdo ministrado, pois esse laboratório possui os equipamentos necessários para a exibição de vídeos.

Com relação ao horário de estudo na modalidade de ensino integral, as aulas iniciavam às 07h00 min da manhã até às 11h30 min com intervalo de 10 minutos. Pela tarde ocorriam entre das 13h00 min até às 15h00 min, com exceção das quartas-feiras, quando o horário de saída era às 16:00 h, porque os alunos tinham uma atividade a mais.

3.2. O livro didático de Matemática: Uma análise do conteúdo Análise Combinatória

O livro didático é um instrumento pedagógico utilizado em sala de aula há muito tempo por docentes de disciplinas de todas as áreas do conhecimento escolar. Segundo Bittencourt (apud FONSECA *et al.*, 2014, p. 2), os livros didáticos são “materiais mediadores do processo de aquisição de conhecimento, assim como facilitadores da apreensão de conceitos, do domínio de informações e de uma linguagem específica de cada área da disciplina”.

Nesse sentido, podemos perceber que esse recurso didático vem sendo objeto de pesquisa em todas as áreas do ensino, e mais especificamente, em educação matemática.

Fonseca *et al.* (2014) faz uma reflexão em dois livros didáticos de matemática do PNLD 2012, levando em consideração o conteúdo Análise Combinatória. No

contexto, os autores observaram a importância da análise do livro didático de matemática e a dificuldade que os professores apresentam para ensinar esse conteúdo no ensino médio e lembrando que o professor também pode lançar mão de outros recursos pedagógicos para o desenvolvimento de suas aulas.

Fonseca, Souza e Santos (2014) o trabalho traz uma reflexão sobre a utilização da mobilização dos registros de representação semiótica de Raymond Duval para o ensino de Análise Combinatória, através análise de conteúdo em um livro didático de matemática para estudantes de ensino médio, disponibilizado no Guia de livros didáticos PNLD 2012. Os autores concluíram que a representação na forma da língua natural aparece com maior frequência, em seguida, a forma algébrica e, com menor quantidade, a utilização do diagrama de árvore.

Trabalhos realizados por Soares (2013), Valente (2008) e Carvalho (2008) abordam sobre o uso do livro didático de matemática como fonte de pesquisa de cunho histórico, com marco temporal entre os séculos XIX e XX. Os autores mostram a importância desse tipo de livro como recurso didático e também como fonte de informação dentre outras funções, ressaltando que, esse objeto pedagógico tem sido sujeito de controle político ou religioso.

Dante (1996) e Gomes (2010) salientam a abordagem e a importância da apropriação e transposição da história da matemática introduzida pelos autores de livros didáticos de matemática para o ensino médio. Destacam também a importância desses livros nos espaços formais de ensino devido à ausência de outros materiais instrucionais em quantidade e qualidade que oriente os docentes no ambiente escolar.

Megid Neto e Fracalanza (2003) analisaram o livro didático para o ensino de ciências utilizado no Brasil, considerando: as características dos manuais didáticos, a utilização pelos docentes, as novas propostas curriculares para o ensino de ciências. Concluindo que os livros didáticos e ações por si só não garantem a melhoria do ensino.

Damazio (2006) apresenta em sua pesquisa os critérios de escolha do livro didático por docentes que ensinam matemática. O autor observa que, algumas vezes, a mudança do livro didático é feita pelo professor para se dizer atualizado e não pela reflexão/ação da sua prática docente. Então, normalmente, o critério de

escolha é aquele com os mesmos conteúdos e com uma maneira mais simples de explicar os conteúdos para os alunos.

Maggio, Soares e Nehring (2010) desenvolveram uma investigação através da análise de dois livros didáticos de matemática, utilizando os Registros de Representação Semiótica como fundamentação teórica para análise, destacando os prejuízos para o ensino e aprendizagem com os livros que não exigem procedimentos globais.

Quanto à adoção do livro didático, é necessário que o professor esteja atento às questões do processo de ensino e aprendizagem, pois o conteúdo do livro deve estar coerente com os PCNEM¹⁶ e a LDB¹⁷. Segundo Batista (2003, p.44):

Para que sua utilização se concretize nas escolas, reforçando o vínculo dos conteúdos com as práticas sociais e atendendo às novas demandas das escolas, é necessário que o livro didático seja um instrumento que favoreça a aprendizagem do aluno, no sentido do domínio do conhecimento e no sentido da reflexão na direção do uso dos conhecimentos escolares para ampliar sua compreensão da realidade e instigá-lo a pensar em perspectiva, formulando hipóteses de solução para os problemas atuais. Isso significa colocar o livro didático como subsídio da escola para a consecução do objetivo de promover o exercício da cidadania, vale dizer, a serviço da sua proposta pedagógica que é, em última instância, o projeto coletivo necessário à constituição da identidade da unidade escolar.

O autor traz a necessidade do livro didático como favorecedor da aprendizagem do aluno ao mesmo tempo em que há também uma preocupação voltada para o lado social. A escolha do livro didático não deve estar limitada apenas ao conhecimento da disciplina sendo necessário abranger todos os meios e áreas do conhecimento.

Os exemplos, atividades e problemas propostos durante a exposição do conteúdo exposto no livro didático devem conter informações acessíveis ao aprendizado do aluno bem como uma linguagem clara e coerente para facilitar a compreensão de cada estudante.

De acordo com Rosa (2012, p. 9):

¹⁶Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

¹⁷Lei de Diretrizes e Bases da educação Nacional nº 9394 de 20 de dezembro de 1996

Analisar um livro antes de utilizá-lo é de suma importância, pois se pode perceber qual a intenção da aplicação de referidos exercícios, ou verificar se o objetivo a alcançar na explicação de determinado conceito vai ser efetivado, não fugindo do objetivo que o professor traçou no início do plano de atividades.

Ou seja, o professor deve estar ciente que analisar um livro antes de utilizá-lo é uma ação necessária para o desenvolvimento pleno do conteúdo planejado pelo educador no decorrer das atividades, e também para que o professor compreenda o significado dos exercícios propostos em cada capítulo, facilitando assim o processo de aprendizagem de seus alunos.

O guia de livros didáticos PNLD¹⁸ 2015 Matemática, destaca a Análise Combinatória como um tema com muita tradição e sua renovação nos livros didáticos de matemática para o ensino médio tem sido lenta, porém, um dos avanços foi à inclusão do Princípio Fundamental de Contagem.

Foi feita uma análise de cunho qualitativo de um livro didático de Matemática que é disponibilizado pelo PNLD 2015 para professores da rede pública em âmbito nacional, a fim de que possam escolher os livros que irão adotar para suas turmas. Os livros elencados no Guia de livros didáticos de Matemática PNLD 2015 compõem sete coleções, e estão apresentadas na **Tabela 5**, a seguir:

Tabela 5: PNLD 2015

	Título da Obra	Volume	Autor	Editora
Coleção 1	Conexões com a matemática	3	Fábio Martins de Leonardo	Moderna
Coleção 2	Matemática: Contexto e Aplicações	3	Luiz Roberto Dante	Ática
Coleção 3	Matemática-Paiva	3	Manoel Rodrigues Paiva	Moderna
Coleção 4	Matemática: Ciências e Aplicações	3	Gelson Iezzi [et al.]	Sariava
Coleção 5	Matemática ensino médio	3	Maria Ignez Diniz Kátia Stocco	Saraiva

¹⁸Programa Nacional de Livros Didáticos

			Smole	
Coleção 6	Novo olhar: Matemática	3	Joamir Souza	FTD

Fonte: (BRASIL, 2015)

Tabela 6: Principais elementos do livro escolhido.

