



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Efeitos de Não Comutatividade em Matéria Condensada

Willien Oliveira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. André Mauricio Conceição de Souza

São Cristóvão-SE

Janeiro/2016

Efeitos de Não Comutatividade em Matéria Condensada

Willien Oliveira dos Santos

Tese apresentada ao Núcleo de Pós Graduação em Física da
Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. André Mauricio Conceição de
Souza

São Cristóvão-SE

Janeiro/2016

*“Dedico este trabalho a Deus, que tem sido a fonte de minha inspiração e maior sentido na
minha existência. ”*

“Eu, um universo de átomos, um átomo no universo.”

Richard P. Feynman

Agradecimentos

- À Deus.
- Ao meu orientador professor Dr. André Mauricio Conceição de Souza pelas suas sugestões e críticas. E além disso, por ter me permitido estudar o tema da geometria não comutativa dentro da matéria condensada.

Resumo

Efeitos de Não Comutatividade em Matéria Condensada

Willien Oliveira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. André Mauricio Conceição de Souza

Utilizando-se do método do produto estrela, o regime não relativístico da equação de Dirac é avaliado e o hamiltoniano NC para o efeito Zeeman é determinado. Usando a teoria de perturbação de primeira ordem, a correção para a energia é calculada. Obtemos assim, os fatores de Landé orbital e de spin. É mostrado que o valor experimental para o fator de Landé de spin impõe o seguinte limite superior na magnitude do parâmetro NC de momento, $\sqrt{\eta} \lesssim 0,34\mu eV/c$. Estabelecemos também uma possível correção do espaço de fase NC para o valor atualmente aceito da constante de Planck, com uma incerteza de 2 partes em 10^{35} . Através do mapeamento via Boop's shift obtemos os níveis de Landau e a condutividade Hall para o grafeno no espaço de fase NC. Utilizando a atual precisão experimental, respectivamente, da condutividade Hall e dos níveis de Landau no grafeno, obtemos os seguintes limites superiores para a magnitude do parâmetro NC de momento, $\sqrt{\eta} \lesssim 2,5eV/c$ e $\sqrt{\eta} \lesssim 8,5eV/c$. Por fim, através dos leis de Newton num espaço NC e utilizando as equações de Langevin, descrevemos o movimento Browniano, e assim definimos um novo parâmetro físico que mostra a possibilidade de detectar efeitos NC na escala macroscópica.

Palavras-chave: Efeito Zeeman Anômalo, Hidrogênio, Espaço Não Comutativo, Espaço de Fase Não Comutativo, Movimento Browniano, Grafeno, Efeito Hall, Mecânica Quântica.

Abstract

Noncommutativity Effects in Condensed Matter

Willien Oliveira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. André Mauricio Conceição de Souza

Abstract da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Física.

Using the method of the star product, the non-relativistic regime of the Dirac equation is evaluated and the NC hamiltonian to the Zeeman effect is determined. Using the first-order perturbation theory, the correction to the energy is calculated. We obtain the orbital and spin Landé factors. It is shown that the experimental value for the spin Landé factor put the following upper limit on the magnitude of the momentum NC parameter, $\sqrt{\eta} \lesssim 0,34\mu eV/c$. Established also a possible correction of the NC phase space to the presently accepted value of Planck's constant with an uncertainty of 2 part in 10^{35} . By mapping via Boop's shift we obtain the Landau levels and the Hall conductivity for graphene in NC phase space. Using the current experimental precision, respectively, of the Hall conductivity and of the Landau levels in graphene, we obtain the following upper limit to the magnitude of the momentum NC parameter, $\sqrt{\eta} \lesssim 2,5eV/c$ e $\sqrt{\eta} \lesssim 8,5eV/c$. Finally, by Newton's law in NC space and using the Langevin equations, we describe the Browniano motion, and thus we define a new physical parameter that shows the possibility of detecting NC effects on the macroscopic scale.

Palavras-chave: Anomalous Zeeman Effect, Hydrogen, Noncommutative Space, Noncommutative Phase Space, Brownian Motion, Graphene, Hall Effect, Quantum Mechanics.

Sumário

1	Introdução	9
2	Grafeno	14
2.1	Propriedades elementares do grafeno	14
2.2	Férmions de Dirac no grafeno	18
2.3	Grafeno em um campo magnético constante	20
2.4	Efeito Hall Quântico no Grafeno	23
3	Efeito Zeeman Anômalo	25
3.1	Formulação do Hamiltoniano	26
3.2	Correção da Energia	29
4	Movimento Browniano	31
4.1	Equação de Langevin	32
5	Formalismo Não Comutativo	35
5.1	Espaço NC e o Espaço de fase NC	35
5.2	Produto estrela e mapeamento	37
5.3	Quebra da simetria de gauge no espaço NC	40
5.4	Mecânica Clássica no espaço Não Comutativo	42
6	Implementação do Efeito de Não Comutatividade	44
6.1	Efeito Zeeman anômalo no espaço de fase NC	44
6.1.1	Formulação do Hamiltoniano	44
6.1.2	Correção para o espectro Zeeman	47
6.1.3	Fatores de Landé orbital e de spin no Espaço de Momento NC	48
6.1.4	Fatores de Landé e o efeito de Não Comutatividade	48
6.1.5	Correção Não Comutativa para Constante de Planck	49

6.2	Grafeno no espaço de fase NC	50
6.2.1	Folha de grafeno em um campo magnético constante no espaço de fase NC	50
6.2.2	Fenomenologia do efeito de não comutatividade espacial	53
6.3	Movimento Browniano no espaço Não Comutativo	54
6.3.1	Fenomenologia do efeito de não comutatividade espacial	56
7	Conclusões e Perspectivas	58
	Referências Bibliográficas	62

Capítulo 1

Introdução

Historicamente, a noção de coordenadas não comutativas surgiu por volta de 1930 [1] com uma observação feita por W. Heisenberg em uma carta que ele escreveu para Peierls. A intenção era eliminar as divergências nos cálculos de observáveis físicos na eletrodinâmica quântica. Peierls comentou as ideias de Heisenberg com Pauli, que as discutiu com Oppenheimer. Posteriormente Oppenheimer comentou com seu aluno H. Snyder, o qual escreveu o primeiro artigo no assunto em 1947 [2]. Todavia, com o sucesso da teoria da renormalização na obtenção de valores numéricos extremamente precisos dos observáveis da eletrodinâmica quântica, a proposta da não comutatividade foi abandonada e somente retomada na década de 80, com os trabalhos de A. Connes e S. L. Woronowics [3, 4]. A partir de então houve um interesse em tentar compreender a estrutura quântica do espaço-tempo. Neste sentido é esperado, a partir de argumentos que vão desde considerações da relatividade geral até gravitação quântica e teoria de cordas, que o espaço-tempo como uma variedade diferenciável deva ser abandonado em regiões da ordem da escala de Planck, $l_p \sim 10^{-33} cm$. Próximo a esta escala a noção de ponto perde o significado operacional, o que pode ser compreendido através do seguinte raciocínio[5]: a localização de uma partícula eletricamente carregada com uma incerteza de posição a muito pequena envolve, por exemplo, a interação desta com um fóton muito energético, com um momento muito grande da ordem de $1/a$. Tal processo de medida concentra uma grande quantidade de energia num pequeno volume do espaço, deformando o espaço-tempo nesta região, segundo a equação de Einstein $R_{\mu\nu} - 1/2R\eta_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$. Para a muito pequeno, ocorreria a formação de um horizonte de eventos que impediria a detecção da partícula e impossibilitaria o processo de medida. Tal cenário sugere a

existência de uma relação de incerteza que proibiria a localização dos eventos no espaço-tempo.

Uma forma de estudar o espaço-tempo na escala de Planck é trocar as coordenadas x_μ por operadores não comutativos \hat{x}_μ , obedecendo à regra de comutação,

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

com $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$, sendo $\theta_{\mu\nu}$ um tensor antissimétrico que têm dimensão de área, e que parametriza a não comutatividade. Desta forma têm-se a seguinte relação de incerteza entre as coordenadas do espaço-tempo

$$\Delta\hat{x}_\mu\Delta\hat{x}_\nu \geq \frac{1}{2}|\theta_{\mu\nu}|, \quad (1.2)$$

ou seja, a noção de pontos no espaço-tempo são substituídos por células de tamanho $|\theta_{\mu\nu}|$, o que expressa a impossibilidade da medição de qualquer fenômeno físico numa escala de distância abaixo de $\sqrt{|\theta_{\mu\nu}|}$.

As implicações da relação (1.1) são muito profundas. Há vários motivos para abordá-la, mas há também questões delicadas envolvidas, as quais fizeram durante algum tempo que a teoria não fosse aprofundada. Uma das questões delicadas é a perda de certas simetrias, como por exemplo, a simetria rotacional e a simetria de gauge. De fato, a perda da simetria de gauge cria o problema de como identificar os operadores não comutativos como observáveis físicos. Por exemplo, o potencial vetor $\hat{\mathbf{A}}$ (ou seja, o campo de gauge U(1) não comutativo) seria estritamente um objeto matemático que não corresponderia ao campo eletromagnético físico. A fim de ultrapassar este problema, Nathan Seiberg e Edward Witten publicaram em 1999 um artigo, onde propunham um mapeamento que ficou conhecido como mapeamento Seiberg-Witten de tal forma que a simetria de gauge é restaurada para as teorias físicas formuladas num espaço-tempo não comutativo [6],[7]-[11].

Nos últimos anos, coordenadas não comutativas têm sido objeto de pesquisa de muitos físicos de diversas áreas, tais como física de alta energia [12]-[18], teoria de cordas [19]-[21], teoria de campos [22]-[24] e mais recentemente física da matéria condensada, através de fenômenos como o efeito Hall quântico [25]-[32]. Um fenômeno físico muito conhecido da não comutatividade das coordenadas é o problema de Landau [33, 34], que trata de uma partícula carregada movimentando-se em um plano na presença de um campo magnético forte, \mathbf{B} , perpendicular a esse plano, e se verifica que as coordenadas espaciais se tornam não comutativas. De fato, muitos trabalhos têm tratado vários

aspectos de mecânica quântica em espaço NC (quando apenas as coordenadas de posição não comutam entre si) e espaço de fase NC (quando se introduz a não comutatividade das coordenadas de momento no espaço NC) [35]-[58]. Neste sentido, argumentos físicos da cosmologia quântica [59], buraco negro [60]-[62] e processos envolvendo informação quântica e decoerência [63], têm motivado o estudo do caso em que as coordenadas de momento não comutam entre si,

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

sendo $\eta_{\mu\nu}$ um tensor antissimétrico, que têm dimensão de momento ao quadrado. Desta forma, passa a existir a seguinte relação de incerteza analoga a relação (1.2),

$$\Delta\hat{p}_\mu\Delta\hat{p}_\nu \geq \frac{1}{2}|\eta_{\mu\nu}| \quad (1.4)$$

Na literatura muitos autores têm se dedicado a encontrar efeitos mensuráveis de não comutatividade das coordenadas espaciais. Todavia, estudos recentes em mecânica quântica revelaram diferentes valores quando se analisa diferentes sistemas físicos [42]-[44]. Por exemplo, os autores nas referências [42]-[50],[64] têm tratado o espectro do átomo de hidrogênio no formalismo NC. Vale destacar o artigo do Chaichian [43], onde, a não comutatividade atua, como uma nova interação, introduzindo correções ao *Lamb Shift*. Ele obteve que o valor de θ é $\theta \lesssim (10TeV)^{-2}$ a partir do limite teórico do *Lamb Shift*. Khodja [64] obteve $\theta \lesssim (5.6GeV)^{-2}$ pelo limite não relativístico da equação de Dirac para o átomo de hidrogênio. Stern [65] e Alavi [66] obtiveram os contornos $\theta \lesssim (6GeV)^{-2}$ e $\theta \lesssim (TeV)^{-2}$ pelo estudo do Lamb shift e Hyperfine splitting no átomo de hidrogênio. Na referência [51] é obtido $\theta \lesssim (6GeV)^{-2}$ pelo estudo das transições do átomo de hélio. Os limites $\theta \lesssim (1keV)^{-2}$ e $\theta \sim (10TeV)^{-2}$ foram obtidos nas referências [52, 53] pelo estudo do efeito Aharonov-Bohm. O efeito Aharonov-Casher foi tratado nas referências [54, 55] para partículas de spin 1/2 e 1 e os autores obtiveram o limite $\theta \lesssim (10^2eV)^{-2}$. Através do efeito Hall, foram obtidos $\theta \lesssim (10GeV)^{-2}$ e $\theta \lesssim (1meV)^{-2}$ [56, 57]. Por fim, através do problema de Landau, foi obtido $\theta \sim (10eV)^{-2}$ [58]. Por outro lado, temos ainda alguns poucos trabalhos tratando a fenomenologia do espaço não comutativo para sistemas clássicos, por exemplo, o movimento de uma partícula em um potencial gravitacional foi considerado em [67]-[69]. Os autores definiram o deslocamento periélio causado pelo espaço não comutativo obtendo assim, respectivamente,

¹Estamos usando $1(GeV)^{-1} = 1,973 \cdot 10^{-14}cm$.

$\hbar\Theta \lesssim (4,3 \cdot 10^{12}TeV)^{-2}$, $\hbar\Theta \lesssim (1,9 \cdot 10^{12}TeV)^{-2}$ e $\hbar\Theta \lesssim (3,1 \cdot 10^{11}TeV)^{-2}$. Aqui, Θ têm unidade de $[tempo/massa]$.

O espaço de fase NC também têm sido objeto de muitos estudos fenomenológicos. Por exemplo, Bertolami [70] discutiu o poço quântico gravitacional no espaço de fase NC. Ele obteve $\eta, \eta \lesssim (meV/c)^2$. Na referência [71], Bastos obteve o contorno $\eta \lesssim (8,6eV/c)^2$ pelo estudo de uma folha de grafeno em um campo magnético de fundo, no contexto de um espaço de fase NC, com $\theta = 0$ e $\eta \neq 0$, conhecido também como espaço de momento NC. Neste sentido, para o espaço de momento NC, um contorno bastante preciso foi obtido na referência [72], para a estrutura hiperfina no átomo de hidrogênio, $\eta \lesssim (2,26\mu eV/c)^2$. Vale ainda destacar o resultado obtido na referência [73], onde através do princípio de equivalência foi obtido a seguinte relação entre os parâmetros de não comutatividade, $\frac{\theta\eta}{\hbar^2} \lesssim 10^{-14}$. Atualmente, o limite superior mais preciso da literatura para o parâmetro não comutativo de momento é um dos resultados centrais desta tese, ou seja, $\eta \lesssim (0,34\mu eV/c)^2$ [74]. Tal precisão é muito boa tendo em vista o fato de que ao se tratar da fenomenologia em teorias não comutativas é sempre esperado obter um limite superior cada vez menor para os efeitos de não comutatividade.

A não comutatividade é incorporada em Mecânica Quântica pela introdução de um produto NC para funções sobre o espaço de fase, o chamado produto Moyal ou estrela (\star), tal que, é obtida uma nova álgebra quântica não comutativa dos observáveis. Este formalismo do produto estrela, foi iniciado por Weyl e Wigner [75], e desenvolvido por Gronewold e Moyal [76]. Ao longo do texto analisaremos o espaço NC e espaço de fase NC.

De fato, apesar do átomo de hidrogênio ter sido extensivamente estudado, as implicações do efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio em um espaço de fase NC não foram ainda investigados. Este é exatamente um dos objetivos desta tese. Tal análise para o caso do espaço NC foi primeiro tratado na referência [77], onde os autores estimaram efeitos de não comutatividade muito menores que a escala atômica ($1fermi = 10^{-15}m$). O que concorda com a maioria das estimações fenomenológicas para o espaço NC. O fato dos efeitos de não comutatividade serem abaixo da escala atômica levanta duas questões: primeiro é que não haveria contradição entre a mecânica quântica usual e a mecânica quântica NC, e segundo é que torna-se improvável medir efeitos de não comutatividade nos laboratórios usuais. Laboratórios estes que não conseguem investigar fenômenos físicos muito abaixo da escala atômica, que para serem investigados seria preciso atingir energias muito altas, e que portanto, so é possível em laboratórios como o Large Hadron Collider (LHC) que em 2015 teria alcançado $14TeV$. Neste sentido, um segundo objetivo deste trabalho é procurar efeitos de não comutatividade possíveis

de serem medidos nos laboratórios usuais. Para tanto, investigaremos o efeito Hall quântico numa folha de grafeno no contexto do espaço de fase NC, mostrando que o grafeno possui efeitos de não comutatividade muito acima da escala atômica, abrindo assim a possibilidade de medir tais efeitos nos laboratórios usuais. Pensando em estudar efeitos de não comutatividade tanto em escalas de comprimento muito pequenas quanto o comprimento de Planck ou em escalas de comprimento tão grandes quanto a escala microscópica, abordaremos também o fenômeno do movimento Browniano o qual é fundamentalmente um fenômeno clássico.

Nesta tese adotaremos o sistema de unidades Gaussiano (CGS). A apresentação do texto está disposta da seguinte forma: no capítulo 2 fizemos uma revisão sobre as propriedades fundamentais de uma folha de grafeno. Ainda neste capítulo, destacamos o efeito Hall quântico no grafeno. No capítulo 3 revisamos o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio. No capítulo 4 revisamos o movimento Browniano. No capítulo 5 introduzimos o formalismo do espaço NC e espaço de fase NC. Ainda no capítulo 5 apresentamos uma versão não comutativa da mecânica clássica. No capítulo 6 implementamos o formalismo não comutativo para o grafeno, bem como para o efeito Zeeman anômalo e o movimento Browniano. Além disso, neste mesmo capítulo obtemos alguns limites superiores para os parâmetros de não comutatividade. Por fim, no capítulo 7 apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 2

Grafeno

O grafeno é o primeiro material totalmente bidimensional produzido em laboratório. Sendo constituído por átomos de carbono, cujos portadores de carga se comportam como se fossem partículas relativísticas de Dirac de massa nula, o que torna possível o estabelecimento de relações entre física da matéria condensada e física de altas energias, como Eletrodinâmica Quântica e Relatividade Geral. Neste capítulo será apresentada uma introdução às propriedades eletrônicas do grafeno.

