



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
NÚCLEO DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Efeito Zeeman Anômalo para o Átomo de Hidrogênio no Espaço Não Comutativo

Willien Oliveira dos Santos

SÃO CRISTÓVÃO

2012

Efeito Zeeman Anômalo para o Átomo de Hidrogênio no Espaço Não Comutativo

Willien Oliveira dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. André Mauricio Conceição de Souza

SÃO CRISTÓVÃO

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Núcleo de Pós-Graduação em Física

***Efeito Zeeman Anômalo para o átomo de Hidrogênio
no Espaço Não Comutativo***

por

Willien Oliveira dos Santos

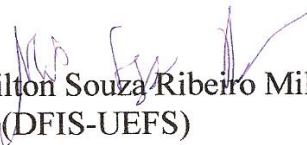
Dissertação de mestrado **APROVADA COM LOUVOR** em sessão pública
no dia nove de fevereiro do ano dois mil e doze perante a banca examinadora
constituída pelos seguintes professores:



Prof. Dr. André Maurício Conceição de Souza
(DFI-UFS)



Prof. Dr. Nelson Orlando Moreno Salazar
(DFI-UFS)



Prof. Dr. Milton Souza Ribeiro Miltão
(DFIS-UEFS)

Resumo

Efeito Zeeman Anômalo para o Átomo de Hidrogênio no Espaço Não Comutativo

Willien Oliveira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. André Mauricio Conceição de Souza

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Investigamos o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio em mecânica quântica não comutativa. Utilizando-se do método Bopp's shift, o regime não relativístico é avaliado e o Hamiltoniano não comutativo é determinado. Usando a teoria de perturbação de primeira ordem, a correção para a energia é calculada para o caso de campo magnético externo fraco. Obtemos os fatores de Landé orbital e de spin em espaço não comutativo. É mostrado que o valor experimental para os fatores de Landé orbital e de spin, impõem um limite superior na magnitude do parâmetro de não comutatividade da ordem de $\Theta \lesssim (8\text{GeV})^{-2}$ e $\Theta \lesssim (0,01\text{GeV})^{-2}$, respectivamente. Utilizamos o mesmo cálculo de perturbação para o caso de campo magnético externo nulo, mostrando que algum shift de energia aparece, que modifica o espectro de estrutura fina. Finalmente, calculamos o Lamb shift e comparando o resultado com o valor experimental da espectroscopia, obtemos um novo limite para o parâmetro não comutativo, $\Theta \lesssim (3\text{GeV})^{-2}$.

Palavras-chave: Efeito Zeeman Anômalo, Hidrogênio, Mecânica Quântica, Espaço Não Comutativo.

São Cristóvão

2012

Abstract

Anomalous Zeeman Effect for the Hydrogen Atom on Noncommutative Space

Willien Oliveira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. André Mauricio Conceição de Souza

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

We investigate the anomalous Zeeman effect for the hydrogen atom in noncommutative quantum mechanics. By using of the Bopp's shift method the nonrelativistic regime is evaluated and the noncommutative Hamiltonian is determined. By means the first order perturbation theory, the energy correction is calculated for the case of weak external magnetic field. We obtained the orbital and spin Landé factors on noncommutative space. It is shown that the experimental value for the orbital and spin Landé factors put an upper bound on the magnitude of the parameter of noncommutativity of the order of $\Theta \lesssim (8GeV)^{-2}$ and $\Theta \lesssim (0,01GeV)^{-2}$, respectively. We use the same perturbation calculation for the null external magnetic field case, showing that some energy shift appears, modifying the fine structure spectrum. Finally, we calculate the Lamb shift and comparing the result with the experimental value from spectroscopy, we got a new bound for the noncommutative parameter, $\Theta \lesssim (3GeV)^{-2}$.

Palavras-chave: Anomalous Zeeman Effect, Hydrogen, Quantum Mechanics, Noncommutative Space.

São Cristóvão

2012

*“Dedico este trabalho a Deus, que tem sido a fonte de minha inspiração e maior sentido na
minha existência. ”*

*Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria, como da ciência de Deus! Quão insondáveis
são os seus juízos, e quão inescrutáveis os seus caminhos!
Porque, quem compreendeu a mente do Senhor? ou quem foi seu conselheiro?
Ou quem lhe deu primeiro a ele, para que lhe seja recompensado?
Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém.*

Romanos 11: 33-36

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- À Deus.
- Ao meu orientador professor Dr. André Mauricio Conceição de Souza pelas suas sugestões críticas.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	9
2	Mecânica Quântica em Espaço NC	13
2.1	Espaço NC	13
2.2	Produto estrela e mapeamento	15
3	Efeito Zeeman Anômalo	17
3.1	Formulação do Hamiltoniano	18
3.2	Correção da Energia	20
3.3	Correção relativística e a fórmula de estrutura fina	22
3.4	Fenomenologia para o campo magnético fraco	24
4	Efeito Zeeman Anômalo no Espaço NC	26
4.1	Formulação do Hamiltoniano NC	26
4.2	Correção para o espectro NC do efeito Zeeman anômalo	30
4.3	Expressão não comutativa para os fatores de Landé Orbital e de Spin	30
4.4	Estimação fenomenológica para o efeito de não comutatividade espacial	32
4.5	Lamb shift e o parâmetro NC	34
5	Considerações Finais	37
A	O Produto Estrela	41
B	Notações	43

Capítulo 1

Introdução

A ideia de coordenadas não comutativas foi proposta por W. Heisenberg em 1930 [1], com o objetivo de eliminar o problema das divergências ultravioletas da teoria quântica de campos, em particular, da eletrodinâmica quântica. Neste contexto, a ideia era utilizar a não comutatividade em escalas de comprimento muito pequenas para introduzir um parâmetro de corte efetivo ultravioleta (UV) como forma de evitar o aparecimento das divergências. H. Snyder publicou em 1947 o primeiro artigo nesse assunto[2], onde aplicava esta ideia ao espaço-tempo, trocando as coordenadas x_μ por operadores não comutativos $\hat{x}_\mu$, obedecendo à regra de comutação,

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\Theta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

sendo $\Theta_{\mu\nu}$ o parâmetro de não comutatividade, o qual, têm dimensão de comprimento ao quadrado, e que no caso mais simples é um tensor completamente antissimétrico. Desta forma, passa a existir uma relação de incerteza entre as coordenadas do espaço-tempo,

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq \frac{1}{2} |\Theta_{\mu\nu}| \quad (1.2)$$

e isto tem levado ao surgimento de teorias não locais e até mesmo quebra da invariância de Lorentz e da Causalidade [3, 4]. Somando-se isto ao sucesso da teoria de renormalização, na obtenção de valores numéricos extremamente precisos dos observáveis da eletrodinâmica quântica, a proposta da não comutatividade foi abandonada, e somente foi retomada na década de 80, com os trabalhos de A. Connes e S. L. Woronowicz [5, 6]. Neste sentido, houve uma retomada do interesse em tentar compreender a estrutura quântica do espaço-tempo, ou seja, uma teoria

quântica da gravitação. A escala quântica do espaço-tempo é próxima à do comprimento de Planck, $l_P \sim 10^{-33} \text{cm}$, onde a física em que conhecemos sofre profundas modificações. Assim, nesta escala de comprimento, ou talvez próximo, acredita-se que os efeitos da gravitação quântica sejam relevantes. Propriedades quânticas devem afetar os processos envolvendo as partículas em ambientes de altas energias. De fato, existem duas formas de tratar as propriedades quânticas do espaço-tempo e seus efeitos observáveis. A primeira forma é tentar construir uma teoria quântica do espaço-tempo de acordo com a teoria da relatividade geral e da mecânica quântica. Neste contexto, destaca-se a teoria de cordas e a gravitação quântica, com previsões físicas numa escala de energia de 10^{16}TeV , muito acima das escalas de energia dos aceleradores de partículas atuais 7TeV no Large Hadron Collider (LHC). A segunda forma de tratar as propriedades quânticas do espaço-tempo é a das teorias efetivas, as quais abordam os efeitos quânticos do espaço-tempo sem necessariamente assumir o completo conhecimento da estrutura do espaço-tempo em escalas de comprimento pequenas. Com esta proposta é assumido que é impossível especificar a posição de uma partícula, já que, formalmente é assumido relações de comutação do tipo (1.1), a qual esta associada uma relação de incerteza (1.2), que impossibilita a localização exata de uma partícula.

Nos últimos anos, coordenadas não comutativas têm sido objeto de pesquisa por muitos físicos da área de física de alta energia e até mesmo da matéria condensada com a supercondutividade e efeito Hall quântico [7]-[9], sem falar nas inúmeras aplicações em física estatística [10]-[20]. Evidências da não comutatividade do espaço-tempo vêm do limite de baixas energias da teoria de cordas ou em situações de energias muito altas [21]. Há de se citar, que, em determinado limite de campo magnético intenso na dinâmica quântica da corda aberta, o efeito da não comutatividade aparece naturalmente [22, 23]. Desta forma, um dos efeitos físicos bastante conhecido da não comutatividade das coordenadas em mecânica quântica é o problema de Landau [24], em que uma partícula carregada movimenta-se em um plano na presença de um campo magnético intenso, $\mathbf{B}$, perpendicular a esse plano, e se verifica que o espaço torna-se não comutativo (NC). De fato, muitos trabalhos tem se dedicado ao estudo de vários aspectos de mecânica quântica em espaço NC (quando apenas as coordenadas de posição não comutam entre si) e espaço de fase NC (quando se introduz a não comutatividade das coordenadas de momento no espaço NC) [25]-[47]. Neste contexto, o interesse é encontrar efeitos mensuráveis de não comutatividade.

¹Estamos usando $1(\text{GeV})^{-1} = 1,973 \cdot 10^{-14} \text{cm}$.