Livro Analisado: Matemática-Paiva	
Dados	Volume 2; Capítulo 9 e 10; Páginas 142 a 179
Conteúdo do capítulo 9 e 10	Análise Combinatória: - PFC - PAC - Fatorial - Arranjos - Permutação - Combinação - Binômio Newton
Abordagem do conteúdo	- Introduz o conteúdo com problemas do cotidiano - Definição simples para a generalização - Utiliza esquemas: quadros explicativos, diagrama de árvore.
Metodologia	- Resolução de problemas - Exercícios de fixação descontextualizados - Esquemas visuais: tabelas, diagramas, mapas e imagens.
Contextualização	- Exercícios envolvendo situações problemas do cotidiano - Conexão com as diversas áreas do conhecimento.
Tipos de representação do objeto matemático	- Linguagem natural - Algébrica - Situação esquemática

O primeiro critério de análise foi classificar os exercícios resolvidos, exercícios propostos e exercícios complementares como problema aberto ou problema fechado.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008, p. 84) destacam que o problema aberto “procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas (...) e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de “provas escritas””.

Os problemas fechados “pouco incentivam o desenvolvimento de habilidades (...) já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático”. (BRASIL, 2008, p.83)

No livro em análise foram encontrados 56 problemas abertos e 32 problemas fechados.

Assim, o número de problemas abertos é maior do que o de problemas fechados, pois, segundo os PCN⁺¹⁹ (2002, p.127), os problemas abertos permitem ao aluno “Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem”.

O segundo critério analisou os tratamentos utilizados pelo livro em estudo. Os tratamentos são transformações da representação utilizada ao objeto matemático, permanecendo dentro do mesmo registro.

A **Tabela 7** destaca os tratamentos explorados pelo livro em estudo. Faremos análise em relação aos tratamentos sobre os exercícios, levando em consideração os exercícios resolvidos e os propostos. Encontramos no livro dois tipos de tratamentos, o algébrico e a situação esquemática. O tratamento algébrico é a utilização direta da fórmula pela qual é resolvida uma equação ou a utilização de um algoritmo para efetuar contas. A situação esquemática se utiliza de diagramas de árvore, tabelas, figuras, gráficos e outras formas de organizar os elementos das questões propostas como exercícios do livro.

Tabela 7: Tratamentos mobilizados nos exercícios.

Algébrico	Situação esquemática
33 (37,5%)	55 (62,5%)

¹⁹Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

Nos exercícios propostos no livro podemos verificar que entre os tratamentos explorados para o conteúdo em estudo, a situação esquemática é a mais utilizada, em detrimento do tratamento algébrico. No entanto, foi verificada a falta de exploração do diagrama de árvore nos exemplos resolvidos. Conforme Apresenta as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, “A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento” (BRASIL, 2008, p. 79).

O terceiro critério foi verificar as conversões mobilizadas no livro e também em qual sentido elas se movimentam, visto que, a conversão é a transformação que muda o registro de uma representação para outra representação conservando os mesmos objetos matemáticos. No livro em análise identificamos três representações da Análise Combinatória, sendo elas: Língua Natural, a Algébrica e a Situação Esquemática. As situações esquemáticas estão representadas por gráficos, tabelas, os diagramas de árvore, figuras etc. A **Tabela 8** apresenta as conversões presentes no livro em análise.

Tabela 8: Conversões mobilizadas no livro em estudo.

Conversão	Língua Natural→Situação Esquemática	Língua Natural → Algébrica
Quantidade	39	21
Conversão	Situação Esquemática →Algébrica	Algébrica →Situação Esquemática
Quantidade	7	0

Fonte: o autor (2015)

Identificamos que as conversões mobilizadas no registro língua natural para situação esquemática e língua natural para algébrica foram as mais exploradas, porém, em treze exercícios de registro algébrico não é necessário conversão, permanecendo o mesmo registro.

Destacamos que, o livro explora de forma relevante o registro na língua natural, sugerindo a conversão para outro registro, porém, somente em um exemplo foi

utilizado o diagrama de árvore, em combinação simples, mas esse tipo de diagrama não foi explorado nos exercícios resolvidos. Embora se perceba que a ausência do diagrama de árvore não estimula ao professor nem ao aluno para o uso dessa ferramenta no ensino de Análise Combinatória.

3.3. Aspectos metodológicos da Engenharia Didática

A noção de engenharia didática surgiu na educação matemática na década de 1980, sendo um enfoque da escola francesa, caracterizando-se pela forma singular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa experimental em educação matemática (ARTIGUE, 1996; ALMOULOU, 2007; PAIS, 2008; MACHADO, 2012).

A engenharia didática, como metodologia de pesquisa na área de matemática, é denominada como esquema experimental, com base em aplicação de sequências de ensino em sala de aula; isto é, na elaboração, aplicação, observação e análise das sessões de ensino (PAIS, 2008).

Segundo Almouloud (2007, p.171) “A engenharia didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático”.

Assim podemos definir a engenharia didática como sendo uma metodologia que:

Segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos da área, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência (ALMOULOU, 2007, P. 171).

Segundo Artigue (1996) a utilização da metodologia da engenharia didática se faz pela execução de quatro diferentes fases:

- 1 - As análises prévias;
- 2 - Concepção e análise a priori;
- 3 - Aplicação de uma sequência de ensino;
- 4 - Análise a posteriori e validação.

Artigue (1996 apud CARNEIRO, 2005) destaca três dimensões para as Análises Prévias: A dimensão epistemológica, referindo-se às características do objeto matemático que se pretende pesquisar; A dimensão didática, referindo-se à organização e funcionamento do sistema de ensino; A dimensão cognitiva, referindo-se às características dos discentes envolvidos no estudo.

Para as *Análises Prévias*, foi feito um estudo do conteúdo programático proposto, por meio da análise e organização didática de Análise Combinatória em documentos oficiais, tais como: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - 9.394/96 (LDB), Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) (PCNs), Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) e análise de um livro didático disposto no Guia de livros didáticos PNLD 2015. Na análise do livro didático buscou-se enfatizar a proposta feita no livro adotado pela escola em que será aplicado a sequência de ensino ao mesmo tempo foi feito o levantamento de referências bibliográficas sobre que tratem sobre o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Artigue (1988 apud ALMOULOU, 2007) ressalta que cada uma das quatro fases podem ser retomadas e aprofundadas de acordo com as necessidades que poderão surgir, pois as análises prévias representam somente o primeiro nível de organização da pesquisa. Sendo assim, as fases do trabalho podem ser concomitantes, permitindo ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão colocadas e manipuladas na aplicação da sequência didática.

Na *Concepção e análise a priori*, com o intuito de responder as questões propostas e validar as hipóteses colocadas na fase das Análises Prévias, neste estudo foi elaborada uma sequência didática do conteúdo programático Análise Combinatória, com ênfase na metodologia Resolução de Problemas, utilizando como referências Polya (2006), Mendes (2008) e Onuchic (1999).

Nesse sentido, Almouloud (2007, p. 174) esclarece que “Entendemos por situação-problema a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos”.

Para atingir os objetivos dessa pesquisa determinamos as variáveis didáticas que poderiam provocar mudanças pretendidas ao processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Na análise a priori das situações-problemas se leva em consideração dois aspectos: A análise matemática, para identificar as estratégias e os métodos na resolução da situação proposta, evidenciando os saberes e os conhecimentos matemáticos utilizados; Análise didática, para analisar a pertinência da sequência de ensino, identificar as variáveis de comando, refutar e analisar as dificuldades que os discentes enfrentarão na resolução das atividades, identificar novos saberes ou métodos para a aprendizagem do conteúdo proposto.

A *Aplicação da Sequência de Ensino ou experimentação* é uma etapa de grande importância na garantia de uma coerência entre os resultados em sala de aula e o referencial teórico discutido no estudo.

