Universidade Federal de Sergipe

Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Acadêmico em Matemática

Estabilidade Global e Aplicações ao Modelo Epidemiológico SEIRS

por

Michele Mendes Novais

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

São Cristóvão-SE

Setembro de 2015

Universidade Federal de Sergipe

Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Estabilidade Global e Aplicações ao Modelo Epidemiológico SEIRS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Fábio dos Santos

Michele Mendes Novais

São Cristóvão

2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

N935e

Novais, Michele Mendes
Estabilidade global e aplicações ao modelo epidemiológico SEIRS / Michele Mendes Novais ; orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2015.
52 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Estabilidade (Matemática). 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Equações diferenciais não-lineares. I. Santos, Fábio dos, orient. II. Título.

CDU 517.9

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Estabilidade Global e Aplicações ao Modelo Epidemiológico SEIR

por

Michele Mendes Novais

Aprovada pela banca examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS
Orientador

Débora Lopes da Silva

Prof. Drª. Débora Lopes da Silva- UFS
Primeiro Examinador

Gerson Cruz Araujo

Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo– DMA/UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 11 de setembro de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedicatória

A minha mãe Analice, aos meus irmãos Rangel, Rogério e Diogo e ao meu namorado Fabinho.

Agradecimentos

- Agradeço, em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida, por ter me amparado e dado forças para seguir em frente e me proporcionado mais esta realização.

- A minha mãe Analice Mendes pelo amor, e todo o esforço que fez para que eu estudasse, por me apoiar em todos os momentos.

- Ao professor Fábio dos Santos, por sua orientação e seus ensinamentos, pela paciência, confiança e incentivo que muito contribuiu para que eu conquistasse mais esse título.

- A meu namorado Fábio Lima por ter me ajudado muito, pela paciência e companheirismo.

- Ao meus irmãos Rangel, Rogério e Diôgo

- Às minhas amigas Giovana e Carla, pelos momentos de descontração proporcionados e por sempre estarem dispostas a me ouvir e a me aconselhar.

- Aos professores Débora Lopes da Silva e Gerson Cruz Araujo por comporem a banca examinadora.

- A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROMAT) da UFS, pelos ensinamentos e pelo incentivo.

- Enfim, muito obrigada a todos que contribuíram para que mais uma etapa tão importante da minha vida fosse concluída.

Resumo

Nesta dissertação, forneceremos condições necessárias para que uma solução de equilíbrio assintoticamente estável de uma equação diferencial ordinária autônoma e não linear seja globalmente estável. Uma das condições essenciais consiste numa generalização dos critérios de Bendixson e Dulac para equações diferenciais bidimensionais que é usada para garantir a inexistência de órbitas periódicas, o qual denominamos critério de Bendixson. Forneceremos um novo critério de Bendixson robusto sobre uma C^1 perturbação local, o qual juntamente com o Princípio da Estabilidade Global, garante a estabilidade global de um equilíbrio assintoticamente estável. Usaremos este critério no estudo do comportamento assintótico de um modelo epidemiológico intitulado SEIRS.

Palavras-chaves: Estabilidade Global - Critério de Bendixson - Pontos não-errantes - Epidemiologia - SEIRS.

Abstract

In this dissertation, we provide necessary conditions for an asymptotically stable equilibrium solution of a nonlinear ordinary differential equation be globally stable. An essential condition is a generalization of the criteria of Bendixson and Dulac for tow-dimensional differential equations which is used to ensure the absence of periodic orbits, we call this Bendixson criterion. We provide a new Bendixson criterion robust under C^1 local perturbations, which together with the Global Stability Principle, ensure the global stability of an asymptotically stable equilibrium. We use this criterion in the study of asymptotic behavior of an epidemiological model called SEIRS.

Keywords: Global Stability - Bendixson Criterion - Epidemiology - Nonwandering Points - SEIRS.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, estudaremos um novo critério para estabilidade global de soluções de equilíbrio de equações diferenciais ordinárias não-lineares e autônomas. Se uma EDO possui uma solução periódica no seu retrato de fase, então ela não pode possuir um equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Neste contexto, procuraremos condições que impeçam a existência de soluções periódicas não-constantes. O resultado clássico de Lyapunov aparece como caso particular.

Este critério será usado no estudo do comportamento assintótico de um modelo epidemiológico intitulado SEIRS. Para isso, utilizaremos como principal referência o artigo de Li Y. and Muldowney [11], intitulado *"a geometric approach to global stability problems"* . Este artigo, é uma generalização para dimensões superiores dos clássicos critérios de Bendixson e Dulac para sistemas planares apresentado em dois artigos do mesmo autor, intitulados *"On Bendixson Criterion"* [8] e *"On R.A Smith's autonomous convergence theorem"* [9] e na versão local do Lema de fechamento de Pugh [15].

Este trabalho está dividido em três capítulos, cujos conteúdos descreveremos, sucintamente, a seguir.

O *Capítulo 1*, intitulado *o problema da estabilidade global* está dividido em três seções: na *seção 1.1*, apresentamos as definições e resultados clássicos de estabilidade de soluções de equilíbrio, variedades estáveis e instáveis e na *seção 1.2*, apresentamos as principais propriedades de conjuntos invariantes. Nestas seções, usamos como principais referências [5], [17] e [18]. Na *seção 1.3*, apresentamos o conceito de Critério de Bendixson e Critério Robusto de Bendixson [11] e [9], bem como alguns exemplos clássicos de Critérios de Bendixson. O objetivo dessa seção é apresentar condiçes para que a estabilidade assintótica local de soluções de equilíbrio implique na estabilidade assintótica global. Conceitos como, Medida de Lozinski [4] e segunda componente aditiva [13], bem como suas principais propriedades [2] e [6] também são apresentadas nesta seção com intuito de apresentar um critério de Bendixson, o qual será generalizado no capítulo seguinte.

No *Capítulo 2*, definimos o número denotado por $\bar{q}_2$, para o qual a condição $\bar{q}_2 < 0$, sob algumas hipóteses relativamente simples, fornece um novo critério de Bendixson Robusto sobre uma C^1 perturbação local, que é usado para estabelecer critérios para estabilidade global. O mesmo será importante no estudo do sistema de equações gerado pelo modelo epidemiológico SEIRS. As principais referências deste capítulo são [8] e [11].

No *Capítulo 3*, aplicamos o novo critério de Bendixson ao modelo SEIRS. Segundo CIRINO, "o mecanismo de transmissão de uma doença é conhecido para a maioria das doenças infecciosas"[3]; a estruturação formal de um modelo matemático se faz necessário pelo fato de que as iterações ocorridas na transmissão serem muito complexas. Dessa forma, obtemos simulações que oportunizam experimentar a progressão de uma epidemia. Para definir modelos epidemiológicos em doenças infecciosas, classificamos os indivíduos como Suscetível (S), Exposto ou Latente (E), Infetado (I) e Recuperado (R). Assumimos que a taxa de natalidade e mortalidade são iguais e como consequência, a população total está em equilíbrio. As principais referências utilizadas nesse capítulo são [7], [10], e [19]. Este capítulo foi dividido em 4 seções: na seçãoo3.1 descrevemos o modelo epidemiológico SEIRS, na seçãoo3.2 analisamos as soluções de equilíbrio, na seçãoo3.3 estudamos a estabilidade do equilíbrio de imunidade e, por fim, na seçãoo3.4 estudamos a estabilidade do equilíbrio endêmico.

Capítulo 1

O problema da estabilidade global

1.1 Estabilidade de Soluções de Equilíbrio

Considere a Equação Diferencial Ordinária (EDO),

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

onde $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação diferenciável $x : I \to D$ definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para todo $t \in I$ é dita solução de (1.1). Utilizaremos a notação $x(t, x_0), t \in I$ para representar a única solução da EDO (1.1) em I tal que $x(0) = x_0$.

Definição 1.1. *O espaço de fase da EDO (1.1) é o domínio D de definição da aplicação f. Dizemos que $\bar{x} \in D$ é uma solução de equilíbrio da EDO (1.1) se $f(\bar{x}) = 0$, ou seja, $\bar{x}$ é uma solução de equilíbrio se, e somente se, a função constante $x(t) = \bar{x}$ é uma solução de* (1.1).

Definição 1.2. *Dizemos que $\bar{x} \in D$ é um ponto atrator numa vizinhança W de $\bar{x}$, se $x(t, x_0) \to \bar{x}$ quando $t \to \infty$, para cada $x_0 \in W$.*

Sabe-se da teoria básica de EDO que cada solução $x = x(t)$ em D depende continuamente de t e das condições iniciais t_0 e x_0. Em particular, prova-se que pequenas mudanças ou perturbações em x_0 produzem pequenas mudanças em $x(t)$ num intervalo ao redor de t_0. Mostra-se também que duas soluções que começam próximas, permanecem próximas durante um intervalo de tempo suficientemente grande, mas finito. Uma pergunta que se faz é se duas soluções que se iniciam próximas permanecem próximas para todo tempo, ou será que existem soluções que se desviam, não importando o quão próximas elas se iniciaram. Questões como estas pertencem a um ramo da matemática conhecido como teoria da estabilidade.

Definição 1.3. *Seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio de* (1.1). *Dizemos que $\bar{x}$ é:*

(i) **Localmente Estável** *ou simplesmente* **Estável** *se toda solução iniciada próxima de $\bar{x}$ se mantém próxima de $\bar{x}$ no tempo futuro, isto é se, para cada vizinhança U de $\bar{x}$ existe uma vizinhaça W de $\bar{x}$ tal que $x(t,W) \subset U$, para todo $t \geq 0$.*

(ii) **Localmente assintoticamente estável** *ou simplesmente* **assintoticamente estável** *se é estável e toda solução iniciada próxima de $\bar{x}$ converge para $\bar{x}$, isto é, se para qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ tal que $W \subset D \cap U$:*

(a) $x(t,W) \subset U$, $\forall x_0 \in W$ *e* $t > 0$;

(b) $x(t,x_0) \to \bar{x}$ *quando* $t \to \infty$, *para cada* $x_0 \in W$.

(iii) **Instável** *se ele não é estável, isto é, toda solução iniciada suficientemente próxima de $\bar{x}$ se afasta dele.*

Devido ao grande valor prático e teórico, a teoria da estabilidade é uma das áreas muito importante na Matemática. Frequentemente, em problemas das engenharias, da física, da biologia ou da própria Matemática, precisa-se saber sobre a estabilidade de uma solução de EDO. Nessa dissertação, forneceremos critérios para estabilidade global e forneceremos aplicações a EDO's provenientes de modelos epidemiológicos.

Consideremos agora o sistema linear

$$\dot{x} = Ax \tag{1.2}$$

em que A é uma matriz $n \times n$ cujas entradas a_{ij} são constantes reais. A matriz A pode ser vista como um operador linear no espaço $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, o qual pode ser estendido a um operador linear $A_{\mathbb{C}}$ no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ definido por $A_{\mathbb{C}}(x+iy) = Ax + iAy$.

Teorema 1.4. *As soluções da equação de (1.2) são combinações lineares de funções do tipo $t^m e^{\alpha t}\cos\beta t$ e $t^m e^{\alpha t}\sin\beta t$. Mais especificamente, uma solução geral do sistema (1.2) é da forma*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{m_j-1} (\mathbf{A}_{lj} t^l e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) + \mathbf{B}_{lj} t^l e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t))$$

onde $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ são autovalores de A, m_j é a dimensão do bloco de Jordan associado ao autovetor λ_j e $\mathbf{A}_{lj}$ e $\mathbf{B}_{lj}$ são vetores fixos do $\mathbb{R}^n$ para $j = 1, ..., k$ e $l = 1, 2, ..., m_j$.

Pelo teorema visto acima, temos:

Teorema 1.5. *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os autovalores da matriz A e suponha que J_λ é o bloco de Jordan (em $\mathbb{C}$) associado a λ. Tem-se para a solução nula do sistema (1.2) as seguintes afirmações:*

1. *Se A é uma matriz não-singular, ou seja,* $\det A \neq 0$*; A é dita:*

   a) *assintoticamente estável se, e somente se, $Re(\lambda_k) < 0$ para todo $k = 1, 2, ..., n$;*

   b) *estável, mas não assintoticamente estável, se, e somente se, A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros e sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*

   c) *instável nos demais casos.*

2. *Se a matriz A é uma matriz singular, ou seja,* $\det A = 0$*; A é dita:*

   a) *estável se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal;*

   b) *estável, mas não assintoticamente estável, no caso em que A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros, sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ seja diagonal, o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*

   c) *instável nos demais casos.*

Sabemos que, se $\bar{x}$ é uma solução de equilíbrio de (1.1), no qual todos os autovalores de $Df(\bar{x})$ tem parte real negativa, então $\bar{x}$ é assintoticamente estável. Se existir um autovalor de $Df(\bar{x})$ com parte real positiva, então $\bar{x}$ é instável. Para maior detalhes ver [5] e [18]

Definição 1.6. *Uma solução de equílibrio $\bar{x}$ da EDO* (1.1) *é dita* **hiperbólica** *se todos os autovalores de $Df(\bar{x})$ tem parte real não nula.*

Podemos concluir, desta forma, que se $\bar{x}$ um ponto de equílibrio hiperbólico de (1.1), então ou $\bar{x}$ é assintoticamente estável ou $\bar{x}$ é instável. No caso linear, toda solução de equilíbrio assintoticamente estável, é hiperbólica.

Existem critérios de estabilidade que não envolvem o conhecimento dos autovalores da parte linear da EDO. Se f é uma função C^1, a estabilidade local de um equilíbrio $\bar{x}$, também pode ser verificada pela construção de uma função definida numa vizinhança de $\bar{x}$ com certas propriedades, denominada de função de Lyapunov.

Seja $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para cada $x_0 \in D$, seja $\dot{V}(x_0) = \dfrac{d}{dt}V(x(t,x_0))|_{t=0}$.