Por outro lado, para termos uma ideia da ordem de grandeza de $\sqrt{\Theta}$ ($\Theta \equiv |\Theta_{\mu\nu}|$), basta considerar que de fato a não comutatividade é uma teoria efetiva que segue do limite de baixas energias da teoria de cordas. Se a escala de comprimento da teoria de cordas é o comprimento de Planck, l_P , a não comutatividade deve ter uma escala muito maior que, l_P mais ainda assim muito menor que a escala quântica, que é da ordem de $1fm \sim 10^{-13}cm$. Todavia, estudos recentes em mecânica quântica revelaram que o parâmetro NC não é o mesmo para diferentes sistemas [32]-[34]. Por exemplo, os autores nas referências [32]-[38] têm tratado o espectro do átomo de hidrogênio no formalismo NC. Vale destacar o artigo do M. Chaichian [33], onde, a não comutatividade atua, como uma nova interação, introduzindo correções ao *Lamb Shift*. Ele obteve que o valor de Θ é $\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-18}cm$, que corresponde em *energia*² a $\Theta \lesssim (10TeV)^{-2}$. Na referência [39] é obtido $\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-15}cm$ pelo estudo das transições do átomo de hélio, que corresponde em *energia*² a $\Theta \lesssim (1GeV)^{-2}$. Os limites $\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-8}cm$ e $\sqrt{\Theta} \sim 10^{-18}cm$ foram obtidos nas referências [40, 41] pelo estudo do efeito Aharonov-Bohm, correspondendo as seguintes *energias*² $\Theta \lesssim (1keV)^{-2}$ e $\Theta \sim (10TeV)^{-2}$. O efeito Aharonov-Casher foi tratado nas referências [42, 43] para partículas de spin 1/2 e 1 e os autores obtiveram o limite $\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-7}cm$, correspondendo para uma *energia*² de $\Theta \lesssim (10^2eV)^{-2}$. Através do efeito Hall, foram obtidos $\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-15}cm$ e $\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-2}cm$ [44, 45], que em unidades de *energia*² ficam $\Theta \lesssim (10GeV)^{-2}$ e $\Theta \lesssim (1meV)^{-2}$. Por fim, através do problema de Landau [46], foi obtido $\sqrt{\Theta} = 1,48 \cdot 10^{-6}cm$, ou em unidades de *energia*² $\Theta \sim (10eV)^{-2}$.

Obviamente, a noção de não comutatividade é um conceito fundamental na Mecânica Quântica usual. Neste contexto os operadores que representam as coordenadas de posição e momento conjugados de uma partícula não comutam. Isto tem implicações importantes, a saber, por exemplo, na impossibilidade de medir simultaneamente posição e momento de uma partícula. De fato, a não comutatividade é incorporada pela introdução de um produto NC para funções sobre o espaço de fase, o chamado produto Moyal ou estrela ($\star$), tal que, é obtido uma nova álgebra quântica não comutativa dos observáveis. Este formalismo do produto estrela, foi iniciado por Weyl e Wigner [48], e desenvolvido por Gronewold e Moyal [49]. Contudo, nesta dissertação, não queremos levar em conta apenas a não comutatividade entre as coordenadas de posição e momento, mas sobretudo que as coordenadas de posição não comutem entre si. Para tanto, em vez de estudar o produto estrela, nós analisaremos os efeitos de não comutatividade em mecânica quântica usual. O método utilizado para fazer isto é o mapeamento via Boop's shift [30].

Nesta dissertação estaremos adotando o sistema de unidades Gaussiano (CGS). A apre-

sentação deste trabalho está disposta da seguinte forma: no capítulo 2, introduzimos o formalismo do espaço NC para a mecânica quântica. Ainda nesse capítulo, definimos o produto estrela e derivamos a representação de Boop's shift, que será útil no desenvolvimento dos capítulos posteriores. No capítulo 3, revisamos o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio. Neste mesmo capítulo, comparamos o efeito da estrutura fina com o efeito Zeeman, e assim obtemos um limite para o campo magnético fraco. No capítulo 4, apresentamos um Hamiltoniano inédito para o efeito Zeeman anômalo NC. Além disso, neste mesmo capítulo temos obtido as correções não comutativas para os fatores de Landé orbital e de spin, e desta forma impomos um limite superior para o parâmetro de não comutatividade. Ainda no capítulo 4 calculamos o *Lamb Shift*, em seguida comparando com uma medida experimental impomos um novo limite para o parâmetro de não comutatividade. Por fim, no capítulo 5 apresentamos nossas considerações finais e perspectivas.

Capítulo 2

Mecânica Quântica em Espaço NC

Neste capítulo vamos implementar o mapeamento entre mecânica quântica definida em espaço NC e comutativo. Para tanto utilizaremos o mapeamento via Bopp's shift que será obtido através do produto estrela. Vale a pena enfatizar que o produto estrela embora atualmente frequentemente associado à não comutatividade espaço-temporal, foi originalmente proposto no contexto da mecânica quântica usual. Em particular, esse produto é uma deformação não comutativa do produto usual entre funções reais [50]. Em mecânica quântica, em vez dos observáveis serem tratados como operadores no espaço de Hilbert, eles podem ser tratados como funções complexas obtidas a partir do símbolo de Weyl [51]. Assim, se define o produto estrela, o qual é associativo mas NC e sua função seria preservar o mapeamento entre operadores e funções complexas dado pelo símbolo de Weyl. Em mecânica quântica, tal produto é expresso como uma expansão em potências de $\hbar$. Por outro lado, no formalismo do espaço NC, esse produto é expresso como uma expansão em termos do parâmetro NC Θ , como veremos.

2.1 Espaço NC

Como foi observado, o estudo de coordenadas não comutativas surgiu como uma proposta para eliminar as divergências da teoria quântica de campos, em particular, da eletrodinâmica quântica. Dado o espaço de fase clássico, se define o espaço de fase quântico ao substituírmos as variáveis canônicas de posição e momento x_i e p_i por operadores hermiteanos, que obedeçam as seguintes relações de comutação de Heisenberg:

$$\begin{aligned}
[x_i, x_j] &= 0, \\
[x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \\
[p_i, p_j] &= 0;
\end{aligned} \tag{2.1}$$

tais relações de comutação definem o que chamaremos de espaço comutativo usual. Além disso, o fato de posição e momento não comutarem leva à seguinte relação de incerteza,

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij}. \tag{2.2}$$

A não comutatividade passa a definir uma área mínima no espaço de fase, conhecida como célula de Planck. E desta forma, o espaço de fase deixa de ser contínuo e passa a ser discreto. Contudo, verifica-se facilmente a correspondência com o limite clássico se $\hbar \rightarrow 0$.

Em escalas de comprimento muito pequenas, da ordem da escala de comprimento intrínseca da teoria de cordas, não somente as coordenadas de posição e momento não comutam, mas também as coordenadas de posição não mais comutariam entre si. Assim, analogamente ao processo de quantização do espaço de fase acima, podemos desenvolver um conceito geométrico para um espaço NC de forma quantizada. Para tanto promovemos que as coordenadas do espaço usual x_i e p_i devam ser substituídas por operadores hermiteanos $\hat{x}_i$ e $\hat{p}_i$ nesta nova geometria, agora, quântica. Os operadores $\hat{x}_i$ e $\hat{p}_i$ devem, então, satisfazer relações de comutação análogas a de Heisenberg, contudo, definidas sobre a estrutura geométrica do espaço NC:

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\Theta_{ij}, \\
[\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\
[\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

sendo Θ_{ij} um tensor real completamente antissimétrico com dimensão de $(comprimento)^2$, o qual representa a não comutatividade do espaço.

Uma das consequências da não comutatividade espacial é que as coordenadas espaciais não podem ser simultaneamente diagonalizadas e, conseqüentemente, existirá uma relação de incerteza

²No espaço NC o parâmetro de não comutatividade é não nulo apenas para as coordenadas espaciais. O que equivale a fazer $\Theta_{0j} = 0$ e $\Theta_{ij} \neq 0$ no comutador (1.1).

da forma,

$$\Delta \hat{x}_i \Delta \hat{x}_j \geq \frac{1}{2} |\Theta_{ij}|. \quad (2.4)$$

Neste caso, a idéia de ponto em um espaço NC é perdida. Ou seja, os pontos do espaço comutativo usual são substituídos por células de área $\frac{1}{2} |\Theta_{ij}|$, onde não é possível determinar a localização exata dos eventos devido as flutuações quânticas do espaço NC.

2.2 Produto estrela e mapeamento

Em um espaço NC, o produto usual deve ser substituído pelo produto estrela:

$$(f \star g)(x) = \exp \left[\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right] f(x) g(y) \Big|_{y=x} \quad (2.5)$$

onde f e g são duas funções arbitrárias e infinitamente diferenciáveis.

Como foi discutido na introdução, é suposto que o parâmetro NC seja muito pequeno. Assim, expandindo a exponencial em (2.5) em série de potências, temos:

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \exp \left[\frac{i}{2} \partial_{x_i} \Theta_{ij} \partial_{y_j} \right] f(x) g(y) \Big|_{y=x} \\ &= f(x) g(y) \Big|_{y=x} + \frac{i}{2} \Theta_{ij} \partial_{x_i} f \partial_{y_j} g \Big|_{y=x} + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \Theta_{ij} \Theta_{lm} (\partial_{x_i} \partial_{x_l} f) (\partial_{y_j} \partial_{y_m} g) \Big|_{y=x} + \dots \\ &= f(x) g(y) \Big|_{y=x} + \frac{i}{2} \Theta_{ij} \partial_{x_i} f \partial_{y_j} g \Big|_{y=x} + O(\Theta^2) \\ &= \left(1 + \frac{i}{2} \Theta_{ij} \partial_{x_i} \partial_{y_j} \right) f(x) g(y) \Big|_{y=x} + O(\Theta^2) \\ &= \left[f(x) - \frac{1}{2\hbar} \Theta_{ij} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right] g(y) \Big|_{y=x} + O(\Theta^2) \\ &= \left[f(x) - \frac{1}{2\hbar} \Theta_{ij} p_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right] g(y) \Big|_{y=x} + O(\Theta^2) \\ &= f \left(x - \frac{1}{2\hbar} \Theta_{ij} p_j \right) g(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, as coordenadas de posição não comutativas podem ser expressadas em termos das coordenadas de posição e momento comutativos. Para tanto, temos o seguinte mapeamento:

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{1}{2\hbar} \Theta_{ij} p_j. \quad (2.7)$$

Por outro lado, em um espaço NC o operador momento não muda sua forma em relação ao espaço comutativo:

$$\hat{p}_i = p_i. \quad (2.8)$$

³A relação do produto estrela entre duas funções f e g encontra-se demonstrado no Apêndice A.

O mapeamento dado pelas equações (2.7) e (2.8) é conhecido na literatura como Boop's shift. Assim, em um espaço NC, o produto estrela pode ser substituído pelo produto usual pela utilização do Boop' shift.

O tensor Θ_{ij} é completamente antissimétrico e no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ existem apenas 3 componentes não nulas independentes entre si, e podem ser definidas em termos do tensor de Levi-Civita,

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Theta_k \quad (2.9)$$

em que Θ_k são as componentes do vetor Θ . Então a equação das coordenadas não comutativas (2.7) pode ser escrita na forma de um vetor,

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \frac{1}{4\hbar} \mathbf{p} \times \Theta \quad (2.10)$$

que é a definição de um vetor posição no espaço NC. Uma partícula dentro de tal espaço na posição $\hat{\mathbf{r}}$ é uma partícula não localizada, assim, consideraremos $\hat{\mathbf{r}}$ como uma posição no espaço Euclidiano sob flutuações quânticas. A localização da partícula, no espaço $\mathbb{R}^3$, terá pelo princípio de incerteza, uma imprecisão do momento desta partícula.

