UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Métricas com Curvatura de Ricci Positiva via Deformações Conformes em Variedades de Dimensões 3 e 4

por

Alan Santos Gois
Mestrado Acadêmico em Matemática

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos
Orientador

São Cristóvão - SE
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Métricas com curvatura de Ricci positiva via deformações conformes em variedades de dimensões 3 e 4

por

Alan Santos Gois

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos
Orientador

São Cristóvão - SE
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

G616m

Gois, Alan Santos
Métricas com curvatura de Ricci positiva via deformações conformes em variedades de dimensões 3 e 4 / Alan Santos Gois; orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristóvão, 2016.
76 f.:

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Variedades Riemannianas. 2. Curvatura. 3. Hipersuperfícies. I. Santos, Almir Rogério Silva, orient. II. Título.

CDU: 514.764.27

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Métricas com Curvatura de Ricci Positiva via Deformações Conformes em Variedades de Dimensões 3 e 4

por

Alan Santos Gois

Aprovada pela banca examinadora:

Almir Rogério Silva Santos

Prof. Dr. Almir Rogerio Silva Santos - UFS
Orientador

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa - UFMG
Primeiro Examinador

Maria de Andrade Costa e Silva.

Prof. Drª. Maria de Andrade Costa - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 04 de Março de 2016

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente e principalmente, a Deus pela vida, pela saúde, por tudo que conquistei até hoje, pelas incontáveis vezes que pedi a tua ajuda e fui atendido, pelas pessoas que colocou em meu caminho e citadas mais a diante, pela perseverança, autoconfiança e persistência.

Aos meus pais e à minha família por compreenderem a minha ausência, várias vezes por causa dos estudos.

Aos meus irmãos e amigos, Natã, Suelen e Taynara, que conviveram comigo nos últimos 6 anos e me proporcionaram momentos únicos e inesquecíveis. Obrigado pelos conselhos, pela convivência saudável, trabalhos, listas de exercícios (claro, rsrs) e todo o apoio acadêmico. Como já havia dito em outro momento da vida, sem vocês eu não teria chegado até aqui. Agora nos separaremos, mas nunca deixaremos de ser o quarteto. Obrigado, irmãos!

Aos professores do Departamento de Matemática da UFS, em especial a Wilberclay Melo, pela orientação nas iniciações científicas, disponibilidade a qualquer hora para me ajudar no que precisei, amizade, dedicação e pela paciência. A Paulo Rabelo pelo incentivo, conselhos, confiança e pelas várias vezes que nos fez rir. À Ivanete Batista, nossa tia pra todas as horas, pelo carinho, pela preocupação, conselhos, pelas viagens juntos e acolhida em sua casa sempre. São mais que professores, são amigos pra todas as horas, cada um influenciou diretamente na minha formação, desde a graduação até o aceite no doutorado. Não aprendi só matemática, aprendi a ser uma pessoa melhor me espelhando em vocês.

Ao professor Almir Rogério por ter aceitado me orientar no mestrado sabendo que nunca tinha estudado geometria e que te daria muito trabalho (e creio que dei trabalho), pela compreensão, pela paciência e por ter me ajudado sempre que estava confuso no desenvolvimento dessa dissertação. Obrigado por ter me ensinado várias coisas e acreditado que eu conseguiria chegar até aqui.

Aos professores Ezequiel e Maria por aceitarem participar da banca na minha desefa de mestrado e por contribuírem também no trabalho.

A Fábio, meu companheiro e melhor amigo, por cuidar de mim, me apoiar em todos os momentos, me aturar e por me fazer tão feliz. Obrigado pela companhia nas noites de estudo e por passar noites em claro quando estive doente. Admiro a sua inteligência a capacidade de aprender as coisas rápido, sei que terá um futuro promissor. Confio em você.

Aos meus loucos e inseparáveis amigos Hortência, Lucas, Luiz e Tamires por sempre estarem presentes na minha vida me incentivando (do modo deles, rsrs) e me fazendo rir até nas horas mais difíceis, pricipalmente quando estamos numa Situação Periclitante (piada interna, rsrs). Amo vocês.

Ao pessoal do PROMAT, em especial à Diego Cardoso, Izabela, Jonison, Thiago, Diego Alves, Danilo, Dayane, Janderson e Franciele pelos momentos de estudo, descontração, almoços, cafés e risadas. A Igor e Catiucha pela extrema paciência e ajuda em todos os momentos que precisei de algo na secretaria, até mesmo fora dos seus expedientes, sei que enjoei muito vocês.