2.1 Propriedades elementares do grafeno

O grafeno é um cristal bidimensional de átomos de carbono organizados em uma estrutura tipo “favos de mel”. Tal estrutura foi obtida experimentalmente pela primeira vez em 2004 através de uma clivagem micromecânica do grafite, rendendo em 2010 o prêmio Nobel aos físicos André Geim e Konstantin Novoselov [78]. O átomo de carbono possui seis elétrons distribuídos nos orbitais atômicos $1s^2$, $2s^2$ e $2p^2$. Os elétrons no orbital $1s^2$ por serem fortemente ligados são chamados de elétrons de caroço e os quatro restantes são os elétrons de valência. Estes elétrons de valência são originados dos orbitais híbridos sp^2 (ligações tipo σ) e dos orbitais p_z (ligações tipo π). As ligações σ são covalentes, consideravelmente fortes, e se encontram no plano xy formando um ângulo de 120° entre elas, dando origem à estrutura de rede hexagonal do grafeno. Por outro lado, os elétrons dos orbitais p_z , que correspondem às ligações do tipo π , estão mais fracamente ligados aos átomos e podem, assim, se locomover na rede cristalina ou serem excitados para níveis eletrônicos mais energéticos, sendo portanto, os elétrons mais importantes para as propriedades ópticas e de transporte elétrico no

grafeno.

A estrutura da rede hexagonal no grafeno é usualmente tratada como duas sub-redes A e B superpostas. A figura 2.1 mostra a estrutura da rede do grafeno, com duas sub-redes A e B . É preciso considerar duas sub-redes diferentes pelo fato de que a rede hexagonal do grafeno não é uma rede Bravais. Porém, uma rede triangular é uma rede de Bravais e, por isso, diz-se que a célula unitária do grafeno possui dois sítios (átomos de carbono), e desta forma é possível definir vetores de base para descrever todo o sistema como uma superposição de duas sub-redes triangulares deslocadas e superpostas, A e B .

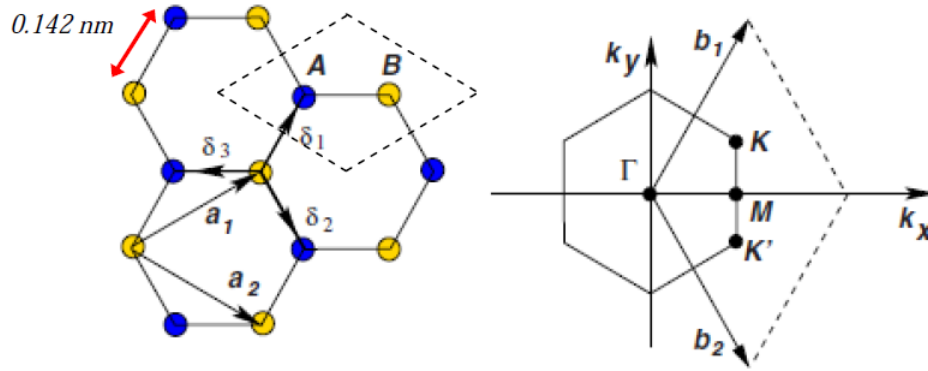


Figura 2.1: À esquerda têm-se a rede hexagonal do grafeno mostrando suas sub-redes triangulares compostas pelos átomos A e B . Os vetores \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 são os vetores de rede e os três vetores δ_i ligam os átomos de uma sub-rede aos seus três primeiros vizinhos da outra sub-rede. À direita, é mostrado a primeira zona de Brillouin, com \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 sendo os vetores da rede recíproca. (Fonte: referência [79])

Os vetores de rede podem ser escritos como

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(3, \sqrt{3}), \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(3, -\sqrt{3}), \quad (2.1)$$

onde $a \approx 1,42 \text{ \AA}$ é a distância entre os átomos de carbono. Os vetores da rede recíproca são dados por

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{3a}(1, \sqrt{3}), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{3a}(1, -\sqrt{3}). \quad (2.2)$$

A zona de Brillouin do grafeno é composta por seis pontos, conhecidos como pontos de Dirac por razões que veremos posteriormente. Estes pontos são muito importantes na descrição do grafeno, no entanto apenas dois deles \mathbf{K} e \mathbf{K}' , são independentes, os demais sendo equivalentes a estes por operações de simetria. Suas posições no espaço recíproco são

$$\mathbf{K} = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{2\pi}{3a\sqrt{3}} \right), \quad \mathbf{K}' = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{-2\pi}{3a\sqrt{3}} \right). \quad (2.3)$$

Os três vetores dos primeiros vizinhos de B pode ser definido no espaço real como

$$\delta_1^b = \frac{a}{2}(1, \sqrt{3}), \quad \delta_2^b = \frac{a}{2}(1, -\sqrt{3}), \quad \delta_3^b = -a(1, 0), \quad (2.4)$$

e de forma análoga, é possível definir os vetores dos primeiros vizinhos de A

$$\delta_1^a = -\delta_1^b, \quad \delta_2^a = -\delta_2^b, \quad \delta_3^a = -\delta_3^b. \quad (2.5)$$

Microscopicamente, pode-se descrever o grafeno pelo método de tight-binding. O método de tight-binding é aplicado nos casos em que a sobreposição das funções de onda entre dois átomos vizinhos são grandes o suficiente para exigir correções nas funções de onda de átomos isolados, mas não tão grandes a ponto de tornar a descrição atômica irrelevante. Ou seja, tal método descreve as propriedades de elétrons fortemente ligados aos átomos a que pertencem e que possuem interação limitada com estados e potenciais dos átomos vizinhos. Assim, se considera que o hamiltoniano de toda a rede cristalina possa ser aproximado na vizinhança de cada ponto da rede pelo hamiltoniano do átomo localizado nesse ponto. No grafeno o método de tight-binding pode ser implementado considerando as funções de onda dos elétrons como uma combinação linear de orbitais atômicos, para tando usa-se como base as funções de Bloch construídas a partir dos orbitais $2p_z$. No entanto, a abordagem do método de tight-binding que trataremos aqui, será baseado na formulação de segunda quantização, o qual, fornece uma interpretação bastante intuitiva.

Considerando que os elétrons das ligações π possam transitar para átomos de primeiros e segundos vizinhos, temos o seguinte Hamiltoniano de tight-binding,

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (\hat{a}_{i,\sigma}^\dagger \hat{b}_{j,\sigma} + \hat{b}_{i,\sigma}^\dagger \hat{a}_{j,\sigma}) - t' \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (\hat{a}_{i,\sigma}^\dagger \hat{a}_{j,\sigma} + \hat{b}_{i,\sigma}^\dagger \hat{b}_{j,\sigma} + \hat{a}_{j,\sigma}^\dagger \hat{a}_{i,\sigma} + \hat{b}_{j,\sigma}^\dagger \hat{b}_{i,\sigma}), \quad (2.6)$$

onde $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ aniquila (cria) um elétron com spin $\sigma(\sigma = \downarrow, \uparrow)$ na sub-rede A e $\hat{b}(\hat{b}^\dagger)$ aniquila (cria) um elétron com spin $\sigma(\sigma = \downarrow, \uparrow)$ na sub-rede B , $t \approx 2,8 \text{ eV}$ é a energia de “salto” entre primeiros vizinhos e t' é a energia de “salto” entre segundos vizinhos. As bandas de energia obtidas deste Hamiltoniano foram investigadas pela primeira vez em 1947 por P. R. Wallace [80]. A partir deste ponto estaremos somente interessados em transições entre primeiros vizinhos. O Hamiltoniano (2.6) tomará a seguinte forma,

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (\hat{a}_{i,\sigma}^\dagger \hat{b}_{j,\sigma} + \hat{b}_{i,\sigma}^\dagger \hat{a}_{j,\sigma}). \quad (2.7)$$

Devido a periodicidade da rede pode-se usar a transformada de Fourier:

$$\hat{a}_{i,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}, \quad \hat{b}_{i,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \quad (2.8)$$

assim, é possível sair da representação da célula unitária do espaço real para a primeira zona de Brillouin, Γ , na representação do espaço recíproco, o que leva à seguinte expressão para o Hamiltoniano de tight-binding,

$$H = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger & \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \sum_{l=1}^3 e^{i\mathbf{k}\cdot\delta_l^b} \\ -t \sum_{l=1}^3 e^{i\mathbf{k}\cdot\delta_l^a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} \\ \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Diagonalizando a matriz 2x2 que aparece no meio da soma da equação (2.9) e considerando o problema de autovalores:

$$\begin{pmatrix} 0 & -t \sum_{l=1}^3 e^{i\mathbf{k}\cdot\delta_l^b} \\ -t \sum_{l=1}^3 e^{i\mathbf{k}\cdot\delta_l^a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

com $\begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix}$ sendo as componentes do autovetor, teremos a seguinte expressão para os autovalores de energia,

$$E(\mathbf{k}) = \pm t \sqrt{3 + 2\cos(a\sqrt{3}k_y) + 4\cos(a\sqrt{3}k_y/2)\cos(3ak_x/2)} \quad (2.11)$$

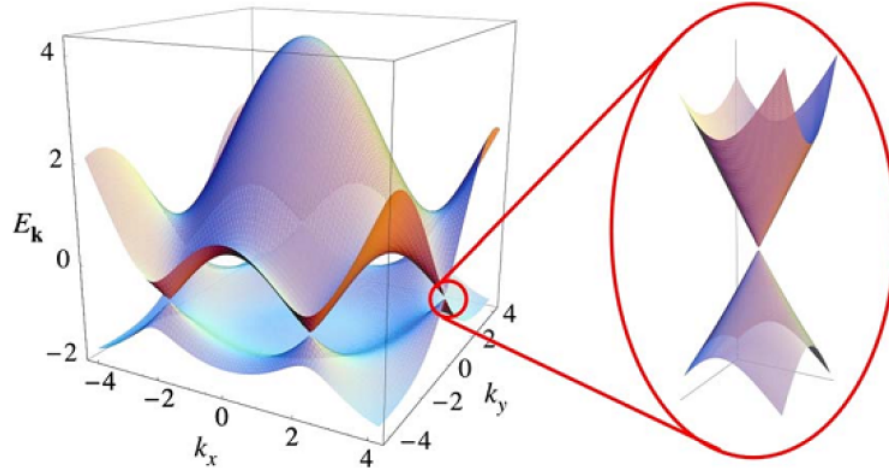


Figura 2.2: Estrutura de bandas de energia do grafeno mostrando a banda de valência tocando a banda de condução. A ampliação em torno de um dos pontos mostra o espectro cônico linear sem *gap* em torno dessa região. (Fonte: referência [79])

O resultado (2.11), chamado também de relação de dispersão de energia, consiste de duas superfícies ($E > 0$ e $E < 0$) as quais se tocam quando $E = 0$ em seis pontos que estão localizados nos vértices da primeira zona de Brillouin.

Os estados de energia negativa (bandas de valência) estão preenchidos e os estados de energia positiva (bandas de condução) estão vazios, onde, o nível de Fermi corresponde aos seis pontos isolados ($E = 0$). De fato, não há neste material um gap de energia mas a densidade de estados (número de estados por unidade de volume de energia) dele é nula no nível de Fermi, indicando que o grafeno é um semicondutor de gap nulo [79].

2.2 Férmons de Dirac no grafeno

A partir da equação (2.9) temos que o Hamiltoniano de tight-binding, para o grafeno, pode ser representado no espaço recíproco como,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -t \sum_{l=1}^3 e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_l^b} \\ -t \sum_{l=1}^3 e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_l^a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Expandindo as componentes do hamiltoniano (2.12) em série de Taylor em torno dos pontos \mathbf{K} e

\mathbf{K}' , teremos o seguinte resultado,

$$H_D^\pm = \frac{3at}{2} \begin{pmatrix} 0 & k_x \mp ik_y \\ k_x \pm ik_y & 0 \end{pmatrix} = v_f \begin{pmatrix} 0 & p_x \mp ip_y \\ p_x \pm ip_y & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

onde $v_f = \frac{3ta}{2\hbar}$ é a velocidade de Fermi e os sinais $+$ e $-$ referem-se a elétrons de baixa energia em torno dos pontos \mathbf{K} e \mathbf{K}' . Uma outra forma de representar o hamiltoniano para os dois pontos de Dirac é:

$$H_D = \begin{pmatrix} H_K & 0 \\ 0 & H_{K'} \end{pmatrix} = v_f \begin{pmatrix} \sigma \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & \sigma^* \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Neste caso, σ é um pseudo-spin, que vem do fato de termos duas sub-redes na estrutura. Ou seja, o pseudo-spin, é um índice indicando a contribuição de cada sub-rede triangular A e B para a dinâmica eletrônica do sistema, sendo o pseudo-spin análogo ao spin (up ou down) do elétron. Expandindo também a equação (2.11) em torno dos pontos \mathbf{K} ou \mathbf{K}' , teremos

$$E(\mathbf{k}) = \pm \hbar |\mathbf{k}| v_f, \quad (2.15)$$

esta relação é semelhante a dispersão de energia relativística, $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, para $m_0 = 0$ com a velocidade de Fermi v_f fazendo o papel da velocidade da luz c . Por este motivo, os portadores de carga no grafeno podem ser vistos como partículas livres relativísticas $2D$ que são descritas pela equação de Dirac (2.14) em eletrodinâmica quântica $2D$. De fato, alguns fenômenos de eletrodinâmica quântica são inversamente proporcionais à velocidade da luz, e como $c/v_f \simeq 300$, efeitos de pseudo-spin são importantes no grafeno. Evidentemente, o grafeno representa uma versão mais lenta da eletrodinâmica quântica já que, sua constante de acoplamento é $\alpha' = e^2/\hbar v_f \sim 2$.

A função de onda que descreve os portadores de carga consiste de duas componentes, uma descrevendo \mathbf{K} e a outra \mathbf{K}' . Além disso, estes dois pontos de Dirac têm um autovetor que descreve a probabilidade do estado do elétron estar na sub-rede A (parte superior do autoestado) ou na sub-rede B (parte inferior do autoestado):

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_K \\ \psi_{K'} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde ψ_K e $\psi_{K'}$ são autoestados bidimensionais:

$$\psi_K = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}, \psi_{K'} = \begin{pmatrix} \phi'_A \\ \phi'_B \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Os autovalores para cada ponto de Dirac será obtido a partir de,

$$H_K \psi_K = E_K \psi_K, \quad H_{K'} \psi_{K'} = E_{K'} \psi_{K'}, \quad (2.18)$$

com autovalores $E_{K,K'}$ definidos na equação (2.15).

2.3 Grafeno em um campo magnético constante

Para descrever uma folha de grafeno submetida a um campo magnético basta usar o acoplamento mínimo através da substituição do momento canônico \mathbf{p} pelo momento cinético invariante de gauge [81],

$$\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{\Pi} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (2.19)$$

onde $-e$ é a carga do elétron e \mathbf{A} é o potencial vetor que define o campo magnético, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Tomando as relações de comutação entre as coordenadas do momento cinético, temos:

$$[\Pi_x, \Pi_y] = \frac{-i\hbar^2}{l_B^2} = -\frac{ie\hbar}{c} F_{xy}, \quad (2.20)$$

onde $l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ é o chamado comprimento magnético e $F_{xy} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ é o campo magnético.

De forma análoga ao tratamento do oscilador harmônico unidimensional em mecânica quântica, é conveniente introduzir os seguintes operadores escada,

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\Pi_x - i\Pi_y), \quad a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\Pi_x + i\Pi_y), \quad (2.21)$$

de tal forma que vale a seguinte relação de comutação usual,

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (2.22)$$

e desta forma é possível escrever o momento cinético em termos dos operadores escada,

$$\Pi_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_B} (a^\dagger + a), \quad \Pi_y = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}l_B} (a^\dagger - a). \quad (2.23)$$

Reescrevendo o hamiltoniano (2.14) em termos dos operadores escada (2.21), teremos a seguinte expressão para o ponto K :

$$H_K = w' \hbar \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

com $w' = \sqrt{2}v_f/l_B$ sendo a frequência de ciclotron no caso relativístico.

Os autovalores e autovetores de (2.24) podem ser obtidos resolvendo a equação de autovalor (2.18) para o ponto K , o que leva ao seguinte resultado,

$$E_K = \pm \frac{\hbar w_f \sqrt{2|n|}}{l_B}, \quad (2.25)$$

com autovetores representados por [82],

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |n-1\rangle \\ \pm |n\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

onde, os sinais $+$ e $-$ representam respectivamente as bandas de valência e condução. A expressão (2.25) representa os chamados níveis de Landau (LL), os quais são degenerados em $n = 0$ como mostra a figura abaixo,

Como veremos, o grafeno se diferencia dos semicondutores tradicionais em muitos aspectos, por exemplo, no *Si* e *GaAs*, a dispersão de energia se desdobra em níveis de Landau com energias dadas por $E = \frac{e\hbar B}{mc}(n + 1/2)$ [83, 84], onde m é a massa efetiva dos portadores no material e $n = 0, 1, 2, \dots$. Observe que neste caso, todos os níveis de Landau têm a mesma degenerescência. Além disso, diferente dos semicondutores usuais o grafeno possui estado quântico definido em $E = 0$.

A degenerescência dos níveis de Landau esta relacionada com a existência de uma constante de movimento, que é a posição do centro de movimento de ciclotron. E, devido à invariância de translação, a energia do elétron não depende da posição deste centro. Em termos de mecânica quântica, isso significa que o operador correspondente a este centro, \mathbf{R} , comuta com o hamiltoniano $H(\mathbf{p} + e/c\mathbf{A})$.