No estudo, foram planejadas sessões de ensino que foram ministradas em uma turma do 2º ano do ensino médio com o conteúdo programático Análise Combinatória, a fim de observar situações de aprendizagem, envolvendo as ideias de registro de representação semiótica.

Quanto a *Análise a posteriori e validação*, nessa etapa da pesquisa foi feita uma análise dos dados obtidos através dos protocolos da experiência, que ocorreu de forma predominantemente qualitativa, a fim de verificar a hipótese colocada nesse estudo.

Almouloud e Coutinho (2008) tecem reflexões sobre pesquisas que utilizam como metodologia os princípios da engenharia didática. Assim, salientam que os trabalhos analisados com o aspecto metodológico citado anteriormente, foram identificados um objetivo comum: o estudo do processo de ensino e aprendizagem de um dado conceito matemático e a elaboração de uma sequência de ensino com propósito de proporcionar ao discente a compreensão desse conceito matemático.

Com efeito, para a pesquisa de um determinado problema relativo a um conteúdo matemático, é necessária e imprescindível, uma metodologia compatível com os objetivos almejados para a educação matemática que tenha como propósito a melhoria do ensino e aprendizagem nessa disciplina do currículo escolar.

3.4. A dinâmica utilizada na pesquisa

No planejamento das sessões de ensino buscou-se uma estratégia para desenvolver a sequência, visando favorecer a visualização das diversas formas de representações do objeto matemático (Análise Combinatória) identificadas nos livros didáticos de matemática e, com isso, privilegiar as conversões e não os tratamentos.

Foram discutidos os conteúdos em duas partes, a primeira parte sendo referente à introdução da Análise Combinatória através do Princípio Fundamental de Contagem, Fatorial e Permutação, e na segunda parte, apresentamos as técnicas de contagem: Arranjos e Combinação.

Apresentamos dois vídeos da série Matemática Multimídia, encontrados no site do professor doutor Leo Akio Yokoyama do colégio de aplicação da UFRJ, <http://leoakio.com/analise-combinatoria.html>, que disponibiliza um link para o site da Unicamp²⁰.

Na primeira parte, foi assistido ao filme “De malas prontas”²¹ que aborda os conteúdos Princípio Fundamental de Contagem e fatorial. Esse recurso educacional tem por objetivos:

1. Introduzir o princípio fundamental da contagem e definir o conceito de fatorial;
2. Apresentar alguns problemas e aplicações de combinatória enumerativa.

Em seguida, foram ministradas três sessões de ensino e aplicada uma lista de atividades, para resolução pelos os alunos, que foi avaliada pelo pesquisador para análise do protocolo.

Na segunda parte, foi assistido ao filme “Desejos”²² que aborda os conteúdos Arranjos e Combinação. Esse recurso educacional tem por objetivo motivar uma aplicação de análise combinatória.

Em seguida, foram ministradas duas sessões de ensino com resolução de atividades e os alunos responderam a uma nova lista de questões.

Os filmes foram reproduzidos no laboratório de informática educativa e as aulas foram ministradas na sala da turma.

²⁰Universidade Estadual de Campinas

²¹Fonte: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083>

²²Fonte: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083>

CAPÍTULO IV

Neste capítulo serão apresentadas três fases da pesquisa: I. Concepção e análise *a priori*; II. Experimentação; e III. Análise *a posteriori* e validação da Sequência didática.

4.1. Concepção e Análise *a priori*

A fase da concepção e análise *a priori*, Segundo Artigue (apud, Pais, 2008, p. 101) é aquela que diz “respeito ao planejamento específico de uma sessão da sequência didática, (...) relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão”.

De acordo com Pais (2008, p.102), “Uma sequência didática é formada por certo número de aulas planejadas e analisadas previamente, com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”. O autor ainda coloca que essas aulas são denominadas de sessões, pelo seu objetivo de verificar hipótese de uma pesquisa.

Na pesquisa aqui apresentada, a sequência didática foi composta por cinco sessões de ensino com explanação do conteúdo, sendo a sequência dividida em duas partes, foi aplicado um protocolo ao final de cada parte da sequência para a coleta dos dados. Nos dados coletados através dos protocolos foram analisados quais registros foram utilizados para o conteúdo matemático em estudo e quais as transformações foram coordenadas com os registros de representações semióticas utilizados para o objeto matemático em estudo. Pois essa pesquisa pretendeu verificar a hipótese de que a aplicação de uma sequência didática, que possibilite a articulação entre os diferentes registros de representação semiótica, propicia aos alunos uma melhor compreensão do objeto matemático Análise Combinatória.

Na primeira parte da sequência, foram ministradas três sessões de ensino e realizada a aplicação de um protocolo da experiência²³ para coleta de dados. Então, nessa etapa foram explicados os objetivos da pesquisa, enfatizando que os alunos seriam voluntários e aplicou o termo de consentimento livre e esclarecido; logo em seguida, os alunos assistiram a um filme relativo ao conteúdo abordado (De malas prontas). Após o filme, foram discutidos com os alunos os conteúdos matemáticos

²³Segundo Pais (2008,) os protocolos são instrumentos de registro dos dados coletados na pesquisa.

Princípio Fundamental de Contagem, Fatorial e Permutação. Ao final, o pesquisador aplicou o primeiro protocolo com três atividades.

Na segunda parte, foram ministradas duas sessões de ensino e foi realizada a aplicação do segundo protocolo. Sendo assim, os alunos assistiram ao filme Desejos, se discutiu com os alunos os conteúdos Arranjos e Combinação e se aplicou o protocolo de pesquisa com quatro atividades.

Detalhes sobre a autoria dos filmes estão apresentados no Capítulo III.

4.2. A Experimentação

De acordo com Artigue (1996, p. 208), a aplicação da sequência didática é composta por sessões de ensino que se caracterizam em “observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela”.

Na primeira sessão, foram explicados os objetivos da pesquisa e foi feita a assinatura do termo de consentimento e livre esclarecido pelos alunos, então foi explicado o conceito de Análise Combinatória. Em seguida, os alunos assistiram ao filme “De malas prontas”, que aborda de maneira simples o conceito do Princípio Fundamental de Contagem e Fatorial. Então, foram discutidas com os alunos duas atividades relacionadas aos temas em estudo. A figura 4 apresenta a tela inicial do filme.

Figura 4: Detalhe da tela inicial do filme “De malas prontas”



Na segunda sessão, foram resolvidas com os alunos três atividades de Princípio Fundamental de Contagem e uma atividade de Fatorial. Na discussão com os alunos sobre essas atividades foram levadas em consideração as várias formas de representar esse objeto matemático.

Na terceira sessão, abordou-se o conteúdo Permutação, discutindo-se com os alunos três atividades sobre as diversas formas de representar esse conteúdo. Após a discussão desses temas, foi aplicado um protocolo para que os alunos resolvessem que foi recolhido em seguida para análise dos dados. Esse protocolo continha três atividades no registro da língua natural.

Na aplicação do primeiro protocolo estavam presentes em sala de aula 26 alunos, que resolveram as questões propostas. As atividades do primeiro protocolo tinham por objetivo verificar quais registros foram utilizados pelos alunos e quais conversões foram mobilizadas no conteúdo Princípio Fundamental de Contagem.

Na análise das respostas dos problemas resolvidos pelos alunos foram verificadas as diferentes estratégias de resolução, sendo utilizado o diagrama de árvore, a situação esquemática e a algébrica. Isso mostra o desenvolvimento de uma visualização geral do problema e uma diversidade na utilização dos registros semióticos.

Nos problemas do primeiro protocolo, os alunos puderam lançar mão do conceito de Princípio Fundamental de Contagem, utilizando as possibilidades disposta na questão. Vale salientar que os problemas podem ser solucionados de maneira diferentes, como mostra os recortes a seguir.