Aos meus amigos do DMA, com os quais dividi vários momentos de alegria. Não citarei nomes porque são muitos (rsrs).

Às integrantes da Mary's House, Daniele e Jaciana que, além do quarteto, compôs nossa casa nesses últimos 2 anos. Foram várias as histórias (Siriri News), relatos de vidas, experiências e noites em claro (estudando ou matando ratos, rsrs).

Às meninas da F19, em especial Taize, Isabelly, Ari e Thaiane por acolher e me aturar durante minha graduação inteira, pela convivência, confiança e amizade.

Aos meninos da M11, em especial Samuel (exigiu ser citado aqui, rsrsrs) e Evandro, também pela acolhida (eu sempre sem teto, rsrsrs) pela convivência a altas risadas.

Ao pessoal do PGmat da UFPB, em especial Eudes, Marcius, Esteban e Luís (meu professor de espanhol, rsrs) pela disponibilidade da sala, pela acolhida, diversão, mais almoços e cafés (eita povo pra gostar de um café, rsrs). A Marcos Aurélio pela companhia e ajuda nesse tempo que passamos na Paraíba. Aos queridos Seu Hélio, Dona Conceição e Ailton pela acolhida em sua casa. Espero voltar mais vezes em Jampa.

À FAPTEC/CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram direto e indiretamente na minha formação. Cada um tem parcela nessa conquista.

Obrigado a todos!

Resumo

O objetivo principal deste trabalho consiste em mostrar a existência de métricas com curvatura de Ricci positiva na classe conforme de uma métrica Riemanniana com curvatura escalar positiva em variedades compactas de dimensão 3 e 4. Catino-Djadli [3] e Gursky-Viaclovsky [13] mostraram que se as curvaturas escalar e de Ricci de uma métrica g satisfazem a uma desigualdade integral em uma variedade compacta tridimensional, então g é conforme a alguma métrica de curvatura de Ricci positiva. No primeiro artigo os autores trabalham em variedades tridimensionais e no segundo em variedades de dimensão 4.

Palavras Chaves: Métricas conformes, curvatura de Ricci positiva, desigualdade integral.

Abstract

The main objective of this work is to show the existence of metrics with positive Ricci curvature in the class as a Riemannian metric with positive scalar curvature on compact manifolds of dimension 3 and 4. Catino-Djadli [3] and Gursky-Viaclovsky [13] showed that bends climbing and Ricci of a metric g satisfies an integral inequality in a three-dimensional compact manifold, then g is according to some metric of positive Ricci curvature. In the first article the authors work in three-dimensional manifolds and second manifolds 4.

Key Words: Conformal metrics, positive Ricci curvature, integral inequality.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Métricas Riemannianas e Curvatura 4

1.2 Subvariedades Riemannianas 8

1.3 Operadores Diferenciáveis e a Fórmula de Böchner-Weitzenböck 9

1.4 Funções Simétricas Elementares e o Tensor de Schouten 11

1.5 Métricas Conformes 18

1.6 Elipticidade e Estimativa Gradiente 20

2 Deformações Conformes em variedades de dimensão 3 **31**

2.1 Limite Superior 32

2.2 Limite Inferior 33

2.3 Demonstração do Teorema Principal 48

2.4 Aplicação 51

3 Deformações Conformes em variedades de dimensão 4 **56**

3.1 Limite Superior 57

3.2 Limite Inferior 58

3.3 Demonstração do Teorema Principal 61

3.4 Aplicação 64

Referências Bibliográficas **68**

Introdução

Em 1904, o francês Henri Poincaré apresentou uma conjectura sobre a esfera tridimensional que intrigou grandes mentes da matemática por quase um século até sua prova em 2002 por G. Perelman. Hoje ela é conhecida como a *Conjectura de Poincaré*. Desde que Poincaré lançou sua conjectura, muitos matemáticos dedicaram-se a encontrar propriedades topológicas ou geométricas de uma variedade através de sua estrutura métrica. Como exemplo, podemos perguntar sob quais condições no tensor curvatura uma variedade Riemanniana é homeomorfa ou difeomorfa a uma forma espacial.