Para facilitar os cálculos, assim como têm sido usado na literatura, iremos assumir que $\Theta = (0, 0, \Theta_z)$. Contudo, isto pode ser compreendido como uma rotação ou redefinição de coordenadas. Segue-se então, que as coordenadas NC de posição e momento se tornarão, respectivamente,

$$\hat{x} = x - \frac{\Theta_z}{4\hbar} p_y, \quad \hat{y} = y + \frac{\Theta_z}{4\hbar} p_x, \quad \hat{z} = z \quad (2.11)$$

e

$$\hat{p}_x = p_x, \quad \hat{p}_y = p_y, \quad \hat{p}_z = p_z. \quad (2.12)$$

Capítulo 3

Efeito Zeeman Anômalo

Neste capítulo, iremos fazer uma breve revisão do efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio. Quando o campo magnético externo ao átomo é fraco ou nulo, a interação que prevalece é a interação spin-órbita, que consiste na interação entre o momento de dipolo magnético de spin eletrônico e o campo magnético interno do átomo. Tal interação é criada porque o campo magnético interno é consequência do momento angular orbital do próton. Assim, a interação spin-órbita é em parte responsável pela estrutura fina do espectro dos átomos. Por outro lado, quando o campo magnético externo não é nulo, temos também a interação do conhecido efeito Zeeman. Neste sentido, o efeito Zeeman corresponde à mudança das linhas espectrais de um certo elemento químico devido a presença de um campo magnético externo $\mathbf{B}$. Para o caso de átomos cujo spin eletrônico total $\mathbf{S}$ é nulo e o momento angular total $\mathbf{J}$ é igual ao momento angular orbital $\mathbf{L}$, as linhas de emissão se dividem em multipletos, cujas características dependem principalmente do elemento químico e do campo magnético externo. Este fenômeno é conhecido como efeito Zeeman normal, descoberto pelo físico holandês Pieter Zeeman em 1896. Por outro lado, quando se considera o caso em que o spin eletrônico total não é nulo, tem-se o chamado efeito Zeeman anômalo: as linhas de emissão se decompõem em multipletos de estrutura mais complicada. Isso ocorre porque o spin se acopla ao campo $\mathbf{B}$. Neste sentido, a interação spin-órbita é muito importante pois acopla o spin e o momento angular orbital para compor o momento angular total de acordo com,

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad (3.1)$$

Com isso, o torque aplicado pelo campo faz com que o dipolo magnético atômico precessione

em torno de $\mathbf{B}$, um efeito chamado de precessão de Larmor. Então, o campo magnético externo faz com que $\mathbf{J}$ precesse lentamente em torno de $\mathbf{B}$. Enquanto isto, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{S}$ precessionam mais rapidamente em torno de $\mathbf{J}$ devido à interação spin-órbita. Contudo, se aumentarmos o campo, a frequência da precessão de Larmor ficará mais rápida do que a precessão spin-órbita de $\mathbf{L}$ e $\mathbf{S}$ em torno de $\mathbf{J}$, e o efeito Zeeman passa a ser conhecido como efeito Paschen-Back que está associado ao regime de campo magnético forte. Neste sentido, iremos analisar neste capítulo apenas o caso de campo fraco, desta forma, estabeleceremos um limite para o campo magnético externo, para, assim, distinguir o efeito Zeeman anômalo do efeito Paschen-Back.

3.1 Formulação do Hamiltoniano

Considere a interação entre o átomo de hidrogênio e o campo magnético descrito pelo seguinte Hamiltoniano não relativístico:

$$H = \frac{1}{2m_e} \mathbf{p}^2 + V(r), \quad (3.2)$$

onde $V(r)$ é a contribuição da energia potencial, m_e é a massa do elétron, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ é o acoplamento mínimo para o momento linear, sendo e e c a carga do elétron e a velocidade da luz respectivamente, $\mathbf{A}$ o potencial vetor, tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Usando a seguinte identidade

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \quad (3.3)$$

com $\boldsymbol{\sigma}$ sendo as matrizes de Pauli, é possível acoplar a contribuição do spin no termo de energia cinética. Então, o hamiltoniano acima pode também ser escrito por

$$H = \frac{1}{2m_e} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 + V(r). \quad (3.4)$$

Primeiramente iremos desenvolver o termo de energia cinética. Para tanto,

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 &= \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - i\frac{e}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{p}^2 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 - \frac{e}{c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) - i\frac{e}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

mas,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p})\psi &= -i\hbar \nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) - i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi \\ &= -i\hbar (\nabla \cdot \mathbf{A})\psi - i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi - i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Escolhendo o gauge de Coulomb em que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p})\psi &= -2i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \psi \\ &= (2\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})\psi \end{aligned} \quad (3.7)$$

temos ainda

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p})\psi &= \sigma \cdot [-i\hbar \nabla \times (\mathbf{A}\psi) - i\hbar \mathbf{A} \times \nabla \psi] \\ &= \sigma \cdot [-i\hbar ((\nabla \times \mathbf{A})\psi + (\nabla \psi) \times \mathbf{A}) - i\hbar \mathbf{A} \times \nabla \psi] \\ &= -i\hbar \sigma \cdot \mathbf{B}\psi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Resumindo, temos

$$\left[\sigma \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} - \frac{e\hbar}{c} \sigma \cdot \mathbf{B}. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) no hamiltoniano (3.4) têm-se:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2 - \frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} - \frac{e\hbar}{2m_e c} \sigma \cdot \mathbf{B} + V(r). \quad (3.10)$$

Considerando o campo magnético uniforme e orientado ao longo da direção positiva do eixo z, temos que o potencial vetor é:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \left(-\frac{\mathbf{B}y}{2}, \frac{\mathbf{B}x}{2}, 0 \right). \quad (3.11)$$

Assim, o hamiltoniano (3.10) pode ser reescrito como

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + \frac{e^2 \mathbf{B}^2}{8m_e c^2} (x^2 + y^2) - \omega(L_z + 2S_z) + V(r) \quad (3.12)$$

onde $\omega = \frac{eB}{2m_e c}$ e $\mathbf{S} = \frac{\hbar \sigma}{2}$ são a frequência de Larmor e o operador de spin.

Agora vamos explorar o termo de potencial do Hamiltoniano. Assumindo que $V(r) = V_c(r) + V_{LS}(r)$, representa as contribuições do potencial de Coulomb $V_c(r)$ e do potencial de spin-órbita $V_{LS}(r)$. O termo de Coulomb é

$$V_c(r) = \frac{-Ze^2}{r}. \quad (3.13)$$

sendo $Z = 1$ o número atômico.

Devido a força central, o elétron experimenta um campo elétrico,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{e} \nabla V_c(r) \quad (3.14)$$

e conseqüentemente existirá um campo magnético efetivo dado por

$$\mathbf{B}_{\text{ef}} = -\frac{\mathbf{p} \times \mathbf{E}}{m_e c} = -\frac{1}{m_e c} \frac{1}{r} \frac{dV_c(r)}{dr} \mathbf{L}. \quad (3.15)$$

Desde que o momento magnético do elétron μ seja dado por

$$\mu = \frac{e\mathbf{S}}{m_e c} \quad (3.16)$$

o potencial de spin-órbita será representado por

$$V_{LS}(r) = -\mu \cdot \mathbf{B}_{\text{ef}} = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV_c(r)}{dr} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{Ze^2}{r^3} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \quad (3.17)$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ foi introduzido considerando a correção de Thomas. Para resumir, o hamiltoniano (3.12) pode ser dado pelos seguintes três termos:

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + V_c(r) \quad (3.18)$$

$$H_{LS} = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{Ze^2}{r^3} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \quad (3.19)$$

$$H_B = -\omega(L_z + 2S_z). \quad (3.20)$$

Omitimos o termo $\frac{e^2 B^2}{8mc^2}(x^2 + y^2)$ considerando que o mesmo não é importante para um átomo de um elétron [53]. O termo (3.18) representa o hamiltoniano do átomo de hidrogênio não perturbado. O hamiltoniano (3.19) descreve a interação de spin-órbita. Por fim, o hamiltoniano (3.20) descreve o efeito Zeeman anômalo. Note que o fator 2 na frente de S_z reflete o fato que, para a mecânica quântica usual, o fator de Landé g_s do elétron é 2, a menos de correções da ordem da constante de estrutura fina. Neste sentido, o cálculo mais exato para o fator g_s é dado pela eletrodinâmica quântica que leva em conta os efeitos de polarização e flutuações do vácuo que incrementam ligeiramente este valor para $g_s = 2,00231$ [54].

3.2 Correção da Energia

No limite de campo magnético externo fraco, o hamiltoniano H_{LS} domina e H_B deve ser tratado como uma correção nos estados obtidos com a correção da interação spin-órbita. Então, vamos calcular a correção em primeira ordem na energia dos estados do sistema $H_0 + H_{LS}$. Neste caso uma base apropriada é definida pelos seguintes números quânticos n, l, s, j, m_j , com spin

s , l é o número quântico orbital, $j = l \pm \frac{1}{2}$ é o número quântico associado ao momento angular total, m_j e n são os números quânticos magnético e principal. Pela teoria de perturbação de primeira ordem, a correção de Zeeman para a energia é

$$\begin{aligned}\Delta E_B &= \langle nlsjm_j | H_B | nlsjm_j \rangle \\ &= -\omega (\langle L_z \rangle + 2 \langle S_z \rangle)\end{aligned}\quad (3.21)$$

e, levando em conta o fato que [53]:

$$\begin{aligned}\langle L_z \rangle &= \langle nlsjm_j | L_z | nlsjm_j \rangle \\ &= \hbar m_j \left[\frac{j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)}{2j(j+1)} \right]\end{aligned}\quad (3.22)$$

e

$$\begin{aligned}\langle S_z \rangle &= \langle nlsjm_j | S_z | nlsjm_j \rangle \\ &= \hbar m_j \left[\frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right]\end{aligned}\quad (3.23)$$

a correção da energia dada por (3.20) será

$$\begin{aligned}\Delta E_B &= -\omega \hbar m_j \left[1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right] \\ &= -\omega \hbar m_j g\end{aligned}\quad (3.24)$$

sendo g o fator de Landé. Para o caso de momento puramente orbital $j = l$ e $s = 0$, temos então $g = 1$. Contudo, para o caso de momento puramente de spin $j = s$ e $l = 0$ e então $g = 2$. Além disso, desde que em nosso caso $s = \frac{1}{2}$ teremos