Buscou-se apresentar recortes que possibilitassem uma visão geral dos registros utilizados nas resoluções das atividades. Assim, a seguir, apresentaremos 15 recortes das três primeiras sessões.

Recortes da atividade 1

Recorte 01- Resposta do aluno 05

Foram mobilizados os registros numérico e situação esquemática.

Atividade 1:
Uma pessoa quer ir de Aracaju a Lagarto passando por Salgado. Sendo que há quatro roteiros diferentes para chegar a Salgado partindo de Aracaju e dois roteiros diferentes para chegar a Lagarto partindo de Salgado. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá viajar de Aracaju a Lagarto?

$R = \begin{matrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{matrix}} \right\} 4$

$R = \begin{matrix} R1 \\ R2 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} R1 \\ R2 \end{matrix}} \right\} 2$

$4 \times 2 = 8$

Recorte 02- Resposta do aluno 16

Foram mobilizados os registros situação esquemática e o algébrico.

Atividade 1:
Uma pessoa quer ir de Aracaju a Lagarto passando por Salgado. Sendo que há quatro roteiros diferentes para chegar a Salgado partindo de Aracaju e dois roteiros diferentes para chegar a Lagarto partindo de Salgado. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá viajar de Aracaju a Lagarto?

Aracaju

Sal

Lagarto

$m \times n$
 $4 \times 2 = 8$

Recorte 03- Resposta do aluno 22

Foram mobilizados os registros língua natural, o registro numérico e o registro algébrico.

Atividade 1:

Uma pessoa quer ir de Aracaju a Lagarto passando por Salgado. Sendo que há quatro roteiros diferentes para chegar a Salgado partindo de Aracaju e dois roteiros diferentes para chegar a Lagarto partindo de Salgado. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá viajar de Aracaju a Lagarto?

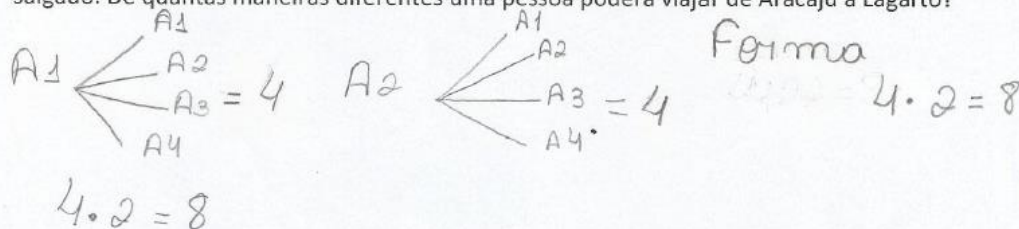
4 rotas Aracaju - Salgado
2 rotas Salgado - Lagarto
 $4 \times 2 = 8$ possibilidades

Recorte 04- Resposta do aluno 02

Foram mobilizados os registros diagrama de árvore, o registro numérico e o registro algébrico.

Atividade 1:

Uma pessoa quer ir de Aracaju a Lagarto passando por Salgado. Sendo que há quatro roteiros diferentes para chegar a Salgado partindo de Aracaju e dois roteiros diferentes para chegar a Lagarto partindo de Salgado. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá viajar de Aracaju a Lagarto?



Recorte 06- Resposta do aluno 14

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 1:

Uma pessoa quer ir de Aracaju a Lagarto passando por Salgado. Sendo que há quatro roteiros diferentes para chegar a Salgado partindo de Aracaju e dois roteiros diferentes para chegar a Lagarto partindo de Salgado. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá viajar de Aracaju a Lagarto?

Aracaju Salgado Lagarto
4 . 2

$A \times B = 4 \cdot 2 = 8$ maneiras uma pessoa pode ir de Aracaju a Lagarto

Recortes da atividade 2

Recorte 07- Resposta do aluno 04

Foram mobilizados os registros situação esquemática e algébrica.

Atividade 2:

Num restaurante há dois tipos de salada, três tipos de pratos quentes e dois tipos de sobremesa. De quantas formas se pode fazer uma refeição?

$S_1 \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{cases} \times S_2 \begin{cases} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{cases} = 6 \times 2 = 12 \text{ formas}$

Sobremesa

Recorte 08- Resposta do aluno 15

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 2:

Num restaurante há dois tipos de salada, três tipos de pratos quentes e dois tipos de sobremesa. De quantas formas se pode fazer uma refeição?

Salada P.Q. Sobr.

$$\boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{2} = 12$$

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

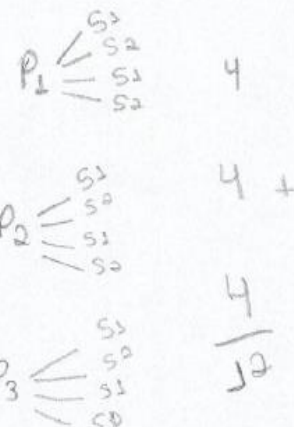
Recorte 09- Resposta do aluno 04

Foram mobilizados os registros algébricos e diagrama de árvore.

Atividade 2:

Num restaurante há dois tipos de salada, três tipos de pratos quentes e dois tipos de sobremesa. De quantas formas se pode fazer uma refeição?

$$2 \times 3 \times 2 = 12 \text{ possibilidades}$$



Atividade 3:

Recorte 10- Resposta do aluno 13

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 2:

Num restaurante há dois tipos de salada, três tipos de pratos quentes e dois tipos de sobremesa. De quantas formas se pode fazer uma refeição?

$$m \times n \times o = 2 \times 3 \times 2 = 12 \text{ possibilidades}$$

Recortes da atividade 3

Recorte 12- Resposta do aluno 24

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 3:

Ao lançarmos uma moeda e um dado, quais são as possibilidades para o resultado?

Moeda

$$2 \times 1 = 2$$

dado

6

$$m \times n$$

$$2 \times 6 = 12 \text{ possibilidades}$$

Recorte 13- Resposta do aluno 28

Foram mobilizados os registros situação esquemática e algébrica.

Atividade 3:
Ao lançarmos uma moeda e um dado, quais são as possibilidades para o resultado?

Moeda

1 - ca
1 - co
2 - ca
2 - co
3 - ca
3 - co
4 - ca
4 - co
5 - ca
5 - co
6 - ca
6 - co

Dado

$6 \times 2 = 12$ possibilidades

12 possibilidades

Recorte 14- Resposta do aluno 09

Foram mobilizados os registros algébricos e a situação esquemática.

Atividade 3:
Ao lançarmos uma moeda e um dado, quais são as possibilidades para o resultado?

$2 \times 6 = 12$ possibilidades

Dado 6 lados
moeda 2 lados

Diagrama de árvore:

- Moeda 1 (m1)
 - Dado 1 (D1)
 - Dado 2 (D2)
 - Dado 3 (D3)
 - Dado 4 (D4)
 - Dado 5 (D5)
 - Dado 6 (D6)
- Moeda 2 (m2)
 - Dado 1 (D1)
 - Dado 2 (D2)
 - Dado 3 (D3)
 - Dado 4 (D4)
 - Dado 5 (D5)
 - Dado 6 (D6)

Resumo:

$6 + 6 = 12$

Recorte 15- Resposta do aluno 23

Foram mobilizados os registros situação esquemática e algébrica.

Atividade 3:
Ao lançarmos uma moeda e um dado, quais são as possibilidades para o resultado?

Moeda	Dado
ca	1
ca	1
ca	2
ca	2
ca	3
ca	3
ca	4
ca	4
ca	5
ca	5
ca	6
ca	6

Dado: 6
Moeda: 2

$6 \times 2 = 12$ possibilidades

Pudemos perceber que os problemas foram resolvidos partindo do registro da língua natural e foram utilizadas conversões para os registros diagrama de árvore, situação esquemática e algébrica.