Definição 1.7. *Seja $\bar{x}$ uma soluçõ de equilíbrio de* (1.1)*. Uma* **função de Lyapunov** *para $\bar{x}$ é uma função $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável definida em um aberto U que contém $\bar{x}$, satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $V(\bar{x}) = 0$ *e* $V(x) > 0, \forall x \neq \bar{x}$*;*

(b) $\dot{V} \leq 0$ *em* U

A função de Lyapunov se diz **estrita** quando

(c) $\dot{V} < 0$ em $U - \{\bar{x}\}$

O seguinte resultado fornece um critério, conhecido como **Critério de Lyapunov**, para análise da estabilidade de uma solução de equilíbrio $\bar{x}$ do sistema (1.1). A existência de uma função de Lyapunov numa solução de equilíbrio garante a estabilidade dessa solução. E a existência de uma função de Lyapunov estrita para a solução de equilíbrio garante a estabilidade assintótica, como segue.

Teorema 1.8. *Seja $\bar{x}$ uma solução de equilíbrio de* (1.1)*. Se existe uma função Lyapunov para $\bar{x}$, então $\bar{x}$ é estável. Se a função for estrita, então $\bar{x}$ é assintoticamente estável.*

Demonstração. Seja $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para $\bar{x}$. Dado $B = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; |x_0 - \bar{x}| \leq \delta\} \subset U$, o número $m = min\{V(x_0), |x_0 - \bar{x}| = \delta\}$ é positivo. Em virtude da continuidade de V, existe um aberto $U_1 \subset B$ que contém $\bar{x}$, tal que $V(x_0) < m$ para todo $x_0 \in U_1$. Como V não é crescente ao longo das soluções, temos que $x(t,x_0)$ permanece no interior de B para todo $t \geq 0$ e $x_0 \in U_1$. Portanto $\bar{x}$ é estável.

Vamos supor agora que $\dot{V} < 0$ em $U - \{\bar{x}\}$. Sejam $x \in U_1$ e $|t_n|$ uma sequencia crescente de números reais positivos tal que $x(t_n, x_0) \longrightarrow y \in B$. Temos $V(x(t,y)) \longrightarrow V(y)$ e $V(x(t,y)) >$

$V(y)$, $\forall t \geq 0$. Suponhamos $y \neq \bar{x}$. Então $V(x(t,y)) < V(y)$ e para todo z suficientemente próximo e y, $V(x(1,z)) < V(y)$. Mas então, se n for suficientemente grande, $V(x(x_0, t_n + 1)) < V(y)$, absurdo. Portanto $y = \bar{x}$. Como B é compacto, isto é suficiente para provar que $\bar{x}$ é assintoticamente estável. □

Serão apresentadas, a seguir, ás definições de variedades estáveis e instáveis bem como alguns resultados importantes os quais serão usados nos capítulos seguintes.

Dizemos que o **conjunto estável** de uma solução de equilíbrio $\bar{x}$ qualquer é o conjunto $W^s(\bar{x})$ dos pontos cujas trajetórias tende ao equilíbrio, isto é:

$$W^s(\bar{x}) = \{y \in D; \lim_{t\to+\infty} x(t,y) = \bar{x})\}.$$

Analogamente, a **conjunto instável** de uma solução de equilíbrio $\bar{x}$ é o conjunto:

$$W^u(\bar{x}) = \{y \in D; \lim_{t\to-\infty} x(t,y) = \bar{x})\}.$$

Em geral, os conjuntos estável e instável de uma solução de equilíbrio não são abertos. Mas são sempre não vazios e invariantes. Mostremos que, no caso de $\bar{x}$ ser assintoticamente estável,$W^s(\bar{x})$ é uma aberto não-vazio.

Proposição 1.9. *Se $\bar{x}$ é uma solução de equilíbrio de* (1.1) *assintoticamente estável então $W^s(\bar{x}) \subset D$ é um aberto não-vazio.*

Demonstração. De fato, é claro que $W^s(\bar{x}) \neq \emptyset$ pois, $\bar{x}$ é uma solução de equilíbrio, isto é, $\bar{x} = \lim_{t\to+\infty} x(t,\bar{x})$. Agora mostremos que: se $y \in W^s(\bar{x})$ todos os pontos de uma vizinhança de y também tendem a $\bar{x}$. Tomemos uma vizinhança W_0 de $\bar{x}$ tal que $\lim_{s\to+\infty} x(s,x_0) = \bar{x}$ para cada $x_0 \in W_0$; a existência de W_0 é assegurada pela estabilidade assintótica de $\bar{x}$. Como $y \in W^s(\bar{x})$ temos $\bar{x} = x(t_0,y) \in W_0$ para algum t_0, suficientemente grande e, como $x(t_0,y)$ é contínua em y, existe uma vizinhança W de y tal que $x(t,W) \subset W_0$. Agora, dado $z \in W$, temos $\lim x(t,z) = \lim x(s,x(t_0,z) = \bar{x}$ quando $t \to +\infty$, pois $x(t_0,z) \in W_0$ e $s = t - t_0 \to +\infty$ assim $W^s(\bar{x}) \subset D$ um aberto. □

Dizemos que $\bar{x}$ é um **poço** da função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se a matriz $Df(\bar{x}) \in M(n)$ tem todos os autovalores generalizados com parte real negativa. Se $\bar{x}$ é um poço para (1.1), então $\bar{x}$ é uma equilíbrio hiperbólico, que sabemos ser assintoticamente estável.

No caso em que algum autovalor de $Df(\bar{x})$, onde $\bar{x}$ é um equilíbrio hiperbólico, tem parte real positiva e outros tem parte real negativa, o sistema é instável, mas pode ser mostrado que, localmente em $\bar{x}$, o conjunto estável $W^s(\bar{x})$ é uma superfície de dimensão igual á dimensão do espaço vetorial gerado pelos autovetores generalizados associados aos autovalores com parte real negativa. Nesse caso, o conjunto estável é denominado **Variedade Estável** de $\bar{x}$ e o conjunto instável de um equilíbrio hiperbólico é uma superfície denominada **Variedade Instável** de $\bar{x}$.

Teorema 1.10. *(Teorema da Variedade Estável) Seja $\bar{x} \in D$ um equilíbrio hiperbólico da EDO* (1.1). *O conjunto estável $W^s(\bar{x})$ é uma variedade imersa de classe C^1 e o espaço tangente a $W^s(\bar{x})$ em $\bar{x}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerados pelos autovetores generalizados associados aos autovalores de $Df(\bar{x})$ com parte real negativa. Resultados duais valem, evidentemente, para a variedade instável.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [5].

Definição 1.11. *Um equilíbrio $\bar{x}$ da EDO* (1.1) *é* **globalmente assintoticamente estável** *ou* **globalmente estável** *com respeito a um subconjunto aberto $D_1 \subset D$, se é assintoticamente estável e sua variedade estável contém D_1.*

Por conveniência, em todo o texto usaremos o termo globalmente estável. Observe que, da demonstração do Teorema 1.8, se $U = D_1$, então $\bar{x}$ é globalmente estável com respeito a D_1.

Definição 1.12. *Um conjunto K é chamado de* **absorvente** *em D para* (1.1)*, se para cada compacto $F \subset D$, tivermos $x(t,F) \subset K$, para todo t suficientemente grande.*

Observação 1.13. *Se o equilíbrio $\bar{x}$ é globalmente estável com respeito a D_1, temos:*

- *$\bar{x}$ é necessariamente o único equilíbrio em D_1. De fato, se $y \in D_1$ é tal que $f(y) = 0$ então $\lim_{t\to\infty} x(t,y) = y$, por outro lado $\lim_{t\to\infty} x(t,y) = \bar{x}$ portanto, $y = \bar{x}$.*
- *D_1 possui um compacto absorvente K. De fato, basta tomar K como sendo o fecho de uma bola aberta centrada em $\bar{x}$ de raio suficientemente pequeno.*

1.2 Conjuntos invariantes

Definição 1.14. *Um aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo se cada curva fechada em D pode ser continuamente deformada para um ponto dentro de D. De forma equivalente, D é simplesmente conexo, se dada uma curva em D, o interior da região delimitada pela curva está inteiramente contida em D.*

Definição 1.15. *Seja $D_0 \subset D$ um subconjunto. Dizemos que D_0 é:*

(i) **Invariante** *com respeito a EDO* (1.1) *se $x(t, D_0) \subset D_0$, para todo $t \in (-\infty, +\infty)$;*

(ii) **Positivamente invariante** *com respeito a EDO* (1.1) *se $x(t, D_0) \subset D_0$, para todo $t \in (0, +\infty)$;*

(iii) **Negativamente invariante** *se $x(t, D_0) \subset D_0$, para todo $t \in (-\infty, 0)$.*

Proposição 1.16. *Se $\bar{x}$ é assintoticamente estável então $W^s(\bar{x}) \subset D$ é um conjunto positivamente invariante com respeito a* (1.1).

Demonstração. Seja $p \in W^s(\bar{x})$. Então $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, p) = \bar{x}$. Seja $s > 0$ qualquer e $q = x(s, p)$. Então $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, q) = \lim\limits_{t\to\infty} x(t, x(s, p)) = \lim\limits_{t\to\infty} x(t+s, p) = \bar{x}$. Logo $q = x(s, p) \in W^s(\bar{x})$, como $s > 0$ é arbitrário, segue que $W^s(\bar{x})$ é positivamente invariante por (1.1). □

Definição 1.17. *Seja $D \in \mathbb{R}^n$ o espaço de fase da EDO* (1.1). *Os conjuntos:*

- $\alpha(x_0) = \{y \in D; \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $t_n \to -\infty$ *tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x(t_n, x_0) = y\}$
- $\omega(x_0) = \{y \in D; \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $t_n \to +\infty$ *tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x(t_n, x_0) = y\}$

São chamados α - limite e ω - limite, respectivamente, de $x_0 \in D$.

Todos os pontos de uma trajetória tem os mesmos conjuntos α e ω- limite. Dessa forma, os conjuntos α-limite e ω- limite são propriedades da trajetória de um ponto e não de um ponto. Passamos, agora, a enunciar e provar as principais propriedades dos conjuntos-limites.

Lema 1.18. *O conjunto ω-limite de um ponto x_0 dA EDO* (1.1) *é fechado e positivamente invariante com respeito a EDO* (1.1).

Demonstração. De fato, dado $p \in \omega(x_0)$, existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $t_n \to +\infty$ tal que $x(t_n, x_0) \to p$. Como $x(t_n, x_0)$ é contínua em x_0, para $\bar{t}$ fixado, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} x(\bar{t} + t_n, x_0) = \lim_{n\to+\infty} x(\bar{t}, x(t_n, x_0)) = x(\bar{t}, \lim_{n\to+\infty} x(t_n, x_0))) = x(\bar{t}, p)$$

e como $\bar{t} + t_n \to +\infty$, resulta que $x(\bar{t}, p) \in \omega(x_0)$, isto é, $x(t, \omega(x_0)) \subset \omega(x_0)$. Isto mostra que o conjunto $\omega(x_0)$ é invariante por (1.1).

Para mostrar que $\omega(x_0)$ é fechado, mostraremos que seu complementar é aberto. Escrevemos $B(v, r) = \{u \in \mathbb{R}^n; |u - v| < r\}$ para a bola a centro $v \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$.

Por definição de ω-limite, dado $y \in \mathbb{R}^n - \omega(x_0)$, existem $\epsilon > 0$ e $\bar{t} > 0$ tais que $x(t, x_0) \notin B(y,\epsilon)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ com $t > \bar{t}$. Decorre que $B(y,\epsilon) \cap \omega(x_0) = \emptyset$, de modo que $B(y,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n - \omega(x_0)$ e, portanto, $\mathbb{R}^n - \omega(x_0)$ é aberto. $\square$

De forma análoga se mostra para $\alpha(x_0)$ é fechado e negativamente invariante por (1.1) .

Lema 1.19. *Se $P \subset D$ é um conjunto compacto e positivamente invariante, então $\omega(x_0) \subset P$, para todo $x_0 \in P$.*

Demonstração. Se $y \in \omega(x_0)$, com $x_0 \in P$, existe uma sequência $t_n \to +\infty$ tal que:

$$y = \lim_{n \to +\infty} x(t_n, x_0).$$

Temos $x(t_n, x_0) \in P$ pela invariância e, portanto, como P é fechado, contém o limite de toda sequência convergente de seus elementos, isto é, $y \in P$. Logo $\omega(x_0) \subset P$. $\square$

Proposição 1.20. *Seja $\bar{x}$ equilíbrio assintoticamente estável da EDO* (1.1) *e $P \subset D$ uma vizinhança de $\bar{x}$, compacta e positivamente invariante. Seja V uma função C^1 tal que $\dot{V} < 0$ em $P - \{\bar{x}\}$. Então $P \subset W^s(\bar{x})$ e consequentemente, $\bar{x}$ é globalmente estável com respeito a P.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in P$ e $\omega(x_0) = \{y \in D; \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $t_n \to +\infty$ tal que $\lim_{n \to +\infty} x(t_n, x_0) = y\}$ o conjunto ω-limite de x_0. Como P é fechado e positivamente invariante, pelo Lema 1.19, $\omega(x_0) \subset P$. Ainda, sabemos que, pelo Lema 1.18, $\omega(x_0)$ é invariante. Por outro lado, V é constante em $\omega(x_0)$. De fato, como V é contínua, $\lim_{n \to \infty} V(x(t_n, x_0)) = V(a)$ para toda sequência $\{t_n\}$ de números positivos tal que $\lim_{n \to \infty} x(t_n, x) = a$. Mas V decresce ao longo de $x(t, x_0)$, donde

$$\lim_{n \to \infty} V(x(t_n, x_0)) = \lim_{t \to \infty} V(x(t, x_0)).$$

Assim, $V(a) = V(b)$ quaisquer que sejam $a, b \in \omega(x_0)$, e V é constante em $\omega(x_0)$. Mas, então $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_0)$. Como, $\omega(x_0) \subset P$ e $\dot{V} < 0$ em $P - \{\bar{x}\}$ temos $\omega(x_0) = \{\bar{x}\}$. Note que $\forall x_0 \in P, \omega(x_0) = \{\bar{x}\}$, garante que $P \subset B(\bar{x})$. De fato, suponha que existe $y \in P \backslash B(\bar{x})$. Assim $x(t, y) \nrightarrow \bar{x}$, ou seja, existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $\|x(t_n, Y) - \bar{x}\| > \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como P é positivamente invariante, $(x(t_n, y))_{n \in \mathbb{N}} \subset P$ e por P ser compacto, a menos de subsequência, $x(t_n, y) \to a \in \omega(y)$, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $\|x(t_n, Y) - \bar{x}\| < \epsilon$, o que é uma contradição. Portanto, $P \subset W^s(\bar{x})$, e consequentemente, $\bar{x}$ é globalmente estável com respeito a P. $\square$

1.3 Condições para estabilidade global

A estabilidade assintótica local de um equilíbrio $\bar{x}$ pode ser verificada pela construção de uma função de Lyapunov em uma pequena vizinhança de $\bar{x}$ ou linearizando a EDO (1.1) em $\bar{x}$, no caso em que a função f é de classe C^1, como vimos na seção anterior. Ainda vimos que, o sinal dos autovalores da matriz jacobiana de f, também nos dá informações sobre a estabilidade local de um equilíbrio. Um questionamento pertinente é: sobre quais condições a estabilidade local de um equiĺibrio $\bar{x}$ implica na estabilidade global.