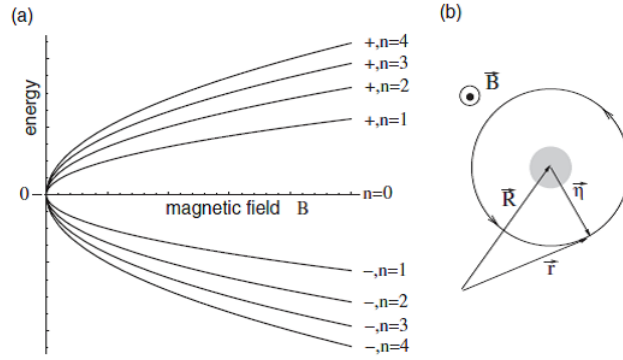


Figura 2.3: (a) Níveis de Landau relativístico. (b) Representação semiclássica do movimento de cíclotron. A região cinza representa a incerteza na posição do centro de movimento de cíclotron. (Fonte: referência [82])

A relação entre o operador posição \mathbf{r} , o centro de movimento de cíclotron \mathbf{R} , e a variável de cíclotron $\eta = (\eta_x, \eta_y)$, como mostrado na figura 2.3, será

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \eta. \quad (2.27)$$

Sendo \mathbf{R} constante, η descreverá a dinâmica do elétron no campo magnético. De fato, a relação entre η e $\mathbf{\Pi}$ pode ser obtida da seguinte expressão,

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{d\eta}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (2.28)$$

ou seja,

$$\eta_x = \frac{c\Pi_y}{eB}, \quad \eta_y = \frac{-c\Pi_x}{eB}, \quad (2.29)$$

que juntamente com a relação de comutação (2.20), obtêm-se:

$$[\eta_x, \eta_y] = -l_B^2 i, \quad (2.30)$$

e, da mesma forma, para $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{R} = (X, Y)$ e $\eta = (\eta_x, \eta_y)$, teremos:

$$[X, Y] = -[x, \eta_y] - [\eta_x, y] + [\eta_x, \eta_y] = l_B^2 i. \quad (2.31)$$

Podemos, portanto, usar a relação de comutação $[X, Y] = -[\eta_x, \eta_y] = il_B^2$, para a contagem do número de estados, ou seja a degenerescência em cada LL. De fato, esta relação indica que não se pode medir ambas as componentes de \mathbf{R} simultaneamente, o que leva ao seguinte raio de cíclotron quantizado

$$r_n = \frac{|E_K|}{e/cBv_f} = \sqrt{2nl_B}, \quad (2.32)$$

e, portanto, a área ocupada por uma órbita de cíclotron quantizada é

$$\Delta X \Delta Y = \pi r_{n+1}^2 - \pi r_n^2 = 2\pi l_B^2, \quad (2.33)$$

conforme ilustrado na figura 2.3. Esta área mínima representa o mesmo papel que \hbar no espaço de fase e, portanto, permite-nos contar o número de possíveis estados quânticos de uma dada área A ,

$$N_B = \frac{A}{2\pi l_B^2} = n_B A, \quad (2.34)$$

onde,

$$n_B = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{hc}, \quad (2.35)$$

é a densidade de fluxo, ou seja, o campo magnético em unidades do fluxo quântico hc/e . Doravante, a interpretação física de l_B é que a área $2\pi l_B^2$ contém 1 quantum deste fluxo quântico. A razão entre a densidade eletrônica n_e e este fluxo de densidade, define o fator de preenchimento, $\nu = n_e/n_B$, que caracteriza o preenchimento dos diferentes LL [82].

2.4 Efeito Hall Quântico no Grafeno

O efeito Hall quântico é originado quando elétrons confinados em duas dimensões são submetidos a um campo magnético forte (da ordem de 10 Testa) perpendicular ao plano de confinamento, sendo

resfriados a baixas temperaturas (aproximadamente 1 Kelvin), de tal forma que a resistividade Hall torna-se independente do campo magnético. De acordo com a teoria clássica, a resistividade Hall (ρ_{xy}) é diretamente proporcional ao campo magnético aplicado, e tal resultado é válido somente para campos magnéticos de baixas magnitudes [85]. Para campos de valores maiores, observa-se experimentalmente que a resistência comporta-se como platôs.

Experimentalmente, a condutância Hall é dada por [86],

$$\sigma_{xy} = g \frac{e^2}{h} \nu, \quad (2.36)$$

onde ν é um número inteiro que caracteriza o efeito Hall quântico inteiro, e g é o fator de degenerescência de spin e de vale dos estados na banda de condução do material.

Diferente do caso dos semicondutores tradicionais, para o grafeno, o nível de Landau com $n = 0$ acomoda elétrons e buracos. Assim, para cada tipo de portador ele tem metade da degenerescência dos demais, por isso, o valor esperado para os platôs nos valores da condutância Hall são,

$$\sigma_{xy} = \pm 4 \frac{e^2}{h} \left(\nu + \frac{1}{2} \right), \quad (2.37)$$

o que mostra que os planaltos na condutância Hall no grafeno ocorrem em valores semi-inteiros do seu quantum de condutância $4e^2/h$, e por este motivo o efeito Hall no grafeno é dito anômalo [87, 88] em relação ao efeito Hall nos semicondutores tradicionais, onde os platôs ocorrem em valores inteiros do quantum de condutância. Além disso, vale acrescentar que no grafeno, diferente dos semicondutores tradicionais, mesmo a temperatura ambiente podemos observar o efeito Hall quântico [89].

De fato, pode-se definir a condutividade Hall por [90]

$$\sigma_H = e \left. \frac{\partial n(E)}{\partial B} \right|_{E=E_f}, \quad (2.38)$$

onde $n(E)$ é a densidade eletrônica e, a derivada com respeito ao campo magnético \mathbf{B} é tomada na energia de Fermi.

Capítulo 3

Efeito Zeeman Anômalo

Neste capítulo será apresentado uma breve revisão sobre o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio a partir do limite não relativístico da equação de Dirac. O efeito Zeeman é o desvio nos níveis de energia de um certo elemento químico provocado por um campo magnético externo \mathbf{B} . Este desvio é consequência do acoplamento do momento angular orbital do elétron com o campo magnético externo. Existem dois tipos de efeito Zeeman: o efeito Zeeman normal e o efeito Zeeman anômalo. O efeito Zeeman normal foi descoberto pelo físico holandês Pieter Zeeman em 1896 e ocorre quando o spin eletrônico total \mathbf{S} é nulo e o momento angular total \mathbf{J} é igual ao momento angular orbital. Contudo, em geral o spin eletrônico total não é nulo, o que leva a acoplamentos mais complexos dos estados atômicos sob a ação de uma campo magnético externo, o que corresponde ao efeito Zeeman anômalo. Ou seja, a interação spin-órbita¹ acopla o spin e o momento angular orbital para compor o momento angular total, $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$. De fato, com o campo magnético externo surgirá um torque que fará o dipolo magnético atômico precessionar em torno de \mathbf{B} , um efeito conhecido como precessão de Larmor. Então, o campo magnético externo faz com que \mathbf{J} precessione lentamente em torno de \mathbf{B} . Enquanto isto, \mathbf{L} e \mathbf{S} precessionam mais rapidamente em torno de \mathbf{J} devido à interação spin-órbita. Contudo, se aumentarmos o campo, a frequência da precessão de Larmor ficará mais rápida do que a precessão spin-órbita de \mathbf{L} e \mathbf{S} em torno de \mathbf{J} , e o efeito Zeeman anômalo passa a ser conhecido como efeito Paschen-Back que está associado ao regime de campo magnético forte.

¹A interação spin-órbita consiste na interação entre o momento de dipolo magnético de spin eletrônico e o campo magnético interno do átomo, campo este que é consequência do movimento orbital do elétron

3.1 Formulação do Hamiltoniano

O Hamiltoniano de Dirac para o átomo de hidrogênio em um campo magnético constante é dado por

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_D \Psi, \quad (3.1)$$

com

$$H_D = c\alpha \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta m_e c^2 - e\phi, \quad (3.2)$$

onde m_e e e são, respectivamente, a massa e a carga do elétron, Ψ é um espinor, β é a matriz identidade de Dirac, $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ é o operador momento canônico, \mathbf{A} é o potencial vetor, e $\phi = \frac{e}{r}$ é o potencial Coulombiano.

De fato, como objetivamos estudar o efeito Zeeman, torna-se necessário discutir o comportamento da equação (3.2) no limite de baixas energias. Assim, utilizaremos o método à la Foldy-Wouthuysen para esta finalidade [91]. Tal método promove a separação do Hamiltoniano relativístico da equação de Dirac em termos de um operador ímpar $\varphi = c\alpha \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)$ e um operador par $\varepsilon = -e\phi$, os quais satisfazem as seguintes relações,

$$[\varepsilon, \beta] = \varepsilon \cdot \beta - \beta \cdot \varepsilon = 0, \quad \{\varphi, \beta\} = \varphi \cdot \beta + \beta \cdot \varphi = 0. \quad (3.3)$$

De fato, a transformação à la Foldy-Wouthuysen é implementada através do operador unitário $U = e^{iS}$, tal que $\Psi_1 = e^{iS}\Psi$. Então,

$$H_D \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{-iS} \Psi_1) = e^{-iS} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \left(i\hbar \frac{\partial e^{-iS}}{\partial t} \right) \Psi_1, \quad (3.4)$$

ou seja,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \left[e^{iS} \left(H_D - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS} \right] \Psi_1 = H_1 \Psi_1. \quad (3.5)$$

Considerando que no limite de baixas energias, a energia de repouso $m_e c^2$ deverá ser dominante nos termos de energia cinética, então podemos expandir (3.5) em termos de $\frac{1}{m_e c^2}$ através de uma série

¹Um operador ímpar é aquele que possui somente elementos matriciais conectando as componentes superiores e inferiores do espinor de Dirac. Por outro lado, um operador par é aquele que não possui tais elementos.

de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^{iS} H_D e^{-iS} = H_D + i[S, H_D] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, H_D]] + \dots + \frac{i^n}{n!} [S, [S, \dots [S, H_D]]], \quad (3.6)$$

e

$$e^{iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{-iS} = \frac{\partial}{\partial t} + i \left[S, \frac{\partial}{\partial t} \right] + \frac{i^2}{2!} \left[S, \left[S, \frac{\partial}{\partial t} \right] \right] + \dots + \frac{i^n}{n!} \left[S, \left[S, \dots \left[S, \frac{\partial}{\partial t} \right] \right] \right] \quad (3.7)$$

o que leva a (usando o espinor teste ς , teremos $[S, \frac{\partial}{\partial t}] \varsigma = S \frac{\partial \varsigma}{\partial t} - \frac{\partial(S\varsigma)}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial t} \varsigma$),

$$\begin{aligned} H_1 = H_D + i[S, H_D] - \frac{1}{2} [S, [S, H_D]] - \frac{i}{6} [S, [S, [S, H_D]]] + \frac{1}{24} [S, [S, [S, [S, H_D]]]] \\ - \hbar \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2} \left[S, \frac{\partial S}{\partial t} \right] + \frac{\hbar}{6} \left[S, \left[S, \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

com o gerador S sendo,

$$S = (2im_e c^2)^{-1} \beta \varphi, \quad (3.9)$$

então, substituindo (3.9) em (3.8) e negligenciando termos da ordem de $O((m_e c^2)^{-3})$, teremos:

$$H_1 = \beta m_e c^2 + \varepsilon + \frac{\beta \varphi^2}{2m_e c^2} - \frac{1}{8m_e^2 c^4} \left[\varphi, [\varphi, \varepsilon] + i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \frac{\beta \hbar i}{2m_e c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\beta}{2m_e c^2} [\varphi, \varepsilon] - \frac{\varphi^3}{3m_e^2 c^4}, \quad (3.10)$$

o qual pode ser reescrito na seguinte forma,

$$H_1 = \beta m_e c^2 + \varepsilon_1 + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (3.11)$$

sendo o operador par dado por,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \frac{\beta \varphi^2}{2m_e c^2} - \frac{1}{8m_e^2 c^4} \left[\varphi, [\varphi, \varepsilon] + i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right], \quad (3.12)$$

e os operadores ímpares dados por,

$$\varphi_1 = \frac{\beta \hbar i}{2m_e c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\beta}{2m_e c^2} [\varphi, \varepsilon], \quad (3.13)$$

e

$$\varphi_2 = -\frac{\varphi^3}{3m_e^2 c^4}. \quad (3.14)$$

A primeira transformação canônica não eliminou os operadores ímpares e, é por isso que realizaremos uma segunda transformação canônica com o gerador, $S_1 = (2im_e c^2)^{-1} \beta \varphi_1$, então

$$H_2 = e^{iS_1} \left(H_1 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS_1} = \beta m_e c^2 + \varepsilon_1 + \varphi_3, \quad (3.15)$$

onde,

$$\varphi_3 = \frac{\beta}{2m_e c^2} [\varphi_1, \varepsilon] - \hbar \frac{\partial S_1}{\partial t}. \quad (3.16)$$

O Hamiltoniano (3.16) ainda contém o operador ímpar que pode ser eliminado através de uma terceira transformação canônica, com o gerador $S_2 = (2im_e c^2)^{-1} \beta \varphi_3$. Então, o novo Hamiltoniano H_3 será um operador par,

$$H_3 = e^{iS_2} \left(H_2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS_2} = \beta m_e c^2 + \varepsilon_1, \quad (3.17)$$

cuja função de onda associada será,

$$\Psi_3 = e^{iS_2} e^{iS_1} e^{iS} \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \sim (m_e c^2)^{-1} \psi \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde χ e ψ são os espinores de Pauli para uma partícula de spin 1/2 não relativística. Mantendo somente termos da ordem de $(m_e c^2)^{-1}$ em (3.17) teremos o seguinte Hamiltoniano não relativístico para o átomo de hidrogênio submetido a um campo magnético,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (3.19)$$

com,

$$H = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})}{2m_e} - e\phi, \quad (3.20)$$

onde σ são as matrizes de Pauli. Usando a seguinte identidade

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi}) = \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{\Pi}), \quad (3.21)$$

teremos,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2 + \frac{e}{2m_e c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{ie}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) - e\phi. \quad (3.22)$$

É simples verificar que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) = -i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.23)$$

e

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}, \quad (3.24)$$

onde temos considerado o gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) e que o campo magnético \mathbf{B} é derivado do potencial vetor,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}). \quad (3.25)$$

Para \mathbf{B} na direção positiva do eixo z ($\mathbf{B} = B\hat{k}$) e usando (3.23), (3.24) e (3.25) em (3.22) têm-se:

$$H = \frac{1}{2m_e}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m_e\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{p_z^2}{2m_e} - \omega[L_z + 2S_z] - e\phi, \quad (3.26)$$

onde $\omega = \frac{-eB}{2m_e c}$ e $S_z = \frac{\hbar\sigma_z}{2}$ são a frequência de Larmor e o operador de spin. De fato, o termo quadrático $\omega^2(x^2 + y^2)$ é irrelevante para um átomo de um elétron mesmo no caso de B grande; o termo análogo é importante para o estado fundamental do átomo de Hélio, para o qual $L_z^{(tot)}$ e $S_z^{(tot)}$ são nulos [92]. Então, o Hamiltoniano (3.26) pode ser representado pelos seguintes termos:

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r}, \quad (3.27)$$

$$H_B = -\omega[L_z + 2S_z]. \quad (3.28)$$

O Hamiltoniano (3.27) descreve o elétron na presença do potencial de Coulomb. O Hamiltoniano (3.28) descreve o efeito Zeeman anômalo. Vale destacar que para (3.28) o fator 2 na frente de S_z reflete o fato que, na mecânica quântica usual, o fator de Landé g_s do elétron é 2. Porém, a partir da eletrodinâmica quântica é conhecido que este valor é ligeiramente maior que 2, $g_s = 2,00231930436146$ [93].

3.2 Correção da Energia

No limite de campo magnético externo fraco, $B \lesssim 10^3 G$ (Gauss), o Hamiltoniano H_B deve ser tratado como uma perturbação. Neste caso uma base apropriada é definida pelos números quânticos $\{n, l, s, j, m_j\}$, com número quântico principal n , l é o número quântico orbital, $j = l + \frac{1}{2}$ é o número quântico associado ao momento angular total e m_j é o número quântico magnético. Pela teoria de perturbação de primeira ordem, a correção de Zeeman para a energia é

$$\Delta E_B = \langle nlsjm_j | H_B | nlsjm_j \rangle$$

$$= -\omega \hbar m_j g, \quad (3.29)$$

onde temos usado,

$$\langle nlsjm_j | L_z | nlsjm_j \rangle = \hbar m_j \left[\frac{j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)}{2j(j+1)} \right], \quad (3.30)$$

e

$$\langle nlsjm_j | S_z | nlsjm_j \rangle = \hbar m_j \left[\frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right], \quad (3.31)$$

com $g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$ sendo o fator de Landé. Para o caso de momento puramente orbital $j = l$ e $s = 0$, têm-se então $g = 1$. No entanto, para o caso de momento puramente de spin $j = s$ e $l = 0$ teremos $g = 2$.

Capítulo 4

Movimento Browniano

Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre o movimento Browniano. O movimento Browniano é um fenômeno difusivo, onde uma partícula com dimensões microscópicas se move devido a colisões com as moléculas de um fluido em que esta suspensa. Tais colisões são aleatórias e rápidas levando a partícula a ter o seu próprio movimento de agitação térmica. Neste sentido, as dimensões da partícula Browniana são muito maiores do que as da molécula do fluido, fazendo com que ela tenha um movimento com amplitude e velocidade muito menores do que as das moléculas do fluido. Foi Robert Brown que no século XIX primeiramente observou este fenômeno através de um microscópio, escrevendo o primeiro artigo sobre o tema. No entanto, a explicação correta de que tal movimento é devido as colisões entre as moléculas do fluido e a partícula Browniana, foi dado por Delsaux em 1877.