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = \begin{cases} \frac{2l+2}{2l+1} & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{2l}{2l+1} & \text{se } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}\quad (3.25)$$

A correção da interação spin-órbita é:

$$\begin{aligned}\Delta E_{LS} &= \langle nlsjm_j | H_{LS} | nlsjm_j \rangle \\ &= \frac{Ze^2}{2m_e^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle\end{aligned}\quad (3.26)$$

usando [53]:

$$\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle = \langle nlsjm_j | \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | nlsjm_j \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle nlsjm_j | \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) | nlsjm_j \rangle \\
&= \frac{\hbar^2 (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))}{2}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

e, levando em conta uma das relações recursivas de Kramer,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= \left\langle nlsjm_j \left| \frac{1}{r^3} \right| nlsjm_j \right\rangle \\
&= \frac{Z^3}{l(l + \frac{1}{2})(l+1)n^3a_0^3}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde a_0 é o raio de Bohr e n é um inteiro positivo, a correção da energia dada por (3.19) ficará:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{LS} &= \frac{1}{4m_e^3 c^2} \left(\frac{m_e Z e^2}{\hbar} \right)^4 \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{l(l + \frac{1}{2})(l+1)n^3} \right] \\
&= \frac{m_e c^2 (Z\alpha)^4}{4} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{l(l + \frac{1}{2})(l+1)n^3} \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

em que $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ é a constante de estrutura fina. Além disso, observe que o denominador desta expressão possui uma divergência em $l = 0$. Contudo, esta singularidade é meramente aparente pois nós temos negligenciado a energia potencial do elétron com respeito para $m_e c^2$. Assim, o denominador é um número finito em $l = 0$. Em contrapartida, o numerador se anula em $l = 0$ já que isto implica em $j = s = \frac{1}{2}$, segue-se portanto que a interação spin-órbita é nula em $l = 0$. Neste sentido, explanaremos na próxima seção uma expressão geral que inclui a correção relativística na interação spin-órbita, e que portanto valerá para todo l .

3.3 Correção relativística e a fórmula de estrutura fina

A expressão relativística para o termo de energia cinética do hamiltoniano é

$$T_{rel} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - m_e c^2. \tag{3.30}$$

O primeiro termo é a energia relativística total (sem a contribuição da energia potencial), e o segundo termo é a energia de repouso do elétron.

É preciso expressar T_{rel} em termos do momento relativístico,

$$\mathbf{p}^2 c^2 + m_e^2 c^4 = \frac{m_e^2 v^2 c^2 + m_e^2 c^4 [1 - (\frac{v}{c})^2]}{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

$$= \frac{m_e^2 c^4}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = (T + m_e c^2)^2 \quad (3.31)$$

então

$$T_{rel} = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2. \quad (3.32)$$

Esta última expressão está escrita no limite relativístico $p \ll m_e c$. Desta forma, expandindo (3.32) em potências de $\frac{\mathbf{p}}{m_e c}$, teremos:

$$\begin{aligned} T_{rel} = m_e c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{p}}{m_e c}\right)^2} - 1 \right] &= m_e c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}}{m_e c}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\mathbf{p}}{m_e c}\right)^4 + \dots - 1 \right] \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_e^3 c^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

A correção relativística de ordem mais baixa para o hamiltoniano é então

$$\Delta H_{rel} = - \left(\frac{1}{8m_e^3 c^2} \right) \mathbf{p}^4. \quad (3.34)$$

De acordo com a teoria de perturbação de primeira ordem, a correção de (3.34) será dada pelo seu valor esperado no estado não perturbado:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rel} &= \langle nlsjm_j | \Delta H_{rel} | nlsjm_j \rangle \\ &= - \left(\frac{1}{8m_e^3 c^2} \right) \langle nlsjm_j | \mathbf{p}^4 | nlsjm_j \rangle \end{aligned} \quad (3.35)$$

usando,

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} = E_n - V_c \quad (3.36)$$

teremos,

$$\begin{aligned} \Delta E_{rel} &= - \frac{1}{2m_e c^2} (E_n^2 - 2E_n \langle V_c \rangle + \langle V_c^2 \rangle) \\ &= - \frac{1}{2m_e c^2} \left[E_n^2 + 2E_n Z e^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + (Z e^2)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

em que $E_n = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}$ é a energia de Bohr do estado em questão. Agora, é necessário usar os valores esperados de $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$ e $\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle$ [53]:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Z}{n^2 a_0} \quad (3.38)$$

e

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^2}{(l + \frac{1}{2})n^3 a_0^2} \quad (3.39)$$

usando estas expressões na equação (3.37), segue-se:

$$\Delta E_{rel} = -\frac{\alpha^4 m_e c^2}{8n^4} \left[\frac{4n}{(l + \frac{1}{2})} - 3 \right]. \quad (3.40)$$

Comparando as expressões (3.29) e (3.40) vemos que a correção relativística e o acoplamento spin-órbita são da mesma ordem $\alpha^4 m_e c^2$, embora os mecanismos físicos envolvidos sejam diferentes. Se adicionarmos tais expressões, obteremos a fórmula de estrutura fina completa. Para tanto, substituindo ¹ $j = l + \frac{1}{2}$ ($l = j - \frac{1}{2}$) na equação (3.29), temos:

$$\begin{aligned} \Delta E_{LS} &= \frac{m_e c^2 \alpha^4}{4} \left[\frac{j(j+1) - (j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}}{(j - \frac{1}{2})j(j + \frac{1}{2})n^3} \right] \\ &= \frac{m_e c^2 \alpha^4}{4} \frac{1}{j(j + \frac{1}{2})n^3}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora, adicionando (3.40) e (3.41) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \Delta E_{fs} &= \Delta E_{LS} + \Delta E_{rel} = -\frac{\alpha^4 m_e c^2}{8n^4} \left(\frac{4n}{j} - 3 - \frac{2n}{j(j + \frac{1}{2})} \right) \\ &= \frac{\alpha^4 m_e c^2}{8n^4} \left(3 - \frac{4n}{j + \frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

De fato, embora ambas as correções (3.40) e (3.41) possam ser questionáveis no caso de $l = 0$, sua soma, representada pela equação (3.42) é correta para todo l . Além disso, tal expressão está de acordo com o resultado obtida pela equação de Dirac sem recorrer à teoria de perturbação.

3.4 Fenomenologia para o campo magnético fraco

A natureza do efeito Zeeman depende criticamente da magnitude do campo magnético externo comparado com o campo interno efetivo gerado pela interação spin-órbita. Assim, para

¹Esta substituição independe do sinal, $j = l - \frac{1}{2}$ ($l = j + \frac{1}{2}$) dará o mesmo resultado

$B \ll B_{ef}$ as correções da estrutura fina dominam, desta forma, podemos impor $|\Delta E_B| \ll |\Delta E_{fs}|$. Neste sentido, estimaremos fenomenologicamente o valor das correções das energias dadas por (3.29) e (3.42). Para tanto, tomaremos como referência o estado fundamental, $n = 1, l = 0, j = l + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e $m_j = \frac{1}{2}$. Segue-se que, usando as seguintes constantes:

$$\begin{aligned} c &= 2,99792 \cdot 10^{10} cm/s, \hbar = 1,05457 \cdot 10^{-27} ergs \cdot s \\ e &= 4,80654 \cdot 10^{-10} stc, m_e = 9,10938 \cdot 10^{-28} g \end{aligned} \quad (3.43)$$

obteremos,

$$|\Delta E_{fs}| = 2,90201 \cdot 10^{-16} ergs \quad (3.44)$$

e

$$|\Delta E_B| = 9,28045 \cdot 10^{-21} B. \quad (3.45)$$

Desta forma, impondo $|\Delta E_B| \ll |\Delta E_{fs}|$, teremos $B \ll 3,12701 \cdot 10^4 G$. Neste sentido, adotaremos como campo fraco, $B \lesssim 10^3 G$.

Capítulo 4

Efeito Zeeman Anômalo no Espaço NC

Neste capítulo, apresentaremos o estudo do efeito de não comutatividade em mecânica quântica através do efeito Zeeman anômalo. Assim, vamos analisar os efeitos que o espaço NC introduz nas correções perturbativas de primeira ordem das energias do termo Zeeman e de spin-órbita. Veremos que o espaço NC introduz uma contribuição orbital ao potencial Coulombiano. A partir de tal contribuição, iremos propor um hamiltoniano inédito, para descrever o efeito Zeeman anômalo para átomo de hidrogênio no espaço NC. Em seguida, obteremos uma nova expressão para os fatores de Landé orbital e de spin definidos em espaço NC. Por fim, utilizando-se do valor experimental para fator g de spin, nós iremos impor um limite superior para o parâmetro de não comutatividade espacial. Para tanto, utilizaremos o conceito de campo fraco desenvolvido no capítulo 2.

4.1 Formulação do Hamiltoniano NC

O hamiltoniano não relativístico para o átomo de hidrogênio submetido a um campo magnético, tem a seguinte forma no espaço NC:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2m_e} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right) \right]^2 + V(\hat{r}). \quad (4.1)$$

Consideraremos primeiramente as manipulações do termo de energia cinética. Neste sentido, sabemos que a seguinte expressão,

$$\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right) \right]^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{e^2}{c^2} \hat{\mathbf{A}}^2 - \frac{2e}{c} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (4.2)$$

mantém a mesma forma da expressão (3.9) obtida para o espaço comutativo usual. Além disso, temos considerado o gauge de Coulomb e que o potencial vetor mantém a mesma forma do caso comutativo usual,

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}) = \left(\frac{-B\hat{y}}{2}, \frac{B\hat{x}}{2}, 0 \right). \quad (4.3)$$

De fato, temos considerado que o campo magnético é uniforme e que o mesmo não sofre os efeitos do espaço NC. Portanto, usando (2.12) e (4.3) é fácil checar que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}} &= \frac{B^2}{4}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \\ &= \frac{B^2}{4}(x^2 + y^2) + \frac{B^2\Theta_z^2}{64\hbar^2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{B^2\Theta_z}{8\hbar}L_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \frac{B}{2}(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) \\ &= \frac{B}{2}L_z - \frac{B\Theta_z}{8\hbar}(p_x^2 + p_y^2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Finalmente, usando (4.2), (4.4) e (4.5) o hamiltoniano (4.1) tomará a seguinte forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\tilde{m}}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{p_z^2}{2m_e} + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2(x^2 + y^2)}{2} - \tilde{\omega}L_z - \frac{eBS_z}{m_e c} + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.6)$$

em que,

$$\tilde{m} = \frac{m_e}{\left(1 + \frac{eB\Theta_z}{8c\hbar}\right)^2}, \quad \tilde{\omega} = \frac{eB}{2\tilde{m}c \left(1 + \frac{eB\Theta_z}{8c\hbar}\right)}. \quad (4.7)$$