A dificuldade associada com este problema é, em grande parte, devido à falta de ferramentas práticas. O método de construção de funções globais de Lyapunov é mais comumente usado, entretanto, a sua aplicação é frequentemente prejudicada pelo fato de, em muitos casos, as funções de Lyapunov globais serem difíceis de construir e não há praticamente nenhuma abordagem geral para a construção de tais funções.

Vimos na seção anterior, que se $\bar{x}$ é globalmente estável com respeito a um subconjunto aberto D_1, então $\bar{x}$ é necessariamente o único equilíbrio em D_1 e que D_1 possui um compacto absorvente. O que podemos afirmar sobre a recíproca? Sem perda de generalidade, podemos formular o seguinte problema.

Assuma as seguintes hipóteses, a respeito de um subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$:

- (H_1): D é simplesmente conexo;
- (H_2): Existe um compacto absorvente $K \subset D$;
- (H_3): $\bar{x}$ é a única solução de equilíbrio de (1.1) em D.

O objetivo, agora é encontrar condições para que a estabilidade assintótica de $\bar{x}$ implique na estabilidade global com respeito a D. É obvio que, se a EDO (1.1) possui uma solução periódica em D então ela não pode ser globalmente estável. Uma condição satisfeita por f na qual impede a existência de soluções periódicas não constantes para a EDO (1.1) é dita um **critério de Bendixson** para a EDO (1.1). Apresentaremos o método desenvolvido nos artigos [8] e [11] para estudo da estabilidade global de uma solução de equilíbrio de uma EDO do tipo (1.1).

Definição 1.21. *Um ponto $x_0 \in D$ é errante para* (1.1)*, se existe uma vizinhança U de x_0 e $T > 0$ tal que $U \cap x(t, U) = \emptyset$ para $t > T$. Um ponto x_0 é não errante se para toda vizinhança U de x_0 e $T > 0$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $t > T$ e $U \cap x(t, U) \neq \emptyset$.*

Note que x_0 é não errante se toda vizinhança de x_0 contém pontos x e $t.x$ para $t > 0$ arbitrariamente grande.

Lema 1.22. *Seja $x_0 \in D$. Se $p \in \omega(x_0)$ então, p é não errante.*

Demonstração. Seja $p \in \omega(x_0)$. Vamos mostrar que p é não-errante. De fato, sejam U_p uma vizinhança de p e $T > 0$ dados. Como $p \in \omega(x_0)$, existe uma sequência (t_n) com $t_n \to +\infty$ tal que $x(t_n, x_0) \to p$. Dessa forma, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x(t_n, x_0) \in U_p$. Tome $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que, $n_1, n_2 > n_0$ e $t_{n_1} - t_{n_2} > T$ e defina $t = t_{n_1} - t_{n_2}$. Note que:

$$x(t_{n_2}, x_0) = x(t_{n_1} - t_{n_2}, x(t_{n_2}, x_0)) := q$$

Pela escolha de n_1 e n_2, temos $q = x(t_{n_2}, x_0) \in U_p$ e $q = x(t_{n_1} - t_{n_2}, x(t_{n_2}, x_0)) \in U_p$. Logo, $U_p \cap x(t, U_p) \neq \emptyset$. Ou seja, p é não-errante.

De forma análoga se mostra que todo ponto do conjunto α-limite é não-errante. Observe que se p é um ponto de equilíbrio $\alpha(p), \omega(p) = p$, pois neste caso $x(t) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, todo ponto de equilíbrio é não errante. □

Observação 1.23. *Note que existem pontos não errantes que não são de equilíbrios.*

De fato, seja φ uma solução τ-periódica não constante e seja $x_0 = \varphi(0)$, ou seja $\varphi(t) = x(t, x_0)$. Assim, x_0 é não-errante e não é de equilíbrio. De fato, dado U vizinhança de x_0 e $T > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\tau > T$. Assim, $x(n\tau, x_0) = x(0, x_0) = x_0$. Logo $x_0 \in U \cap x(n\tau, U) \neq \emptyset$.

Mais adiante, mostraremos que, sob algumas condições, todo ponto não errante é um equilíbrio. Antes, daremos algumas definições e proposições necessárias para apresentarmos um critério de Bendixson.

Definição 1.24. *Seja $h : D \to \mathbb{R}^n$ uma função. O suporte de h, denotado por $supp(h)$ é o fecho do seguinte conjunto: $\{x \in D; h(x) \neq 0\}$.*

Definição 1.25. *Uma função $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é dita ϵ - perturbação local de f no ponto $x \in D$, se existe uma vizinhança aberta U de x em D tal que $supp(f - g) \subset U$ e $\|f - g\|_{C^1} < \epsilon$, onde*

$$\|f - g\|_{C^1} = sup\left\{\|f(x) - g(x)\| + \left\|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right\|; x \in D\right\}$$

e $\|.\|$ denota uma norma vetorial em $\mathbb{R}^n$ e também denota a norma de matrizes em $\mathbb{R}^{n\times n}$, e $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}$, denota a jacobiana de f e g, respectivamente.

Para tal função g, consideremos a correspondente equação diferencial

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.3}$$

Lema 1.26. *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que x_0 é um ponto não errante da EDO* (1.1) *e que $f(x_0) \neq 0$. Então, para cada vizinhança U de x_0 e $\epsilon > 0$, existe uma ϵ - perturbação local C^1 de f em x_0, a qual denotamos por g, tal que*

1. *$supp(f - g) \subset U$ e*

2. *o sistema* (1.3) *tem uma solução periódica não constante cuja trajetória passa por x_0.*

A demonstração do do Lema 1.26, será omitida pois utiliza de argumentos geométricos e topológico mais avançados, os quais fogem do objetivo desse trabalho. Este lema pode ser encontrado em [9] e é baseada na versão local do lema de fechamento de Pugh, [15].

Um Critério de Bendixson é dito **Robusto** sobre uma C^1 perturbação local de f em $x_0 \in D$ se, para cada ϵ suficientemente pequeno e vizinhança U de x_0, cada ϵ perturbação local g tal que $supp(f - g) \subset U$, também possui o mesmo critério de Bendixson.

Serão apresentados alguns exemplos importantes de Critérios de Bendixson, que podem ser encontrados em [5], os quais, serão utilizados na construção do novo critério de Bendixson robusto. Um resultado clássico em EDO é O Teorema de Bendixson para existência de soluções periódicas em sistemas de segunda ordem.

Quando o domínio D da função f é simplesmente conexo, o clássico teorema de Green dá uma restrição sobre o tipo de EDO que permite soluções periódicas. Para enunciar esse resultado, lembramos que

$$Div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = tr(Jf).$$

ou seja, o traço da matriz jacobiana de f, é o divergente do campo $f = (f_1, f_2)$, que define uma função $div f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 1.27. *(Teorema de Bendixson) Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 no aberto simplesmente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Se $div(f) \neq 0$ e não muda de sinal em D, então toda solução periódica de $\dot{x} = f(x)$ é constante.*

Demonstração. Uma órbita periódica γ de $f = (f_1, f_2)$ é parametrizada pela solução de $(x_1', x_2') = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ por um ponto qualquer de γ, de modo que $f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = (-f_2, f_1).(dx_1, dx_2) = (-f_2, f_1).(f_1, f_2)dt = 0dt$, pois $dx_1 dt = f_1 dt$ e $dx_2 dt = f_2 dt$. Assim,

$$\iint_R div\ f dA = \iint_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) dA = \pm \oint_\gamma f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = 0$$

onde R é o interior de γ, contido em D, e a segunda igualdade é garantida pelo teorema de Green.

Como f é uma função C^1 em D, o divergente de f é contínuo e, portanto, a igualdade $\iint_R div(f) dA = 0$ garante que $div(f)$ é identicamente nulo ou troca de sinal em R. □

Note que o Teorema de Bendixson pode ser interpretado como dando uma condição independente que proíbe a existência de soluções periódicas. Segue, do Teorema 1.27 que a condição $div(f) \equiv 0$ ou $div(f)$ não mudar de sinal em D é um critério de Bendixson para (1.1).

O Segundo resultado clássico que queremos apresentar é devido a H. Dulac, o qual representa uma ligeira generalização do Teorema de Bendixson.

Teorema 1.28. *(Teorema de Dulac) Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto simplesmente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Se $div(gf) \neq 0$ e não troca de sinal em D então $\dot{x} = f(x)$ não admite trajetória fechada.*

Demonstração. Basta usar o fato de que numa órbita periódica de $f = (f_1, f_2)$, vale $g f_1 dx_2 - g f_2 dx_1 = g(f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = 0dt$. Agora use o teorema de Green, de forma análoga á prova do Teorema de Bendixson. □

Seja $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então a condição

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \langle gradV(x), f(x)\rangle < 0 \text{ se } f(x) \neq 0 \tag{1.4}$$

é um critério de Bendixson, já que $V(x)$ é estritamente decrescente ao longo de cada solução de (1.1). Tal função é chamada função global de Lyapunov para (1.1).

Os resultados a seguir, serão importantes para garantir a não existência de soluções periódicas não constantes para determinada EDO. Para isso, primeiro apresentaremos as definições de Medida de Lozinski e algumas de suas propriedades e da Segunda Componente Aditiva, segundo [4] e [13], as quais usaremos nos próximos capítulos.

A **medida de Lozinski** tem sido usada para estimar autovalores de matrizes. Ela também é usada para análise de estabilidade de sistemas de equações diferenciais lineares quando certas normas vetoriais de soluções são usadas como função de Lyapunov. É possível verificar em [4] que a medida de Lozinski depende da norma.

A medida de Lozinski, com respeito a uma norma vetorial qualquer $\|.\|$, é uma aplicação $\mu : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, que associa a cada matriz $E(n\times n)$ um número real $\mu(E)$ que é definido por:

$$\mu(E) = \lim_{h\to+\infty} \frac{\|I+hE\|-1}{h}$$

Lema 1.29. *Para toda matriz A esse limite sempre existe.*

Demonstração. Sejam $x,u \in \mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que $\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\|x+hu\|-\|x\|}{h}$ sempre existe. Seja $\theta \in (0,1)$ então $\|x+\theta hu\| = \|\theta(x+hu)+(x-\theta x)\| \leq \|\theta(x+hu)\|+(1-\theta)\|x\| = \theta\|x+hu\|+\|x\|-\theta\|x$.

Segue que:

$$\frac{\|x+\theta hu\|-\|x\|}{\theta h} \leq \frac{\|x+hu\|-\|x\|}{h}$$

Sendo $h>0 \Rightarrow \theta h \leq h$ e sendo $f(h) = \dfrac{\|x+hu\|-\theta h}{h} \Rightarrow f(\theta h) \leq f(h)$. Portanto f é não decrescente e como $||x|-|y|| \leq \|x-y\|$, temos: $\dfrac{\|x+hu\|-\|x\|}{h} \leq \dfrac{x=hu-x}{h} = \dfrac{\|hu\|}{h} = \|h\|$. Logo f é limitada. $\square$

Na sequência, apresentaremos algumas propriedades referentes à Medida de Lozinski que serão utilizadas no decorrer desse trabalho. A demonstração pode ser encontrada em [4].

Proposição 1.30. *Seja μ a medida de Lozinski com respeito a norma vetorial $\|.\|$, A e B matrizes e $\alpha \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:*

(i) $\mu(\alpha A) = \alpha\mu(A)$, *se* $\alpha \geq 0$;

(ii) $\|\mu A\| \leq \|A\|$;

(iii) $\mu(A+B) \leq \mu(A)+\mu(B)$;

(iv) $\|\mu(A)-\mu(B)\| \leq \|A-B\|$.

Proposição 1.31. *Se $A(t)$ é uma matriz função definida para $t \geq t_0$, então para toda solução $y(t)$ da EDO* (1.1)

$$|y(t)|\; exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu[A(s)]ds\right)$$

é uma função não decrescente de t e

$$|y(t)|\; exp\left(\int_{t_0}^{t}\mu[-A(s)]ds\right)$$

é uma função não crescente. Em particular, para $t \geq t_0$

$$|y(t_0)|\; exp\left(-\int_{t_0}^{t}\mu[-A(s)]ds\right) \leq |y(t)| \leq |y(t_0)| exp\left(-\int_{t_0}^{t}\mu[-A(s)]ds\right).$$

Se $A=(a_{ij})$ é uma matriz $n\times n$, sua **Segunda Componente Aditiva** $A^{[2]}$ é a matriz $\binom{n}{2}\times\binom{n}{2}$ definida como segue. Para cada inteiro $i=1,2,...\binom{n}{2}$, seja $(i)=(i_1,i_2)$ o i-ésimo termo da ordem lexicográfica do par de inteiros (i_1,i_2) tal que $1\leq i_1<i_2\leq n$. Então o elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna de $A^{[2]}$ é:

$$x_{ij}=\begin{cases} a_{i_1i_1}+a_{i_2i_2} \text{ se } (i)=(j) \\ (-1)^{r+s}.a_{i_rj_s} \text{ se exatamente um: } i_r\in(i) \text{ implica } i_r\notin(j) \text{ e } i_s\in(j) \text{ implica } i_s\notin(i) \\ 0, \text{ se nenhuma entrada de } (i) \text{ ocorre em } (j); \end{cases}$$

No caso em que $n=3$, por exemplo, $(1)=(1,2),(2)=(1,3)$ e $(3)=(2,3)$. Assim, se denotarmos a matriz A por:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

então, a segunda componente aditiva de A será definida pela matriz:

$$A^{[2]}=\begin{bmatrix} a_{11}+a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11}+a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22}+a_{33} \end{bmatrix}.$$

E no caso em que $n=4$, por exemplo, $(1)=(1,2),(2)=(1,3),(3)=(1,4),(4)=(2,3),(5)=(2,4)$ e $(6)=(3,4)$. Assim, se denotarmos a matriz A por:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

então, a segunda componente aditiva de A será a matriz 6×6 definida por:

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{22} & a_{23} & a_{24} & -a_{13} & -a_{14} & 0 \\ a_{32} & a_{11}+a_{33} & a_{34} & a_{12} & 0 & -a_{14} \\ a_{42} & a_{43} & a_{11}+a_{44} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{31} & a_{21} & 0 & a_{22}+a_{33} & a_{34} & -a_{24} \\ -a_{41} & 0 & a_{21} & a_{43} & a_{22}+a_{44} & a_{23} \\ 0 & -a_{41} & a_{31} & -a_{42} & a_{32} & a_{33}+a_{44} \end{bmatrix}.$$

Uma importante conexão entre a segunda componente aditiva de uma matriz A e equação diferencial, ver [8] e [13], é que se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são soluções do sistema $\dfrac{dz}{dt} = A(t)z$, então seu produto exterior $y(t) = z_1(t) \wedge z_2(t)$ é uma solução de $\dfrac{dy}{dt} = A(t)^{[2]}y$. Segue que, se $x_1,...,x_n$ são autovetores de A, linearmente independentes, associados aos autovalores $\lambda_1,...\lambda n$, então $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ são autovetores de $A^{[2]}$ associados aos autovalores $\lambda_1 + ... + \lambda n$.