O tratamento quantitativo para o movimento Browniano foi primeiramente dado por A. Einstein em 1905. Einstein caracterizou a difusão através da variância da distribuição de posições. Ou seja, ao considerar o movimento aleatório de uma partícula esférica de raio a em um fluido de viscosidade η , ele obteve

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2Dt, \quad (4.1)$$

onde t é o tempo de observação e,

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta N_A a}, \quad (4.2)$$

é o coeficiente de difusão, R é a constante universal dos gases, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ é o número de Avogadro e T é a temperatura em Kelvin. Tal resultado foi muito importante ao permitir estimar

o número de Avogadro, e ao mesmo tempo mostrar que o movimento Browniano fornece uma das principais evidências na escala macroscópica para a natureza atômica da matéria. Todavia, é importante destacar que a expressão (4.2) obtida por A. Einstein falha ao tentar explicar sistemas onde a difusão é do tipo anômala, ou seja, quando a variância da posição não cresce mais linearmente com o tempo, assim aqui nos restringiremos ao caso em que (4.1) é válido. De fato, trataremos o movimento Browniano a partir das equações de Langevin onde será possível estudar o efeito do fluido sobre a partícula Browniana através de uma força aleatória e um atrito sistemático.

4.1 Equação de Langevin

O movimento Browniano pode ser descrito pelas leis de Newton segundo a equação de Langevin,

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\mathbf{v}(t) + \frac{\xi(t)}{m} \quad (4.3)$$

onde m é a massa de uma partícula num meio viscoso com força de amortecimento $-\gamma\mathbf{v}(t)$, linear na velocidade $\mathbf{v}(t)$ da partícula, e com coeficiente de atrito constante γ . O termo $\xi(t)$ é uma força estocástica que representa o ruído, o qual satisfaz as correlações

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle &= \delta_{ij}g\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde g é o parâmetro de dispersão relativo à distribuição gaussiana e as correlações caracterizam um ruído do tipo branco ou Markoviano.

Uma das consequências de (4.4) é que se, por exemplo, as funções de correlação possuírem um número ímpar de termos $\xi(t)$, então seu valor será nulo. Por outro lado, se tais funções de correlação possuírem um número par destes termos, seu valor poderá ser expresso em termos de somas de produtos da função de correlação de pares, por exemplo [?],

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) \rangle &= \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle \langle \xi(t_3)\xi(t_4) \rangle + \langle \xi(t_1)\xi(t_3) \rangle \langle \xi(t_2)\xi(t_4) \rangle \\ &+ \langle \xi(t_1)\xi(t_4) \rangle \langle \xi(t_2)\xi(t_3) \rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Em $t = 0$ a velocidade e a posição da partícula Browniana serão, respectivamente, $v_i(0) = v_{0i}$ e $x_i(0) = x_{0i}$. Nesse caso, podemos resolver explicitamente a equação (4.3) o que dará

$$v_i(t) = v_{0i}e^{-\frac{\gamma t}{m}} + \frac{1}{m} \int_0^t ds e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)} \xi_i(s), \quad (4.6)$$

e

$$x_i(t) = x_{0i} + \frac{mv_{0i}}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t ds \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)}\right) \xi_i(s), \quad (4.7)$$

onde o índice $i = x, y, z$, indica a dimensões espaciais. Podemos interpretar as equações (4.6) e (4.7) de forma probabilística, tomando a média sobre o ensemble de partículas Brownianas, todas com a mesma condição inicial v_0 e x_0 que juntamente com as correlações (4.4) darão a seguinte média

$$\langle v_i(t) \rangle = v_{0i} e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \quad (4.8)$$

que decai exponencialmente a zero com o tempo. Então, a função de correlação da velocidade será:

$$\begin{aligned} \langle v_i(t_1)v_i(t_2) \rangle &= v_{0i}^2 e^{-\frac{\gamma}{m}(t_1+t_2)} + \frac{1}{m^2} \int_0^{t_1} ds_1 \int_0^{t_2} ds_2 e^{-\frac{\gamma}{m}(t_1+t_2-s_1-s_2)} \langle \xi_i(s_1)\xi_i(s_2) \rangle \\ &= v_{0i}^2 e^{-\frac{\gamma}{m}(t_1+t_2)} + \frac{g}{m^2} \int_0^{t_1} ds_1 \int_0^{t_2} ds_2 e^{-\frac{\gamma}{m}(t_1+t_2-s_1-s_2)} \delta(s_1 - s_2) \\ &= v_{0i}^2 e^{-\frac{\gamma}{m}(t_1+t_2)} + \frac{g}{2m\gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2+t_1)} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

que para tempos grandes, $\frac{\gamma}{m}t_1 \gg 1$ e $\frac{\gamma}{m}t_2 \gg 1$ a equação (4.9) não dependerá mais da velocidade inicial, somente da diferença dos tempos,

$$\langle v_i(t_1)v_i(t_2) \rangle = \frac{g}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}|t_2-t_1|} \quad (4.10)$$

No estado estacionário, quando o sistema se encontrar em equilíbrio com um banho térmico de temperatura T , a partícula Browniana possuirá a seguinte energia cinética média dada pelo teorema de equipartição de energia,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}m \langle [v_i(t)]^2 \rangle_T = \frac{g}{4\gamma} = \frac{1}{2}k_B T, \quad (4.11)$$

onde $\langle \rangle_T$ é a média térmica, k_B é a constante de Boltzmann, e

$$g = 2\gamma k_B T \quad (4.12)$$

é a relação de Einstein ou seja, o teorema da flutuação dissipação. Contudo, um dos parâmetros físicos mais importantes do movimento Browniano é o coeficiente de difusão, o qual pode ser determinado a partir de (4.7) através da seguinte variância:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle [x_i(t)]^2 \rangle - \langle x_i(t) \rangle^2 \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int_0^t ds_2 \int_0^t ds_1 \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s_2)}\right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s_1)}\right) \langle \xi_i(s_1)\xi_i(s_2) \rangle \\ &= \frac{g}{\gamma^2} \left[t - \frac{3m}{2\gamma} - \frac{m}{2\gamma} \left(e^{-\frac{2\gamma}{m}t} - 4e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para grandes tempos, a expressão (4.13) tomará a seguinte forma

$$\sigma^2 \rightarrow \frac{gt}{\gamma^2} \equiv 2Dt \quad (4.14)$$

consequentemente,

$$D = \frac{g}{2\gamma^2}, \quad (4.15)$$

onde D é o coeficiente de difusão. Tal resultado foi obtido por A. Einstein em 1905 [94], contudo a abordagem apresentada aqui remete aos trabalhos de Langevin [95] e G. E. Uhlenbeck e L. S. Ornstein [96].

Capítulo 5

Formalismo Não Comutativo

Neste capítulo apresentaremos os fundamentos da teoria NC sob o ponto de vista do espaço NC e espaço de fase NC.

5.1 Espaço NC e o Espaço de fase NC

Em um espaço de fase NC os operadores de posição \hat{x}_i e momento \hat{p}_i satisfazem as seguintes relações de comutação [70, 97]:

$$\begin{aligned}[\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij}, \\[\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\left(\delta_{ij} + \frac{\theta_{ia}\eta_{aj}}{4\hbar^2}\right), \\[\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\eta_{ij},\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde θ_{ij} e η_{ij} são tensores reais completamente antissimétricos com dimensão de $(\text{comprimento})^2$ e $(\text{momento})^2$ respectivamente. De fato, se fizermos $\theta_{ij} \neq 0$ e $\eta_{ij} = 0$ teremos o caso do espaço NC,

$$\begin{aligned}[\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij}, \\[\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar, \\[\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0,\end{aligned}\tag{5.2}$$

O procedimento para construir produtos em ambiente como em (5.2), é conhecido na literatura como procedimento de Weyl. O procedimento de quantização de Weyl [75] fornece um formalismo

que associa a álgebra de coordenadas não comutativas $(\widehat{\mathcal{A}}, \cdot)$ com a álgebra de funções de coordenadas comutativas (\mathcal{A}, \star) . Nós definimos o mapeamento $W : \mathcal{A} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ em que um elemento de $\widehat{\mathcal{A}}$ está associado com uma função $f(x^1, \dots, x^n) \equiv f(x)$ de \mathcal{A} :

$$f(\widehat{x}) = W(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \widetilde{f}(k) e^{ik_i \widehat{x}_i} \quad (5.3)$$

em que $\widetilde{f}(k)$ é a transformada de Fourier de $f(x)$

$$\widetilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x f(x) e^{-ik_i x_i}. \quad (5.4)$$

A multiplicação dos dois operadores $W(f)$ e $W(g)$, obtidos de (5.3), produz outro operador $W(f \star g)$:

$$W(f) \cdot W(g) = \widehat{f}(\widehat{x}) \cdot \widehat{g}(\widehat{x}) = W(f \star g), \quad (5.5)$$

com $f \star g \in (\mathcal{A}, \star)$, uma função clássica bem definida, como mostraremos agora. Substituindo (5.3) em (5.5) obtemos:

$$\begin{aligned} W(f) \cdot W(g) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \widetilde{f}(k) e^{ik_i \widehat{x}_i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n p \widetilde{g}(p) e^{ip_j \widehat{x}_j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \int d^n p \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(p) e^{ik_i \widehat{x}_i} e^{ip_j \widehat{x}_j}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Já que os expoentes não devem comutar é preciso usar a fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (CBH)

$$e^{\widehat{A}} e^{\widehat{B}} = e^{\widehat{A} + \widehat{B} + \frac{1}{2}[\widehat{A}, \widehat{B}] + \frac{1}{12}([\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] + [[\widehat{A}, \widehat{B}], \widehat{B}]) + \dots} \quad (5.7)$$

onde \widehat{A} e \widehat{B} são dois operadores não comutativos. No caso do espaço NC os termos com mais de um comutador desaparecem, então, teremos:

$$\begin{aligned} W(f) \cdot W(g) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \int d^n p \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(p) e^{i(k+p)_i \widehat{x}_i - \frac{i}{2} \theta_{ij} k_i p_j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \int d^n q \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(q-k) e^{iq_i \widehat{x}_i - \frac{i}{2} \theta_{ij} k_i (q-k)_j}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Na última linha foi feita uma mudança de variável $(k+p)_i = q_i$. Comparando esta expressão com

$$W(f \star g) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n q \widetilde{f \star g}(q) e^{iq_i \widehat{x}_i} \quad (5.9)$$

obteremos,

$$\widetilde{f \star g}(q) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(q-k) e^{-\frac{i}{2} \theta_{ij} k_i (q-k)_j}. \quad (5.10)$$

O último passo é obter a transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n q \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{f}(k) \tilde{g}(q-k) e^{-\frac{i}{2} \theta_{ij} k_i (q-k)_j} \right) e^{-iq_j x_j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n p \int d^n k \tilde{f}(k) e^{-ik_j x_j} e^{-\frac{i}{2} k_i \theta_{ij} p_j} \tilde{g}(p) e^{-ip_j x_j}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Na última linha foi feita uma mudança de variável $(q-k)_j = p_j$. Para avaliar esta integral faremos uma expansão em termos do parâmetro não comutativo θ_{ij} , calculando termo por termo,

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} \times \\ &\times \left(1 - \frac{i}{2} k^i \theta_{ij} p_j + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 k_{i_1} k_{i_2} \theta_{i_1 j_1} \theta_{i_2 j_2} p_{j_1} p_{j_2} + \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} \times \\ &\times \left(1 + \frac{i}{2} (-ik_i) \theta_{ij} (-ip_j) + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 (-ik_{i_1}) (-ik_{i_2}) \theta_{i_1 j_1} \theta_{i_2 j_2} (-ip_{j_1}) (-ip_{j_2}) + \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} \times \\ &\times \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \theta_{i_1 j_1} \theta_{i_2 j_2} \frac{\partial}{\partial y_{j_1}} \frac{\partial}{\partial y_{j_2}} + \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) e^{-ik_j x_j} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{g}(p) e^{-ip_j y_j}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Resultando na seguinte expressão para o produto estrela de duas funções:

$$(f \star g)(x) = \exp \left[\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right] f(x) g(y) \Big|_{y=x} \quad (5.13)$$

De fato, o produto (5.13) é válida para funções infinitamente diferenciáveis num espaço NC. Através de um procedimento análogo ao caso do espaço NC é possível obter a seguinte generalização do produto estrela para o espaço de fase NC,

$$(f \star g)(x, p) = \exp \left[\frac{i}{2} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{i}{2} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{x_i}} \frac{\partial}{\partial p_{y_j}} \right] f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} \quad (5.14)$$

onde f e g são duas funções infinitamente diferenciáveis.

5.2 Produto estrela e mapeamento

A parte em θ da exponencial (5.14) é

$$(f \star g)(x, p)_{\eta=0} = \exp \left[\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right] f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} \quad (5.15)$$

Como foi discutido na introdução, é suposto que o parâmetro NC seja muito pequeno. Assim, expandindo a exponencial em (5.17) em séries de potências, temos:

$$\begin{aligned}
(f \star g)(x, p)_{\eta=0} &= \exp \left[\frac{i}{2} \partial_{x_i} \theta_{ij} \partial_{y_j} \right] f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} \\
&= f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + \frac{i}{2} \theta_{ij} \partial_{x_i} f \partial_{y_j} g \Big|_{x=y, p_x=p_y} \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \theta_{ij} \theta_{lm} (\partial_{x_i} \partial_{x_l} f) (\partial_{y_j} \partial_{y_m} g) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + \dots \\
&= f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + \frac{i}{2} \theta_{ij} \partial_{x_i} f \partial_{y_j} g \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\theta^2) \\
&= \left(1 + \frac{i}{2} \theta_{ij} \partial_{x_i} \partial_{y_j} \right) f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\theta^2) \\
&= \left[f(x, p_x) - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} \frac{\partial f(x, p_x)}{\partial x_i} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right] g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\theta^2) \\
&= \left[f(x, p_x) - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j \frac{\partial f(x, p_x)}{\partial x_i} \right] g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\theta^2) \\
&= f \left(x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j, p_x \right) g(x, p_x). \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, a parte em η de (5.14) é

$$(f \star g)(x, p)_{\theta=0} = \exp \left[\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_{x_i}} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{y_j}} \right] f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} \tag{5.17}$$

cujas expansão em séries de potências é

$$\begin{aligned}
(f \star g)(x, p)_{\theta=0} &= \exp \left[\frac{i}{2} \partial_{p_{x_i}} \eta_{ij} \partial_{p_{y_j}} \right] f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} \\
&= f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + \frac{i}{2} \eta_{ij} \partial_{p_{x_i}} f \partial_{p_{y_j}} g \Big|_{x=y, p_x=p_y} \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \eta_{ij} \eta_{lm} (\partial_{p_{x_i}} \partial_{p_{x_l}} f) (\partial_{p_{y_j}} \partial_{p_{y_m}} g) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + \dots \\
&= f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + \frac{i}{2} \eta_{ij} \partial_{p_{x_i}} f \partial_{p_{y_j}} g \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\eta^2) \\
&= \left(1 + \frac{i}{2} \eta_{ij} \partial_{p_{x_i}} \partial_{p_{y_j}} \right) f(x, p_x) g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\eta^2) \\
&= \left[f(x, p_x) + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} \frac{\partial f(x, p_x)}{\partial p_{x_i}} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_{y_j}} \right) \right] g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\eta^2) \\
&= \left[f(x, p_x) + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} x_j \frac{\partial f(x, p_x)}{\partial x_i} \right] g(y, p_y) \Big|_{x=y, p_x=p_y} + O(\eta^2) \\
&= f \left(x, p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} x_j \right) g(x, p_x). \tag{5.18}
\end{aligned}$$

De fato, a aplicação do produto estrela (5.14) é totalmente equivalente a utilização do seguinte mapeamento, valido para todas as ordens em θ e η , [70]

$$\widehat{x}_i = x_i - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j, \quad \widehat{p}_i = p_i + \frac{1}{2\hbar}\eta_{ij}x_j, \quad (5.19)$$

onde as variáveis x_i e p_i satisfazem as relações de comutação canônica usuais

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= 0, \\ [x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ [p_i, p_j] &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

O mapeamento (5.19) é conhecido na literatura como Boop's shift [40]. Assim, em um espaço de fase NC, o produto estrela pode ser substituído pelo produto usual através da aplicação do Boop's shift.

No espaço tridimensional podemos definir $\theta_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta_k$ e $\eta_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\eta_k$. E como tem sido observado por Chakraborty [98], a simetria rotacional é quebrada em sistemas de mecânica quântica NC definidos em mais de duas dimensões. Na verdade, o vetor dual aponta para uma direção particular, portanto, violando a simetria $SO(3)$. No entanto, foi mostrado na literatura que esta simetria pode ser restaurada em uma álgebra de Hopf usando uma Drinfelds Twist, de tal forma que a ação twisted permanece invariante sob rotações [98, 99, 100].