Em 1951, Rauch H.E. [21] perguntou se uma variedade Riemanniana M^n compacta simplesmente conexa de dimensão n com curvatura seccional no intervalo $(1, 4]$ é necessariamente homeomorfa ou difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^n$. Devido ao trabalho de Berger e Klingenberg sabe-se que a resposta a esta pergunta é positiva para o caso de ser homeomorfa e devido ao trabalho de Brendle e Shoen [1] o resultado é verdadeiro para o caso diferenciável, hoje conhecido como o Teorema da Esfera Diferenciável.

Em [4] os autores mostraram que dada uma variedade Riemanniana fechada (M, g) de dimensão 4 com o invariante de Yamabe positivo e satisfazendo a desigualdade

$$\int_M \left(\frac{1}{3} R_g^2 - |Ric_g|^2 - \frac{1}{2}|W_g|^2 \right) dv_g > 0,$$

onde Ric_g, R_g e W_g são o tensor de Ricci, a curvatura escalar e o tensor de Weyl da métrica g, respectivamente, então segue que M é difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^4$ ou ao espaço projetivo $\mathbb{R}P^4$.

Na primeira parte deste trabalho iremos apresentar um resultado semelhante ao resultado em [4], porém para variedades tridimensionais. Mais precisamente, provaremos no Capítulo 2 o seguinte teorema de Catino e Djadli [3].

Teorema 0.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 3 com curvatura escalar positiva. Se*

$$\int_M |Ric_g|_g^2 \, dV_g \leq \frac{3}{8} \int_M R_g^2 \, dV_g,$$

então M é difeomorfa a uma forma espacial esférica.

A grosso modo, a demonstração deste teorema consiste em mostrar que a variedade admite uma métrica de curvatura de Ricci positiva, e então usar o resultado de Hamilton [14] sobre fluxo de Ricci para concluir o resultado. Em 1982, Hamilton introduziu o fluxo de Ricci, que nada mais é do que uma família diferenciável a 1-parâmetro de métricas $g(t)$ que satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

Então ele mostrou em [14] que se $g(0)$ possui curvatura de Ricci positiva, então o fluxo converge para uma métrica de curvatura seccional constante positiva, e isto implica que M é difeomorfa a uma forma espacial esférica.

Na segunda parte do trabalho, capítulo 3, apresentaremos um resultado de Gursky e Viaclovsky [13] em variedades de dimensão 4. Em resumo, esse resultado nos diz que sobre certas condições a variedade admite uma métrica de curvatura de Ricci positiva. Mais precisamente, mostraremos o seguinte teorema.

Teorema 0.2. *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 4 com curvatura escalar constante positiva. Se*

$$\mathcal{F}_2([g]) + \frac{1}{6}(1 - t_0)(2 - t_0)\Big(Y(M, [g])\Big)^2 > 0, \tag{1}$$

para algum $t_0 \leq 1$, então existe uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u} g$ com $R_{\tilde{g}} > 0$ e $\sigma_2(A_{\tilde{g}}^{t_0}) > 0$. Isso implica a desigualdade tensorial

$$(t_0 - 1) R_{\tilde{g}} \tilde{g} < 2Ric_{\tilde{g}} < (2 - t_0) R_{\tilde{g}} \tilde{g}. \tag{2}$$

As demonstrações dos teoremas 0.1 e 0.2 consistem em deformar conformemente a métrica g através de soluções para a equação

$$\sigma_2(g^{-1} A_{\tilde{g}}^t) \;=\; f^2 e^{4u}, \tag{3}$$

onde σ_2 é a segunda função simétrica elementar, $\tilde{g} = e^{-2u}g$,

$$A^t_{\tilde{g}} = \frac{1}{n-2}\left(Ric_{\tilde{g}} - \frac{t}{2(n-1)}R_{\tilde{g}}\tilde{g}\right)$$

onde $Ric_{\tilde{g}}$ e $R_{\tilde{g}}$ são o tensor de Ricci e a curvatura escalar da métrica $\tilde{g}$, respectivamente, e f é uma função suave positiva a ser escolhida adequadamente. A escolha de f é de tal forma que a equação possua solução para $t < 0$ suficientemente grande em valor absoluto.

Usaremos o método da continuidade para mostrar que esta equação, no caso de dimensão 3, possui solução para $t_0 = 2/3$, e no caso de dimensão 4, possui solução para $t_0 = 1$. Concluíremos que a métrica conforme correspondente a essa solução será a métrica que nos dá o resultado para o teorema.