Denote a segunda componente aditiva da jacobiana de f por $\dfrac{\partial f}{\partial x}^{[2]}$. Considere uma matriz A não singular $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$, a matriz função $x \longmapsto A(x)$ de classe C^1 em D e uma norma vetorial $\|.\|$ em $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$. Denote por A_f a matriz obtida trocando cada entrada a_{ij} de A por sua derivada direcional na direção de f. E seja μ a medida de lozinski com respeito a norma $\|.\|$.

Teorema 1.32. *Suponha válida as hipóteses* (H_1) *e* (H_2). *Se*

$$\mu\left(A_f A^{-1} + A\frac{\partial f}{\partial x}^{[2]} A^{-1}\right) \le -\delta < 0 \tag{1.5}$$

em K, então nenhuma curva simples fechada retificável em D pode ser invariante com respeito com respeito a (1.1).

No artigo [9], Li.Y apresenta uma demonstração desse teorema utilizando ferramentas que, em nosso trabalho, só serão apresentadas no capítulo 2. Desta forma, omitiremos a demonstração, entretanto, no próximo capítulo veremos que o Teorema 1.32 é uma consequência direta do Teorema 2.4.

A condição (1.5) é equivalente a assumir que $V(x,y) = \|A(x)y\|$ é uma função de Lyapunov cuja derivada com respeito ao sistema $n + \binom{n}{2}$- dimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}^{[2]}(x)y$$

é definido negativo.

Esta regra não vale somente para trajetória periódicas mas também trajetórias homoclínicas e heteroclínicas, uma vez que cada caso dá origem a uma curva simples fechada retificável invariante.

Se $A = I$ em (1.5), então:

$$\mu\left(\frac{\partial f}{\partial x}^{[2]}\right) < 0 \tag{1.6}$$

A qual foi obtida primeiro em [13]. Se $\|.\|$ representa a norma euclidiana, então o cálculo da medida de lozinski μ em (1.6) de acordo com [2] ou [13] produz

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \tag{1.7}$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ são autovalores de $\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}^*)$. Note que quando $n = 2$, a condição (1.6) é um clássico critério de Bendixson. O critério (1.5) proporciona a flexibilidade de uma escolha de uma função arbitrária $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ e mais a escolha da norma vetorial $\|.\|$ derivando em condições adequada.

1.3.1 Princípio da estabilidade global

Observe que o Lema 1.26 nos diz que podemos perturbar o sistema (1.1), próximo de um ponto regular não errante de modo a obter uma solução periódica não-contante. Com objetivo de impedir a existência de tais soluções podemos formular o seguinte resultado.

Proposição 1.33. *Suponha que um critério de Bendixson para a EDO* (1.1) *é robusto sobre uma C^1 perturbação local f em cada ponto regular não errante. Então todo ponto não errante de* (1.1) *é um equilíbrio.*

Demonstração. Suponha que o critério de Bendixson pra (1.1) é robusto sobre uma C^1 perturbação local f em cada ponto não errante x_0, tal que $f(x_0) \neq 0$. Assim, para toda C^1 ϵ-perturbação local g de f em x_0, (1.3) não admite solução periódica não constante. Suponha que existe $x_0 \in D$ com $f(x_0) \neq 0$ tal que x_0 é não errante. pelo lema 1.26 (b), a EDO (1.3) admite uma solução periódica não constante, o que é uma contradição. Logo todo ponto x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$ é errante. □

Teorema 1.34. *(princípio da estabilidade global) Assuma que:*

(1) $D = \mathbb{R}^n$ e toda solução de (1.1) *é limitada, para todo $t \geq 0$;*

(2) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é o único equilíbrio de (1.1) *em $\mathbb{R}^n$; e*

(3) A EDO (1.1) *satisfaz um critério de Bendixson robusto sobre C^1 perturbação local de f em cada ponto não errante x_1 de* (1.1) *tal que $f(x_1) \neq 0$.*

Se $\bar{x}$ é assintoticamente estável então $\bar{x}$ é globalmente estável em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Por (1), para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe um $R_{x_0} > 0$ tal que $x(t, x_0) \in B(0, R_{x_0})$ para $t > 0$. Note que, $\omega(x_0) \subset \overline{B(0, R_{x_0})}$. De fato, se $t_n \to \infty, (x(t_n, x_0))_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, R_{x_0}) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x(t_n, x_0) \in \overline{B(0, R_{x_0})}$, caso esse limite exista. Vamos mostrar que $\omega(x_0) \neq \emptyset$. Seja (t_n) uma sequência qualquer tal que $t_n \to \infty$. Assim, $x(t_n, x_0) \subset \overline{B(0, R_{x_0})}$. Como $\overline{B(0, R_{x_0})}$ é compacta, existe (t_{n_k}) subsequência de (t_n) tal que $x(t_{n_k}, x_0) \to q$, para algum $q \in \mathbb{R}^n$. Segue que $\omega(x_0) \neq \emptyset$ e limitado. Em particular, como ele é fechado, concluímos que $\omega(x_0)$ é compacto.

Por (2) e (3), concluímos que, se $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \{\bar{x}\}$, x_0 é errante. Pelo Lema 1.22, todo ponto de $\omega(x_0)$ é não errante, como $\omega(x_0) \neq \emptyset$, concluímos que $\omega(x_0) = \{\bar{x}\}$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Vamos mostrar que $\mathbb{R}^n = W^s(\bar{x})$. Suponha que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \notin W^s(\bar{x})$. Assim, $x(t, x_0) \nrightarrow \bar{x}$ quando $t \to \infty$. Dessa forma, existe um $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n > n$ com $\|x(t_n, x_0) - \bar{x}\| > \epsilon$.

Por outro lado, como $(x(t_n, x_0))_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{B(0, R_{x_0})}$, para algum $R_{x_0} > 0$ a menos de subsequência, podemos supor que $x(t_n, x_0) \to q \in \omega(x_0) = \{\bar{x}\}$, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x(t_n, x_0) - \bar{x}\| < \epsilon$, para todo $n > n_0$, o que é uma contradição. Logo $\mathbb{R}^n = W^s(\bar{x})$. Como $\bar{x}$ é assintoticamente estável e $\mathbb{R}^n = W^s(\bar{x})$, $\bar{x}$ é globalmente assintoticamente estável. □

Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, resultados como o do Teorema 1.34 também são válidos sob a suposição (H_2) (que D contém um conjunto compacto absorvente K). Neste caso, a trajetória de cada solução de (1.1) eventualmente entra e permanece em K; ela não se aproxima da fronteira de D. A condição (3) do teorema 1.34 implica que seu conjunto ω-limite é o conjunto unitário $\{\bar{x}\}$. Dessa forma , temos a seguinte versão local do Teorema 1.34.

Teorema 1.35. *Suponha válidas as hipóteses (H_2) e (H_3) e que* (1.1) *satisfaz o critério de Bendixson robusto sobre uma C^1 perturbação local de f em todo ponto não errante que não é de equilíbrio. Se $\bar{x}$ é assintoticamente estável então é globalmente estável com respeito a D.*

Demonstração. Seja $x_0 \in D$. Como K absorve D, existe $t_{x_0} > 0$ tal que $x(t, x_0) \in K$, para todo $t > t_{x_0}$. De modo análogo ao Teorema 1.34, $\omega(x_0)$ é compacto não-vazio. Por (H_3) e (3) concluímos que se $x_0 \in D \backslash \{\bar{x}\}$, x_0 é errante.

Como $\omega(x_0) = \{\bar{x}\}$, para todo $x_0 \in D$. Segue, de modo análogo ao Teorema 1.34 que $D \subset W^s(\bar{x})$. Assim, $D \subset W^s(\bar{x})$ e por hipótese $\bar{x}$ é assintoticamente estável, concluímos, assim, que $\bar{x}$ é globalmente estável. $\square$

Em muitos casos, um critério de Bendixson implicaria que o único equilíbrio $\bar{x}$ é localmente assintoticamente estável. Este é o caso das condições (1.4) e (1.5). O seguinte Teorema, contém o clássico resultado da estabilidade global de Lyapunov. Antes de enunciarmos e demonstrarmos o teorema, apresentaremos dois lemas que serão utilizados pra demonstrar o teorema.

Lema 1.36. *Se existe uma função real $x \longmapsto V(x)$ satisfazendo* (1.4) *então todo ponto não-errante de* (1.1) *é um equilíbrio.*

Demonstração. Observe que (1.4) implica que V é estritamente decrescente ao longo de cada trajetória. Segue que, nenhuma trajetória que sai de uma pequena vizinhança de um ponto regular, retorna. Isto também pode ser deduzido da versão C^0 do Lema 1.26. Se x_0 é um ponto não-errante para (1.1) e $f(x_0) \neq 0$, então o conjunto U do Lema 1.26 pode ser escolhido de modo que ele contém os zeros de f e $\overline{U} \subset D$ é compacto. Então a função g, C^0 pode ser escolhida suficientemente próxima de f de modo que $\dfrac{\partial V}{\partial x} g(x) < 0$, se $g(x) \neq 0$, e desta forma $V(x(t))$ é estritamente decrescente para toda solução regular $x(t)$ de (1.3) o que implica que a solução não pode ser periódica. Desta forma, a versão C^0 do Lema 1.26 implica que todo ponto não-errante de (1.1) é de equilíbrio.

Lema 1.37. *Seja f uma função de classe C^1 e suponha válida as hipóteses (H_1) e (H_2). A condição* (1.4) *implica que todo ponto não-errante de* (1.1) *é um equilíbrio.*

Demonstração. Se essas hipóteses são satisfeitas por f, então uma condição similar também é satisfeita por toda ϵ-perturbação g de f de acordo com o Lema 1.26. Pelo Teorema 1.32 nenhuma dessa ϵ-perturbação admite solução periódica não trivial para (1.3). Desta forma, todo ponto não errante é uma solução de equilíbrio para EDO (1.1).

Teorema 1.38. *Supondo válidas as hipótese $(H_1), (H_2)$ e (H_3).*

(i) A condição (1.5) *implica que $\bar{x}$ é globalmente estável.*

(ii) A condição (1.4) *implica que $\bar{x}$ é globalmente estável.*

Demonstração. Por $(H_2), \emptyset \neq \omega(x_0) \subset K$, para todo $x_0 \in D$. Pelo Lema 1.22, todo ponto de $\omega(x_0)$ é não errante, e pelos Lemas 1.36 e 1.37, todo ponto não errante é de equilíbrio. Assim temos $\omega(x_0) \subset \bar{x}$. Segue que por (H_3), $\omega(x_0) = \bar{x}$. De forma análoga ao feito no Teorema 1.34, $x(t, x_0) \to \bar{x}$, para todo $x_0 \in D$. Logo, $D \subset W^s(\bar{x})$. Note que, as condições (1.5) e (1.4) implicam que o único equilíbrio $\bar{x}$ é assintoticamente estável. Portanto $\bar{x}$ é globalmente estável. $\square$

Capítulo 2

Novo critério de Bendixson

Neste capítulo, apresentaremos um novo Critério de Bendixson Robusto sobre uma C^1 perturbação local, ver [11]. Lembremos que, conforme o capítulo anterior, um Critério de Bendixson Robusto sobre uma C^1 perturbação local para a EDO (1.1), é uma condição satisfeita pela função f na qual impede a existência de soluções periódicas não constantes pra EDO (1.1), de modo que essa condição também seja satisfeita para qualquer função de classe C^1, suficientemente próxima de f.

Conforme Teorema 1.35, assumindo as hipóteses (H_2) e (H_3), a robustês do critério de Bendixson sobre um ponto regular não errante, é uma condição necessária para que a estabilidade assintótica implique na estabilidade global. Um questionamento pertinente é: quais outras hipóteses garante a estabilidade global de um equilíbrio? Apresentaremos algumas definições e resultados que respondem á esse questionamento.

Assuma que existe um compacto absorvente $K \subset D$ em (1.1), isto é a hipótese (H_2). Então toda solução $x(t, x_o)$ de (1.1) está definida para todo $t > 0$.

Seja

$$B = A_f A^{-1} + A\frac{\partial f}{\partial x}^{[2]} A^{-1}, \tag{2.1}$$

onde $A, A_f, \dfrac{\partial f}{\partial x}^{[2]}$ foram definidas no capítulo anterior e μ é a medida do Lozinski. Então o seguinte número está bem definido:

$$\bar{q}_2 = \limsup_{t\to\infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t}\int_0^t \mu(B(x(s, x_0)))ds. \tag{2.2}$$

Nosso objetivo principal, neste capítulo, é demonstrar que a condição $\bar{q}_2 < 0$ é um critério de Bendixson robusto sobre uma C^1 perturbação local. Para isso, precisamos de alguns conceitos e resultados que serão apresentados a seguir.

Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$. E sejam $\overline{U}$ e ∂U o fecho e a fronteira de U respectivamente. A função Lipschitiziana $\varphi : \overline{U} \longrightarrow D$ será descrita como uma superfície bidimensional simplesmente conexa retificável em D e a função Lipschitiziana $\psi : \partial U \longrightarrow D$ será descrita como uma curva fechada retificável em D e será chamada simples de for injetiva.

Definição 2.1. *Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Lambda$ uma curva não necessariamente regular. consideremos $P([a,b])$ o conjunto de todas as partições de $[a,b]$. Uma partição $p = a = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_n = b \in P([a,b])$ determina a sequência de pontos $\gamma_{t_0}, ..., \gamma_{t_n}$ no traço de γ que definem uma poligonal: $s(p) = \Sigma \|\gamma_{t_i} - \gamma_{t_{i-1}}\|$. Dizemos que γ é retificável quando o conjunto $\{S(p); p \in P([a,b])\}$ é limitado superiormente.*

Dizemos que uma curva simples retificável $\psi : U \longrightarrow D$ é invariante com respeito a (1.1) se $\psi(\partial U)$ é invariante com respeito a (1.1).

Lema 2.2. *Se D é aberto simplesmente conexo, então o conjunto:*

$$\Sigma(\psi, D) = \{\varphi \in Lip(\overline{U} \longrightarrow D); \varphi(\partial U) = \psi(\partial U)\}$$

é não vazio para cada curva ψ simples fechada retificável em D.

Demonstração. De fato, seja (r,θ) coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$. Como D é um conjunto simplesmente conexo, toda curva em D contorna apenas pontos de D. Então, existe uma função contínua $(r,\theta) \longmapsto \widetilde{\varphi}(r,\theta)$ tal que $\widetilde{\varphi}(r,0) = \widetilde{\varphi}(r,2\pi)$ e $\widetilde{\varphi}(1,\theta) = \psi(1,\theta)$, com $r \in [0,1]$ e $\theta \in [0,2\pi]$.

Agora, particione $\overline{U}$ em regiões triangulares e defina:

$$\varphi(u) := \begin{cases} \widetilde{\varphi}(u) = \psi(u); \text{ se } u \in \partial U; \\ \widetilde{\varphi}(u); \text{ se } u \text{ é um vértice no interior de } U; \end{cases}$$

Interpolando linearmente os triângulos nos encontramos $\varphi \in Lip(\overline{U} \longrightarrow D)$ tal que $\psi = \partial\varphi$, como D é aberto, então $\varphi(\overline{U}) \subset D$. Podemos refinar a partição triangular de modo que $\varphi \in \Sigma(\psi, D)$. □

Seja $\mathscr{P}$ um funcional em $Lip(\overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ definido por

$$\mathscr{P}_\varphi = \int_{\bar{U}} \left\| A(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\|^p .$$

onde $\|.\|$ é uma norma de $\mathbb{R}^n$ e $p \geq 1$.

Lema 2.3. *Seja ψ é uma curva simples fechada retificável em $\mathbb{R}^n$. Então existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\mathscr{P}_\varphi \geq \delta$$

para todo $\varphi \in \Sigma(\psi, \mathbb{R}^n)$. Mais ainda, defina um funcional S em $\Sigma(\psi, D)$ por:

$$S_\varphi = \int_{\overline{U}} \left\| A(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\|.$$

Para cada compacto $F \subset D$, existe $\delta > 0$ tal que $S_\varphi \geq \delta$ para todo $\varphi \in \Sigma(\psi, D)$ com $\varphi(\overline{U}) \subset D$.

Demonstração. Como todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, basta mostrar o lema para o caso em que $\|.\|$ representa a norma euclidiana. Basta provar, também para o caso em que $\varphi \in \Sigma(\psi, K)$ onde K é um conjunto com fecho convexo e que contém $\psi(\partial U)$. Seja Π um hiperplano $(n-1)$-dimensional em $\mathbb{R}^n$ tal que $\Pi \cap \psi(\partial U) = \emptyset$ e $\varphi \in \Sigma(\psi, \mathbb{R}^n)$. Projetando φ ortogonalmente sobre Π, se necessário, podemos encontrar $\widetilde{\varphi} \in \Sigma(\psi, \mathbb{R}^n)$ tal que $\mathscr{P}_{\widetilde{\varphi}} \geq \mathscr{P}_\varphi$ e $\widetilde{\varphi}(\overline{U})$ não corta Π. Observe que $\int_0^{2\pi} |\psi'| > 0$ onde $\psi(\theta) = \psi(cos\theta, sen\theta)$ desde que ψ é injetiva. Escolha uma função contínua $b : \psi(\partial U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $b(\theta) = (b \circ \psi)(\theta)$ de modo que $\int_0^{2\pi} (b \circ \psi)'$ seja suficientemente próxima de $\int_0^{2\pi} |\psi'|$ para garantir que $\int_0^{2\pi} (b \circ \psi)' > 0$. Então b pode ser estendida continuamente a $\mathbb{R}^n$ e pode ser aproximada por uma função $a = (a_1, ..., a_n)$ de classe C^1 tal que $\alpha\varphi(\partial U) = \alpha\psi(\partial U)$ e suficientemente próximo de $\int_0^{2\pi} (b \circ \psi)'$ para garantir $\alpha\varphi(\partial U) > 0$ onde α é $1-forma$ definida por $\alpha = \Sigma a_i(x)dx_i$.

Pelo Teorema de Stoke

$$\int_{\varphi(\partial U)} \alpha\varphi(\partial U) = \int_{\varphi(\bar{U})} d\alpha\varphi(\bar{U}) = \int_{\varphi(\bar{U})} \Sigma_{i,j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j = \int_{\varphi(\bar{U})} z^*(u)y(u)du,$$

onde

$$y(u) = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)\varphi(u) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)\varphi(u) \text{ e } z_i = \left(\frac{\partial a_{i2}}{\partial xi1}\right)(x) - \left(\frac{\partial a_{i1}}{\partial xi2}\right)(x)$$

com $x = \varphi(u), (i) = (i_1, i_2), i = 1, ..., N = \binom{n}{2}$.

Desde que a é de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ e $\varphi(u) \in K$, existe uma constante M independente de φ tal que $|z(u)| \leq M$, para todo $u \in \overline{U}$. Desta forma, pela desigualdade de Holder

$$0 < \alpha\psi(\partial U) = \alpha\varphi(\partial U) \leq \int_{\overline{U}} |z||y| = \left(\int_{\bar{U}} |z|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\bar{U}} |y|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi^{\frac{1}{q}} M(\mathscr{P}_\varphi)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, podemos tomar $\delta = \left[\dfrac{\alpha\varphi(\partial U)}{\pi^{\frac{1}{q}} M}\right]^p$.

A existência de $\delta > 0$ tal que $S_\varphi \geq \delta$ segue do fato de $|A^{-1}(x)|$ ser uniformemente limitada para cada x em um subconjunto compacto de D. $\square$

Se $\varphi_t = x(t,\varphi)$, então $y_i(t) = \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial u_i}$, $i = 1,2$ são soluções da equação variacional da EDO (1.1):

$$y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_t(u)).y(t) \tag{2.3}$$

De fato,

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(y_i(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \varphi_t}{\partial u_i}) = \frac{\partial}{\partial u_i}(\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial u_i}(x(t,\varphi)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(\varphi_t).\frac{\partial \varphi_t}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial x}(f(\varphi_t).y_i(t).$$

Segue, do capítulo anterior, que $z(t) = \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial u_2}$ é solução da segunda componente da matriz da equação variacional (2.3)

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}^{[2]}(\varphi_t(u)).z(t). \tag{2.4}$$

Conclui-se, assim que $w(t) = A(\varphi_t)\dfrac{\partial \varphi_t}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial u_2}$ satisfaz a EDO $w'(t) = B(\varphi_t(u))w(t)$, com B definida como em (2.1).

Dessa forma, podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 2.4. *Assuma as hipóteses* (H_1) *e* (H_2)*. Se* $\bar{q}_2 < 0$*, então nenhuma curva simples fechada retificável em* D *pode ser invariante com respeito a* (1.1)*. Em particular* $\bar{q}_2 < 0$ *é um critério de Bendixson para* (1.1).

Demonstração.

Suponha $\bar{q}_2 < 0$. E seja $2\epsilon = -\bar{q}_2 > 0$. Então existe $T > 0$ tal que, para $t > T$ e $x_0 \in K$,

$$\int_0^t \mu(B(x(s,x_0)))ds < -\epsilon_0 t,$$

Segue da Proposição 1.31 que:

$$S_{\varphi_t} = \int_{\overline{U}} \left\| A(\varphi_t)\frac{\partial \varphi_t}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \varphi_t}{\partial u_2} \right\| \leq \int_{\overline{U}} \left\| A(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\| exp(\int_0^t \mu(B(\varphi_s(u)))ds) \leq S_\varphi exp(-\epsilon_0 t).$$

note que, $S_{\varphi_t} \to 0$ quando $t \to \infty$. Isto contradiz o Lema 2.3, se ψ for invariante com respeito a (1.1), uma vez que $\varphi_t \in \Sigma(\psi, D)$, isto é, $\varphi(\partial\overline{U}) = \psi(\partial\overline{U})$ e $\varphi_t(\overline{U}) \subset K$, sendo K compacto absorvente, para todo t suficientemente grande. $\square$

Observe que a equação (1.5) implica $\bar{q}_2 < 0$, de modo que o Teorema 1.32 pode ser visto como uma consequência direta do Teorema 2.4.

Mostraremos adiante que, acrescentando ao Teorema 2.4 a hipótese (H_3), a condição $\bar{q}_2 < 0$ é um critério de Bendixson Robusto sobre uma C^1 perturbação local de f em um equilíbrio x_0 da EDO (1.1). Antes, apresentaremos alguns resultados necessários para a demonstração do Teorema Principal.

Seja $x_0 \in D$ um ponto não-errante tal que $f(x_0) \neq 0$. Então, para cada vizinhança U de x_0 suficientemente pequena, existe $t_1 > 0$ tal que $x(t_1, U) \cap U = \emptyset$ e $x(t, U) \cap U \neq \emptyset$ para algum $t > t_1$. Assim, os seguintes números estão bem definidos:

$$\tau(U, x_0) = inf\{t > 0 : x(t, U) \cap U \neq \emptyset, \text{ e } \exists t_1 < t \text{ tal que } x(t_1, U) \cap U = \emptyset\}$$

e

$$\tau(x_0) = sup\{\tau(U; x_0) : U \text{ é uma vizinhança de } x_0 \text{ suficientemente pequena}\}.$$

Quando x_0 é um equilíbrio,$\tau(x_0) \equiv 0$. Chamamos $\tau(x_0)$ de ponto mínimo de retorno ao ponto não errante x_0.

Lema 2.5. *Seja x_0 um ponto não-errante. Uma solução $x(t, x_0)$ de (1.1) é periódica se, e somente se, $\tau(x_0)$ é finito, nesse caso, $\tau(x_0)$ é o período mínimo.*

Demonstração. Seja $A(U, x_0) = \{t > 0 : x(t, U) \cap U \neq \emptyset, \text{ e } \exists t_1 < t \text{ tal que } x(t_1, U) \cap U = \emptyset\}$. Suponha $\tau(x_0) < \infty$. Assim para toda vizinhança U de x_0 $\tau(U, x_0) \leq \tau(x_0)$. Por definição de supremo e tomando $\epsilon = \frac{1}{k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe uma vizinhança U_k de x_0 com $U_K \in B(x_0, \frac{1}{k})$ tal que $\tau(x_0) - \frac{1}{k} < \tau(U_k, x_0) \leq \tau(x_0)$. Como $\tau(U_k, x_0) = inf A(U_k.x_0)$, por definição de ínfimo existe um $t_k \in A(U_k, x_0)$ tal que $\tau(U_k, x_0) \leq t_k \leq \tau(U_k, x_0) + \frac{1}{k}$. Como $t_k \in A(U_k, x_0)$ então $x(t_k, U_k) \cap U_k \neq \emptyset$. Seja $x_{2k+1} \in x(t_k, U_k) \cap U_k$. Por $x_{2k+1} \in x(t_k, U_k)$ existe $x_{2k} \in U_k$ tal que $x(t_k, x_{2k}) = x_{2k+1}$. Note que, para todo $K \in \mathbb{N}$, $x_{2k}, x_{2k+1} \in U_k$ e $t - K \in (\tau(x_0) - \frac{1}{k}, \tau(x_0) + \frac{1}{k})$. Assim, (t_k) e (x_k) são sequências tais que $x_k \to x_0$, $t_k \to \tau(x_0)$ e $x(t_k, x_{2k}) = x_{2k+1}$. Se o período fosse T, teríamos $0 \leq T \leq \tau(x_0)$ o que contradiria o fato de $\tau(x_0)$ ser o período mínimo de retorno a x_0. Reciprocamente, se $x(t, x_0)$ é uma solução de período T, então $\tau(U, x_0) \leq T$ para toda vizinhança U de x_0 suficientemente pequena, dessa forma $x(T, x_0) = x_0 \in U$ e portanto $\tau(x_0) \leq T$. □

Teorema 2.6. *Suponha $\tau(x_0) = +\infty$. Então a condição $\bar{q}_2 < 0$ é um critério de Bendixson robusto sobre uma C^1 perturbação local de f em x_0.*

Demonstração. Seja $\delta = -\bar{q}_2 > 0$. como K é absorvente, existe $T > 1$ tal que $x(t,K) \subset K$ if $t > T$ e

$$\int_{t_2}^{t_1} \mu(B(x(s,x_1)))ds \leq -\frac{\delta(t_1 - t_2)}{2}, \tag{2.5}$$

para todo $t_1, t_2 \geq 0$ tal que $t_1 - t_2 > T$ e $\forall x_2 \in K$. A afirmação $\tau(x_0) = +\infty$ implica que $f(x_0) \neq 0$ e $\tau(U; x_0) > T$ para toda vizinhança U de x_0 suficientemente pequena. Seja Π tranversal (n-1)-dimensional do vetor $f(x_0)$ de x_0 e U_1 uma bola suficientemente pequena em Π centrada em x_0. Considere o conjunto

$$\Sigma = \{x(t, U_1) : -\alpha \leq t \leq \alpha\}$$

gerado pela evolução da bola $U_1 \subset \Pi$ ao longo das soluções de EDO (1.1) para todo intervalo de tempo pequeno $[-\alpha, \alpha]$

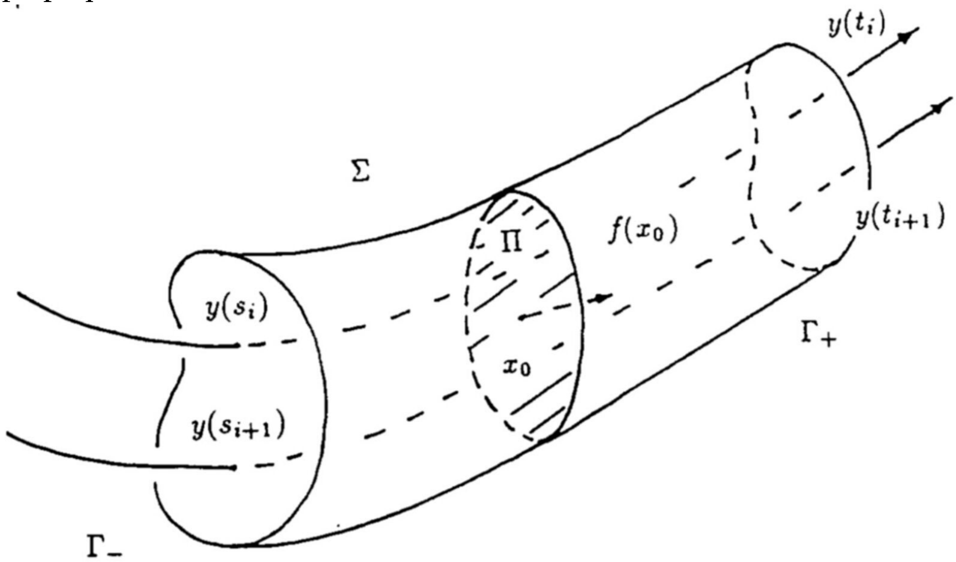

FIG. 1.