De fato, as equações de coordenadas NC (5.19) podem ser escritas na forma de um vetor,

$$\widehat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \frac{1}{4\hbar}\mathbf{p} \times \boldsymbol{\theta}, \quad \widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \frac{1}{4\hbar}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\eta}. \quad (5.21)$$

Para facilitar os cálculos iremos assumir que $\boldsymbol{\theta} = (0, 0, \theta)$ e $\boldsymbol{\eta} = (0, 0, \eta)$, o que pode ser visto como uma rotação ou redefinição de coordenadas. Assim, as coordenadas NC de posição e momento tomarão a seguinte forma,

$$\widehat{x} = x - \frac{\theta}{4\hbar}p_y, \quad \widehat{y} = y + \frac{\theta}{4\hbar}p_x, \quad \widehat{z} = z, \quad (5.22)$$

and

$$\widehat{p}_x = p_x + \frac{\eta}{4\hbar}p_y, \quad \widehat{p}_y = p_y - \frac{\eta}{4\hbar}p_x, \quad \widehat{p}_z = p_z. \quad (5.23)$$

5.3 Quebra da simetria de gauge no espaço NC

Como vimos na introdução, uma das consequências do espaço NC é a quebra da simetria de gauge. De fato, a transformação de gauge no espaço NC é modificada e, portanto, a estrutura da teoria é muito diferente da teoria comutativa usual. De fato, sendo $\hat{\phi}$ e $\hat{\mathbf{A}}$, respectivamente, os potenciais escalar e vetorial, então a transformação de gauge no espaço NC pode ser representada por:

$$\phi \rightarrow \hat{\phi} = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \hat{\lambda}, \quad (5.24)$$

onde $\hat{\lambda}$ é uma função de x_i e p_i . Por outro lado, os campos eletromagnéticos $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ que são dados por

$$\hat{\mathbf{E}} = -\nabla \hat{\phi} - \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}, \quad (5.25)$$

os quais são invariantes perante (5.24).

Na mecânica quântica comutativa é exigido que os valores esperados se comportem sob uma transformação de gauge, de maneira análoga às grandezas clássicas correspondentes, ao modo que $\langle \mathbf{r} \rangle$ e $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ não devem mudar, ao passo que $\langle \mathbf{p} \rangle$ sim. Por outro lado, como veremos, na mecânica quântica NC tal invariância de gauge é violada.

Denotemos por $|\alpha\rangle$ o ket de estado no espaço comutativo e na presença de \mathbf{A} . Assim, o ket de estado no espaço NC para a mesma situação física quando

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \hat{\lambda}, \quad (5.26)$$

for usado no lugar de \mathbf{A} será denotado por $|\hat{\alpha}\rangle$. Aqui, $\hat{\lambda}$ é uma função de x_i e p_i . A exigência básica para a ocorrência da simetria de gauge é

$$\langle \alpha | \mathbf{r} | \alpha \rangle = \langle \hat{\alpha} | \mathbf{r} | \hat{\alpha} \rangle, \quad (5.27)$$

e

$$\langle \alpha | \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) | \alpha \rangle = \langle \hat{\alpha} | \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right) | \hat{\alpha} \rangle. \quad (5.28)$$

Adicionalmente, é exigido que a norma do ket seja preservada:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \hat{\alpha} | \hat{\alpha} \rangle, \quad (5.29)$$

o que leva a seguinte relação entre $|\hat{\alpha}\rangle$ e $|\alpha\rangle$:

$$|\hat{\alpha}\rangle = \hat{U} |\alpha\rangle, \quad (5.30)$$

com $\hat{U} = e^{\frac{-ie}{\hbar c}\hat{\lambda}}$ sendo o operador unitário.

As propriedades de invariância (5.27) e (5.28) serão garantidas se

$$\hat{U}^\dagger \mathbf{r} \hat{U} = \mathbf{r}, \quad (5.31)$$

e

$$\hat{U}^\dagger \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla \hat{\lambda} \right) \hat{U} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (5.32)$$

Usando (5.22) para um gauge de Coulomb (3.25) no espaço não comutativo, e considerando um campo magnético externo \mathbf{B} ao longo do eixo z , teremos:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{A} - \frac{B\theta}{8\hbar} (p_x \hat{i} + p_y \hat{j}), \quad (5.33)$$

que comparado com (5.26), têm-se:

$$\nabla \hat{\lambda} = -\frac{B\theta}{8\hbar} (\mathbf{p} - p_z \hat{k}). \quad (5.34)$$

A partir de (5.31) e (5.34), teremos:

$$\begin{aligned} e^{\frac{ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} x e^{\frac{-ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} &= e^{\frac{ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} \left[x, e^{\frac{-ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} \right] + x \\ &= e^{\frac{ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \left(e^{\frac{-ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} \right) + x \\ &= x \left(1 - \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

e de forma análoga

$$e^{\frac{ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} y e^{\frac{-ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} = y \left(1 - \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right), \quad (5.36)$$

$$e^{\frac{ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} z e^{\frac{-ie}{\hbar c}\hat{\lambda}} = z, \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \mathbf{p} e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} &= e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \left[\mathbf{p}, e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \right] + \mathbf{p} \\ &= -e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} i\hbar \nabla \left(e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \right) + \mathbf{p} \\ &= \mathbf{p} \left(1 + \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right) - \frac{eB\theta}{8c\hbar} p_z \hat{k}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \mathbf{A} e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} = e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \left[\mathbf{A}, e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \right] + \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B}{2} e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \left(- \left[y, e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \right] \hat{i} + \left[x, e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \right] \hat{j} \right) \\
&= \left(1 - \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right) \mathbf{A},
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \nabla \hat{\lambda} e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} &= -\frac{B\theta}{8\hbar} e^{\frac{ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \left(\mathbf{p} - p_z \hat{k} \right) e^{\frac{-ie\hat{\lambda}}{\hbar c}} \\
&= -\frac{B\theta}{8\hbar} \left[\mathbf{p} \left(1 + \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right) - p_z \hat{k} \right],
\end{aligned} \tag{5.40}$$

o que leva em,

$$\hat{U}^\dagger \mathbf{r} \hat{U} = \left(1 - \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right) \mathbf{r} + \frac{eB\theta}{8c\hbar} z \hat{k}, \tag{5.41}$$

e

$$\hat{U}^\dagger \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla \hat{\lambda} \right) \hat{U} = \left[\mathbf{p} \left(1 + \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right) + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right] \left(1 - \frac{eB\theta}{8c\hbar} \right). \tag{5.42}$$

Comparando (5.41) e (5.42) com (5.31) e (5.32) têm-se que a simetria de gauge é violada no espaço não comutativo. Por outro lado, se fizermos a mesma análise para o espaço de momento veremos que tal violação da simetria de gauge não ocorre, e isto está associado ao fato de que a não comutatividade de momento não modifica os potenciais escalar ou vetorial.

5.4 Mecânica Clássica no espaço Não Comutativo

De fato, no espaço NC os operadores de posição \hat{x}_i e momento \hat{p}_i satisfazem as relações de comutação (5.2). Aqui usaremos parâmetro $\hbar\Theta_{ij}$ em vez de θ_{ij} , então considerando que $\hbar\Theta_{ij}$ têm dimensão de área e além disso supondo que tal parâmetro seja da ordem da área de Planck, $l_p^2 = \frac{\hbar G}{c^3}$, logo o tensor Θ_{ij} é da ordem de $\frac{G}{c^3}$. Desta forma, no limite clássico \hbar não aparecerá o que está de acordo com este tipo de limite. A versão clássica de (5.2) pode ser obtida através do seguinte mapeamento via colchetes de Poisson,

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \rightarrow \{A, B\}, \tag{5.43}$$

onde A e B são duas funções arbitrárias. Então, no limite clássico das equações (5.2), teremos

$$\begin{aligned}
\{x_i, x_j\} &= \Theta_{ij}, \\
\{x_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \\
\{p_i, p_j\} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Os colchetes de Poisson (5.44) satisfazem as regras de Leibniz e a identidade de Jacobi. Então, a forma geral dos colchetes de Poisson para esta versão não comutativa de mecânica clássica pode ser definida por [101]

$$\begin{aligned}\{A, B\} &= \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_j} \right) \{x_i, p_j\} + \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial x_j} \{x_i, x_j\} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \{p_i, p_j\} \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) + \Theta_{ij} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial x_j}.\end{aligned}\quad (5.45)$$

Agora, se considerarmos o seguinte Hamiltoniano bidimensional

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x), \quad (5.46)$$

então, as equações de movimento correspondentes para esta estrutura simplética serão dadas por

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m} + \Theta_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad (5.47)$$

e

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (5.48)$$

ou seja,

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + m\Theta_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_k, \quad (5.49)$$

é a segunda lei de Newton com uma correção em Θ_{ij} devido a variação do potencial externo.

Capítulo 6

Implementação do Efeito de Não Comutatividade

Neste capítulo implementaremos a teoria do espaço de fase NC para o efeito Zeeman anômalo no átomo de hidrogênio e para uma folha de grafeno submetida a um campo magnético de fundo. Ainda neste capítulo implementaremos o formalismo do espaço não comutativo para o movimento Browniano.

6.1 Efeito Zeeman anômalo no espaço de fase NC

6.1.1 Formulação do Hamiltoniano

Para implementar a não comutatividade do espaço de fase no hamiltoniano de Dirac (3.2) usaremos o mapeamento (5.19) após substituição do produto usual de funções pelo produto estrela (5.13). Então, até primeira ordem em θ_{lm} , teremos:

$$\begin{aligned} H(\hat{x}, \hat{p}) \star \Psi(\hat{x}) &= H(x, \hat{p})\Psi(\hat{x}) + \frac{i}{2}\theta_{lm}\partial_l \left[c\alpha_i \left(\hat{p}_i + \frac{e}{c}A_i(x) \right) + \beta m_e c^2 - e\phi(x) \right] \partial_m \Psi(x) \\ &= H(x, \hat{p})\Psi(\hat{x}) + \frac{ie}{2}\theta_{lm}\partial_l [\alpha_i A_i(x) - \phi(x)] \partial_m \Psi(x). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Doravante, usaremos a equação (5.19) em \hat{p}_i para obter o hamiltoniano em função das coordenadas comutativas até primeira ordem em θ_{lm} e η_{lm} :

$$H(x, p)\Psi(x) = \left[c\alpha_i \left(p_i + \frac{1}{2\hbar}\eta_{ij}x_j + \frac{e}{c}A_i \right) + \beta m_e c^2 - e\phi + \frac{ie}{2}\theta_{lm}\partial_l (\alpha_i A_i(x) - \phi(x)) \partial_m \right] \Psi(x), \quad (6.2)$$

que também pode ser representado por,

$$\hat{H} = c\alpha \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{1}{4\hbar} \mathbf{r} \times \eta + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta m_e c^2 - e\phi - \frac{e}{4\hbar} [\nabla(\alpha \cdot \mathbf{A} - \phi) \times \mathbf{p}] \cdot \theta. \quad (6.3)$$

O limite não relativístico da equação de Dirac (6.3) pode ser obtido através da transformação unitária de Foldy-Wouthuysen (3.17):

$$\hat{H}_{FW} = \beta \left(m_e c^2 + \frac{\hat{\varphi}^2}{2m_e c^2} \right) + \hat{\varepsilon} - \frac{1}{8m_e^2 c^4} [\hat{\varphi}, [\hat{\varphi}, \hat{\varepsilon}]], \quad (6.4)$$

onde

$$\hat{\varphi} = c\alpha \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{1}{4\hbar} \mathbf{r} \times \eta + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{e}{4\hbar} [\nabla(\alpha \cdot \mathbf{A}) \times \mathbf{p}] \cdot \theta, \quad \hat{\varepsilon} = -e\phi + \frac{e}{4\hbar} [\nabla\phi \times \mathbf{p}] \cdot \theta. \quad (6.5)$$

Retendo somente termos da ordem de $(m_e c^2)^{-1}$ em (6.4), obtêm-se o seguinte limite não relativístico da equação de Dirac no espaço de fase NC:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\varphi}^2}{2m_e c^2} - e\phi - \frac{e}{4\hbar} [\nabla(\alpha \cdot \mathbf{A} - \phi) \times \mathbf{p}] \cdot \theta. \quad (6.6)$$

Este ultimo resultado é similar ao resultado obtido por Adorno et al.[10]. De fato, o termo em θ na equação (6.6) quebra a simetria de gauge. Então, a velocidade do elétron não é um invariante de gauge no espaço de fase NC. Contudo, tomando $\theta = 0$, a simetria de gauge será preservada. De fato, considerando somente o espaço de momento NC, a equação (6.6) ficará

$$\hat{H}_{\theta=0} = \frac{1}{2m_e} \left[\sigma \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{1}{4\hbar} \mathbf{r} \times \eta + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (6.7)$$

Usando a identidade (3.21), teremos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\theta=0} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + \frac{(\mathbf{r} \times \eta)^2}{32m_e \hbar^2} + \frac{1}{8m_e \hbar} (\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \times \eta) + (\mathbf{r} \times \eta) \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m_e c^2} - \frac{e^2}{r} \\ &+ \frac{e}{2m_e c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e}{4m_e c \hbar} (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{r} \times \eta)) + \frac{ie}{2m_e c} \sigma \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \\ &+ \frac{i}{8m_e \hbar} \sigma \cdot [\mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \eta) + (\mathbf{r} \times \eta) \times \mathbf{p}] \end{aligned} \quad (6.8)$$

mas,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \psi &= -i\hbar \nabla(\mathbf{A}\psi) - i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi \\ &= -i\hbar (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi - i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi - i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Escolhendo o gauge de Coulomb, temos:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \psi = -2i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$$

$$= (2\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})\psi, \quad (6.10)$$

temos ainda,

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p})\psi &= \sigma \cdot [-i\hbar\nabla \times (\mathbf{A}\psi) - i\hbar\mathbf{A} \times \nabla\psi] \\ &= \sigma \cdot [-i\hbar((\nabla \times \mathbf{A})\psi + (\nabla\psi) \times \mathbf{A}) - i\hbar\mathbf{A} \times \nabla\psi] \\ &= -i\hbar\sigma \cdot \mathbf{B}\psi, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \times \eta) + (\mathbf{r} \times \eta) \cdot \mathbf{p})\psi &= -i\hbar\nabla((\mathbf{r} \times \eta)\psi) - i\hbar(\mathbf{r} \times \eta) \cdot \nabla\psi \\ &= -i\hbar(\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \eta))\psi - i\hbar(\mathbf{r} \times \eta) \cdot \nabla\psi - i\hbar(\mathbf{r} \times \eta) \nabla\psi \end{aligned} \quad (6.12)$$

e, usando $\eta = (0, 0, \eta)$ teremos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \times \eta) + (\mathbf{r} \times \eta) \cdot \mathbf{p})\psi &= -2i\hbar(\mathbf{r} \times \eta) \nabla\psi \\ &= 2(\mathbf{r} \times \eta) \cdot \mathbf{p}\psi \\ &= -2\eta L_z\psi, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma \cdot [\mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \eta) + (\mathbf{r} \times \eta) \times \mathbf{p}]\psi &= \sigma \cdot [-i\hbar\nabla \times ((\mathbf{r} \times \eta)\psi) - i\hbar(\mathbf{r} \times \eta) \times \nabla\psi] \\ &= -i\hbar\sigma \cdot (\nabla \times (\mathbf{r} \times \eta))\psi \\ &= 2i\hbar\eta\sigma_z\psi. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Considerando o campo magnético uniforme e orientado ao longo da direção positiva do eixo z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, teremos o seguinte potencial vetor,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right). \quad (6.15)$$

Assim, o hamiltoniano (6.8) pode ser reescrito como,

$$\hat{H}_{\theta=0} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + \frac{m_e\tilde{\omega}^2}{2}(x^2 + y^2) - \omega[aL_z + bS_z] - \frac{e^2}{r}, \quad (6.16)$$

onde

$$\tilde{\omega} = -\frac{eB}{2m_e c} \left(1 - \frac{\eta c}{2eB\hbar}\right), \quad \omega = -\frac{eB}{2m_e c}, \quad (6.17)$$

e

$$a = 1 - \frac{\eta c}{2eB\hbar}, \quad b = 2 \left(1 - \frac{\eta c}{2eB\hbar}\right). \quad (6.18)$$

De forma análoga ao hamiltoniano comutativo (3.26), podemos desprezar o termo quadrático $\tilde{\omega}^2(x^2 + y^2)$. Então, o hamiltoniano (6.16) pode ser representado pelos seguintes termos:

$$\hat{H}_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r}, \quad (6.19)$$

$$\hat{H}_B = -\omega [aL_z + bS_z]. \quad (6.20)$$

O hamiltoniano (6.19) descreve o elétron na presença do potencial de Coulomb e livre de efeitos de não comutatividade do espaço de fase, e o hamiltoniano (6.20) descreve o efeito Zeeman anômalo contendo coreções do espaço de momento não comutativo.

6.1.2 Correção para o espectro Zeeman

Assim como no caso comutativo, no limite de campo magnético externo fraco, o termo Zeeman deve ser tratado como uma pequena perturbação. Assim, pela teoria de perturbação de primeira ordem, têm-se

$$\begin{aligned} \Delta \hat{E}_B &= \langle nlsjm_j | \hat{H}_B | nlsjm_j \rangle \\ &= -\omega [a \langle L_z \rangle + b \langle S_z \rangle] \end{aligned} \quad (6.21)$$

e, levando em conta (3.30) e (3.31), teremos

$$\Delta \hat{E}_B = -\tilde{\omega} \hbar m_j \tilde{g}, \quad (6.22)$$

com

$$\tilde{g} = \frac{j(j+1)(a+b) + s(s+1)(b-a) + l(l+1)(a-b)}{2j(j+1)} \quad (6.23)$$

sendo o fator de Landé no espaço de momento NC. Quando $\eta = 0$, o fator \tilde{g} retorna para o caso comutativo usual.

6.1.3 Fatores de Landé orbital e de spin no Espaço de Momento NC

Nesta seção obteremos os fatores g orbital e de spin para o elétron. Para o caso de momento puramente orbital, $j = l$ e $s = 0$, a partir de (6.23), teremos:

$$\tilde{g}_l = 1 - \frac{\eta c}{2eB\hbar}. \quad (6.24)$$

O segundo termo em (6.24) reflete a não comutatividade do espaço de momento. De fato, existem razões tanto experimental quanto teórica para sugerir que ao se medir fator g orbital com um alto nível de precisão, ele não será exatamente igual a 1[102]. Doravante, este resultado pode ser justificado pela medida experimental de Kusch-Foley[103]. Obviamente, quando $\eta = 0$, então $\tilde{g}_l = g_l = 1$, e nosso resultado volta para o caso comutativo usual. Isolando o parâmetro NC em (6.24), teremos

$$\eta = \frac{2eB\hbar}{c} |\Delta\tilde{g}_l|. \quad (6.25)$$

onde $\Delta\tilde{g}_l = \tilde{g}_l - 1$.