Na quarta sessão foram abordados os conteúdos Arranjos e Combinação através do filme “Desejos” e foram discutidas quatro atividades relacionadas com as mobilizações dos registros semióticos desse conteúdo. A figura 5 apresenta a tela inicial do filme.

Figura 5: Tela inicial do filme “Desejos”



Na quinta sessão foi retomada a discussão sobre Princípio Fundamental de Contagem, Permutação, Arranjos e Combinação com atividades baseadas na resolução de problemas e destacando a mobilização dos registros semióticos.

Por fim, foi aplicado o segundo protocolo com quatro atividades. Essas atividades tinham por objetivos verificar quais registros foram utilizados na resolução dos problemas e quais mobilizações foram feitas com os registros. Nesta sessão de ensino estavam presentes 28 alunos.

Na análise do segundo protocolo, pudemos observar uma quantidade menor de registros semióticos mobilizados nas resoluções dos conteúdos Permutação, Arranjos e Combinação, pois nesses conteúdos foram utilizados somente os registros algébricos e seus tratamentos, esse fato também foi identificado no livro didático analisado nesse trabalho. Essas constatações podem ser observadas nos 10 recortes a seguir.

Recortes da atividade 1:

Recorte 16- Resposta do aluno 17

Foram mobilizados os registros situação esquemática, o registro numérico e o registro algébrico.

Atividade 1:
Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal? Quais são?

M1 M2 M3 M4 H1 H2 H3

$4 \times 3 = 12$

Recorte 17- Resposta do aluno 26

Foram mobilizados os registros diagrama de árvore, o registro numérico e o registro algébrico.

Atividade 1: P.F.E

Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal? Quais são?

Diagrama de árvore para H₁:

- M₁ = H₁ M₁
- M₂ = H₁ M₂
- M₃ = H₁ M₃
- M₄ = H₁ M₄

Diagrama de árvore para H₂:

- M₁ = H₂ M₁
- M₂ = H₂ M₂
- M₃ = H₂ M₃
- M₄ = H₂ M₄

Diagrama de árvore para H₃:

- M₁
- M₂
- M₃
- M₄

Resultado numérico: 12

Registro algébrico: $m \cdot n$
 $4 \cdot 3 = 12$

Atividade 2:

Recortes da Atividade 2:

Recorte 19- Resposta do aluno 16

Foram mobilizados os registros diagrama de árvore, o registro numérico e o registro algébrico.

Atividade 2:

Para fazer uma viagem Rio-S.Paulo-Rio, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Diagrama de árvore:

- T₁ → T₂
- T₂ → T₃
- T₃ → T₁

Resultado numérico: 6

Registro algébrico: $3 \times 2 = 6$

Atividade 2:

Recorte da atividade 3:

Recorte 20- Resposta do aluno 18

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 3:
Quantos são os anagramas da palavra PERDÃO?

$P_6 = 66$
 $P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Recortes da atividade 4:

Recorte 22- Resposta do aluno 19

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 4: Anagrama
A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto), sabendo que $AB \neq BA$. Quantas senhas podem ser criadas?

$A_{n,k} = \frac{N!}{(N-k)!}$
 $A_{26,2} = \frac{26!}{24!}$
 $A_{26,2} = \frac{26 \times 25 \times 24!}{24!} = 650$

26
x 25

130
42

650

Recorte 23- Resposta do aluno 03

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 4:
A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto), sabendo que $AB \neq BA$. Quantas senhas podem ser criadas?

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{26,2} = \frac{26!}{24!} =$$

$$A_{26,2} = \frac{26!}{(26-2)!}$$

$$A_{26,2} = \frac{26 \times 25 \times \cancel{24!}}{\cancel{24!}} = 650$$

Recorte 25- Resposta do aluno 17

Foi mobilizado o registro algébrico.

Atividade 5: *combinação*
Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

$$C_{N,k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!6!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{4!} \times \cancel{6!}} = \frac{5040}{24} = 210$$

1 2 3 4 =
2 3 4 1 =

Pudemos evidenciar que para os conteúdos Arranjos e Combinação houve somente a mobilização do registro língua natural para somente o registro algébrico.

4.3 Análise a Posteriori e Validação da Sequência Didática

De acordo com Artigue (1996), Almouloud (2007) e Pais (2008), a análise a posteriori e validação da sequência didática são fases para a análise dos dados coletados na fase da experimentação. Assim, Pais (2008, p. 103) salienta que estas fases “referem-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, que é a parte efetivamente experimental da pesquisa”. Com tudo, será verificado se a pesquisa valida sua hipótese, pois, “é no confronto das duas análises, a *priori* e a *posteriori*, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação” (ARTIGUE, 1996, p.2008).

Através da sequência didática aplicada e a coleta de dados, a fim de verificar a hipótese desse trabalho, foram analisados dois protocolos com sete questões no total.

O primeiro protocolo se referia às três primeiras sessões da sequência didática, contendo três atividades relacionadas ao Princípio Fundamental de Contagem e ao conteúdo Fatorial.

Nas resoluções dos alunos, demonstradas nos recortes, evidencia-se uma mobilização do registro de partida, a língua natural, para os registros de chegada, o algébrico e a situação esquemática. Com isso, foi desenvolvido o raciocínio combinatório para representar o objeto matemático em estudo, e isso foi possível através da discussão com os alunos através do filme para introdução das aulas e também pelo pesquisador através das sessões de ensino.

O segundo protocolo referia-se às duas últimas sessões da sequência didática, que continham cinco atividades com relação ao conteúdo de base conceitual da Análise Combinatória o Princípio Fundamental de Contagem, Fatorial, Permutação, Arranjo e Combinação.

As atividades utilizaram como registro de partida questões no registro semiótico “língua natural” e para as resoluções os alunos empregaram os registros de chegada o algébrico e a situação esquemática. Essas mobilizações dos alunos estabelecem uma visualização geral e ampla do objeto matemático em estudo. No entanto, nos conteúdos Arranjos e Combinação evidencia-se uma maior dificuldade em elaborar uma situação esquemática ou um diagrama de árvore, embora no Princípio Fundamental de Contagem essas habilidades tenham sido utilizadas de forma ampla.

Com relação aos níveis de conhecimento esperados dos estudantes, as questões utilizadas nos dois protocolos foram, em sua maioria, de nível técnico e mobilizável e em menor quantidade de nível disponível, pois o intuito era desenvolver a habilidade da utilização e da conversão dos registros de representações semióticos do conteúdo Análise Combinatória.

As questões utilizadas nos protocolos e nas sessões de ensino tinham, em maior parte, o intuito de representar uma situação do cotidiano, sendo consideradas como problemas abertos, que exigem do aluno uma interpretação para a resolução.

Durante a realização da sequência didática alguns alunos se manifestavam dizendo que nunca tinham visto a matemática dessa forma, e que o pesquisador estimulava a participação de todos nas discussões. Para essa participação, os alunos eram solicitados a se envolverem na resolução das questões que foram resolvidas em sala de aula. Por exemplo, em seu diário de campo o pesquisador registrou a seguinte fala de uma aluna da turma: *Realmente aprendi esse assunto, gostei professor da forma que você ensinou a gente*. Essa fala foi proferida logo após o término da resolução de uma questão com a utilização do diagrama de árvore.

Com efeito, com os resultados obtidos durante a aplicação do experimento, ou seja, a sequência didática pode-se concluir através das análises dos dados coletados que a hipótese foi validada e os objetivos elencados nessa pesquisa foram alcançados.

Desse modo, conduzindo as sessões de ensino de forma dinâmica, com discussões voltadas para a diversidade e mobilização dos registros de representação semiótica e com questões que retratam o cotidiano, pudemos manter a atenção e o interesse dos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória que é um ramo importante da matemática.