Seja $\Gamma_+ = x(\alpha, U_1)$ e $\Gamma_- = x(-\alpha, U_1)$. Tomando uma bola $U_1 \subset \Pi$ e $\alpha > 0$ suficientemente pequena, nos podemos garantir que toda solução de (1.1) iniciada em Σ deixa Σ e que $\tau(\Sigma, x_0) > T$. Como consequência, cada trajetória iniciada em Γ_+ deixa $\bar{\Sigma}$ e retorna para Γ_-, se alguma vez retornar, em um tempo superior a T.

Seja g uma C^1 ϵ-perturbação local de f em x_0 tal que $supp(f-g) \subset \Sigma$. Considere a equação diferencial (1.1). K é também absorvente para (1.1) se Σ é suficientemente pequeno desde que f e g coincidem em $D \backslash \Sigma$. Denote por B^f e B^g a matriz B definida em (2.1) e $\bar{q}_2(f)$ e $\bar{q}_2(g)$ o número definido em (2.2) para f e g, respectivamente. Se a trajetória de uma solução $y(t, y_0)$ de (1.1) não intersecta Σ depois de certo tempo, então ela coincide com a trajetória de uma solução de (1.1) para um t suficientemente grande. Existe um $\bar{t} > 0$ tal que nenhuma solução de (1.1) e (1.3) permanece em $\bar{\Sigma}$ para um intervalo de tempo superior a $\bar{t}$. Para tal solução, segue de (2.5) que

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B^g(y(s,y_0)))ds \leq -\frac{\delta}{4}$$

Suponha que a trajetória de $y(t,y_0)$ intersecta Σ infinita vezes. Nos podemos assumir que $Y_0 \in \Sigma_+ \cap K$. Seja $t_0 = 0$ e

$$T < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < ... < s_n < t_n < s_{n+1} < ...$$

Uma sequência tal que

(i) s_i e t_1 são os tempos sucessivos que $y(t,y_0)$ intersecta Γ_- e Γ_+, respectivamente, quando a solução retorna a Σ,

(ii) $y(t,y_0) \in \Sigma, s_i \leq t \leq t_i$, para cada $i \geq 1$,

(iii) $y(t,y_0) \notin \Sigma, t_1 < t < s_{i+1}$ para cada $i \geq 0$.

Então nos temos

(iv) $t_i - s_1 \leq \bar{t}$ para cada $i \geq 1$,

(v) $s_{i+1} - t_1 > T$ para cada $i \geq 0$,

(vi) $y(t,y_0)$ coincide com a solução $x(t,y_i)$ de (1.1) para $t_i < t < s_{i+1}$, onde $y_i = y(t_i,y_0)$ para cada $i \geq 0$ (ver figura- mesma da anterior)

Desde que $|f-g|_{C^1} < \epsilon$, nos podemos escolher ϵ suficientemente pequeno de modo que

$$|\mu(B^f(x)) - \mu(B^g(y))| < \frac{\delta}{4t}.$$

para $x,y \in \Sigma$, Desta forma, para cada $i \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(B^g(y(s,y_0)))ds &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(B^f(x(s,y_i)))ds \\
&+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mu(B^f(x(s,y_i))) - \mu(B^g(y(s,y_0)))]ds \\
&\leq -\frac{\delta}{2}(t_{i+1}-t_i) + (t_{i+1}-s_{i+1})\frac{\delta}{4t} \\
&\leq -\frac{\delta}{2}(t_{i+1}-t_i) = \frac{\delta}{4} \leq -\frac{\delta}{4}(t_{1+1}-t_i),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

desde que $t_{i+1} - t_i \geq T > 1$. Assim, para t suficientemente grande, $t_n < t \leq t_{n+1}$ para algum n, e

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B^g(y(s,y_0)))ds &= \frac{1}{t}\int_0^{t_n}\mu(B^g) + \frac{1}{t}\int_{t_n}^t \mu(B^g)\\
&= \frac{1}{t}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mu(B^g) + \frac{1}{t}\int_{t_n}^t \mu(B^g)\\
&\leq \frac{\delta}{4}\frac{1}{t}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) + \displaystyle\frac{1}{t}\int_{t_n}^t \mu(B^g)\\
&\leq -\frac{\delta}{4}\frac{t_n}{t} + \frac{1}{t}\int_{t_n}^t \mu(B^g).
\end{aligned}
$$

Se $t - t_n > T$, então, como em (2.6), $\frac{1}{t}\int_{t_n}^t \mu(B^g) < -\frac{\delta}{4}\frac{t-t_n}{t}$. Desta forma, neste caso,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B^g) \leq -\frac{\delta}{4}.$$

Se $t - t_n \leq T$, então $\frac{t-t_n}{t} \leq \frac{T}{t}$ e, desta forma, $\frac{t_n}{t} \geq 1 - \frac{T}{t} > \frac{1}{2}$ quando t é suficientemente grande. Consequentemente, neste caso,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B^g) < -\frac{\delta}{4}\frac{t_n}{t} + \frac{t-t_n}{t}\max_{x\in K}\mu(B^g(x)) < -\frac{\delta}{16}.$$

Desta forma, para t suficientemente grande e para $x_0 \in K$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B^g(y(s,y_0)))ds < -\frac{\delta}{16}.$$

com $\bar{q}_2(g) > 0$, completamos a demonstração da proposição. □

Pelo Teorema 1.35 os resultados estabelecidos no Teorema 2.4 implica que a estabilidade global do único equilíbrio $\bar{x}$ é equivalente a sua estabilidade local, sob a condição $\bar{q}_2 > 0$. O seguinte resultado analisa o comportamento assintótico de soluções para (1.1) próximo de um equilíbrio sob a condição $\bar{q}_2 < 0$ quando equilíbrios múltiplos são permitidos.

Proposição 2.7. *Se $\mu(B) < 0$ em D, então a dimensão de toda variedade estável de toda solução de equilíbrio de* (1.1) *é no mínimo* $(n-1)$. *Se o equilíbrio não é isolado, então a variedade estável tem dimensão* $(n-1)$ *e ela tem uma variedade central de dimesão 1 o qual contem toda a vizinhança do equilíbrio.*

Demonstração. Se x_1 é um equilíbrio, então

$$\mu\left(A\frac{\partial f}{\partial x}^{[2]}A^{-1}\right) = \mu(B) < 0$$

em x_1 desde que $f(x_1) = 0$ implica $A_{f(x_1)} = 0$. Se $v_i(x_1)$ são autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1)$ com $Re[v_1(x_1)] \geq Re[v_2(x_1)] \geq ... \geq Re[v_n(x_1)]$, então $v_i(x_1) + v_j(x_1), i \neq j$ são os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}^{[2]}(x_1)$ e dessa forma de $\frac{\partial f}{\partial x}^{[2]} A^{-1}(x_1)$. Segue que, a desigualdade acima implica $Re\,[v_i(x_1) + v_j(x_1)] \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x_1)A^{-1}(x_1) < 0$; desta forma, $Re[v_1(x_1)] \geq Re[v_2(x_1)] \geq ... \geq Re[v_n(x_1)]$ e somente $v_1(x_1)$ pode ter parte real não negativa; a variedade estável tem dimensão no máximo $(n-1)$. Se o equiíbrio x_1 não é isolado, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1)$ é uma matriz não singular, $0 = v_1(x_1)$ então a variedade estável, tem dimensão $(n-1)$ e existe uma variedade central dimensional um. Desde que todas as semi-trajetórias positivas próximas de x_1 são assintóticas para uma trajetória na variedade central, todo equilíbrio próximo de x_1 é uma variedade central. □

Corolário 2.8. *Suponha válidas as hipóteses* (H_1) *e* (H_2). *Se* $\bar{q}_2 < 0$, *então a dimensão de uma variedade estável de toda solução de equilíbrio de* (1.1) *é no mínimo* $(n-1)$. *Se um equilíbrio não é isolado, então a variedade estável tem dimensão* $(n-1)$ *e ela tem uma variedade central de dimensão um o qual contém toda a vizinhança do equilíbrio.*

Demonstração. Observe que no equilíbrio x_1, $\bar{q}_2 < 0$ implica

$$\mu\left(A\frac{\partial f}{\partial x}^{[2]}A^{-1}\right) < 0$$

desde que $f(x_1) = 0$ implica $A_{f(x_1)} = 0$. De forma análoga à Proposição 2.7, conclui-se a demonstração. □

Teorema 2.9. *Suponha válidas as hipóteses* $(H_1), (H_2)$ *e* (H_3). *Se* $\bar{q}_2 < 0$, *então o único equilíbrio* $\bar{x}$ *é globalmente estável em* D.

Demonstração. Dos Teoremas 1.35 e 2.4 e da proposição 2.6, resta provar a estabilidade assintótica de $\bar{x}$. Assuma o contrário. Então $\bar{x}$ é o α-limite e ω-limite, são de uma trajetória homoclínica, a qual dá origem a uma curva $\gamma = \{x(t); t \in (-\infty, +\infty)\}$ simples fechada retificável cuja existência é impedida por $\bar{q}_2 < 0$ pelo Teorema 2.4. Afirmamos que $C = \gamma \cup \{\bar{x}\}$ é o traço de uma curva simples fechada retificável. Esta curva é invariante com respeito a (1.1), $x(t, C) = C$, e a existência de uma curva invariante é impedida pela generalização do Critério de Dulac como mostrado em [8]. Resta provar que C é retificável.Desde que γ está em uma variedade central ou numa variedade instável de $\bar{x}$, e esta é uni-dimensional, é necessário somente mostrar que $\gamma_+ = \{x(t); t \in [1, \infty)\}$ é o traço de uma curva retificável. Se ela não se aproxima de $\bar{x}$ através de uma variedade central, então, pelo teorema da variedade central,ela se aproxima exponencialmente de $\bar{x}$ com o tempo. Assim, $|f(x(t))| \leq Me^{-\lambda t}$, para alguma constante M, $\lambda > 0$, desde que $f(x_0) = 0$. Considerando $\rho(s) = (1-s)^{-1}, y(s) = x(\rho(s)), s \in [0,1)$, nós encontramos $y'(s) = f(x(\rho(s))).\rho'(s)$ tal que $|y'(s)| \leq Me^{-\lambda\rho(s)}\rho'(s) = Me^{-\lambda(1-s)^{-1}}(1-s)^{-2}$ e y' é limitado com $y[0,1) = \gamma_+$. $\square$

A chave para esta demonstração estava na estrutura local da solução de (1.1) próximo do equilíbrio estabelecido na proposição 2.8.

Observação 2.10. *Na presença de equilíbrios múltiplos, foi provado em [9] que todos os alfa e omega limite são conjuntos unitários representados por um equilíbrio sob qualquer dos critério de Bendixson estabelecidos em* (1.4), (1.32) *e* (1.7). *Resultados deste tipo são chamados Teoremas de Convergência Autônoma. Os principais ingredientes na prova dada em [9] são a robustez C^1 do Critério Bendixson, um resultado como 2.8, e do Teorema da variedade central. Desta forma, o mesmo resultado se mantém sob as suposições (H_1) e (H_2) e nossa condição mais fraca $\bar{q}_2 < 0$.*

Capítulo 3

Aplicação ao Modelo Epidemiológico SEIRS

Os modelos baseados em sistemas de equações diferenciais estão sendo cada vez mais utilizados para entender a dinâmica de doenças infecciosas. O estudo de sua proliferação é a base da ciência conhecida como epidemiologia matemática, que nos permite conhecer esses sistemas e entender os seus efeitos, por meio da proposição de modelos que possam ajudar na criação de estratégias de controle dessas doenças [16].

O nosso objetivo neste capítulo é estudar o comportamento assintótico do modelo epidemiológico SEIRS, com a análise da estabilidade local e global dos seus dois pontos de equilíbrio: um ponto de equilíbrio de imunidade (não doença) e um ponto de equilíbrio endêmico.