Apresentaremos neste trabalho as demonstrações dos Teoremas 0.1 e 0.2 contidas em [3] e [13], respectivamente. No capítulo 1 serão apresentadas as definições básicas e as ferramentas necessárias para um bom entendimento dos capítulos posteriores. Os capítulos 2 e 3 são dedicados às demonstrações dos resultados principais. Além disso, fazemos ao final destes capítulos uma aplicação do resultado principal para subvariedades e para a Q-curvatura, respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições básicas da geometria Riemanniana, bem como ferramentas que serão utilizadas ao longo do trabalho. Em todo o texto usaremos a notação de Einstein que diz que índices repetidos abaixo e acima representam somas variando de 1 até a dimensão da variedade, como por exemplo,

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i.$$

1.1 Métricas Riemannianas e Curvatura

Em todo o texto iremos denotar por $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ o conjunto de todos os campos de vetores suaves em uma variedade diferenciável M e por $C^\infty(M)$ o conjunto de todas as funções suaves $f : M \to \mathbb{R}$.

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é um tensor suave g do tipo $(2,0)$ em M tal que em cada ponto $p \in M$, a aplicação $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g_p(u,v) := g(U,V)(p),$$

onde $U, V \in \mathcal{X}(M)$ são tais que $U(p) = u$ e $V(p) = v$, é um produto interno em T_pM.

Uma variedade Riemanniana (M, g) é uma variedade diferenciável M munida com uma métrica Riemanniana g.

Definição 1.2. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

que será denotada por $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Y + g\nabla_Y Z$*;*

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$*;*

iii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$*;*

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$*.*

Teorema 1.3. *Dada uma variedade Riemanniana* (M, g) *existe uma única conexão afim* ∇ *satisfazendo as condições:*

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(simétrica);*

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z)$ *(compatível com a métrica).*

A conexão dada pelo Teorema 1.3 é chamada de Conexão Riemanniana ou de Levi-Civita. A menos que se diga o contrário, iremos trabalhar com esta conexão.

Em um sistema de coordenadas locais, definimos os símbolos e Christoffel Γ_{ij}^k como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Pelo Teorema 1.3, obtemos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right), \tag{1.1}$$

onde (g_{ij}) são as componentes da métrica neste sistema de coordenadas e (g^{ij}) é sua inversa.

Definição 1.4. *Seja* T *um tensor do tipo* $(r, 0)$*. A derivada covariante* ∇T *de* T *é um tensor de ordem* $(r + 1, 0)$ *definido como*

$$\begin{aligned} \nabla T(X_1, \cdots, X_r, X) &:= (\nabla_X T)(X_1, \cdots, X_r) \\ &:= X(T(X_1, \cdots, X_r)) - \sum_{k=1}^{r} T(X_1, \cdots, \nabla_X X_k, \cdots, X_r). \end{aligned}$$

Utilizaremos a seguinte notação para a derivada covariante definida anteriormente

$$T_{i_1\cdots i_r;j} := \nabla T\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Definição 1.5. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de (M, g) é o tensor de tipo $(3, 1)$ definido como*

$$R(X,Y)Z := \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Usando a métrica, obtemos um tensor do tipo $(4, 0)$ definido por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle,$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$. Suas componentes, em coordenadas, são

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

e

$$R_{ijks} := R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = R^l_{ijk}g_{ls}.$$

Pelo Teorema 1.3, obtemos

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{ip} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{jp}. \tag{1.2}$$

Proposição 1.6. *Tem-se as seguintes propriedades para o tensor curvatura*

i) $R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{jilk} = R_{lkji}$;

ii) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ *(1^a identidade de Bianchi);*

iii) $R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0$ *(2^a identidade de Bianchi);*

iv) $2g^{ij}\nabla_i R_{jk} = \nabla_k R_g$ *(2^a identidade de Bianchi contraída).*

Proposição 1.7 (Identidade de Ricci)**.** *Seja T um tensor do tipo $(r, 0)$, com $r > 0$. Então*

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)T_{k_1\cdots k_r} = -\sum_{l=1}^{r} R^m_{ijk_l}T_{k_1\cdots k_{l-1}mk_{l+1}\cdots k_r}.$$

Note que na fórmula anterior aparecem dois somatórios, um em l e outro em m.