Nas análises a priori dessa pesquisa, foi elencada a hipótese que a aplicação de uma sequência didática que possibilite a articulação entre os diferentes registros de representação semiótica propicia aos alunos uma melhor compreensão do objeto matemático Análise Combinatória. As atividades dos protocolos da pesquisa foram planejadas com as ideias dos registros de representação semiótica (Duval), Níveis de conhecimento esperados dos estudantes (Robert) e Resolução de Problemas (Polya).

Nas análises a posteriori, podemos perceber nas resoluções nos recortes dos alunos que foram elencados na fase de experimentação que os alunos visualizaram e realizaram as transformações do objeto matemático em estudo na forma que Duval (2003, p. 21) apresenta “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro”, o referido autor ainda esclarece que a transformação proporciona a capacidade de visualização do objeto matemático em dois ou mais registro de representação semiótica.

Com efeito, das análises nos dados coletados da pesquisa, os resultados comprovam a validade da hipótese elencada nesse estudo.

CONCLUSÃO

O estudo desenvolvido nessa pesquisa buscou planejar e aplicar uma sequência didática com atividades relacionadas ao ensino de Análise Combinatória, buscando relacionar, através de problemas abertos, esse conteúdo da disciplina matemática com o cotidiano dos discentes, mostrando a importância e a aplicabilidade desse conteúdo escolar nas diversas áreas do conhecimento científico. Foi utilizado como recursos tecnológicos e pedagógicos o laboratório de informática para transmissão de vídeos que serviram para a introdução dos temas. Os vídeos apresentados se mostraram ser uma excelente ferramenta de motivação dos discentes para o estudo e entendimento dos conceitos e também dos registros semióticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Para o desenvolvimento do trabalho, primeiramente, foi feito um levantamento bibliográfico acerca dos temas abordados nesse estudo: Registro de representação semiótica, Nível de conhecimento esperados dos estudantes e Resolução de problemas, que possibilitaram um embasamento em relação ao referencial teórico utilizado em fontes como livros, artigos científicos e documentos oficiais do Ministério da Educação. Concomitantemente, foi feito também estudo sobre aspectos da metodologia Engenharia Didática, que serviu de caminho para a realização dessa pesquisa, pois, conforme Artigue (1996, p. 193), essa metodologia de pesquisa é comparada ao trabalho do engenheiro na elaboração e realização do projeto, que se baseia em conhecimentos científicos e “ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência”.

O livro didático tem um papel importante nos processos de ensino e aprendizagem como apoio ao professor em sala de aula. Sendo assim, o Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015 / Ensino Médio (2014, p. 7), salienta que essa ferramenta pedagógica é considerada “o texto didático que o apoiará na tarefa de formação de seus alunos do ensino médio”. Nesse sentido, foi feito um estudo sobre o Guia de livros didáticos: PNLD 2015/ensino médio no sentido de elencar as seis obras contempladas para escolha do professor e foi feita a análise do livro didático de matemática do autor Manoel Rodrigues Paiva na obra Matemática: Paiva editora moderna do ano 2013, que na realização da pesquisa estava sendo utilizado pelo ensino médio integral na Escola Estadual Vitória de Santa Maria em Aracaju/SE. A

análise foi com o objetivo de verificar como o livro utilizado na escola trazia o conteúdo em estudo e qual eram os registros utilizados pelo autor e também se e quais transformações eram mobilizadas nas atividades propostas pelo livro.

Foi elaborada uma sequência didática embasada nos princípios dos Registros de Representação Semiótica de Duval, sendo desenvolvida com aspectos metodológicos da Engenharia Didática, para os estudos de Análise Combinatória. A sequência didática proposta contou com cinco sessões de ensino e dois protocolos com oito atividades no total, que envolveram assistir filmes, aulas expositivas com atividades explorando os Registros de Representação Semiótica e seus tratamentos e Conversões. Os conceitos explorados foram referentes aos conteúdos: Princípio Fundamental de Contagem, Fatorial, Permutação, Arranjo e Combinação.

A sequência didática foi desenvolvida em duas etapas, com três sessões na primeira etapa e duas sessões na segunda. As sessões foram introduzidas com filmes, sendo, em seguida, ministradas aulas expositivas com base na Resolução de Problemas com a finalidade de explorar os Registros de Representação Semiótica envolvidos no conteúdo em estudo. Nas aulas expositivas o intuito era mostrar as diversas representações semióticas com seus respectivos tratamentos e conversões, utilizando discussões no grande grupo, que eram os alunos da turma, pois, nessas discussões o pesquisador instigava a participação dos alunos com suas contribuições na resolução dos problemas.

Dos estudos, planejamentos e aplicação da sequência didática, da análise e diagnóstico do livro didático, das observações feitas em sala aula e dos depoimentos dos alunos é possível concluir que os objetivos da pesquisa foram alcançados.

Durante o desenvolvimento das sessões de ensino foi observado que os alunos tinham dificuldades de participar das discussões durante a resolução dos problemas, porém, com o desenvolvimento das aulas, percebeu-se que eles começaram a se envolver e contribuir com as sugestões para a resolução dos problemas. Em geral, na fase da experimentação da pesquisa, os discentes buscavam entender e utilizar os registros de representações semiótica realizando os tratamentos e as conversões. Dessa forma, o trabalho nessa perspectiva evidencia uma estratégia que permite aos alunos visualizarem os registros de um mesmo objeto matemático, proporcionando a capacidade de coordenação desses registros, e dessa forma, contribuindo na construção do conhecimento.

A análise dos dados coletados na aplicação da sequência didática se mostrou positiva para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos acerca de Análise Combinatória, pois os discentes contribuíram em todas as sessões de forma motivada e participativa na fase da experimentação. A metodologia utilizada na condução das sessões de ensino estabeleceu um ambiente favorável para discussão entre discente e pesquisador e entre os discentes no momento da explanação do conteúdo, onde os conceitos trabalhados foram construídos com participação do aluno através da resolução dos problemas propostos. Assim, esta pesquisa também corrobora os ensinamentos de Lima (2013, p. 140) quando afirma que “habitando o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínio simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas”.

A articulação através do tratamento e conversão dos registros de representação semiótica favoreceu ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e a visualização do objeto matemático e seus registros, permitindo distingui-lo de seus registros por meio da coordenação dos mesmos, dando ênfase às conversões e não aos tratamentos.

O desenvolvimento da Sequência didática e os resultados obtidos verificam a hipótese desse estudo, pois isso pode ser constatado pelas análises dos protocolos da pesquisa e também nas discussões em sala de aula.

Com as sessões de ensino ministradas procurou-se promover uma forma de ensinar e aprender através da visualização do objeto matemático em estudo, com tratamentos e conversões dos registros para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, buscando envolver os discentes em atividades através da resolução de problemas e cujos conhecimentos prévios exigidos são apenas as operações básicas da aritmética.