A estabilidade global do ponto de equilíbrio de imunidade é provada exibindo uma função de Lyapunov. E para a estabilidade global do ponto de equilíbrio endêmico, são usadas as matrizes da segunda componente aditivas, as quais foram estudadas no capítulo 1, com intuito de provar que o critério de Bendixson $\bar{q}_2 < 0$ é verificado. Para tal análise, aplicaremos a teoria apresentada no capítulo 2 e usaremos como principais referências [2] e [19]

3.1 Descrição do modelo SEIRS

Considere as seguintes classes epidemiológicas, para todo tempo $t \geq 0$: **S** é a classe de todos os indivíduos suscetíveis de contrair a doença; **E** é a classe dos indivíduos expostos, isto é, que já estão infectados mas ainda não infecciosos, portanto, não tem ainda a capacidade de transmitirem a doença; **I** é a classe dos indivíduos infecciosos, ou seja, daqueles que transmitem a doença a indivíduos suscetíveis, através de várias formas de contato; **R** é a classe dos indivíduos recuperados, ou seja, que após estarem infectados adquirem imunidade á doença. Em geral, esta imunidade pode ser temporária ou permanente.

Para o modelo em análise, considere todos os indivíduos suscetíveis; desde que expostos a uma doença infecciosa, tornam-se infectados, em seguida, recuperados com imunidade temporária e então, com a perda da imunidade, tornam-se suscetíveis novamente.

Os parâmetros (ou taxa) de transferências entre as classes são dados da seguinte forma:

λ: é a taxa a que os indivíduos suscetíveis se tornam expostos a determinada doença infecciosa;

ϵ: é taxa a que os indivíduos expostos se tornam infecciosos;

γ: é a taxa de recuperação dos indivíduos infecciosos;

δ: é a taxa a que os indivíduos recuperados voltam a tornar-se suscetíveis.

Assumimos que a taxa de mortalidade e natalidade são iguais, e denotamos essa taxa por ν, e como consequência a população total está em equilíbrio, isto é,

$$S(t)+E(t)+I(t)+R(t)=1, \text{ para todo tempo } t>0 \text{ e } \forall \epsilon,\gamma,\lambda,\nu \geq 0.$$

Definindo $V: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ temos que a função $V(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$ é uma integral primeira para o sistema (3.1).

Definindo as classes e os parâmetros de mudanças de classes, escrevemos o seguinte sistema de equação diferencial o qual descreve o modelo **SEIRS**:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\lambda SI+\nu-\nu S+\delta R \\ \dot{E} &= \lambda IS-(\epsilon+\nu)E \\ \dot{I} &= \epsilon E-(\gamma+\nu)I \\ \dot{R} &= \gamma I-(\delta+\nu)R \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde o $\dot{X}$ representa a derivada de X com relação ao tempo.

Observe que $\nu=0$ corresponde a nenhuma morte e nenhum nascimento; $\delta=0$ significa que indivíduos infectados se recuperam com imunidade permanente, isto é, não se tornam suscetíveis novamente. Observe ainda que sempre temos $\epsilon>0$, uma vez que estamos considerando as doenças infecciosa. Também assumimos que $\nu+\delta>0$, caso contrário a população recuperada ganharia imunidade permanente. De fato, como $\nu,\delta \geq 0$ então $\nu+\delta \geq 0$.

Se tivéssemos $\nu+\delta=0$ então teríamos $\nu=0$ e $\delta=0$, isto é , não há morte nem nascimento e nenhum recuperado seria suscetível novamente.

3.2 Soluções de equilíbrio

Vamos agora introduzir os conceitos de ponto de equilíbrio endêmico e de ponto de equilíbrio de imunidade e número de contato. Seja Γ um região em $\mathbb{R}^4_+$, definida por:

$$\Gamma=\{(S,E,I,R)\in\mathbb{R}^4_+ : S+E+I+R=1\}$$

Definição 3.1. *Considere o sistema de equações diferenciais* (3.1) *na região Γ. Dizemos que uma solução de equilíbrio desse sistema é:*

(i) **Equilíbrio de Imunidade** *se corresponder a um número nulo de indivíduos infecciosos.*

(ii) **Equilíbrio Endêmico** *se estiver em no interior de Γ. Nesse caso, denotamos por P^*.*

Definição 3.2. *O número médio de contatos adequados de um infeccioso durante o período de infeção é denominado* **número de contato** *e denotado por σ.*

É possível notar que o sistema (3.1) sempre admite o equilíbrio de imunidade (trivial) $P_0=(1,0,0,0)$ o qual corresponde ao desaparecimento da doença. Note ainda que, qualquer equilíbrio deve satisfazer:

$$E=\frac{\gamma+\nu}{\epsilon}I \quad \text{e} \quad R=\frac{\gamma}{\delta+\nu}I. \tag{3.2}$$

Observamos que todos os parâmetros são positivos, dessa forma, em qualquer equilíbrio não trivial, as variáveis E,I e R são positivas e $S<1$. Um equilíbrio não trivial corresponde a persistência da doença. Fazendo $\dot{E}=0$ e $S=1-E-I-R$, temos que todo equilíbrio também deve satisfazer:

$$\lambda I(1-E-I-R)=(\epsilon+\nu)E \tag{3.3}$$

Observe que substituindo (3.2) em $S=1-R-I-E$, obtemos:

$$S=1-\left(\frac{(\delta+\nu)(\gamma+\nu+\epsilon)+\epsilon\gamma}{\epsilon(\delta+\nu)}\right) \tag{3.4}$$

Por outro lado, substituindo as equações (3.2) na equação (3.3), e observando que $I\neq 0$, obtemos a equação:

$$S=\frac{(\epsilon+\nu)(\gamma+\nu)}{\epsilon\lambda} \tag{3.5}$$

Segue de (3.4) e (3.4) que:

$$\left(1 - \frac{I}{H}\right) = \frac{1}{\sigma} \tag{3.6}$$

onde,

$$H = \frac{\epsilon(\delta+\nu)}{\gamma\epsilon + (\delta+\nu)(\epsilon+\gamma+\nu)} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\lambda\epsilon}{(\epsilon+\nu)(\gamma+\nu)}. \tag{3.7}$$

A raiz I de (3.6) que é menor que H corresponde ao equilíbrio não trivial de sistemas (3.1); uma vez que I é especificado, R e E são determinados por (3.2) e S por $\left(1 - \frac{I}{H}\right)$. Quando $\sigma \leq 1$, não existe um equilíbrio não trivial. E quando $\sigma > 1$, existe um único equilíbrio não trivial que tende a um equilíbrio trivial quando σ tende a 1.

Fazendo $R = 1 - S - E - I$, podemos reduzir o sistema (3.1) ao seguinte sistema tridimensional:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\lambda SI + \nu - \nu S + \delta(1 - S - E - I) \\ \dot{E} &= \lambda IS - (\epsilon+\nu)E \\ \dot{I} &= \epsilon E - (\gamma+\nu)I \end{aligned} \tag{3.8}$$

e transformar a região simples $\Gamma \subset \mathbb{R}^4_+$ na seguinte região em $\mathbb{R}^3_+$ convexa e positivamente invariante, em $\mathbb{R}^3_+$

$$T = \{(S, E, I) \subset \mathbb{R}^3_+ ; 0 \leq S + E + I \leq 1\}.$$

O equilíbrio de imunidade P_0 torna-se $(1, 0, 0)$ e equilb́rio endêmico P^* torna-se um equilíbrio interior de T. Para simplificar, vamos continuar denotando estes dois equilíbrios de (3.8) por P_0 e P^*.

3.3 Estabilidade do equilíbrio de imunidade

Podemos estudar a estabilidade assintótica do equilíbrio de imunidade através da matriz linearizada do sistema (3.1) da seguinte forma: escrevemos $S = 1 - R - E - I$ e fazemos a substituição no sistema (3.1). Segue que o SEIRS se reduz a um sistema tridimensional, nas variáveis E, I e R, o qual pode ser escrito na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \dot{E} \\ \dot{I} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\epsilon+\nu) & \lambda & 0 \\ \epsilon & -(\gamma+\nu) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ I \\ R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda I(-R - E - I) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proposição 3.3. *Se $\sigma < 1$, então equilíbrio de imunidade P_0 é assintoticamente estável. Se $\sigma > 1$ equilíbrio de imunidade P_0 é instável.*

Demonstração. O polinômio característico da matriz da parte linear do novo sistema é:

$$p(x) = [x + (\delta + \nu)].q(x),$$

onde,

$$q(x) = x^2 + [(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)]x + (\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) - \lambda\epsilon.$$

Um autovalor é $x_1 = -(\delta + \nu)$. Como $(\delta + \nu) > 0$ então $x_1 < 0$, isto é um autovalor tem parte real negativa. Os outros dois autovalores são as raízes de $q(x)$. Calculando as raízes de $q(x)$, temos:

$$\Delta = [(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)]^2 - 4.[(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) - \lambda\epsilon].$$

Observe que Δ é sempre não negativo, pois

$$\begin{array}{rcl} [(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)]^2 - 4.[(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) - \lambda\epsilon] & = & \\ (\epsilon + \nu)^2 + 2(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) + (\gamma + \nu)^2 - 4(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) + 4\lambda\epsilon & = & \\ (\epsilon + \nu)^2 - 2(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) + (\gamma + \nu)^2 + 4\lambda\epsilon & = & [(\epsilon + \nu) - (\gamma + \nu)]^2 + 4\lambda\epsilon \geq 0. \end{array}$$

Portanto, todas as raízes de $q(x)$ são reais. Sejam x_2 e x_3 as raízes de $q(x)$.

$$x_2 = \frac{-[(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)] - \sqrt{[(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)]^2 - 4.[(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) - \lambda\epsilon]}}{2}$$

e

$$x_3 = \frac{-[(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)] + \sqrt{[(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)]^2 - 4.[(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) - \lambda\epsilon]}}{2}.$$

Observe que x_2 é negativa. Para que x_3 seja negativa, temos que ter:

$$[(\epsilon + \nu) + (\gamma + \nu)]^2 > [(\epsilon + \nu) - (\gamma + \nu)]^2 + 4\lambda\epsilon] \Longleftrightarrow 2(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) > -2(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu) + 4.\lambda\epsilon] \Longleftrightarrow$$
$$\sigma = \frac{\lambda\epsilon}{(\epsilon + \nu)(\gamma + \nu)} < 1.$$

Segue que, $\sigma < 1$, implica que todos os autovalores tem parte real negativa, consequentemente, todos os equilíbrios do novo sistema, são assintoticamente estáveis. Finalmente, se $\sigma > 1$, um equilíbrio não trivial emerge e o equilíbrio trivial se torna instável, desde que um autovalor tem parte real positiva. Note que se não existe infeção ($E = I = 0$), então $R(t)$ ainda se aproxima de zero para $\sigma > 1$. $\square$

A estabilidade assintótica no caso $\sigma = 1$ não é detectada por meio da análise dos autovalores do sistema linearizado, visto que $x = 0$ é um autovalor. No entanto, podemos provar que quando $\sigma \leq 1$, o equilíbrio de imunidade P_0 é globalmente estável exibindo uma função global de Lyapunov, mas antes, enunciaremos o Princípio de invariância de LaSalle, o qual podemos encontrar sua demonstração em [1].

Teorema 3.4. (Principio de Invariância de LaSalle) *Suponhamos que exista uma função de Lyapunov $V : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ para a EDO* (1.1)*, com $\overline{W} \subseteq D = \mathbb{R}^n$. Seja $E = \{x \in \overline{W}; \dot{V} = 0\}$ e M o maior subconjunto de E invariante por* (1.1)*. Então toda solução limitada (no tempo) de* (1.1) *que permanece em W aproxima-se de M quando $t \longrightarrow \infty$.*

Proposição 3.5. *Considere a região factível $\overline{T} = \{(E, I, R) | E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, E + I + R < 1\}$.*

(i) Se $\sigma \leq 1$, o equilíbrio de imunidade é globalmente estável em $\overline{T}$.

(ii)Se $\sigma > 1$, P_0 é instável e as trajetórias suficientemente próximas de P_0 deixam P_0, exceto aquelas no eixo S que se aproximam de P_0 ao longo desse eixo.

Demonstração. Considere as seguinte a função:

$$L(E, I, R) = E + \frac{\epsilon + \nu}{\epsilon} I.$$

$L(P_0) = 0$ e $L(x) > 0, \forall x \neq 0$. Observe que $\dot{L} \leq 0$. De fato, se $\dot{L}(E, I, R) = \dot{E} + \dfrac{\epsilon + \nu}{\epsilon} \dot{I}$ então, $\dot{L} = [\lambda S I - (\epsilon + \nu) E] + \dfrac{\epsilon + \nu}{\epsilon} [\epsilon E - (\gamma + \nu) I] = [-\dfrac{\lambda}{\sigma} + \lambda S] I \leq 0$. Se tivéssemos $\left[-\dfrac{\lambda}{\sigma} + \lambda S \right] I > 0$ então $\sigma S > 1$, mas por hipótese $S \leq 1$ e $\sigma \leq 1$, o que seria um absurdo. Segue que L é uma função de Lyapunov. A igualdade , $\dot{L} = 0$ só acontece quando $\sigma = 1$ e $E = I = R = 0$ ou $I = 0$. O conjunto onde $I = 0$ e $E \neq 0$ não é invariante e, uma vez que $I \neq 0$, temos $\dot{L} < 0$. Se $I = E = 0$, então $\dot{E} = \dot{I} = 0$, e $\dot{R} = -(\delta + \nu) R$, de modo que $R \rightarrow 0$. Assim, o maior subconjunto invariante do conjunto onde $\dot{L} = 0$ é $(E, I, R) = (0, 0, 0)$. Desta forma, pelo Principio de Invariância de LaSalle, o equilíbrio de imunidade é globalmente estável, isto é, toda solução iniciando na região factível $\{(E, I, R) | E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, E + I + R < 1\}$ se aproxima da origem.

Para finalizar, mostraremos que se $\sigma < 1$ então P_0 é instável. Sendo $\dot{L} = \left[\dfrac{-\lambda}{\sigma} + \sigma S \right] I$, a condição $\sigma > 1$, implica que para toda vizinhança U de P_0, podemos tomar um ponto P, com coordenadas arbitrariamente próximas de 1, tal que $\dot{L} > 0$. Então P_0 é instável. $\square$

Observe que quando isolando a variável R, é possível mostrar da mesma forma que a Proposição 3.5 que $(S, E, I) = (1, 0, 0)$ é o maior subconjunto invariante do conjunto onde $\dot{L} = 0$. Segue que, o equilíbrio de imunidade $P_0 = (1, 0, 0)$ é globalmente estável em T.