Agora vamos explorar o termo de potencial do hamiltoniano. Assumindo que $V(\hat{\mathbf{r}}) = V_c(\hat{\mathbf{r}}) + V_{LS}(\hat{\mathbf{r}})$, representam as contribuições do potencial de Coulomb $V_c(\hat{\mathbf{r}})$ e do potencial de spin-órbita $V_{LS}(\hat{\mathbf{r}})$, definidos no espaço NC. Neste sentido, o termo de Coulomb será:

$$\begin{aligned} \hat{V}_c(\hat{\mathbf{r}}) &= -\frac{Ze^2}{\hat{r}} \\ &= -\frac{Ze^2}{\left| \mathbf{r} - \frac{1}{4\hbar} \mathbf{p} \times \boldsymbol{\Theta} \right|}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

O campo elétrico experimentado pelo elétron é agora definido em termos das coordenadas de posição não comutativas,

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{e}\hat{\nabla}\hat{V}_c(\hat{r}) \quad (4.9)$$

e conseqüentemente o campo magnético efetivo será dado por

$$\hat{\mathbf{B}}_{ef} = -\frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{E}}}{m_e c} = -\frac{1}{m_e c e} \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}_c(\hat{r})}{dr} \mathbf{L} . \quad (4.10)$$

Desde que o momento magnético do elétron μ seja dado por

$$\mu = \frac{e\mathbf{S}}{m_e c} \quad (4.11)$$

o potencial de spin-órbita será representado em sua forma NC por

$$\hat{V}_{LS}(\hat{r}) = -\mu \cdot \hat{\mathbf{B}}_{ef} = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}_c(\hat{r})}{dr} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) . \quad (4.12)$$

Assim como no caso comutativo, o fator $\frac{1}{2}$ designa a correção de Thomas. Por outro lado, assim como foi observado pelo Alavi [55], da equação (2.8), é assumido que $\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e então $\hat{\nabla} = \nabla$. Desta forma $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$, pois a não comutatividade do espaço não tem efeito sobre o spin.

O parâmetro NC Θ pode se manifestar somente em uma escala de comprimento muito pequena quando comparada com a escala básica definida pelo comprimento de Planck [56]. Neste sentido, vale destacar que, em teoria de Campos, usualmente se escreve $\Theta_{ij} = \frac{1}{\Lambda_{NC}^2} \tilde{\Theta}_{ij}$, onde $\tilde{\Theta}_{ij}$ é um parâmetro adimensional e da ordem da unidade, de forma que Λ_{NC} representa uma escala de energia característica para a teoria não comutativa, a qual é necessariamente muito grande. Conseqüentemente, assumindo que o parâmetro NC seja muito pequeno, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{r}} &= \frac{1}{\left[\left(\mathbf{r} - \frac{1}{4\hbar} \mathbf{p} \times \Theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{r \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \Theta)}{2\hbar r^2} + \frac{(\mathbf{p} \times \Theta)^2}{16\hbar^2 r^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\Theta \cdot \mathbf{L}}{4\hbar r^2} \right) + O(\Theta^2) \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\Theta \cdot \mathbf{L}}{4\hbar r^3} + O(\Theta^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\frac{1}{\hat{r}^3} = \frac{1}{\left[\left(\mathbf{r} - \frac{1}{4\hbar} \mathbf{p} \times \Theta \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^3 \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Theta})}{2\hbar r^2} + \frac{(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Theta})^2}{16\hbar^2 r^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{L}}{4\hbar r^2} \right) + O(\Theta^2) \\
&= \frac{1}{r^3} + \frac{3\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{L}}{4\hbar r^5} + O(\Theta^2).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Desta forma, os potenciais de Coulomb e de spin-órbita se tornarão, respectivamente,

$$V_c(\hat{r}) = -\frac{Ze^2}{r} \left(1 + \frac{\Theta_z L_z}{4\hbar r^2} \right) + O(\Theta^2) \tag{4.15}$$

e

$$V_{LS}(\hat{r}) = \frac{Ze^2}{2m_e^2 c^2 r^3} \left(1 + \frac{3\Theta_z L_z}{4\hbar r^2} \right) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) + O(\Theta^2). \tag{4.16}$$

Para resumir, o hamiltoniano (4.6) pode ser representado pelos seguintes termos:

$$\hat{H}_0 = \frac{p_z^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{r} \tag{4.17}$$

$$\hat{H}_{HO} = \frac{1}{2\tilde{m}}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{4.18}$$

$$\hat{H}_B = -\tilde{\omega}(aL_z + bS_z) + O(\Theta^2) \tag{4.19}$$

$$\hat{H}_{LS}(\hat{r}) = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{Ze^2}{r^3} \left(1 + \frac{3\Theta_z L_z}{4\hbar r^2} \right) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) + O(\Theta^2) \tag{4.20}$$

em que,

$$b = \frac{2}{1 + \frac{eB\Theta_z}{8c\hbar}}, \quad a = \frac{m_e c Z e \Theta_z b}{4\hbar B r^3} + 1. \tag{4.21}$$

O hamiltoniano (4.17) descreve o elétron na presença do potencial coulombiano e, com movimento numa direção paralela ao campo magnético. O hamiltoniano (4.18) descreve o elétron na presença do potencial de oscilador harmônico bidimensional, com massa $\tilde{m}$, frequência angular $\tilde{\omega}$ e movimento numa direção perpendicular ao campo $\mathbf{B}$. Contudo, para o nosso caso, em que o campo magnético é fraco, o efeito do potencial de tal oscilador harmônico se torna desprezível. Por fim, as equações (4.19) e (4.20) são, respectivamente os hamiltonianos NC para o efeito Zeeman anômalo e para a interação de spin-órbita.

4.2 Correção para o espectro NC do efeito Zeeman anômalo

Como foi apresentado no capítulo anterior, no limite de campo magnético externo fraco, a contribuição do termo Zeeman deve ser tratado como uma pequena perturbação. Assim, pela teoria de perturbação de primeira ordem, a correção de Zeeman para a energia é:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{E}_B &= \langle nljm_j|\hat{H}_B|nljm_j\rangle \\ &= -\frac{\tilde{\omega}_m cZe\Theta_z b}{4\hbar B} \left\langle \frac{L_z}{r^3} \right\rangle - \tilde{\omega}\langle L_z \rangle - \tilde{\omega}b\langle S_z \rangle\end{aligned}\quad (4.22)$$

e, levando em conta (3.22) e (3.23) teremos

$$\begin{aligned}\Delta\hat{E}_B &= -\tilde{\omega}\hbar m_j \left[\left(\frac{m_e cZe\Theta_z b}{4\hbar B} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle + 1 \right) \left(\frac{j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)}{2j(j+1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + b \left(\frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right) \right] \\ &= -\tilde{\omega}\hbar m_j \tilde{g}\end{aligned}\quad (4.23)$$

sendo $\tilde{g}$ o fator de Landé no espaço NC. Quando fazemos $\Theta_z = 0$ na expressão (4.23), o fator $\tilde{g}$ retorna para o caso comutativo usual dado pela equação (3.25). Além disso, observe que o fator de Landé no espaço NC difere do caso comutativo, principalmente, por sua dependência com o número quântico principal.

Por outro lado, assim como no caso do termo de spin-órbita tratado no capítulo 2, o primeiro termo na equação (4.23) é indeterminado para $l = 0$. Esta singularidade é meramente aparente porque isto surge do fato que temos negligenciado a energia potencial do elétron com respeito para $m_e c^2$, mas isto não é verdade no limite $r \rightarrow 0$. De fato, foi mostrado em [62] que o denominador $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$ é finito nesta circunstância, tendo em vista que pode ser substituído por $\langle r^{-3}(1 - a_0\alpha^2/2r) \rangle$.

4.3 Expressão não comutativa para os fatores de Landé Orbital e de Spin

Nesta seção, obteremos os fatores g orbital e de spin para o elétron. Pela equação (4.23) teremos que o fator de Landé no espaço NC é:

$$\tilde{g} = \left(\frac{m_e cZe\Theta_z b}{4\hbar B} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle + 1 \right) \left(\frac{j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)}{2j(j+1)} \right) +$$

$$+ b \left(\frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right). \quad (4.24)$$

Para o caso de momento puramente orbital $j = l$ e $s = 0$, então:

$$\tilde{g}_l = \frac{m_e c Z e \Theta_z b}{4 \hbar B} \left\langle r^{-3} \left(1 - \frac{a_0 \alpha^2}{2r} \right) \right\rangle + 1. \quad (4.25)$$

O primeiro termo em (4.25) reflete a não comutatividade do espaço. Obviamente, quando $\Theta = 0$, então $\tilde{g}_l = g_l = 1$, nosso resultado retorna para o caso do espaço comutativo. Isolando o parâmetro NC, teremos:

$$\Theta_z = \frac{-B \Delta \tilde{g}_l}{e(8c\hbar)^{-1} [B^2 \Delta \tilde{g}_l - 4m_e Z c^2 \langle r^{-3} (1 - a_0 \alpha^2 / 2r) \rangle]}. \quad (4.26)$$

Considerando que o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio ocorre no limite de campo magnético fraco $B \lesssim 10^3 G$. Então, nos podemos observar que o parâmetro NC para o caso de momento puramente orbital é aproximadamente linear ao campo magnético,

$$\Theta = |\Theta_z| \approx \frac{B |\Delta \tilde{g}_l|}{m_e c Z e (2\hbar)^{-1} \langle r^{-3} (1 - a_0 \alpha^2 / 2r) \rangle} \quad (4.27)$$

com $|\Delta \tilde{g}_l| = |\tilde{g}_l - 1|$ sendo a precisão experimental para o fator g orbital.

Para o caso de momento puramente de spin $j = s$ e $l = 0$, o primeiro termo na equação (4.24) será nulo, pois no termo $\langle \frac{L_z}{r^3} \rangle$, o numerador L_z se anula exatamente para $l = 0$ enquanto que o denominador $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$ é finito neste limite. Então, para um momento puramente de spin, o fator de Landé será:

$$\tilde{g}_s = b = \frac{2}{1 + \frac{eB\Theta_z}{8c\hbar}}. \quad (4.28)$$

Observem que o efeito de não comutatividade está embutido no denominador, o qual é ligeiramente diferente da unidade, e isto faz com que o fator g_s seja deformado em relação ao espaço comutativo usual. Obviamente, quando $\Theta_z = 0$, então $\tilde{g}_s = g_s = 2$, que é exatamente o resultado do caso comutativo usual. Isolando o parâmetro NC, teremos:

$$\Theta_z = \frac{c\hbar}{eB} \left(\frac{-8\Delta \tilde{g}_s}{1 + \Delta \tilde{g}_s} \right) \approx \frac{c\hbar}{eB} (-8\Delta \tilde{g}_s) \quad (4.29)$$

com $\Delta \tilde{g}_s = \frac{\tilde{g}_s - 2}{2}$ sendo a precisão experimental para o fator de Landé de spin.