Com efeito, pode-se considerar essa sequência didática como um recurso pedagógico para professores que ministram a disciplina matemática no ensino médio.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com o 2º ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFRP, 2007.
- ALMOULOUD, S. A; COUTINHO, C. de Q. e S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. In: **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.
- BARRETO, F. L. S.; BORBA, R. E. de S. R. Estudantes de Anos Iniciais da Educação de Jovens e Adultos Resolvendo Problemas Combinatórios com Listagens e com Árvore de Possibilidades. In: **Educação Matemática em Revista - SBEM**, n. 35 - março, 2012.
- BARROS, L. H. N. As relações pessoais esperadas dos estudantes no processo de aprendizagem da noção de derivada de uma função. In: **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, 2011.
- BATISTA, A. A. G. A avaliação dos livros didáticos: para entender o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). In: ROJO, R.; BATISTA, A. A. G. (Orgs.) **Livro didático de Língua Portuguesa, letramento e cultura da escrita**. Campinas, SP: Mercado de Letras, p. 25-67. 2003.
- BORBA, R. E. de S. R.; AZEVEDO, J. Construindo Árvore de Possibilidades para Compreensão de Relações Combinatórias. In: **Educação Matemática em Revista - SBEM**, n. 31- novembro, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação (MEC),Secretaria de Educação Básica (SEB),Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. volume 2. Brasília: 2008.
- _____. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.
- _____. Ministério da Educação (MEC),Secretaria de Educação Básica Média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/Semtec, 2000.
- _____. Ministério da Educação (MEC),Secretaria de Educação Básica Média e tecnológica. **PCN+ Ensino médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- _____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD 2015 Ensino médio: Matemática**. Brasília: SEF/MEC, 2014.
- CAMPOS, Carlos Eduardo de. **Análise Combinatória e Proposta Curricular Paulista um estudo dos Problemas de Contagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade católica de São Paulo, 2010.

- CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. In: **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005.
- CARVALHO, J. B. P. Políticas públicas e o livro didático de matemática. In: **BOLEMA**, Rio Claro, ano 21, n.29, p. 1-11. 2008.
- COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de Representação Semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. In: **ZETETIKÉ** – cempem –FE – Unicamp – v. 16, n. 29 – jan/jun, 2008.
- DAMAZIO, A. A prática docente do professor de matemática: marcas das concepções do livro didático. In: **REVEMAT**, UFSC, v.12. p. 14-25. 2006.
- D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.
- D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras editora, 2005.
- DAMM, R. F. **Registros de representação**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.) e et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2012.
- DANTE, L. R. Livro didático de matemática: uso ou abuso? In: **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n. 69, jan/mar. 1996.
- DARIO, F.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, Autores Associados, 2009.
- DARIO, F. **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado de Letras, 2003.
- DUVAL, R. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. IN: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em matemática: Registros de representações semiótica**. Coleção Papirus Educação. Campinas, SP: Papirus, 2003.
- FLORES, C. R. Registro de Representação Semiótica em Matemática: História, Epistemologia, Aprendizagem. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), ano19, n. 26, dez/mai. 2006.
- FONSECA, A. J. dos S.; SOUZA, D. do N.; SANTOS, S. G. dos S. Análise Combinatória: uma apreciação de conteúdo através dos Registros de Representação Semiótica. In: **Caminhos da Educação Matemática em Revista/On line** - v. 2, n. 1, 2014
- FONSECA, S. S. *et al.* Uma reflexão sobre o conteúdo Análise Combinatória em dois livros didáticos do ensino médio. In: **Scientia Plena**, vol. 10, num. 04. 2014.
- GOMES, M. L. As práticas culturais de mobilização de história da matemática em livros didáticos destinados ao ensino médio. In: **ZETETIKÉ**, Unicamp, v.18, nº temático, p. 433-448. 2010.

GOUVEIA, J. de. **A noção de função: uma abordagem centrada em situações de aprendizagem**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2014.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 5 - Combinatória e Probabilidade. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática: volume único**. São Paulo: Atual, 2002.

KAMIYA, K.M; DIAS, M.A. Níveis de conhecimento esperados dos estudantes: Análise dos três níveis de conhecimento esperados dos estudantes em análise combinatória e cálculo de probabilidades. In: **Revista PIBIC**, v. 2, p. 133-141, 2005.

LIMA, E. L. *et al.* **Temas e problemas elementares**. Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro, 2013.

LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio; volume 2**. Coleção Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro, 2001.

MACHADO, S. D. A. (org.) *et al.* **Aprendizagem em matemática: Registros de representações semiótica**. Coleção Papirus Educação. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MACHADO, S. D. A. (org.) *et al.* **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2012.

MACHADO, S. D. A. **Engenharia didática**. In: MACHADO, S. D. A. (org.) *et al.* **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2012.

MAGGIO, D. P.; SOARES, M. A. S.; NEHRING, C. M. Registro de representação semiótica da função afim: análise de livro didático de matemática no ensino médio. In: **REVEMAT**, Florianópolis, v. 05, n. 1, p. 38-47. 2010.

MARTINS, M. de C. S.; BONFIM, S. H. **Análise Combinatória: Um estudo via História da Matemática**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

MEGID NETO, J. M.; FRACALANZA, H. O livro didático de ciências: problemas e soluções. In: **Ciências e Educação**, Campinas, v. 9, n. 2, p. 147-157. 2003.

MENDES, I. A. **Tendências Metodológicas no Ensino de Matemática**. Belém: Ed. UFPA, 2008.

MISKULIN, R. G. S. **As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática**, in: FOIRENTINI, D. (org). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

MORGADO, A. C. de O. *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidade**. 6ª ed. Coleção Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro, 2004.

OLIVEIRA, J. C.; MARIANI, R. de C. P. O ensino de geometria analítica e os registros de representação semiótica: Uma análise de conteúdo dos livros didáticos adotados em dois colégios da rede estadual de Itabaiana/SE. In: **VII Colóquio Internacional “Educação e Contemporaneidade”** – UFS, 2013, São Cristóvão. Anais... São Cristóvão, 2013.

ONUICHIC, L. de la R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. São Paulo: Moderna, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série In: **ZETETIKÉ** – cempem –FE – Unicamp – v. 17, n. 31 – jan/jun, 2009.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**; [tradução Heitor Lisboa de Araújo]. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RIBEIRO, C. Metacognição: Um Apoio ao Processo de Aprendizagem. In: **Psicologia: Reflexão e Crítica**, 16(1), 2003.

ROONEY, A. **A História da Matemática – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M.Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

ROSA, C. P.; Análise de livros didáticos. In: **III EIEMAT-UFSM**- Agosto, 2012.

SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. Alguns aspectos de articulação entre as teorias da didática francesa e suas contribuições para formação de professores. In: **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V4., p.53-66, UFSC: 2009.

SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. Registros de representação semiótica e suas contribuições para o ensino de física. In: **Revista Ensaio**, v.14, n.03 – p. 85-95 – set-dez, Belo Horizonte, 2012.

SANTOS, M. C. dos. O ensino de equações diofantinas por meio dos registros de representação semiótica: uma análise em três colégios do ensino médio da rede pública estadual de Aracaju. In: **VII Colóquio Internacional “Educação e Contemporaneidade”** – UFS, 2013, São Cristóvão. Anais... São Cristóvão, 2013.

SANTOS FILHO, J. W. **Jogo eletrônico educacional como um objeto de aprendizagem visando a aprendizagem significativa: uma experiência com a Análise Combinatória**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade federal de Sergipe, São Cristóvão, 2010.

SILVA, B. A. da. **O conceito de probabilidade condicional: Registro de representação** In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática: Registros de representações semiótica**. Coleção Papirus Educação. Campinas, SP: Papirus, 2003.

SOARES, F. S. Adoção, avaliação e circulação de livros didáticos de matemática no século XIX. In: **ZETÉTIKE** – FE/ Unicamp – v.21, n. 40 – jul/dez, 2013.

SÓRIA, D. A. C., et al. A Resiliência como objeto de investigação na enfermagem e em outras áreas: uma revisão. In: **Esc Anna Nery ver enferm**, v.10, n.3, p.547-51, 2006.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa.** Dissertação (Mestrado em educação) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, São Paulo, 1999.

TEIXEIRA, A. C.; SANTOS, C. A. B. dos. Indicativos emergentes das questões do SARESP 2010 para o 9º ano do Ensino Fundamental em relação à mobilização dos conhecimentos matemáticos. In: **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 08, Ed. Especial (dez.), p. 153-174, 2013.