Para o caso de momento puramente de spin, $j = s$ e $l = 0$, teremos:

$$\tilde{g}_s = 2 - \frac{\eta c}{eB\hbar}. \quad (6.26)$$

Este resultado pode ser justificado pela precisão experimental do fator g de spin, o qual nos últimos anos têm sido medido com uma precisão incomparável, sendo ao lado da constante de estrutura fina uma das constantes físicas mais bem testadas de toda a ciência[93]. Isolando o parâmetro NC em (6.26), teremos:

$$\eta = \frac{2eB\hbar}{c} |\Delta\tilde{g}_s| \quad (6.27)$$

onde $\Delta\tilde{g}_s = \frac{\tilde{g}_s - 2}{2}$.

6.1.4 Fatores de Landé e o efeito de Não Comutatividade

Considerando as recentes medidas de alta precisão dos fatores g e o experimento clássico de Kusch e Foley[103] que determinaram $(\delta_s - 2\delta_l)$ da relação dos fatores g dos estados atômicos do Ga e Na (obtidos a partir de seus espectros Zeeman), tem sido possível concluir que o fator g orbital do elétron é diferente de seu valor clássico $g_l = 1$ [102]. Um valor provável do fator g orbital é $g_l = 1 - \delta_l$ onde

$\delta_l = (0,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$. Consequentemente, usando a precisão relativa $|\Delta\tilde{g}_l| \lesssim 10^{-5}$, no limite de um campo magnético fraco, $B \sim 10^3 G$, obteremos

$$\eta \lesssim 3,4 \cdot 10^{-59} kg^2 m^2 s^{-2} \quad (6.28)$$

ou melhor,

$$\sqrt{\eta} \lesssim 11 \frac{meV}{c}. \quad (6.29)$$

Existe uma discrepância de quatro ordens de magnitude entre o valor do parâmetro NC em (6.29) e aquele obtido da transição hiperfina no átomo de hidrogênio[72]. De fato, há duas razões pelas quais isso ocorre. Primeiro, a determinação experimental da transição hiperfina no átomo de hidrogênio é um dos resultados experimentais mais precisos de toda a física. Segundo, apenas o trabalho experimental de Kusch e Foley têm considerado a possibilidade de um fator de Landé orbital diferente de 1 para o elétron, o que diminui drasticamente a possibilidade de obter medidas precisas para η a partir de medidas de g_l .

Para estimar um contorno para o parâmetro não comutativo a partir de (6.27), pode-se usar o valor experimental para o fator g de spin do elétron. Neste caso, muitas medidas precisas do fator g_s do elétron foram obtidos na literatura, por exemplo, o valor $\frac{g_s}{2} = 1,00115965218073(28)$ foi obtido por Hanneke[93]. De fato, este valor concorda com previsões da eletrodinâmica quântica para esta quantidade até o erro experimental. Desta forma, usando a precisão relativa $\Delta\tilde{g}_s \lesssim 10^{-14}$, teremos

$$\eta \lesssim 3,4 \cdot 10^{-68} kg^2 m^2 s^{-2}, \quad (6.30)$$

ou melhor,

$$\sqrt{\eta} \lesssim 0,34 \frac{\mu eV}{c}. \quad (6.31)$$

Este resultado é melhor que um dos limites mais precisos atualmente para η , obtido na referência [72], e constitui um contorno muito preciso para o parâmetro de não comutatividade de momento.

6.1.5 Correção Não Comutativa para Constante de Planck

Comparando as equações (5.1) e (5.20), observa-se que as equações de transformação linear (5.22) e (5.23) levam ao surgimento de uma constante de Planck efetiva,

$$\hbar_{eff} = \hbar(1 + \xi), \quad (6.32)$$

onde

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{y}_x] = i\hbar \left(1 + \frac{\theta\eta}{16\hbar^2} \right), \quad (6.33)$$

então,

$$\xi = \frac{\eta\theta}{16\hbar^2}. \quad (6.34)$$

O contorno (6.30) implica que se, por exemplo, $\theta \lesssim (6\text{GeV})^{-2}$ [65], então $\frac{\eta\theta}{\hbar^2} \lesssim 3,3 \cdot 10^{-34}$. De fato, este resultado indica que efeitos não comutativos podem ser 10 ordens de magnitude menor do que o discutido no contexto do Poço Quântico Gravitacional Não Comutativo $\left(\frac{\eta\theta}{4\hbar^2} \lesssim 10^{-24}\right)$ [70]. Além disso, as modificações introduzidas pela não comutatividade no valor de \hbar são pelo menos 26 ordens de magnitude menor que seu valor, o qual é conhecido com uma precisão de cerca de 10^{-9} [104]. Consequentemente, o modelo não comutativo que temos considerado neste trabalho é consistente com resultados experimentais da mecânica quântica ordinária.

6.2 Grafeno no espaço de fase NC

6.2.1 Folha de grafeno em um campo magnético constante no espaço de fase NC

No espaço de fase NC o acoplamento mínimo (2.19) pode ser representado como segue,

$$\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}}, \quad (6.35)$$

onde $\hat{\mathbf{A}}$ é o potencial vetor NC dado por $\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}$. Então, as relações de comutação entre as coordenadas do momento cinético NC será,

$$[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = \frac{-ie\hbar}{c} \hat{F}_{xy} = \frac{-i\tilde{\hbar}^2}{\tilde{l}_B^2}, \quad (6.36)$$

onde $\hat{F}_{xy} = \lambda B$ é o comprimento de campo NC. Por outro lado, $\tilde{\hbar}$ e \tilde{l}_B são a constante de Planck e o comprimento magnético deformado,

$$\tilde{\hbar} = \lambda\hbar, \quad \tilde{l}_B = \sqrt{\lambda}l_B, \quad (6.37)$$

com $\lambda = 1 + \frac{\eta\theta}{16\hbar^2} - \frac{Be\theta}{8c\hbar} - \frac{\eta c}{2eB\hbar}$. Os operadores escada poderão ser definidos como segue,

$$\hat{a} = \frac{\tilde{l}_B}{\sqrt{2\tilde{\hbar}}}(\hat{\Pi}_x - i\hat{\Pi}_y), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\tilde{l}_B}{\sqrt{2\tilde{\hbar}}}(\hat{\Pi}_x + i\hat{\Pi}_y), \quad (6.38)$$

cujos momentos cinéticos serão dados por,

$$\hat{\Pi}_x = \frac{\tilde{\hbar}}{\sqrt{2\tilde{l}_B}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{\Pi}_y = \frac{\tilde{\hbar}}{i\sqrt{2\tilde{l}_B}}(-\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (6.39)$$

Reescrevendo o hamiltoniano (2.14) como em (2.24), para os pontos K , teremos:

$$\hat{H}_K = \tilde{w}'\hbar \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.40)$$

com $\tilde{w}' = \frac{\sqrt{2}v_f}{\tilde{l}_B}$ sendo a frequência de cíclotron NC. Resolvendo a equação (2.18) para o ponto K , teremos os seguintes autovalores de energia

$$\hat{E}_K = \pm \frac{\tilde{\hbar}v_f\sqrt{2|n|}}{\tilde{l}_B}. \quad (6.41)$$

Da mesma forma que no caso comutativo, é possível definir um análogo ao centro de movimento de cíclotron,

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{R}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}, \quad (6.42)$$

e, de forma análoga a (2.28) teremos

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\Pi}}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{d\hat{\boldsymbol{\eta}}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (6.43)$$

ou seja,

$$\hat{\eta}_x = \frac{c\hat{\Pi}_y}{eB}, \quad \hat{\eta}_y = \frac{-c\hat{\Pi}_x}{eB}, \quad (6.44)$$

que juntamente com a relação (6.36), têm-se

$$[\hat{\eta}_x, \hat{\eta}_y] = -i\tilde{l}_B^2, \quad (6.45)$$

e considerando $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{X}, \hat{Y})$ e $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_x, \hat{\eta}_y)$, teremos:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = [\hat{x}, \hat{y}] - [\hat{x}, \hat{\eta}_y] - [\hat{\eta}_x, \hat{y}] + [\hat{\eta}_x, \hat{\eta}_y] \approx i\tilde{l}_B^2. \quad (6.46)$$

Desta forma, $[\hat{X}, \hat{Y}] \approx -[\hat{\eta}_x, \hat{\eta}_y] = i\tilde{l}_B^2$ é o caso geral das relações (2.30) e (2.31). De fato, esta relação sugere que um sistema físico em um campo magnético de fundo intenso mas com coordenadas espaciais comutativas ($[x_i, x_j] = 0$) é totalmente equivalente ao mesmo sistema sem o campo magnético de fundo mas com coordenadas espaciais não comutativas ($[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$), cujo mapeamento é dado por $\theta \propto \frac{\hbar c}{eB}$. Tal mapeamento têm sido confirmado para inúmeros fenômenos, tais como o problema de Landau, o efeito Hall quântico e o efeito Zeeman anômalo [34, 37, 57, 77, 9]. De fato, neste caso é admitido que a direção do campo magnético coincide com a direção do parâmetro θ . Então, $B \rightarrow \infty$ seria o limite comutativo.

Analogamente ao caso comutativo, o raio de cíclotron quantizado será dado por

$$\hat{r}_n = \frac{|\hat{E}_K|}{\frac{e}{c} B v_f} = \sqrt{2n\tilde{l}_B}, \quad (6.47)$$

e, portanto, a área ocupada por uma órbita de cíclotron quantizada será

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} = \pi\hat{r}_{n+1}^2 - \pi\hat{r}_n^2 = 2\pi\tilde{l}_B^2, \quad (6.48)$$

o que leva a seguinte expressão para a densidade de fluxo NC,

$$\tilde{n}_B = \frac{1}{2\pi\tilde{l}_B^2} = \frac{eB}{2\pi\hbar c} \quad (6.49)$$

e, usando (2.38) teremos o seguinte resultado para a condutividade Hall NC

$$\hat{\sigma}_H = g_e e \frac{\partial \tilde{n}_B}{\partial B} \Big|_{E=E_f, \theta=0} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1 - \frac{\eta c}{eB\hbar}}{\left(1 - \frac{\eta c}{2eB\hbar}\right)^2} g_e = \frac{e^2}{\hbar c} \left(1 - \frac{\eta^2 c^2}{4e^2 B^2 \hbar^2}\right) g_e + O(\eta^3), \quad (6.50)$$

com $g_e = 4(\nu + \frac{1}{2})$. De fato, fizemos $\theta = 0$ a fim de preservar a invariância de gauge.

6.2.2 Fenomenologia do efeito de não comutatividade espacial

Na referência [105] foi usado espectroscopia de infravermelho na presença de um campo magnético para estudar os níveis de Landau de uma folha de grafeno. Os autores obtiveram um gráfico da energia em função de \sqrt{B} , dando a seguinte energia $E_K = \pm(176 \pm 3)meV$ associada a um campo magnético de $B = 18 \cdot 10^4 G$ para transições de buraco ($n = -1$ para $n = 0$) e elétron ($n = 0$ para $n = 1$). Assim, a partir da relação (6.41), o shift NC para estes níveis de Landau será,

$$\Delta \widehat{E}_K = \widehat{E}_K^{\theta=0} - E_K = \pm \frac{\hbar v_f \sqrt{2}}{l_B} \left(-\frac{\eta l_B^2}{4\hbar^2} - \frac{\eta^2 l_B^4}{32\hbar^4} \right) + O(\eta^3), \quad (6.51)$$

onde temos considerado $\theta = 0$ a fim de preservar a invariância de gauge. Então, isolando o parâmetro NC η , teremos

$$\eta = \frac{4\hbar^2}{l_B^2} |\delta \widehat{E}_K|, \quad (6.52)$$

onde $\delta \widehat{E}_K = \frac{\Delta \widehat{E}_K}{E_K}$ é a precisão experimental na energia. Assim, usando $c = 2,99792 \cdot 10^{10} cm/s$, $\hbar = 1,05457 \cdot 10^{-27} ergs \cdot s$, $e = 4,80654 \cdot 10^{-10} stc$, $B \approx 18 \cdot 10^4 G$ e $|\delta \widehat{E}_K| = \frac{3}{176}$, teremos

$$\eta \lesssim 2,074 \cdot 10^{-53} kg^2 m^2 s^{-2}, \quad (6.53)$$

ou melhor,

$$\sqrt{\eta} \lesssim 8,5 \frac{eV}{c}. \quad (6.54)$$

Este resultado é muito maior que os limites mais precisos obtidos na literatura para a maioria dos experimentos. No entanto, isto indica que devido sua estrutura cristalina bidimensional o grafeno se assemelha ao fenômeno do problema de Landau, onde os efeitos de não comutatividade são os maiores entre a maioria dos fenômenos físicos tratados na literatura.

A partir da expressão (6.50) isolando o parâmetro NC η , teremos

$$\eta = \frac{2\hbar^2}{l_B^2} \sqrt{|\delta \widehat{\rho}|}, \quad (6.55)$$

onde $\delta \widehat{\rho} = \frac{\widehat{\rho}_H - \rho_H}{\rho_H}$ é a precisão experimental na resistividade ($\rho_H = \frac{1}{\sigma_H}$). Para estimar um contorno para θ podemos usar a precisão experimental para a resistividade Hall. Neste sentido, muitos valores

de $\delta\hat{\rho}$ foram obtidos na literatura, por exemplo, o valor $\delta\hat{\rho} = 15 \cdot 10^{-6}$ foi obtido por Novoselov, Geim e colaboradores[106] através do grafeno. Então, a partir de (6.55), para $B \sim 14 \cdot 10^4 G$, teremos

$$\eta \lesssim 1,836 \cdot 10^{-54} m^2 kg^2 s^{-2}, \quad (6.56)$$

ou melhor,

$$\sqrt{\eta} \lesssim 2,5 \frac{eV}{c}. \quad (6.57)$$

De fato, mesmo considerando que na literatura as precisões experimentais na resistividade Hall são maiores que as precisões experimentais na energia, observa-se que a ordem de grandeza para η se mantém a mesma. O que indica que no grafeno os efeitos de não comutatividade de momento são da ordem de $\frac{eV}{c}$.

6.3 Movimento Browniano no espaço Não Comutativo

De fato, a partir das equações (5.47) e (5.48) temos que o efeito de não comutatividade atua na evolução temporal das coordenadas de posição mas não na evolução temporal das coordenadas de momento linear. Então, no espaço NC a equação de Langevin permanecerá inalterada,

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{-\gamma}{m} \mathbf{v}(t) + \frac{\xi(t)}{m}. \quad (6.58)$$

Então, a solução de (6.58) permanece igual ao caso comutativo usual,

$$v_i(t) = v_{0i} e^{\frac{-\gamma t}{m}} + \frac{1}{m} \int_0^t ds e^{\frac{-\gamma}{m}(t-s)} \xi_i(s), \quad (6.59)$$

que juntamente com (4.4) nos dará a seguinte média para a velocidade quadrática,

$$\begin{aligned} \langle [v_i(t)]^2 \rangle &= v_{0i}^2 e^{\frac{-2\gamma t}{m}} + \frac{1}{m^2} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 e^{\frac{-\gamma}{m}(2t-s_1-s_2)} \xi_i(s_1) \xi_i(s_2) \\ &= v_{0i}^2 e^{\frac{-2\gamma t}{m}} + \frac{g}{m} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 e^{\frac{-\gamma}{m}(2t-s_1-s_2)} \delta(s_1 - s_2) \\ &= \frac{g}{2m\gamma} + \left(v_{0i}^2 - \frac{g}{2m\gamma} \right) e^{\frac{-2\gamma t}{m}}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

e aplicando a condição de equilíbrio térmico ($\frac{\gamma t}{m} \gg 1$), teremos

$$\langle [v_i(t)]^2 \rangle = \frac{g}{2m\gamma}, \quad (6.61)$$

o que mostra que a relação de Einstein (4.12) ficará inalterada.

Usando (5.47) e assumindo $\xi_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$ como uma força externa e aleatória, teremos

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(t) - \Theta_{ij}\xi_j(t). \quad (6.62)$$

Em $t = 0$ teremos $x_i(0) = x_{0i}$ e $v_i(0) = v_{0i}$, logo a solução de (6.62) poderá ser facilmente obtida

$$x_i(t) = x_{0i} + \frac{mv_{0i}}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma t}{m}}\right) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t ds \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)}\right) \xi_i(s) - \Theta_{ij} \int_0^t ds \xi_j(s), \quad (6.63)$$

implicando na seguinte variância

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \langle [x_i(t)]^2 \rangle - \langle x_i(t) \rangle^2 \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s_1)}\right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s_2)}\right) \langle \xi_i(s_1)\xi_i(s_2) \rangle \\ &+ \Theta_{ij}^2 \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \langle \xi_j(s_1)\xi_j(s_2) \rangle \\ &- \frac{2\Theta_{ij}}{\gamma} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s_1)}\right) \langle \xi_i(s_1)\xi_j(s_2) \rangle \\ &= \frac{g}{\gamma^2} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s_1)}\right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s_2)}\right) \delta(s_1 - s_2) \\ &+ \Theta_{ij}^2 g \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \delta(s_1 - s_2) \\ &= t \left(\frac{1}{\gamma^2} + \Theta_{ij}^2 \right) g - \frac{3mg}{2\gamma^3} - \frac{mg}{2\gamma^3} \left(e^{-\frac{2\gamma t}{m}} - 4e^{-\frac{\gamma t}{m}} \right). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Então, assim como em (4.13), para $\frac{\gamma t}{m} \gg 1$, a expressão (6.64) tomará a seguinte forma,

$$\hat{\sigma}^2 \rightarrow \left(\frac{1}{\gamma^2} + \Theta_{ij}^2 \right) gt \equiv 2\hat{D}_i t, \quad (6.65)$$

onde

$$\hat{D}_i = \frac{g}{2\gamma^2} \left(1 + \Theta_{ij}^2 \gamma^2 \right), \quad (6.66)$$

é o coeficiente de difusão na direção i . O segundo termo em (6.66) representa o efeito de não comutatividade espacial sobre o coeficiente de difusão. Para $\Theta_{ij} = 0$ têm-se o caso comutativo usual (4.15).