4.4 Estimação fenomenológica para o efeito de não comutatividade espacial 32

A equação (4.29) mostra que Θ_z deve ser negativo, no entanto trata-se apenas da componente de um vetor. Desta forma, o parâmetro NC permanecerá positivo $|\Theta| = |\Theta_z| = \Theta$,

$$\Theta = \frac{c\hbar}{eB} (8\Delta\tilde{g}_s). \quad (4.30)$$

Todavia, o sinal negativo na componente z do vetor Θ , faz com que a deformação causada pelo espaço NC, neste caso, seja interpretada como uma expansão. Ou seja, o efeito de não comutatividade age no sentido de aumentar ligeiramente o valor de algumas constantes. É o que ocorreu por exemplo com a massa do elétron em (4.7) e o mesmo acontece com o fator de Landé de spin, em (4.28). Por outro lado, este resultado mostra que o parâmetro de não comutatividade diminui quanto melhor for a precisão na medida do fator g de spin. Além disso, o resultado (4.30) sugere que o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio, no caso de momento puramente de spin, têm uma estrutura similar aos níveis de baixa energia de Landau, o qual também sugere uma possível conexão entre o parâmetro NC Θ e o campo magnético externo B , $\Theta \propto B^{-1}$. Neste sentido, nosso resultado é muito coerente com vários resultados obtidos na literatura, e muitos autores têm utilizado tal relação de proporção, a saber, por exemplo [20], [27], [63]-[69].

4.4 Estimação fenomenológica para o efeito de não comutatividade espacial

Nesta seção iremos estimar o parâmetro de não comutatividade espacial. Como foi observado na introdução, na literatura, existe uma grande quantidade de trabalhos dando um limite para o parâmetro NC. Além disso, tais estimações tem demonstrado que tal parâmetro não é o mesmo para todas as partículas, como foi bem observado pelo Stern [57]. Contudo, sendo o elétron no átomo de hidrogênio a partícula que estamos tratando, vale destacar, neste sentido, os trabalhos do Chaichian [33] e Alavi [55], os quais obtiveram os contornos $\Theta \lesssim (10TeV)^{-2}$ e $\Theta \lesssim (TeV)^{-2}$, a partir do limite teórico do Lamb shift e Hyperfine splitting no átomo de hidrogênio. Por outro lado, um experimento de alta precisão atômica no Lamb shift para o átomo de hidrogênio foi analisado por Stern [57] dando o contorno $\Theta \lesssim (6GeV)^{-2}$.

Usando os dados (3.43) na equação (4.27), teremos:

4.4 Estimação fenomenológica para o efeito de não comutatividade espacial 33

$$\Theta = |\Theta_z| \approx \frac{B|\Delta\tilde{g}_l|}{6,22351\langle r^{-3}(1 - a_0\alpha^2/2r) \rangle}. \quad (4.31)$$

Considerando as recentes medidas de alta precisão dos fatores g e o experimento clássico de Kusch e Foley [70] que determinaram $(\delta_s - 2\delta_l)$ da relação dos fatores g dos estados atômicos do Ga e Na (obtidos a partir de seus espectros Zeeman), tem sido possível concluir que o fator g orbital do elétron é diferente de seu valor clássico $g_l = 1$ [71]. Um valor provável do fator g orbital é $g_l = 1 - \delta_l$ onde $\delta_l = (0,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$. Consequentemente, usando $B \sim 10^3 G$ e a precisão relativa $|\Delta\tilde{g}_l| \lesssim 10^{-5}$, para o estado fundamental $\langle r^{-3}(1 - a_0\alpha^2/2r) \rangle = 2,50047 \cdot 10^{26}$ [35], teremos:

$$\Theta \lesssim (8GeV)^{-2} \quad (4.32)$$

ou

$$\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-15} cm. \quad (4.33)$$

Este valor é bem próximo de uma das medidas mais precisas obtidas recentemente pelo Stern [57].

Por outro lado, usando os dados (3.43) na equação (4.30), obtêm-se:

$$\Theta = 5,26202 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\Delta\tilde{g}_s}{B} \right). \quad (4.34)$$

De fato, para estimar um contorno para o parâmetro NC acima, podemos usar o valor experimental para o fator g de spin do elétron. Neste sentido, muitas medidas precisas do fator g_s do elétron foram obtidas na literatura, por exemplo, o valor $g_s/2 = 1,00115965218073(28)$ foi obtido por Hanneke [58]. Assim, usando $B \sim 10^3 G$ e a precisão relativa $\Delta\tilde{g} \lesssim 10^{-14}$, teremos:

$$\Theta \lesssim (0,01GeV)^{-2} \quad (4.35)$$

ou

$$\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-12} cm. \quad (4.36)$$

Este valor é muito maior que o limite obtido por alguns experimentos precisos. Contudo, tal valor pode ser melhorado considerando uma melhor precisão no valor experimental para o fator de Landé de spin. Além disso, dada a equivalência que a expressão (4.30) possui com os níveis de baixa energia do problema de Landau, é possível sugerir que o parâmetro de não comutatividade para o caso puramente de spin não é tão preciso tendo em vista o fato de que o efeito Zeeman anômalo ocorre no regime de campo magnético fraco, diferente do problema de Landau que ocorre no regime de campo magnético forte.

4.5 Lamb shift e o parâmetro NC

O modelo relativístico de Dirac para a estrutura fina do átomo de hidrogênio ainda não concorda inteiramente com os experimentos. Isto pode ser visto, por exemplo, a partir da equação (3.42) que depende somente de j , mas não de l , e desta forma dois valores diferentes de l poderão dar uma mesma energia. Por exemplo, a aparente degenerescência que existe entre os níveis $2S_{\frac{1}{2}}$ ($n = 2, l = 0, j = \frac{1}{2}$) e $2P_{\frac{1}{2}}$ ($n = 2, l = 1, j = \frac{1}{2}$) não ocorre na realidade. Em 1947 Lamb e Rutherford apresentaram um experimento que demonstrou que existia uma separação nesses níveis. Tal diferença de energia, ficou conhecida como Lamb shift. Além disso, eles descobriram que o nível $2S_{\frac{1}{2}}$ está acima do nível $2P_{\frac{1}{2}}$ por cerca de um décimo do desdobramento spin-órbita.

O Lamb shift [72] é explicado em termos da eletrodinâmica quântica, a qual, prediz que os efeitos de flutuações do vácuo fazem com que o elétron oscile em torno de um ponto de equilíbrio, de tal forma que a distribuição de cargas é deformada em relação a situação sem flutuações do vácuo. De fato, tais flutuações fazem com que a carga do elétron não seja constante. Assim, se medirmos o valor de sua carga de diferentes distâncias, iremos obter valores diferentes e isto implica que o elétron seja submetido a um potencial coulombiano que é não uniforme. Neste sentido, a posição média do elétron devido ao efeito do campo eletrostático não uniforme com o campo eletromagnético oscilante da flutuação do vácuo faz com que a posição média do elétron em relação ao núcleo seja diferente daquela sem a energia de ponto zero, alterando assim o valor médio de sua energia. Sendo a distribuição eletrônica diferente para diferentes valores de l , o efeito é sentido de forma diferente para os orbitais S e P . Considerando que o elétron no orbital S tem maior probabilidade de ser encontrado próximo ao núcleo que o elétron no orbital P ,

então, as variações do potencial médio do primeiro são maiores que no segundo, elevando assim, o nível de energia do orbital S ligeiramente acima do nível do orbital P .

Nesta seção, iremos estimar o parâmetro de não comutatividade através da precisão experimental para o Lamb shift obtida na literatura.

Na ausência do campo magnético externo, não existirá o efeito Zeeman e consequentemente prevalecerá a interação spin-órbita. Contudo, vimos que o espaço NC introduz um termo de correção orbital para o espectro Zeeman. Portanto, na ausência do campo magnético externo, teremos:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{NC} &= - \left\langle nlsjm_j \left| \frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right| nlsjm_j \right\rangle \\
 &= - \frac{m_e^3 \Theta_z}{4\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{\hbar} \right)^4 m_j \left[\frac{j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)}{2j(j+1)} \right] \frac{1}{n^3 l(l + \frac{1}{2})(l+1)} \\
 &= - \frac{mc^2}{4} (Z\alpha)^4 (2\pi)^2 \frac{\Theta_z}{\lambda_e^2} m_j \left[\frac{j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)}{2j(j+1)} \right] f_{n,l}. \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Observem que a expressão (4.37) é similar ao acoplamento spin-órbita (3.19), onde $(2\pi)^2 \frac{\Theta}{\lambda_e^2}$ é substituído por $\frac{\mathbf{S}}{\hbar}$, com $\lambda_e = \frac{h}{mc}$ sendo o comprimento de onda de Compton para o elétron. Neste sentido, temos fortes indícios para acreditar que o spin possa estar associado ao efeito de não comutatividade. Na verdade, tal idéia já foi explorada por alguns autores [56], [59] e [60]. Tal relação revela que a própria estrutura do espaço sofre uma deformação devido à presença do spin.

Como foi observado pelo Chaichian [33], a transição (Lamb shift) dos níveis $2P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 2S_{\frac{1}{2}}$, difere do caso comutativo usual no qual o shift depende somente do número quântico l (isto pode ser visto tomando como referência a expressão do acoplamento spin-órbita) e todas as correções são devido ao efeitos de loop da teoria de campos. O Lamb shift para o átomo de hidrogênio no espaço NC, além dos efeitos de loop, depende do número quântico m_j . De fato, existirá um novo canal de transição que é aberto devido a não comutatividade: $2P_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 2P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$, com notação espectroscópica $nl_j^{m_j}$ para os níveis de energia. Assim, o Lamb shift é agora separado em duas partes $2P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rightarrow 2S_{\frac{1}{2}}$ e $2P_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 2S_{\frac{1}{2}}$.

Então, o Lamb shift $2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 2P_{\frac{1}{2}}$ será:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{Lamb}^{NC} &= \Delta E_{n=2, l=0, m_j}^{NC} - \Delta E_{n=2, l=1, m_j}^{NC} \\
 &= \frac{m_e c^2}{72} (2\pi)^2 (Z\alpha)^4 \frac{\Theta_z}{\lambda_e^2} m_j \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

com, $m_j = \pm \frac{1}{2}$.