VALENTE, W. R. Livros didáticos e educação matemática: uma história inseparável. In: **ZETÉTIKE** – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 30 – jul/dez, 2008.

APÊNDICES

Apêndice 1

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, abaixo assinado, autorizo a UFS (Universidade Federal de Sergipe), por intermédio do aluno mestrando: ANTONIO JAILSON DOS SANTOS FONSECA, devidamente assistido pela sua orientadora Profa. Dra. DIVANÍZIA NASCIMENTO SOUZA a desenvolver a pesquisa intitulada: **O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA**. Tem como objetivos: Verificar a contribuição da coordenação dos registros de representação semiótica para o ensino de Análise Combinatória; Identificar as principais estratégias utilizadas na resolução dos problemas propostos; Analisar os argumentos apresentados pelos alunos nas atividades desenvolvidas na sequência de ensino e registrado nos protocolos de pesquisa. Será realizada uma pesquisa através de um delineamento bibliográfico e de campo com abordagem quali-quantitativa. Os participantes têm a garantia que receberão respostas a qualquer pergunta e esclarecimento de qualquer dúvida quanto aos assuntos relacionados à pesquisa. Também o pesquisador supracitado assume o compromisso de proporcionar informações atualizadas obtidas durante a realização do estudo. O voluntário tem a liberdade de retirar seu consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, não acarretando nenhum dano ao voluntário. Elaborado de acordo com as diretrizes e normas regulamentadas de pesquisa envolvendo seres humanos atende à Resolução nº 446, de 12 de Dezembro de 2012, do Conselho Nacional de Saúde do Ministério de Saúde - Brasília – DF. Os voluntários terão direito à privacidade. A identidade (nomes e sobrenomes) do participante não será divulgada. Porém os voluntários assinarão o termo de consentimento para que os resultados obtidos possam ser apresentados em congressos e publicações. Não há danos previsíveis decorrentes da pesquisa, mesmo assim fica prevista indenização, caso se faça necessário. **ATENÇÃO:** A participação em qualquer tipo de pesquisa é voluntária. Em casos de dúvida quanto aos seus direitos, escreva para o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Sergipe. Av. Cláudio Batista s/n – Sanatório – CEP 49060-100 Aracaju – SE, (79) 2105 – 1805.

Aracaju, ____ de ____ de 2014.

ASSINATURA DO VOLUNTÁRIO

Apêndice 2

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISE COMBINATÓRIA

Colégio Estadual Vitória de Santa Maria

Turma: 2º A

Ministrante: Mestrando Antonio Jailson

ASSINATURA DO TERMO DE CONSENTIMENTO:

O QUE É ANALISE COMBINATÓRIA: é a parte da matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem.

PASSAR O FILME: De malas prontas.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM:

Exemplo: Uma mulher tem cinco saias e três blusas. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

Resolvida pelo mestrando.

GENERALIZANDO... $m \times n$

Atividade 1.

Uma lanchonete dispõe de três opções de sanduíche (queijo, frango, atum e misto) e quatro opções de sucos (abacaxi, maracujá, pêssego e laranja). De quantas formas distintas pode ser escolhido um lanche?

Apêndice 3

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISE COMBINATÓRIA

Colégio Estadual Vitória de Santa Maria

Turma: 2º A

Ministrante: Mestrando Antonio Jailson

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM – PFC

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n , então o número total de possibilidades do evento ocorrer é dado por $m \times n$.

Exemplo: Uma mulher tem cinco saias e três blusas. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

Exemplo: Quantos números de dois algarismos podem ser formado com os algarismos 3,5,7 e 9?

Exemplo: Quantos números de três algarismo (sem repeti-los num mesmo números) podemos formar com os algarismos 2, 5 e 7?

Fatorial - !

Se n for um número natural o fatorial é dado por: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times 3 \times 2 \times 1$

Exemplo: Calcule:

a) $4!$

B) $(n+3)! = 120$

c) $\frac{9!}{7!}$

Apêndice 4

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISE COMBINATÓRIA

Colégio Estadual Vitória de Santa Maria

Turma: 2º A

Ministrante: Mestrando Jailson

PERMUTAÇÃO !

Permutar é sinônimo de trocar, é o mesmo que misturar, ou seja, é o fatorial de um número. Assim, $P_n = n! = n \times (n-1) \times 2 \times 1$.

Exemplo: Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Exemplo: Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra LUA?

Exemplo: De quantas maneira um grupo de amigos de 3 pessoas pode sentar-se num sofá de 3 lugares para tirar uma foto? E se duas pessoas ficarem sempre juntas?

Apêndice 5

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISE COMBINATÓRIA

Colégio Estadual Vitória de Santa Maria

Turma: 2º A

Ministrante: Mestrando Antonio Jailson

PASSAR O FILME: Desejos.

Arranjos

É quando escrevemos uma sequência ordenada de n elementos tomados k a k , ou seja, Arranjos importa a ordem dos elementos. $A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exemplo: Com os algarismos 1, 2 e 3. Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de dois algarismos distintos podem formar?

Exemplo: De quantas maneiras 4 pessoas podem sentar-se num sofá que tem apenas 2 lugares?

Combinação

É quando escrevemos uma sequência ordenada de n elementos tomados k a k , ou seja, Combinação não importa a ordem dos elementos. $C_{n,k} = \frac{n!}{p! (n-k)!}$

Exemplo: De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar uma dupla tendo à sua disposição 3 atletas que jogam em qualquer posição?

Exemplo: Quantas equipes de 3 astronautas podem ser formadas com 5 astronautas?

Apêndice 6

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISE COMBINATÓRIA

Colégio Estadual Vitória de Santa Maria

Turma: 2º A

Ministrante: Mestrando Antonio Jailson

Atividade de revisão

P.F.C

Exemplo: Suponha que você tenha 4 camisas: branca, azul, preta e vermelha e 3 calças: branca, preta e azul. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir usando uma camisa e uma calça?

PERMUTAÇÃO:

De quantas maneiras diferentes é possível fotografar 4 amigos sentados lado a lado em um banco de jardim?

ARRANJOS:

Forme todas as “palavras” com duas letras usando os elementos a, b, c, d.

COMBINAÇÃO:

O grêmio de uma escola, composto de 5 alunos, precisa organizar uma comissão formada por 3 de seus membros para conversar com um grupo de professores. De quantos modos diferentes essa comissão pode ser constituída?

Apêndice 7

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISE COMBINATÓRIA

Colégio Estadual Vitória de Santa Maria

Turma: 2º A

Ministrante: Mestrando Jailson

Protocolo de coleta de dados da pesquisa.

Atividade 1:

Uma pessoa quer ir de Aracaju a Lagarto passando por Salgado. Sendo que há quatro roteiros diferentes para chegar a Salgado partindo de Aracaju e dois roteiros diferentes para chegar a Lagarto partindo de Salgado. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá viajar de Aracaju a Lagarto?

Atividade 2:

Num restaurante há dois tipos de salada, três tipos de pratos quentes e dois tipos de sobremesa. De quantas formas se pode fazer uma refeição?

Atividade 3:

Ao lançarmos uma moeda e um dado, quais são as possibilidades para o resultado?

Apêndice 8

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISE COMBINATÓRIA

Colégio Estadual Vitória de Santa Maria

Turma: 2º A

Ministrante: Mestrando Jailson

Protocolo de coleta de dados da pesquisa.

Atividade 1:

Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal? Quais são?

Atividade 2:

Para fazer uma viagem Rio-S.Paulo-Rio, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Atividade 3:

Quantos são os anagramas da palavra PERDÃO?

Atividade 4:

A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto), sabendo que $AB \neq BA$. Quantas senhas podem ser criadas?

Atividade 5:

Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?