Uma das informações mais importantes ao considerar o movimento Browniano em um espaço não comutativo será apresentada a seguir. Das equações (4.4) e (6.63) encontramos que a natureza não comutativa do espaço induz uma correlação de variância não nula em diferentes tempos,

$$\hat{\sigma}_{xy}^2 = \langle x(t_1)y(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle y(t_2) \rangle \quad (6.67)$$

de onde temos,

$$\langle x(t_1)y(t_2) \rangle = x_0y_0 + \frac{mv_{0y}x_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_2}\right) + \frac{m^2}{\gamma^2} v_{0x}v_{0y} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_1}\right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Theta_{yx}}{\gamma} \int_0^{t_1} ds' \int_0^{t_2} ds'' \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t_1-s')}\right) \langle \xi_x(s') \xi_x(s'') \rangle \\
& - \frac{\Theta_{xy}}{\gamma} \int_0^{t_2} ds'' \int_0^{t_1} ds' \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2-s'')}\right) \langle \xi_y(s'') \xi_y(s') \rangle \\
& + \frac{mv_{0x}y_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_1}\right),
\end{aligned} \tag{6.68}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle x(t_1) \rangle \langle y(t_2) \rangle & = x_0 y_0 + \frac{mv_{0y}x_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_2}\right) + \frac{mv_{0x}y_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_1}\right) \\
& + \frac{m^2}{\gamma^2} v_{0x} v_{0y} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_1}\right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_2}\right),
\end{aligned} \tag{6.69}$$

então, segue-se que

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{xy}^2 & = \frac{g\Theta_{xy}}{\gamma} \left[\int_0^{t_1} ds' \int_0^{t_2} ds'' \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t_1-s')}\right) \delta(s' - s'') \right] \\
& + \frac{g\Theta_{yx}}{\gamma} \left[\int_0^{t_2} ds'' \int_0^{t_1} ds' \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2-s'')}\right) \delta(s'' - s') \right] \\
& = \frac{\Theta_{yx}g}{\gamma} (t_2 - t_1) + \frac{mg\Theta_{yx}}{\gamma^2} \left(e^{-\frac{\gamma}{m}t_2} - e^{-\frac{\gamma}{m}t_1} \right).
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Assim, no equilíbrio termodinâmico, para $\frac{\gamma t_2}{m} \gg 1$ e $\frac{\gamma t_1}{m} \gg 1$, teremos

$$\hat{\sigma}_{xy}^2 = \frac{\Theta_{yx}g}{\gamma} (t_2 - t_1), \tag{6.71}$$

onde g é uma constante que pode ser obtida, por exemplo, a partir do teorema da equipartição. A expressão acima mostra que a correlação temporal das coordenadas espaciais têm um valor finito que é linearmente crescente com o tempo e inversamente proporcional ao coeficiente de viscosidade. Tal resultado não representa uma correção, mas sim um novo parâmetro físico que mostra o efeito de não comutatividade espacial em duas dimensões para um fenômeno fundamentalmente clássico. De fato, esse efeito pode ser corroborado por medidas experimentais que confirmem (6.71) para tempos muito longos. Esse efeito de não comutatividade seria um tipo de deformação na trajetória da partícula clássica.

6.3.1 Fenomenologia do efeito de não comutatividade espacial

A partir do teorema da equipartição conseguimos obter (4.12) que é um valor possível para g . Então, a relação (6.71) pode ser reescrita como

$$\hat{\sigma}_{xy}^2 = 2\Theta_{yx}k_B T (t_2 - t_1). \tag{6.72}$$

Na literatura os valores do parâmetro $\sqrt{\theta}$ variam da escala nanométrica ($1nm = 10^{-7}cm$) até o comprimento de Planck ($l_P = 10^{-33}cm$), que em unidades de área fica $10^{-66}cm^2 \leq \theta \leq 10^{-14}cm^2$.

No entanto, o parâmetro não comutativo que estamos trabalhando não tem dimensão de área, mas sim de $\frac{\text{tempo}}{\text{massa}}$, já que o definimos como $\hbar\Theta$ para poder eliminar \hbar no limite clássico. De fato, $\hbar\Theta$ têm dimensão de área então Θ terá dimensão de $\frac{s}{g}$. Deste modo, os valores possíveis para Θ estão no intervalo $10^{-39}\frac{s}{kg} \leq \theta \leq 10^{13}\frac{s}{kg}$. Todavia, assumindo que o efeito de não comutatividade seja da ordem daqueles obtidos a partir do Lamb-shift no átomo de hidrogênio [65], ou seja, $\hbar\Theta \sim \theta_e = (6GeV)^{-2}$, então teremos $\Theta \sim 10^{-2}\frac{s}{g}$. Além disso, considerando $T = 300K$, $k_B = 1,38064 \cdot 10^{-27}cm^2 \cdot g \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$, e $t_2 - t_1 = 3,1536 \cdot 10^7s$, que é o intervalo de tempo de um ano, teremos

$$\hat{\sigma}_{xy}^2 = 2,61 \cdot 10^{-8}cm^2, \quad (6.73)$$

consequentemente,

$$\hat{\sigma}_{xy} = 1,6\mu m. \quad (6.74)$$

Sendo (6.74) da ordem de grandeza de fenômenos clássicos, então efeitos de não comutatividade possivelmente poderão ser detectados em várias plataformas experimentais de movimento Browniano.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

A primeira ideia de que o espaço-tempo poderia ser não comutativo foi proposta por Heisenberg em 1930, o qual sugeriu a introdução de relações de comutação para as coordenadas do espaço-tempo: surgia assim, a proposta das coordenadas não comutativas. Nos últimos anos o estudo da geometria não comutativa ganhou grande espaço no desenvolvimento das teorias de supercordas, nas propostas de violação das simetrias em física de partículas e campos, em teoria de gravitação quântica, e mais recentemente em matéria condensada através de fenômenos como o efeito Hall quântico e o efeito Aharonov-Bohm.

Nesta tese, investigamos alguns aspectos da fenomenologia do efeito de não comutatividade espacial e de momento na matéria condensada. Para tanto, abordamos três problemas principais, a saber, o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio, o efeito Hall quântico numa folha de grafeno e o movimento Browniano clássico. Sendo que dois primeiros foram tratados no formalismo do espaço de fase NC e este último no formalismo do espaço NC. Neste sentido, no capítulo 5 abordamos a origem da geometria não comutativa através do produto estrela, que é uma das ferramentas que relaciona uma função no espaço de fase NC ao espaço comutativo usual. Obtemos que o produto de duas funções em coordenadas não comutativas é deformado pelo produto estrela, o que leva ao mapeamento via Bopp's shift que é um dos mapeamentos possíveis. Contudo, existe uma desvantagem nesse tratamento, já que surgem relações de incerteza nas variáveis introduzidas pelo Bopp's shift, o que tornaria a interpretação da teoria mais difícil por introduzir nesta uma não localidade intrínseca. Um outro problema que surge são as quebras de simetria, e aqui destacamos duas. A primeira delas é a simetria rotacional que é naturalmente quebrada em teoria não comutativas definidas em mais de duas dimensões. Então,

para nós tal simetria é violada no efeito Zeeman anômalo. Neste sentido os geradores de rotações so se conservariam em direções privilegiadas definidas pelo parâmetro não comutativo. A segunda é a simetria de gauge, a qual é violada no espaço não comutativo devido a tendência do efeito de não comutatividade espacial em modificar os potenciais escalar e vetorial, tornando a calibragem dos potenciais não arbitrária.

No capítulo 6 implementamos o formalismo do espaço de fase NC no Hamiltoniano de Dirac para o átomo de hidrogênio, utilizando-se para tanto o produto estrela definido no espaço não comutativo associado ao Bopp's shift das coordenadas de momento. Assim, pelo limite não relativístico da equação de Dirac obtemos o Hamiltoniano do efeito Zeeman num espaço de momento não comutativo para que a simetria de gauge seja preservada. Então, através da teoria de perturbação em primeira ordem obtemos uma correção para o espectro Zeeman não comutativo, e assim chegamos numa expressão geral para os fatores de Landé orbital e de spin no espaço de momento não comutativo. Em relação ao fator de Landé puramente de spin sabemos que a mecânica quântica usual propõe que seu valor seja 2, no entanto aqui obtemos que seu valor deve ser ligeiramente diferente de 2, o que esta de acordo com as precisões experimentais da eletrodinâmica quântica. Todavia, nosso resultado mais surpreendente é em relação ao fator de Landé puramente orbital, o qual obtemos como sendo ligeiramente diferente de 1 num espaço de momento NC. E esta ligeira diferença pode estar fortemente associada a quebra da simetria rotacional. De fato, supor que o fator de Landé puramente orbital para o elétron não seja 1 é algo inédito pois nenhum trabalho na literatura até então propôs algum modelo teórico para justificar este fato. E talvez por este motivo não existam medidas experimentais atualizadas que justifiquem um $g_l \neq 1$, mas apenas os trabalhos de Kusch e Foley de 1947, os quais apontam nesse sentido. Por outro lado, quando impomos ao nosso modelo a precisão experimental do fator de Landé puramente de spin, o qual têm sido medido nos últimos anos com grande precisão, obtemos um limite superior para o parâmetro não comutativo de momento extremamente preciso, ou seja, $\sqrt{\eta} \lesssim 0,34\mu eV/c$. Tal resultado é atualmente um dos menores limites superior para o efeito de não comutatividade de momento da literatura e indica que efeitos não comutativos podem se tornar significantes em regimes de altas energias. No que segue, obtemos também uma correção do espaço de fase não comutativo para a constante de Planck com uma precisão de 26 ordens de magnitude menor que seu valor atualmente aceito. Consequentemente, o modelo não comutativo apresentado nesta tese é consistente com os dados experimentais da mecânica quântica usual.

O problema de uma folha de grafeno submetido a um campo magnético de fundo foi também

tratado no capítulo 6. De fato, os elétrons numa folha de grafeno têm comportamento relativístico, com a velocidade de fermi v_f fazendo o papel da velocidade da luz c . Neste caso o grafeno se comporta como se fosse uma versão mais lenta da eletrodinâmica quântica e isto ocorre porque sua constante de acoplamento é muito maior que a constante de estrutura fina da eletrodinâmica quântica, ou seja, $\alpha' = e^2/\hbar v_f = 2$ fazendo com que o grafeno não seja uma versão renormalizável. A não comutatividade do espaço de fase foi implementada no grafeno através do mapeamento via Bopp's shift. Então, através de uma diagonalização do Hamiltoniano não comutativo obtemos o espectro de energia associado aos níveis de Landau relativístico. De fato, já é conhecido a partir do espaço comutativo usual a ideia de que a posição do centro de movimento de cíclotron do elétron carrega incertezas. Estas incertezas estão associada a não comutatividade entre as coordenadas do momento cinético. Uma outra perspectiva seria a noção de que o campo magnético de fundo induz uma não comutatividade intrínseca nas coordenadas espaciais. De fato, um dos efeitos da não comutatividade do espaço de fase é a introdução de relações de incertezas que impossibilitam a localização pontual de qualquer partícula e não apenas a posição do centro de movimento de cíclotron. Uma outra consequência disso é que num espaço não comutativo existiria um possível acoplamento entre o efeito de não comutatividade espacial e o campo magnético de fundo, ou seja, $\Theta \propto \hbar c/eB$. De fato, isto sugere que um sistema físico em um campo magnético de fundo intenso mas com coordenadas espaciais comutativas seja isomórfico ao mesmo sistema sem o campo magnético de fundo mas com coordenadas espaciais não comutativas. De fato, o raio de cíclotron é modificado pelo espaço de fase não comutativo, levando a uma densidade de fluxo dependente dos parâmetros não comutativos e conseqüentemente existirá uma condutividade Hall deformada no espaço de momento não comutativo. Ao impormos as precisões experimentais do espectro de energia e da condutividade Hall obtemos, respectivamente, os seguintes limites superior para o parâmetro não comutativo de momento, $\sqrt{\eta} \lesssim 2,5eV/c$ e $\sqrt{\eta} \lesssim 8,5eV/c$. Tais resultados são de 6 a 7 ordens de magnitude maior que as estimações do efeito Zeeman anômalo. Uma das explicações possíveis para isto é a estrutura cristalina e bidimensional do grafeno onde os efeitos de não comutatividade seriam mais intensos, de forma análoga ao problema de Landau.

Ainda no capítulo 6 descrevemos o movimento Browniano bidimensional no espaço não comutativo. Para tanto, foi preciso primeiramente usar o mapeamento via colchetes de Poisson tendo em vista o fato de que o espaço não comutativo é um formalismo aplicado em sistemas quânticos, e neste caso o movimento Browniano é um fenômeno clássico. Sendo assim, obtemos a segunda lei de Newton em um espaço não comutativo com uma correção devido a variação do potencial externo. Então, usando as

equações de Langevin e a segunda lei de Newton num espaço não comutativo obtemos a solução para a posição e a velocidade da partícula Browniana e assim obtemos a velocidade quadrática média e a variância das posições. Neste sentido, pudemos obter o coeficiente de difusão no espaço não comutativo, com uma correção muito pequena devido ao parâmetro não comutativo ao quadrado. No entanto, nosso resultado mais relevante foi obtido ao calcularmos uma possível correlação de variância não nula entre as coordenadas espaciais. Tal correlação é linearmente crescente com o tempo e inversamente proporcional ao coeficiente de viscosidade. Trata-se de um resultado inédito, no sentido que definimos um novo parâmetro físico possível de ser estimado e assim confirmar possíveis efeitos de não comutatividade a partir de experimentos com o movimento Browniano. Vale lembrar que o movimento Browniano é um fenômeno que exhibe auto similaridade em qualquer escala de comprimento, portanto experimentos macroscópicos podem ser realizados em longos tempos de observação e os resultados seriam os mesmos se o experimento envolvesse a escala microscópica. Além disso, não precisamos nós preocupar com as perdas de coerência que são típicas de fenômenos quânticos. Então, a partir do teorema da flutuação dissipação, supondo um tempo de observação de um ano e usando um valor típico na literatura para o parâmetro não comutativo, foi possível estimar um desvio padrão nas coordenadas em $1,6\mu m$. Ou seja, um valor com a mesma ordem de grandeza das dimensões das partículas Brownianas típicas. De fato, na literatura o efeito de não comutatividade é suposto a priori, a partir de escalas de comprimento muito pequenas, ou seja, a um nível quântico. No entanto, nosso resultado com o movimento Browniano sugere a possibilidade de detecção de efeitos de não comutatividade em escalas de comprimento grandes. O que nos leva a concluir que existe uma relação direta entre física em escalas de comprimento pequenas e física em escalas de comprimento grandes, uma vez que é previsto pelo “UV/IR mixing”, ou seja a “mistura” das divergências ultravioletas (UV) e infravermelhas (IR), o que confirma o resultado obtido em [67].