3.4 Estabilidade do equilíbrio endêmico

Como vimos nas seção anteriores, o comportamento qualitativo de (3.1) é determinado pelo número de contato σ, definido por

$$\sigma = \frac{\lambda\epsilon}{(\epsilon+\nu)(\gamma+\nu)}.$$

Se $\sigma \leq 1$, o equilíbrio de imunidade $P_0 = (1,0,0,0)$ é uńico e é globalmente assintoticamente estável na região simples $\mathit{\Gamma}$, o que significa que a doença desaparece. Se $\sigma > 1$ então P_0 perde a estabilidade e o único equilb́rio endêmico P^* emerge do interior de Γ. Para mostrar que P^* é assintoticamente estável usaremos o Teorema de Hurwitz cuja demonstração pode ser encontrada [12].

Teorema 3.6. *(***caso n=3***) Seja A a matriz do sistema linear $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cujo polinômio característico $p(x) = a_0x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_3$. Se $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ e $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, então o equilíbrio é assintoticamente estável.*

No caso $n = 3$ o polinômio característico pode ser escrito da forma $p(x) = x^3 + tr(A)x^2 - Mx + det(A)$

Proposição 3.7. *Se $\sigma > 1$ o equilíbrio endêmico P^* é assintoticamente estável.*

Demonstração. A matriz jacobiana de (3.1), nas variáveis E, I e R no ponto de equilíbrio endêmico $P^* = (E, I, R) \in T$, é dada por:

$$J(E,I,R) = \begin{bmatrix} -\lambda I - (\epsilon+\nu) & \lambda - 2\lambda I & -\lambda I \\ \epsilon & -(\gamma+\nu) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta+\nu) \end{bmatrix}$$

Neste caso, basta aplicar o critério de Routh- Hurwitz para obter as condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio endêmico. Neste critério, para que todos os autovalores tenham parte real negativa, devemos ter:

(i) $tr = traço(J) < 0$,

(ii) $det = det(J) < 0$,

(iii) $C = tr \times M - det < 0$,

onde M é a soma da menor principal de segunda ordem de J.

(i) Calculando o $traço(J)$, temos:

$$tr(J) = (-\lambda I - \nu - \epsilon) - (\gamma + \nu) - (\delta + \nu) = -(\lambda I + \epsilon + \gamma + \delta + 3\nu)$$

Como estamos analisando a jacobiana num equilíbrio endêmico, I é uma raiz positiva de (3.6), e todos os parâmetros são positivos, portanto $tr(J) < 0$.

(ii) Calculando o $det(J)$, temos:

$$det(J) = -[\lambda I + (\nu + \epsilon)](\gamma + \nu)(\delta + \nu) - \epsilon\gamma\lambda I + \epsilon(\lambda - 2\lambda I)(\delta + \nu) \quad =$$
$$-(\delta + \nu)[(\lambda I + \mu + \epsilon)(\gamma + \nu) + \epsilon\lambda(1 - 2I)] - \epsilon\gamma\lambda I < 0$$

Calculando o C, usando o método de Routh- Hurwitz, concluímos que o equilíbrio endêmico é assintoticamente estável. □

Foi conjecturado em [19] que P^* é globalmente estável no interior de Γ quando $\sigma > 1$ de modo que a doença permanece endêmica e se aproxima do único equilíbrio endêmico para todas as configurações iniciais.

Foi provado em [9] que essa conjectura é verdade , quando $\delta = 0$. A parte crucial da demonstração é que quando, $\delta = 0$, o sistema (3.1) pode ser reduzido a sistema tridimensional competitivo. Desde que essa propriedade de (3.1), não pode ser preservada no caso em que $\delta > 0$ o método em [9], não se aplica ao caso $\delta > 0$.

Nesta seção vamos aplicar a teoria desenvolvida no capítulo 2 para mostrar que esta conjectura também é verdade no caso para um δ pequeno.

A Proposição 3.5 determina a dinâmica global do sistema (3.8) em T para o caso $\sigma \leq 1$. A sua implicação epidemiológica é que a fração de infectados (a soma das frações de latentes e infecciosos) da população desaparece com o tempo e a doença extingue-se.

Observe que estabilidade global de P_0 em T, quando $\sigma \leq 1$ exclui a existência de outros equilíbrios. O estudo de um equilíbrio endêmico é assim restringido ao caso em que $\sigma > 1$. Desta forma, veremos a seguir que quando $\sigma > 1$, a doença persiste e torna-se endêmica. A noção de endemia de uma doença pode ser entendida através da noção de persistência uniforme:

Definição 3.8. *O sistema* (3.8) *é dito* **uniformemente persistente***, se existe* $c > 0$ *tal que toda solução* $(S(t), E(t), (I(t))$ *de* (3.8) *com* $(S(0), E(0), I(0))$ *no interior de* T *satisfaz*

$$\lim_{t\to\infty} inf \|(S(t), E(t), (I(t))\| \geq c$$

Definição 3.9. *Um conjunto compacto invariante $F \subset T$ de* (3.8) *é dito isolado se existe uma vizinhança $N \subset T$ de F tal que F é um subconjunto invariante maximal de N.*

Definição 3.10. *O conjunto estável f^S de F é o conjunto dos $P \in T$ tal que o conjunto, $\omega(P) \subset F$, (ω-limite), isto é:*

$$f^S = \{P \in T; \omega(P) \subset F\}$$

Seja $\mathfrak{X}$ um espaço métrico com a métrica d, $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ uma aplicação contínua e $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$ fechado tal que $f(\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X} \backslash \mathfrak{Y}$. Assumimos que $\mathfrak{X}$ tem um atrator global X, tal que $X \subset \mathfrak{X}$ é um subconjunto compacto invariante e $d(f^n(x), X) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, para todo $x \in \mathfrak{X}$. Note que, em geral, $\mathfrak{Y}$ não é um conjunto positivamente invariante. Seja M um compacto invariante maximal em $\mathfrak{Y}$. Então $M \subset \mathfrak{X}$.

Seja $W^S = \{x \in X; f^n \longrightarrow M$, quando $n \longrightarrow \infty\}$.

Proposição 3.11. *a função f é uniformemente persistente se, e somente se:*

(i) O compacto invariante M é isolado em X.

(ii) $W^S(M) \subset Y$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7].

Proposição 3.12. *Se $\sigma > 1$ o sistema* (3.8) *é uniformemente persistente.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 3.13. *Assuma $\sigma > 1$. Então existe um $\bar{\delta} > 0$ tal que o único equilíbrio interior P^* é globalmente estável no interior de T quando $\delta \leq \bar{\delta}$.*

Demonstração. Pela proposição 3.12, quando $\sigma > 1$, existe uma compacto no interior de T que é absorvente para (3.8). A demonstração do teorema consiste na escolha adequada da norma vetorial $\|.\|$ em $\mathbb{R}^3$ e da função matriz 3×3, $A(x)$ de modo que o número $\bar{q}_2$ definido em (2.2) seja negativo.

Seja A a seguinte matriz diagonal:

$$A(S,E,I) = diag\left(1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right) \tag{3.9}$$

Então $A \in C^1$ e não singular no interior de T. Seja f o campo vetorial de (3.8) então

$$A_f A^{-1} = diag\left(0, \frac{E}{I}\left(\frac{I}{E}\right)_f, \frac{E}{I}\left(\frac{I}{E}\right)_f\right)$$

A segunda componente aditiva $J^{[2]}$ da matriz jacobiana $J = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ pode ser calculada como segue:

$$\begin{bmatrix} -\lambda I - \delta - \epsilon - 2\nu & \lambda S & \lambda S + \delta \\ \epsilon & -\lambda I - \delta - \gamma - 2\nu & -\delta \\ 0 & \lambda I & -\epsilon - \gamma - 2\nu \end{bmatrix}.$$

Desta forma, a matriz $B = A_f A^{-1} + AJ^{[2]} A^{-1}$ pode ser escrita em blocos da forma:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

com $B_{11} = -\lambda I - \delta - \epsilon - 2v$, $B_{12} = \left(\dfrac{\lambda SI}{E}, \dfrac{(\lambda S + \delta)I}{E}\right)$ e $B_{21} = \left(\dfrac{\epsilon E}{I}, 0\right)$ e

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{I}{E}\left(\frac{E}{I}\right)_f - \lambda I - \delta - \gamma - 2\nu & -\delta \\ \lambda I & \frac{I}{E}\left(\frac{E}{I}\right)_f - \epsilon - \gamma - 2\nu \end{bmatrix}.$$

A norma vetorial $\|.\|$ em $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{\binom{3}{2}}$ é escolhida como

$$|(u, v, w)| = sup\{|u|, |v + w|\} \tag{3.11}$$

A medida do lozinski $\mu(B)$ com respeito $\|.\|$ pode ser estimada como segue

$$\mu(B) \leq sup\{g_1, g_2\} \tag{3.12}$$

onde,

$$g_1 = B_{11} + |B_{12}| = -\lambda I - \delta - \epsilon - 2\nu + \frac{(\lambda S + \delta)}{E} I \tag{3.13}$$

$$g_2 = \mu_1(B_{22}) + |B_{21}| \leq \frac{I}{E}\left(\frac{E}{I}\right)_f - \delta - \gamma - 2\nu + \frac{\epsilon E}{I} \tag{3.14}$$

Se $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Note que $\mu_1(B_{22})$ é a medida de lozinski da matriz $2 \times 2, B_{22}$ com respeito a norma euclidiana em R^2 e $|B_{12}|$ e $|B_{21}|$ são as normas dos operadores B_{12} e B_{21}, quando eles são considerados como operadores de $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$ respectivamente, e $\mathbb{R}^2$ é munido com a norma euclidiana.

Também note que, desde que B_{11} é um escalar, a medida de lozinski com respeito a alguma norma vetorial em $\mathbb{R}^1$ é igual a B_{11}.

A solução $(S(t), E(t), (I(t))$ para (3.8) com $(S(0), E(0), (I(0))$ no conjunto absorvente K existe para todo $t > 0$.

Da equação (3.8) encontramos

$$\frac{I}{E}\left(\frac{E}{I}\right)_f = \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} \tag{3.15}$$

$$\frac{\lambda SI}{E} = \frac{\dot{E}}{E} + \epsilon + \nu \tag{3.16}$$

$$\frac{\epsilon E}{I} = \frac{\dot{I}}{I} + \gamma + \nu \tag{3.17}$$

(3.12) a (3.17) implica

$$\mu(B) \leq \frac{\dot{E}}{E} - \delta - \nu + sup\left\{\frac{\delta}{E} - \lambda I, 0\right\}.$$

Desde que (3.8) é uniformemente persistente quando $\sigma > 1$, existe $c > 0$ e $T > 0$ tal que $t > T$ implica

$$E(t) \geq c, I(t) \geq c \quad \text{e} \quad \frac{1}{t} logE(t) < \frac{\delta + \nu}{2}.$$

Para todo $(S(0), E(0), (I(0)) \in K$. Seja $\bar{\delta} = min\{\frac{\epsilon}{2}, \lambda c^2\}$. Então $t > T$ e $\delta < \bar{\delta}$ implica $\frac{\delta}{E} - \lambda I \leq 0$ e assim

$$\frac{1}{t}\int_0^t dt < logE(t) - (\delta + \nu) < \frac{1}{2}(\delta + \nu).$$

Para todo $(S(0), E(0), (I(0)) \in K$ que por sua vez implica $\bar{q}_2 < 0$, e assim, concluímos a demonstração. $\square$

Referências

[1] BOBKO Nara *Estabilidade de Lyapunov e Propriedades globais para modelos de dinâmica viral*, Dissertação de mestrado- Universidade Federal do paraná 2010

[2] BUTLER G. J. and P. Waltman *Persistence in dynamical systems*, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), pp. 425-430.

[3] CIRINO J. A.L da Silva *Modelo Epidemiológico SEIR de Transmissão da Dengue em Redes de Populacões Acopladas*, Tend. Mat. Apl.Comput.,5,No. 1 (2004),55-64.

[4] COPPEL W. A. *Stability and Asynptotic Behavior of Differential Equations*, Heath, Boston, 1965.

[5] DOERING, Claus Ivo. *Equações diferenciais ordinárias*, Claus Ivo Doering, Artur Oscar Lopes. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[6] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York, 1969.

[7] HOFBAUER J. and J. W.-H. So *Uniform persistence and repellors for maps*,Proc. Amer. Math. Soc., 107 (1989), pp. 1137-1142.

[8] LI Y. and J. S. Muldowney *On Bendixson's Criterion*, J. Differential Equations, 106 (1994), pp. 27-39.

[9] LI Y. and J. S. Muldowney *On R.A.Smith's autonomous convergencee theorem*, Rocky J.Math., 25(1995), pp. 365-379.

[10] LI Y. and J. S. Muldowney *Global stability for the SEIR model in epidemiology*, math.Biosc., 125(1995),pp. 155-164,

[11] LI Y. and J. S. Muldowney *A geometric approach to global stability problems*, SIAM j.mat anal. vol.27, nº 4, pp. 1070-1083, july 1996.

[12] MARKIN,David R. *introduction to the theory of stability*,Springer.24(1996).

[13] MULDOWNEY, J. S. *Compound matrices and ordinary differential equations*, Rocky Moutain J. Math., 20 (1990), pp. 857-872.

[14] OLIVEIRA, Isabel Mesquita *Modelos Epidemiológicos SEIR*. Tese de doutorado apresentada ao Dep. de Mat. Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto - 2008.

[15] PUGH C. C. and C. Robinson *The C^1 closing lemma including Hamiltonians*, Ergodic Theory Dynamical Systems, 3 (1983), pp. 261-313.

[16] SILVA, Stela Oliveira. *Modelagem de Propagação da dengue com uso de equações diferenciais e modelo tipo SEIR*, Dissertação de Mestrado apresentada á Universidade Federal de Lavras- 2012.

[17] SOTOMAYOR, Jorge. *Equações diferenciais Ordinárias*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

[18] VIDAL, C. *Curso de Equações Diferenciais ordinárias*, Recife, 2004. (Notas de curso).

[19] W.M.LIU, H. Whethcote and S.Alevin *Dynamical Behavior of epidemiological models with nonlinear inicidences rates*,J.Math.biol.24(1987), pp. 359-380.