A **curvatura seccional** de um plano $\pi \in T_pM$ gerado pelos vetores X e Y é definido como

$$K_\pi(X,Y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|^2} = \frac{R(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2}, \tag{1.3}$$

onde $X, Y \in T_pM$ são quaisquer vetores que formam uma base para π. É possível mostrar que (1.3) independe da base escolhida no plano π.

Variedades Riemannianas que possuem curvatura seccional constante são chamadas de **formas espaciais**.

O **Tensor de Ricci** é um tensor do tipo $(2,0)$ definido como

$$Ric(X,Y) := tr(Z \to R(X,Z)Y).$$

Suas componentes são

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = g^{kl}R_{ikjl}.$$

e a **curvatura escalar** é definida como

$$R_g := g^{ij}R_{ij}.$$

O tensor curvatura pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R &= W_g - \frac{R_g}{2(n-1)(n-2)} g \odot g + \frac{1}{n-2} Ric_g \odot g \\ &= W_g + A_g \odot g, \end{aligned}$$

onde W_g é o tensor de Weyl,

$$A_g := \frac{1}{n-2}\left(Ric_g - \frac{R_g}{2(n-1)} g\right) \tag{1.4}$$

é o **tensor de Schouten** e $\odot$ é o produto de Kulkarni-Nomizu, que é definido como

$$\begin{aligned} A \odot B(X,Y,Z,W) &= A(X,W)B(Y,Z) + A(Y,Z)B(X,W) \\ &\quad A(X,Z)B(Y,W) - A(Y,W)B(X,Z), \end{aligned}$$

para quaisquer tensores simétricos A e B do tipo $(2,0)$. Observe que A_g é um tensor simétrico. Veja [6] para mais detalhes.

Proposição 1.8. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) possui curvatura seccional constante k se, e somente se o tensor curvatura satisfaz*

$$R = \frac{k}{2} g \odot g,$$

onde $\odot$ é o produto de Kulkarni-Nomizu.

1.2 Subvariedades Riemannianas

Sejam M^n e $\overline{M}^{m+n}$ variedades diferenciáveis e $f : M \to \overline{M}$ uma imersão. Pelo Teorema da Função Inversa, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança V de p em M, tal que $f : V \to \overline{M}$ é um mergulho. Segue que $f(V)$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. Como V e $f(V)$ são difeomorfos, temos que

$$df_p : T_p M \to T_{f(p)} f(V)$$

é um isomorfismo para todo $p \in V$. Assim podemos identificar V com $f(V)$ e campos $X \in \mathcal{X}(V)$ com $df(X) \in \mathcal{X}(f(V))$. Se $(\overline{M}, g)$ é uma variedade Riemanniana, então considerando a métrica f^*g em M teremos que f é uma imersão isométrica. Daqui em diante iremos considerar que $M \subset \overline{M}$. Observe que para todo $p \in M$, podemos decompor $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

Considere $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de M e defina $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp,$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais de X e Y a $\overline{M}$, respectivamente. Pode-se mostrar que ∇ assim definida é a conexão Riemanniana de M.

A segunda forma fundamental da imersão f é a aplicação bilinear simétrica

$$B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to (\mathcal{X}(M))^\perp$$

dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y,$$

onde $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais de X e Y, respectivamente, a $\overline{M}$. Pode-se mostrar que para todos $X, Y \in \mathcal{X}(V)$ o valor de $B(X, Y)$ não depende das extensões escolhidas.

Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, defina a aplicação linear $S_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$S_\eta(u) = -(\overline{\nabla}_u N)^{\perp},$$

onde $(\cdot)^{\perp}$ denota a componente tangente e N é uma extensão local do vetor η normal a M. Observe que a aplicação S_η satisfaz

$$\langle S_\eta(u), v\rangle = \langle B(u,v), \eta\rangle,$$

para todo $u, v \in T_pM$. Segue da simetria da aplicação B que S_η é uma aplicação auto-adjunta.

Proposição 1.9 (Equação de Gauss)**.** *Para todos $X, Y, Z, W \in T_pM$ vale*

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \langle B(X,W), B(Y,Z)\rangle - \langle B(X,Z), B(Y,W)\rangle.$$

onde B é a segunda forma fundamental de M.