Referências Bibliográficas

- [1] Pauli, W. *Scientific Correspondence II*, 15, Ed. Karl Von Meyenn, Spring-Verlag 1985.
- [2] Snyder, H. Quantized Space-Time. *Phys. Rev.*, v. 71, p. 38-41, 1947.
- [3] Connes, A. Non-commutative differential geometry. *Inst. Hautes Études*, v. 62, p. 41-144, 1985.
- [4] Woronowicz, S. L. Twisted SU (2) group. An example of a non-commutative differential calculus *Inst. Sci. Kyoto*, v. 23, p. 117-181, 1987.
- [5] Dopliche, S.; Fredenhagen, K.; Roberts, J. E. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.*, v. 172, p. 187-220, 1995.
- [6] Seiberg, N.; Witten, E. String Theory and Noncommutative Geometry. *JHEP*, v. 9909, p. 032, 1999.
- [7] Gross, D. J.; Hashimoto, A.; Itzhaki, N. Observables of Non-Commutative Gauge Theories. *hep-th/0008075v3*, 2000.
- [8] Harikumar E.; Kumar, V. S.; Khare, A. Supersymmetric quantum mechanics on non-commutative plane. *Phys. Lett. B*, v. 589, p. 155-161, 2004.
- [9] Delduc, F.; Duret, Q.; Gieres, F.; Lefrançois, M. Magnetic fields in noncommutative quantum mechanics. *J. Phys.: Conference Series*, v. 103, p. 012020, 2008.
- [10] Adorno, T. C.; Gitman, D. M.; Shabad, A. E.; Vassilevich, D. V. Classical noncommutative electrodynamics with external source *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 065003, 2011.
- [11] Jurco, B.; Moller, L.; Schrame, S.; Schupp, P.; Wess, J. Construction of non-abelian gauge theories on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J C*, v. 21, p. 383-388, 2001.
- [12] Amelino-Camelia, G.; Doplicher, L.; Nam, S.; Seo, Y. S. Phenomenology of particle production and propagation in string-motivated canonical noncommutative spacetime *Phys. Rev. D*, v. 67,

- p. 085008, 2003; Hinchliffe, I.; Kersting, N. Review of the Phenomenology of Noncommutative Geometry, *hep-ph/0205040*; Amelino-Camelia, G.; Mandanici, G.; Yoshida, K. On the IR/UV mixing and experimental limits on the parameters of canonical noncommutative spacetimes. *hep-th/0209254*; Anisimov, A.; Banks, T.; Dine, M.; Graesser, M. Remarks on noncommutative phenomenology. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 085032, 2002.
- [13] Panero, M. Numerical simulations of a non-commutative theory: the scalar model on the fuzzy sphere. *JHEP*, v. 05, p. 082, 2007.
- [14] Wang, J.; Li, K.; Dulat, S.; Yuan, Y.; Ma, K. $\pi^+\pi^+$ and $\pi^+\pi^-$ Colliding in Noncommutative Space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 51, p. 2639-2647, 2012.
- [15] Ghasemkhani, M.; Goldouzian, R.; Khanpour, H.; Khatiri Yanehsari, M.; Mohammadi Najafabadi, M. Higgs production in e^-e^+ collisions as a probe of noncommutativity. *Prog. Theor. Exp. Phys.*, v. 2014, p. 081B01, 2014.
- [16] Ayazi, S. Y.; Esmaeili, S.; Najafabadi, M. M. Single top quark production in t-channel at the LHC in noncommutative space-time. *Phys. Lett. B*, v. 712, p. 93-96, 2012.
- [17] Joseph, A. Particle phenomenology on noncommutative spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 096004, 2009.
- [18] Balachandran, P.; Ibort, A.; Marmo, G.; Martone, M. Quantum Fields on Noncommutative Spacetimes: Theory and Phenomenology. *SIGMA*, v. 6, p. 052, 2010.
- [19] Douglas, M. R.; Hull, C. D-branes and the noncommutative torus. *JHEP*, v. 02, p. 008, 1998.
- [20] Ardlan, F.; Arfaei, H.; Sheikh-Jabbari, M. M. Noncommutative geometry from strings and branes. *JHEP*, v. 02, p. 016, 1999.
- [21] Chu, C. S.; Ho, P. M. Noncommutative Open String and D-brane. *Nucl. Phys. B*, v. 550, p. 151-168 1999.
- [22] Douglas, M. R.; Nekrasov, N. A. Noncommutative Field Theory. *Rev. Mod. Phys.*, v. 73, p. 977-1029 2001.
- [23] Carrol, S. M.; Harvey, J. A.; Kostelecký, V. A.; Lane, C. D.; Okamoto, T. Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, p. 141601, 2001.
- [24] Schaposnik, F. A. Three lectures on noncommutative field theories. *hep-th/0408132v1* , 2004.

- [25] Basu, B.; Chowdhury, D. Inertial effect on spin orbit coupling and spin transport *Phys. Ann.*, v 335, p. 47-60, 2013.
- [26] Basu, B.; Bandyopadhyay, P. Spin?orbit gauge and quantum spin Hall effect. *Phys. Lett. A*, v. 373, p. 148-151, 2008.
- [27] Basu, B.; Dhar, S.; Chatterjee, S. On atomic analogue of Landau quantization. *Phys. Lett. A*, v. 372, p. 4319-4322, 2008.
- [28] Dulat, S.; Li, K. Quantum Hall effect in noncommutative quantum mechanics. *Eur. Phys. J. C*, v. 60, p. 163-168, 2009.
- [29] Hua, L. Y.; Ming, G. Z. Effects of spatial noncommutativity on energy spectrum of a trapped Bose-Einstein condensate. *Commun. Theor. Phys.*, v, 46, p. 966-968, 2006.
- [30] Basu, B.; Chowdhury, D.; Ghosh, S. Inertial spin Hall effect in noncommutative space. *Phys. Lett. A*, V. 377, P. 1661-1667, 2013.
- [31] Huang, W. H.; Huang, K. W. Thermodynamics on Noncommutative Geometry in Coherent State Formalism. *Phys. Lett. B*, v. 670, p. 416-420, 2009.
- [32] Glasser, M. L.; March, N. H.; Nieto, L. M. An analytically solvable model of confined electrons in a magnetic field and its relation to Landau diamagnetism. *Phys. Lett. A*, v. 376, p. 1477-1480, 2012.
- [33] Li, K.; Xião-Hua, C.; Dong-Yang, W. Heisenberg algebra for noncommutative Landau problem. *Chin. Phys. C*, v. 15, p. 2236, 2006.
- [34] Giri, P. R.; Roy, P. The non-commutative oscillator, symmetry and the Landau problem. *Eur. Phys. J. C*, v. 57, p. 835-839, 2008.
- [35] Cai, S.; Jing, T.; Guo, G.; Zhang, R. Dirac Oscillator in Noncommutative Phase Space. *J. Theor. Phys.*, V. 49, P. 1699, 2010.
- [36] Dulat, S.; Li, K. Klein-Gordon oscillators in noncommutative phase space. *Chin. Phys. C*, v. 32, 2008.
- [37] Gamboa, J.; Mondez, F.; Loewe, M.; Rojas, J. C. The Landau problem and noncommutative quantum mechanics *Mod. Phys. Lett. A*, v. 16, p. 2075-2078, 2001.

- [38] Scholtz, F. G.; Gouba, L.; Hafver, A.; Rohwer, C. M. Formulation, interpretation and application of non-commutative quantum mechanics. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 42, p. 175303, 2009.
- [39] Li, K.; Dulat, S. The Aharonov-Bohm Effect in Noncommutative Quantum Mechanics. *Eur. Phys. J. C*, v. 46, p. 825, 2006.
- [40] Dulat, S.; Li, K. Commutator Anomaly in Noncommutative Quantum Mechanics. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 21, p. 2971-2976, 2006.
- [41] Li, K.; Chamoun, N. The Van der Waals interactions and the photoelectric effect in noncommutative quantum mechanics. *Chin. Phys. Lett.*, v. 24, p. 1183, 2007.
- [42] Chaichian, M.; Sheikh-Jabbari, M. M.; Tureanu, A. Comments on the Hydrogen Atom Spectrum in the Noncommutative Space. *Eur. Phys. J. C*, v. 36, p. 251-252, 2004.
- [43] Chaichian, M.; Sheikh-Jabbari, M. M.; Tureanu, A. Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, p. 2716, 2001.
- [44] Ho, P. M.; Kao, H. C. Noncommutative Quantum Mechanics from Noncommutative Quantum Field Theory. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 151602, 2002.
- [45] Moumni, M.; BenSlama, A.; Zaim, S. Spectrum of Hydrogen Atom in Space-Time Non-Commutativity. *hep-ph/1003.5732v3*, 2011.
- [46] Moumni, M.; BenSlama, A.; Zaim, S. The Hydrogen Spectrum in Non-Commutative Space-Time: Application to the Lyman- α Line and the 2S-1S Transition. *hep-ph/1006.4590v3*, 2010.
- [47] Moumni, M.; BenSlama, A. Effects of Non-Commutativity on Light-Hydrogen-Like Atoms and Proton Radius. *hep-ph/1305.3508v4*, 2013.
- [48] Li, K.; Chamoun, N. Hydrogen Atom Spectrum in Noncommutative Phase Space. *Chin. Phys. Lett.*, v. 23, p. 1122, 2006.
- [49] Alavi, S. A. Lamb shift and Stark effect in simultaneous space-space and momentum-momentum noncommutative quantum mechanics and θ -deformed $su(2)$ algebra. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 22, p. 377, 2007.
- [50] Adorno, T. C.; Baldiotti, M. C.; Chaichian, M.; Gitman, D. M.; Tureanu, A. Dirac Equation in Noncommutative Space for Hydrogen Atom. *Phys. Lett. B*, v. 682, p. 235-239, 2009.

- [51] Haghghat, M.; Loran, F. Three body bound state in noncommutative space. *Phys. Rev. D*, v. 67, p. 096003, 2003.
- [52] Chaichian, M.; Demichev, A.; Presnajder, P.; Sheikh-jabbari, M. M.; Tureanu, A. Aharonov-Bohm Effect in Noncommutative Spaces. *Phys. Lett. B*, v. 527, p. 149-154, 2002.
- [53] Falomir, H.; Gamboa, J.; Loewe, M.; Méndez, F.; Rojas, J. C. Testing spatial noncommutativity via the Aharonov-Bohm effect. *Phys. Rev. D*, v. 66, p. 045018, 2002.
- [54] Mirza, B.; Zarei, M. Non-commutative quantum mechanics and the Aharonov-Casher effect. *Eur. Phys. J. C*, v. 32, p. 583-586, 2004.
- [55] Li, K.; Wang, J. The topological AC effect on non-commutative phase space. *Eur. Phys. J. C*, v. 50, p. 1007-1011, 2007.
- [56] Harms, B.; Micu, O. Noncommutative quantum Hall effect and Aharonov-Bohm effect. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 40, p. 10337-10347, 2007.
- [57] Ma, K.; Dulat, S. Spin Hall effect on a noncommutative space. *Phys. Rev. A*, v. 84, p. 012104, 2011.
- [58] Gamboa, J.; Méndez, F.; Loewe, M.; Rojas, J. C. The Landau problem and noncommutative quantum mechanics. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 16, p. 2075-2078, 2001.
- [59] Bastos, C.; Bertolami, O.; Dias, N. C.; Prata, J. N. Phase-space noncommutative quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 023516, 2008.
- [60] Bastos, C.; Bertolami, O.; Dias, N. C.; Prata, J. N. Black holes and phase-space noncommutativity. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 124038, 2009.
- [61] Bastos, C.; Bertolami, O.; Dias, N. C.; Prata, J. N. The singularity problem and phase-space noncanonical noncommutativity. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 041502, 2010.
- [62] Bastos, C.; Bertolami, O.; Dias, N. C.; Prata, J. N. Noncanonical phase-space noncommutativity and the Kantowski-Sachs singularity for black holes. *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 024005, 2011.
- [63] Bernardini, A. E.; Bertolami, O. Probing phase-space noncommutativity through quantum beating, missing information, and the thermodynamic limit. *Phys. Rev. A*, v. 88, p. 12101, 2013.
- [64] Khodja, L.; Zaim, S. New treatment of the noncommutative Dirac equation with a Coulomb potentia. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 27, p. 1250100, 2012.

- [65] Stern, A. Particlelike solutions to classical noncommutative gauge theory. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 065006, 2008.
- [66] Alavi, S. A. Hyperfine splitting in noncommutative spaces. *Phys. Scr.*, v. 78, p. 015005, 2008.
- [67] Romero, J. M.; Vergana, J. D. The Kepler problem and non commutativity. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 18, p. 1673-1680, 2003.
- [68] Mirza, B.; Dehghani, M. Noncommutative Geometry and Classical Orbits of Particles in a Central Force Potential. *Commun. Theor. Phys.*, v. 42, p. 183-188, 2004.
- [69] Djemai, A. E. F. Noncommutative Classical Mechanics. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 43, p. 299-314, 2004.
- [70] Bertolami, O.; Rosa, J. G.; Arago, C. M. L.; Castorina, P.; Zappal, D. Noncommutative gravitational quantum well. *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 025010, 2005.
- [71] Bastos, C.; Bertolami, O.; Dias, N. C.; Prata, J. N. Noncommutative Graphene. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 28, p. 1350064, 2013.
- [72] Bertolami, O.; Queiroz, R. Phase-space noncommutativity and the Dirac equation. *Phys. Lett. A*, v. 375, p. 4116, 2011.
- [73] Bastos, C.; Bertolami, O.; Dias, N. C.; Prata, J. N. Entropic gravity, phase-space noncommutativity and the equivalence principle. *Class. Quantum Grav.*, v. 28, p. 125007, 2011.
- [74] Santos, Willien O.; Souza, Andre M. C. Phenomenology of noncommutative phase space via the anomalous Zeeman effect in hydrogen atom. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 29, p. 1450177, 2014.
- [75] Weyl, H. Quantenmechanik und Gruppentheorie. *Z. Phys.*, v. 46, p. 1-46, 1927
Wigner, E. P. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.*, v. 40, p. 749, 1932.
- [76] Groenewold, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, v. 12, p. 405-460, 1946
Moyal, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, v. 45, p. 99-124, 1949.
- [77] Santos, Willien O.; Souza, Andre M. C. The Anomalous Zeeman Effect for the Hydrogen Atom in Noncommutative Space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 51, p. 3882-3890, 2012.

- [78] Novoselov, K. S.; Geim, A. K.; Morozov, S. V.; Jiang, D.; Zhang, Y.; Dubonos, S. V.; Grigorieva, I. V.; Firsov, A. A. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. *Science*, v. 306, p. 666-669, (2004).
- [79] Castro Neto, A. H.; Guinea, F.; Peres, N. M. R.; Novoselov, K. S.; Geim, A. K. The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, v. 81, p. 109-162, 2009.
- [80] Wallace, P. The Band Theory of Graphite. *Phys. Rev.*, v. 71, p. 622-634, 1947.
- [81] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 3rd ed. 1998.
- [82] Goerbig, M. O. Electronic properties of graphene in a strong magnetic field. *Rev. Mod. Phys.*, v. 83, p. 1193-1243, 2011.
- [83] Zhang, Y.; Brar, V. W.; Girit, C.; Zettl, A.; Crommie, M. F. Origin of spatial charge inhomogeneity in graphene. *Nature Physics*, v. 5, p. 722-726, 2009.
- [84] Chen, J. H.; Jang, C.; Xião, S.; Ishigami, M.; Fuhrer, M. S. Intrinsic and Extrinsic Performance Limits of Graphene Devices on S_iO_2 *Nat. Nano*, v. 3, p. 206-209, 2008.
- [85] Wen, X. *Quantum Field Theory of Many-Body Systems*, Oxford University Press, 2004.
- [86] Abergel, D. S. L.; Apalkov, V.; Berashevich, J.; Ziegler, K.; Chakraborty, T. Properties of graphene: a theoretical perspective. *Advances in Physics*, v. 59, p. 261-482, 2010.
- [87] Gusynin, V. P.; Sharapov, S. G.; Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 146801, 2005.
- [88] Novoselov, K. S.; McCann, E.; Morozov, S. V.; Falko, V. I.; Katsnelson, M. I.; Zeitler, U.; Jiang, D.; Schedin, F.; Geim, A. K. Unconventional quantum Hall effect and Berry's phase of 2π in bilayer graphene. *Nature Physics*, v. 2, p. 177-180, 2006.
- [89] Novoselov, K. S.; Jiang, Z.; Zhang, Y.; Morozov, S. V.; Stormer, H. L.; Zeithner, U.; Maan, J. C.; Boebinger, G. S.; Kim, P.; Geim, A. K. Room-Temperature Quantum Hall Effect in Graphene. *Science*, v. 315, p. 1379, 2007.
- [90] Streda, P. Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, v. 15, p. L717-L721, 1982.
- [91] Foldy, L. L.; Wouthuysen, S. A.; On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit. *Phys. Rev.*, v. 78, p. 1, 1950.

- [92] Sakurai, J. J. *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1994, p. 304.
- [93] Hanneke, D.; Fogwell, S.; Gabrielse, G. New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, p. 120801, 2008.
- [94] Einstein, A. On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat. *Ann. Phys.*, v. 17, p. 549-560, 1905.
- [95] Lemons, D. S.; Gythiel, A. Paul Langevins 1908 paper “On the Theory of Brownian Motion” [“Sur la théorie du mouvement brownien”, C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530-533 (1908)] *Am. J. Phys.* v. 65, p. 1079-1081, 1997.
- [96] Uhlenbeck, G. E.; Ornstein, L. S. On the Theory of the Brownian Motion. *Phys. Rev.*, v. 36, p. 823-841, 1930.
- [97] Li, K.; Wang, J.; Chen, C. Representation of noncommutative phase space. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 20, p. 2165-2174, 2005.
- [98] Chakraborty, B.; Kuznetsova, Z.; Toppan, F. Twist Deformation of Rotationally Invariant Quantum Mechanics. *J. Math. Phys.*, v. 51, p. 112102, 2010.
- [99] Castro, P. G.; Chakraborty, B.; Kullock, R.; Toppan, F. Noncommutative oscillators from a Hopf algebra twist deformation. A first principles derivation. *J. Math. Phys.*, v. 52, p. 032102, 2011.
- [100] Sinha, D.; Chakraborty, B.; Scholtz, F. G. Non-commutative quantum mechanics in three dimensions and rotational symmetry. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 45, p. 105308, 2012.
- [101] Romero, J. M.; Santiago, J. A.; Vergara J. D. Newton’s second law in a non-commutative space. *Phys. Lett. A*, v. 310, p. 9-12, 2003.
- [102] Awobode, A. M. Precision Measurement of the Electron/Muon Gyromagnetic Factors, *hep-ph/1002.2739v1*, 2010.
- [103] Kusch, P.; Foley, H. M. Precision Measurement of the Ratio of the Atomic g Values in the $2P_{\frac{3}{2}}$ and $2P_{\frac{1}{2}}$ States of Gallium. *Phys. Rev.*, v. 72, p. 1256, 1947; Foley, H. M.; Kusch, P. On the Intrinsic Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, v. 73, p. 412, 1948; Kusch, P.; Foley, H. M. The Magnetic Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, v. 74, p. 250, 1948.

- [104] Steiner, R. History and progress on accurate measurements of the Planck constant. *Rep. Prog. Phys.*, v. 76, p. 016101, 2013.
- [105] Jiang, Z.; Henriksen, E. A.; Tung, L. C.; Wang, Y.-J.; Schwartz, M. E.; Han, M. Y.; Kim, P.; Stormer, H. L. Infrared Spectroscopy of Landau Levels of Graphene. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, p. 197403, 2007.
- [106] Giesbers, A. J. M.; Rietveld, G.; Houtzager, E.; Zeither, U.; Yang, R.; Novoselov, K. S.; Geim, A. K.; Maan, J. C. Quantum resistance metrology in graphene. *Appl. Phys. Lett.*, v. 93, p. 222109, 2008.