Agora, nos compararemos este resultado com uma das mais atuais precisões experimentais para o Lamb shift, $0,08kHz$, obtida pelo Eides [61]. Convertendo tal precisão para unidades de energia, no sistema Gaussiano, teremos:

$$\Delta E = h\Delta\nu = (5,30084 \cdot 10^{-27} \text{ergs} \cdot s) \cdot (80s^{-1}) = 5,30084 \cdot 10^{-25} \text{ergs} \quad (4.39)$$

que comparada com (4.38) resulta em,

$$\Theta \lesssim (3GeV)^{-2} \quad (4.40)$$

ou

$$\sqrt{\Theta} \lesssim 10^{-15} \text{cm}. \quad (4.41)$$

Observem que este resultado é muito próximo ao valor obtido para o caso do fator de Landé orbital.

Capítulo 5

Considerações Finais

A introdução da não comutatividade como uma proposta física dos fenômenos foi apresentada em 1930 por Heisenberg, que sugeriu a introdução de relações de comutação para as coordenadas do espaço-tempo: surgia assim, a proposta das coordenadas não comutativas. Atualmente a presença da não comutatividade é muito grande no desenvolvimento das teorias de cordas, no estudo do espaço-tempo, nas propostas de violação das simetrias em física de partículas e campos, e em fenômenos em matéria condensada, como a supercondutividade e o efeito Hall quântico.

Nesta dissertação, estudamos alguns aspectos e consequências do efeito de não comutatividade espacial em mecânica quântica. Para tanto, utilizamos o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio, dentro do formalismo do espaço NC. Neste ponto de vista, no capítulo 1, abordamos, principalmente, alguns dos principais pontos de uma geometria não comutativa que se origina no mapeamento de Weyl, que é uma das principais ferramentas que relaciona uma função no espaço comutativo ao espaço NC. Vimos que o produto de duas funções em coordenadas não comutativas é deformado pelo produto estrela de Moyal, o que leva ao mapeamento via Bopp's shift. Munidos de tal mapeamento foi possível propor uma mecânica quântica formulada no espaço NC. Contudo, vimos que existe uma desvantagem neste tratamento, já que passa a existir relações de incerteza nas variáveis introduzidas pelo Bopp's shift e consequentemente a interpretação da teoria quântica se torna mais difícil. Isto pode se tornar mais evidente para outros potenciais mais complicados, o que pode levar para hamiltonianos altamente não locais, uma vez que o Bopp's shift é apresentado. Assim, temos verificado que a noção de localização da partícula se perde.

Como foi mencionado, os efeitos de não comutatividade podem se manifestar em sistemas de baixas energias, desta forma, o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio é um ambiente fértil neste sentido, o qual envolve energias da ordem de 10^{-17}ergs , o que é relativamente pequena. Neste sentido, abordamos inicialmente o caso comutativo, onde temos calculado por teoria de perturbação de primeira ordem a correção para o espectro Zeeman anômalo no átomo de hidrogênio. Além disso, consideramos o limite tênue que existe entre o efeito Zeeman anômalo (regime de campo fraco) e o efeito Paschen-Back (regime de campo forte). Também calculamos a correção perturbativa para o efeito da interação spin-órbita, já que, o efeito Zeeman anômalo ocorreria quando a energia deste termo fosse bem menor que a energia do termo de spin-órbita. Contudo, tal comparação foi feita no estado fundamental, onde o termo de spin-órbita sofre uma divergência aparente. Isto nos levou à introduzir a expressão geral da energia de estrutura fina, que é nada mais que o termo de spin-órbita com a correção relativística. Assim, comparando as expressões para as energias do termo Zeeman e de estrutura fina, fundamentamos que campo fraco é $B \lesssim 10^3 G$.

No capítulo 3 implementamos o formalismo NC para o efeito Zeeman anômalo no átomo de hidrogênio. Vimos que tal formalismo modifica o hamiltoniano do sistema, que passa a ter um termo do potencial de um oscilador harmônico bidimensional NC. Ademais, o espaço NC introduz um termo de correção NC para o termo de efeito Zeeman e para o potencial de spin-órbita. Realmente, isto ocorre porque o efeito de não comutatividade age no sentido de modificar o potencial de Coulomb, introduzindo uma contribuição orbital que de fato propomos como uma correção para o termo do efeito Zeeman. Além disso, utilizando a teoria de perturbação de primeira ordem fizemos a correção para o espectro Zeeman NC, e assim obtivemos a expressão geral para o fator de Landé em espaço NC, o qual, diferente do espaço comutativo usual, possuindo uma dependência com o estado excitado do elétron. Doravante, obtivemos os casos específicos dos fatores de Landé orbital e de spin. No caso de momento puramente orbital o parâmetro NC é diretamente proporcional ao campo magnético externo. Por outro lado, para o caso de momento puramente de spin o parâmetro NC é inversamente proporcional ao campo magnético externo, o que de fato está de acordo com muitos trabalhos na literatura, os quais usam tal relação de proporção, a saber por exemplo, o problema de Landau. Além disso, tal resultado nos levou a definir a componente z do parâmetro NC como sendo negativa. E tal definição nos levou a concluir que o efeito de não comutatividade deforma o fator de Landé de spin da mecânica quântica usual através de uma expansão. Ou seja, é esperado que seu valor seja ligeiramente maior do

que 2, o que é muito razoável se considerarmos as previsões da eletrodinâmica quântica. Em contrapartida, concluímos também, pela expressão que obtivemos para o fator de Landé no caso puramente orbital, que se a componente z do parâmetro NC é negativa, então, o fator de Landé orbital no formalismo NC deve ter seu valor ligeiramente menor que 1, o que de fato está de acordo com o clássico experimento de Kusch e Foley.

Ainda no capítulo 3 fizemos uma avaliação fenomenológica do efeito de não comutatividade espacial. Para o caso puramente orbital, utilizamos a precisão relativa para o fator de Landé orbital prevista pelo Kusch e Foley, $\Delta\tilde{g}_l \sim 10^{-5}$ e encontramos um limite para o parâmetro NC de $\Theta \lesssim (8\text{GeV})^{-2}$. Tal resultado é muito razoável se compararmos com uma das medidas mais precisas obtidas recentemente pelo Stern. Neste ponto de vista, para o caso puramente de spin, utilizamos a precisão relativa para o fator de Landé de spin medida no experimento de Hanneke, $\Delta\tilde{g} \sim 10^{-14}$ e encontramos um limite para o parâmetro NC de $\Theta \lesssim (0,01\text{GeV})^{-2}$. Este resultado é muito maior que o previsto por alguns experimentos precisos. Contudo, tal valor pode ser melhorado quanto melhor for a precisão relativa para o fator de Landé de spin.

Por fim, ainda no capítulo 3 resolvemos investigar o efeito de não comutatividade sobre o espectro do átomo de hidrogênio no caso de campo magnético nulo. Neste sentido, a contribuição não comutativa atua como uma correção ao espectro de estrutura fina. Surpreendentemente, tal correção é análoga ao termo de spin-órbita pela substituição de $(2\pi)^2 \frac{\Theta}{\chi_e^2}$ por $\frac{\mathbf{S}}{\hbar}$. Além da relação de proporcionalidade entre o parâmetro NC e o módulo do vetor spin, isto nos leva a crer que o spin deforma o espaço em nível quântico, implicando efeitos na mecânica quântica. Doravante, nós temos calculado o Lamb shift NC para a transição $2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 2P_{\frac{1}{2}}$ e comparando com um resultado experimental de alta precisão espectroscópica para o átomo de hidrogênio, obtivemos um novo limite para o parâmetro de não comutatividade, $\Theta \lesssim (3\text{GeV})^{-2}$. Este resultado é bem próximo ao que obtivemos para o caso puramente orbital.

Como perspectivas podemos fazer uma análise da estrutura hiperfina no átomo de hidrogênio. Desta forma, levaríamos em conta o spin nuclear para assim propor correções para o fator g do próton. Além disso, os termos adicionais devido a correção hiperfina podem melhorar os valores obtidos para o parâmetro NC. De fato, a própria precisão para o espectro hiperfino é atualmente muito boa, da ordem de 10^{-12} . Uma outra proposta é utilizar o formalismo relativístico, tal como a equação de Dirac para obter as correções não comutativas para o espectro de energia do átomo de hidrogênio. Sobretudo poderíamos também estudar o efeito Zeeman anômalo para o átomo de hidrogênio no formalismo do espaço de fase não comutativo. Neste sentido, poderíamos

medir também os efeitos de não comutatividade do momento linear. É claro que isto complicaria muito o problema pois introduziria novas relações de incerteza, contudo é perfeitamente possível tratar tal formalismo assim como fizemos para o espaço NC. Sem mais delongas, poderíamos também tratar toda a problemática no espaço-tempo NC, considerando que o tempo é uma variável não comutativa como foi mencionado na introdução, e assim medir seu efeito de não comutatividade e as quebras de simetrias associadas a tal tratamento.

Apêndice A

O Produto Estrela

O procedimento de quantização de Weyl [48] fornece um formalismo que associa a álgebra de coordenadas não comutativas $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ com a álgebra de funções de coordenadas comutativas $(\mathcal{A}, \star)$. Nos definimos o mapeamento $W : \mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ onde um elemento de $\hat{\mathcal{A}}$ está associado com uma função $f(x^1, \dots, x^n) \equiv f(x)$ de $\mathcal{A}$:

$$f(\hat{x}) = W(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}_i} \quad (\text{A.1})$$

em que $\tilde{f}(k)$ é a transformada de Fourier de $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x f(x) e^{-ik_i x_i}. \quad (\text{A.2})$$

A multiplicação dos dois operadores $W(f)$ e $W(g)$, obtidos de (A.1), produz outro operador $W(f \star g)$:

$$W(f) \cdot W(g) = \hat{f}(\hat{x}) \cdot \hat{g}(\hat{x}) = W(f \star g), \quad (\text{A.3})$$

com $f \star g \in (\mathcal{A}, \star)$, uma função clássica bem definida, como nos mostraremos agora. Substituindo (A.1) em (A.3) nos obtemos:

$$\begin{aligned} W(f) \cdot W(g) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}_i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n p \tilde{g}(p) e^{ip_j \hat{x}_j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \int d^n p \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{ik_i \hat{x}_i} e^{ip_j \hat{x}_j}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Já que os expoentes não devem comutar é preciso usar a fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (CBH)