1.3 Operadores Diferenciáveis e a Fórmula de Böchner-Weitzenböck

Definição 1.10. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, definimos o campo gradiente de f como o único campo de vetores $\nabla_g f \in \mathcal{X}(M)$ tal que*

$$\nabla f(X) = X(f) = df(X) = g(\nabla_g f, X),$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Em coordenadas, obtemos

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definição 1.11. *A Hessiana de f é um tensor do tipo $(2,0)$, denotada por $\nabla^2 f$ e definida como*

$$\nabla^2 f(X,Y) = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f).$$

A Hessiana é um tensor simétrico. De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X,Y) - \nabla^2 f(Y,X) &= (YX - XY)(f) - (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(f) \\
&= [X,Y](f) - [Y,X](f) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Definição 1.12. *Seja $X \in \mathcal{X}(M)$. O divergente de X com respeito à métrica g é definido como*

$$div_g X = tr(Y \to \nabla_Y X).$$

Se $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal, então

$$div_g X = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_k) = \sum_i \omega_{i;i},$$

onde ω é a 1-forma definida como $\omega(Y) = g(X, Y)$.

Definição 1.13. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O Laplaciano de f com respeito à métrica g é definido como*

$$\Delta_g f := div_g(\nabla_g f) = tr(\nabla^2 u).$$

Em coordenadas,

$$\Delta_g f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \Gamma_{ii}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Teorema 1.14 (Fórmula de Böchner-Weitzenböck)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Seja $f \in C^\infty(M)$. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta_g(|\nabla_g f|_g^2) = |\nabla_g^2 f|_g^2 + \langle \nabla_g f, \nabla_g(\Delta_g f)\rangle + Ric_g(\nabla_g f, \nabla_g f). \tag{1.5}$$

Demonstração. A demostração pode ser encontrada em [22]. □

Corolário 1.15 (Fórmula Integral de Böchner-Weitzenböck)**.** *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão n e seja $f \in C^\infty(M)$. Então*

$$\int_M (\Delta_g f)^2 \, dV_g = \int_M |\nabla_g^2 f|_g^2 \, dV_g + \int_M Ric_g(\nabla_g f, \nabla_g f) \, dV_g. \tag{1.6}$$

Demonstração. Pelo Teorema da Divergência obtemos que

$$\int_M \Delta_g(|\nabla_g f|_g^2) \, dV_g = 0$$

e

$$\int_M \langle \nabla_g f, \nabla_g(\Delta_g f)\rangle \, dV_g = -\int_M (\Delta_g f)^2 \, dV_g.$$

Logo, como M é sem fronteira, integrando a fórmula de Böchner-Weitzenböck, (1.5), obtemos o resultado desejado. □

1.4 Funções Simétricas Elementares e o Tensor de Schouten

Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos a k-ésima função simétrica elementar em $\mathbb{R}^n$ como

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}^{n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k},$$

No decorrer deste trabalho, iremos utilizar apenas os casos onde $k = 1$ ou 2. Note que, para $k = 1$ temos,

$$\sigma_1(\lambda) = \sum_{1 \leq i \leq n}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \tag{1.7}$$

e para $k = 2$ temos

$$\sigma_2(\lambda) = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\Big(\sigma_1(\lambda)^2 - |\lambda|^2\Big). \tag{1.8}$$

Defina

$$\Gamma_2^+ = \Big\{\sigma_1(\lambda) > 0\Big\} \cap \Big\{\sigma_2(\lambda) > 0\Big\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Diremos que um tensor simétrico A do tipo $(2, 0)$ pertence a Γ_2^+, ou seja, $A \in \Gamma_2^+$, se seus autovalores pertencem a Γ_2^+.

Denotaremos por $\sigma_k(A_g)$ as funções simétricas aplicadas aos autovalores do tensor de Schouten com respeito a métrica g. Neste caso

$$\sigma_1(A_g) = tr_g A_g = g^{ij} A_{ij} \tag{1.10}$$

e

$$\sigma_2(A_g) = \frac{1}{2}\Big(\sigma_1(A_g)^2 - |A_g|_g^2\Big). \tag{1.11}$$

Além disso, quando a métrica a qual as funções simétricas elementares estão relacionadas forem diferentes da métrica ao qual os tensores estão definidos, usaremos as seguintes definições

$$\sigma_1(\tilde{g}^{-1} A_g) = tr_{\tilde{g}} A_g = \tilde{g}^{ij} A_{ij} \tag{1.12}$$

e

$$\sigma_2(\tilde{g}^{-1} A_g) = \frac{1}{2}\Big(\sigma_1(\tilde{g}^{-1} A_g)^2 - |A_g|_{\tilde{g}}^2\Big), \tag{1.13}$$