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}]) + \dots} \quad (\text{A.5})$$

onde $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são dois operadores não comutativos. No caso do espaço NC os termos com mais de um comutador desaparecem, então, teremos:

$$\begin{aligned} W(f) \cdot W(g) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \int d^n p \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{i(k+p)_i \hat{x}_i - \frac{i}{2} \Theta_{ij} k_i p_j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \int d^n q \tilde{f}(k) \tilde{g}(q-k) e^{iq_i \hat{x}_i - \frac{i}{2} \Theta_{ij} k_i (q-k)_j}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Na última linha foi feita uma mudança de variável $(k+p)_i = q_i$. Comparando esta expressão com

$$W(f \star g) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n q \widetilde{f \star g}(q) e^{iq_i \hat{x}_i} \quad (\text{A.7})$$

obteremos,

$$\widetilde{f \star g}(q) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{f}(k) \tilde{g}(q-k) e^{-\frac{i}{2} \Theta_{ij} k_i (q-k)_j}. \quad (\text{A.8})$$

O último passo é obter a transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n q \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{f}(k) \tilde{g}(q-k) e^{-\frac{i}{2} \Theta_{ij} k_i (q-k)_j} \right) e^{-iq_j x_j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n p \int d^n k \tilde{f}(k) e^{-ik_j x_j} e^{-\frac{i}{2} k_i \Theta_{ij} p_j} \tilde{g}(p) e^{-ip_j x_j}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Na última linha foi feita uma mudança de variável $(q-k)_j = p_j$. Para avaliar esta integral faremos uma expansão em termos do parâmetro não comutativo Θ_{ij} , calculando termo por termo,

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} \times \\ &\times \left(1 - \frac{i}{2} k^i \Theta_{ij} p_j + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 k_{i_1} k_{i_2} \Theta_{i_1 j_1} \Theta_{i_2 j_2} p_{j_1} p_{j_2} + \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} \times \\ &\times \left(1 + \frac{i}{2} (-ik_i) \Theta_{ij} (-ip_j) + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 (-ik_{i_1}) (-ik_{i_2}) \Theta_{i_1 j_1} \Theta_{i_2 j_2} (-ip_{j_1}) (-ip_{j_2}) + \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} \times \\ &\times \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \Theta_{i_1 j_1} \Theta_{i_2 j_2} \frac{\partial}{\partial y_{j_1}} \frac{\partial}{\partial y_{j_2}} + \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) e^{-ik_j x_j} e^{-ip_j y_j} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(k) e^{-ik_j x_j} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{g}(p) e^{-ip_j y_j}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Resultando na seguinte expressão para o produto estrela de duas funções:

$$(f \star g)(x) = \exp \left[\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right] f(x) g(y) \Big|_{y=x} \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Notações

Uma coordenada não comutativa será identificada pelo símbolo do chapéu em cima do operador. Por exemplo, as coordenadas espaciais ou de posição, serão denotadas por $\hat{x}_i$.

Utilizaremos a seguinte terminologia,

- 1) $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são coordenadas retangulares de posição não comutativas;
- 2) $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}$ é o vetor posição em coordenadas retangulares não comutativas. Seu módulo é $\hat{r} = (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2)^{1/2}$;
- 3) $\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i}$ é a derivada parcial na coordenada de posição não comutativa;
- 4) $\hat{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \hat{z}}$ é o operador nabla em coordenadas retangulares de posições não comutativas;

Referências Bibliográficas

- [1] Wolfgang Pauli, *Scientific Correspondence II*, 15, Ed. Karl Von Meyenn, Spring-Verlag (1985).
- [2] H. Snyder, *Phys. Rev.* **71**, 38-41 (1947).
- [3] M. Douglas, N. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 977-1029 (2001).
- [4] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, *JHEP* **0006**, 044 (2000).
- [5] A. Connes, *Inst. Hautes Études* **62(2)**, 41-144 (1985).
- [6] S. L. Woronowicz, *Inst. Sci. Kyoto* **23**, 117-181 (1987).
- [7] R. J. G. Dunne, *Nucl. Phys. B* **23** (Proc. SU ppl.), 33C (1933).
- [8] R. Jackiw, *Lochlainn O' Raifeartaigh, Fluids, and Noncommuting Fields, Physics*, 0209108.
- [9] R. Peierls, *Z. Phys.* **80**, 763 (1993).
- [10] Paolo Castorina, Giuseppe Riccobene, Dario Zappalà, *Phys. Rev. D* **69**, 105024 (2004).
- [11] S. R. Salinas, W. F. Wreszinski, *Phy. A* **297**, 434-440 (2001).
- [12] Andrzej Sitarz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 5305-5312 (1993).
- [13] L. You-Hua, G. Zi-Ming, *Commun. Theor. Phys.* **46**, 966-968 (2006).
- [14] Ahmad Shariati, Mohammad Khorrami, Amir H Fatollahi, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 285001 (2010).
- [15] Mojtaba Najafizadeh, Mehdi Saadat, *hep-th/1108.4273v1*, (2011).

- [16] F S Bemfica, H O Girotti, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, L539-L547 (2005).
- [17] Jian-zu Zhang, *hep-th/0405135 v1*, (2004).
- [18] F. J. Vanhecke, C. Sigaud, and A. R. da Silva, *Brazilian Journal of Physics* **36**, 194-207 (2006).
- [19] WANG Jian-Hua, LI Kang, Dulat Sayipjamal, *Chin. Phys. C* **32**, 803-806 (2008).
- [20] S. A. Alavi, *hep-th/0709.4163v1*, (2007).
- [21] G. Amelino-Camelia, L. Doplicher, S. Nam, and Y. S. Seo, *Phys. Rev. D* **67**, 085008 (2003); I. Hinchliffe and N. Kersting, *hep-ph/0205040*; G. Amelino-Camelia, G. Mandanici, and K. Yoshida, *hep-th/0209254*; A. Anisimov, T. Banks, M. Dine, and M. Graesser, *Phys. Rev. D* **65**, 085032 (2002).
- [22] N. Seiberg and E. Witten, *JHPE* **09**, 032 (1999).
- [23] Daniela Bigatti, Leonard Susskind, *Phys. Rev. D* **62**, 066004 (2000).
- [24] K. Li, C. Xiāo-Hua, W. Dong-Yang, *Chin. Phys. C* **15**, 2236 (2006).
- [25] S. Cai, T. Jing, G. Guo, R. Zhang, *J. Theor. Phys.* **49**, 1699 (2010).
- [26] S. Dulat, K. Li, *Chin. Phys. C* **32** (2008).
- [27] J. Gamboa, F. Mondez, M. Loewe, J. C. Rojas, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 2075-2078 (2001).
- [28] F. G. Scholtz, L. Gouba, A. Hafver, C. M. Rohwer, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 175303 (2009).
- [29] K. Li, S. Dulat, *Eur. Phys. J. C* **46**, 825 (2006).
- [30] S. Dulat, K. Li, *Mod. Phys. Lett. A* **21**, 2971-2976 (2006).
- [31] K. Li, N. Chamoun, *Chin. Phys. Lett.* **24**, 1183 (2007).
- [32] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Eur. Phys. J. C* **36**, 251 (2004).
- [33] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2716 (2001).
- [34] P. M. Ho and H. C. Kao, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 151602 (2002).

- [35] M. Moumni, A. BenSlama, S. Zaim, *hep-ph/1003.5732v3*, (2011).
- [36] M. Moumni, A. BenSlama, S. Zaim, *hep-ph/1006.4590v3*, (2010).
- [37] K. Li, N. Chamoun, *Chin. Phys. Lett.* **23**, 1122 (2006).
- [38] S. A. Alavi, *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 377 (2007).
- [39] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett. B* **682**, 235 (2009).
- [40] M. Haghghat, F. Loran, *Phys. Rev. D* **67** 096003 (2003).
- [41] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheikh-jabbari, A. Tureanu, *Phys. Lett. B* **527**, 149 (2002).
- [42] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Méndez, J. C. Rojas, *Phys. Rev. D* **66**, 045018 (2002).
- [43] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C* **32**, 583 (2004).
- [44] K. Li, J. Wang, *Eur. Phys. J. C* **50**, 1007 (2007).
- [45] B. Harms, O. Micu, *J. Phys. A* **40**, 10337 (2007).
- [46] K. Ma, S. Dulat, *Phys. Rev. A* **84**, 012104 (2011).
- [47] J. Gamboa, F. Méndez, M. Loewe, J. C. Rojas, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 2075 (2001).
- [48] Weyl H, *Z. Phys* **46**, 1 (1927)
Wigner E P, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [49] Groenewold H J, *Physica* **12**, 405 (1946)
Moyal J E, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45**, 99 (1949).
- [50] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Annals Phys.* **111**, 61 (1978).
- [51] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, New York (1931).
- [52] A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*, USP, São Paulo (2001), p. 340.

- [53] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Company Inc.), (1994), p. 304.
- [54] A. Blom, *Phys. Scr.* **T120**, 90-98 (2005).
- [55] S. A. Alavi, *Phys. Scr.* **78**, 015005 (2008).
- [56] Madone J., *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, (Cambridge: Cambridge University Press), (1999).
- [57] A. Stern, *Phys. Rev. D* **78**, 065006 (2008).
- [58] D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (2008).
- [59] C. Duval, P. A. Horváthy, *Phys. Lett. B* **547**, 306-312 (2002).
- [60] P. A. Horváthy, M. S. Plyushchay, *Phys. Rev. Lett. B* **595**, 547-555 (2004).
- [61] M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.* **342**, 63-261 (2001).
- [62] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Machanics of One- and Two-Electron Atoms*, (Academic Press), NY, (1957).
- [63] M. B. Sedra, A. El Boukili, E. H. Saidi, *hep-th/0610123v2*, (2007).
- [64] Xiao-Jun Wang, Mu-Lin Yan, *JHEP* **03**, 047 (2002).
- [65] F. Delduc, Q. Duret, F. Gieres, M. Lefrançois, *J. Phys.: Conference Series* **103**, 012020 (2008).
- [66] H. R. Christiansen, F. A. Schaposnik, *Phys. Rev. D* **65**, 086005 (2002).
- [67] J. Gamboa, F. Méndez, M. Loewe, J. C. Rojas, *International Journal of Modern Physics A* **17**, 2555-2565 (2002).
- [68] Ömer F. Dayi, Ahmed Jellal, *J. Phys. Math.* **43**, 4592-4601 (2002).
- [69] P. R. Giri, P. Roy, *Eur. Phys. J. C* **57**, 835-839 (2008).
- [70] P. Kusch, H. M. Foley, *Phys. Rev.* **72**, 1256 (1947); H. M. Foley, P. Kusch, *Phys. Rev.* **73**, 412 (1947); P. Kusch, H. M. Foley, *Phys. Rev.* **74**, 250 (1948).

- [71] A. M. Awobode, *Precision Measurement of the Electron/Muon Gyromagnetic Factors*, hep-ph/1002.2739v1 (2010).
- [72] Griffiths, David J., *Introduction To Elementary Particles*, (John Wiley e Sons, Inc.), (1987), p. 154.