onde $\tilde{g}$ e g são métricas Riemannianas. Observe que, por (1.4) e (1.10) temos

$$\sigma_1(A_g) = tr(A_g) = \frac{R_g}{2(n-1)}. \tag{1.14}$$

Note que,

$$|A_g|_g^2 = \frac{1}{(n-2)^2}\left(|Ric|_g^2 - \frac{R_g^2}{n-1} + \frac{nR_g^2}{4(n-1)^2}\right), \tag{1.15}$$

e por (1.11), obtemos

$$\begin{aligned}
2\sigma_2(A_g) &= \sigma_1(A_g)^2 - |A_g|_g^2 \\
&= \frac{R_g^2}{4(n-1)^2} - \frac{1}{(n-2)^2}\left(|Ric|_g^2 - \frac{R_g^2}{n-1} + \frac{nR_g^2}{4(n-1)^2}\right) \\
&= \frac{R_g^2}{4(n-2)^2}\left(\frac{(n-2)^2 + 4(n-1) - n}{(n-1)^2}\right) - \frac{|Ric|_g^2}{(n-2)^2}. \\
&= \frac{n(n-1)R_g^2}{4(n-1)^2(n-2)^2} - \frac{|Ric|_g^2}{(n-2)^2} \\
&= \frac{nR_g^2}{4(n-1)(n-2)^2} - \frac{|Ric|_g^2}{(n-2)^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_2(A_g) = \frac{1}{2(n-2)^2}\left(\frac{nR_g^2}{4(n-1)} - |Ric|_g^2\right). \tag{1.16}$$

Para o desenvolvimento deste trabalho é de fundamental importância definir o seguinte tensor

$$A_g^t := \frac{1}{n-2}\left(Ric_g - \frac{tR_g}{2(n-1)}g\right). \tag{1.17}$$

Perceba que para $t = 1$ temos o tensor de Schouten. Podemos escrever o tensor A_g^t da seguinte forma

$$\begin{aligned}
A_g^t &= \frac{1}{n-2}\left(Ric_g - \frac{R_g}{2(n-1)}g + \frac{R_g}{2(n-1)}g - \frac{tR_g}{2(n-1)}g\right) \\
&= A_g + \frac{1}{n-2}\left(\frac{(1-t)R_g}{2(n-1)}g\right).
\end{aligned}$$

Assim, por (1.14),

$$A_g^t = A_g + \frac{1-t}{n-2}\sigma_1(A_g)g. \tag{1.18}$$

Veja que, por (1.10) e (1.17), obtemos que

$$\sigma_1(A_g^t) = \frac{2(n-1)-nt}{2(n-2)(n-1)}R_g, \tag{1.19}$$

ou ainda, por (1.10) e (1.18)

$$\begin{aligned}
\sigma_1(A_g^t) &= \sigma_1(A_g) + \frac{1}{n-2}\left(\frac{n(1-t)R_g}{2(n-1)}\right) \\
&= \sigma_1(A_g) + \frac{n(1-t)}{n-2}\sigma_1(A_g). \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, temos

$$\sigma_1(A_g^t)^2 = \sigma_1(A_g)^2 + \frac{2n(1-t)}{n-2}\sigma_1(A_g)^2 + \frac{n^2(1-t)^2}{(n-2)^2}\sigma_1(A_g)^2. \tag{1.21}$$

Agora, note que

$$|A_g^t|_g^2 = |A_g|_g^2 + \frac{2(1-t)}{n-2}\sigma_1(A_g)^2 + \frac{n(1-t)^2}{(n-2)^2}\sigma_1(A_g)^2. \tag{1.22}$$

Com isso, por (1.11), (1.21) e (1.22), temos

$$\begin{aligned}
2\sigma_2(A_g^t) &= \sigma_1(A_g^t)^2 - |A_g^t|_g^2 \\
&= \sigma_1(A_g)^2 + \frac{2n(1-t)}{n-2}\sigma_1(A_g)^2 + \frac{(1-t)^2n^2}{(n-2)^2}\sigma_1(A_g)^2 \\
&\quad -|A_g|_g^2 - \frac{2(1-t)}{n-2}\sigma_1(A_g)^2 - \frac{(1-t)^2n}{(n-2)^2}\sigma_1(A_g)^2 \\
&= 2\sigma_2(A_g) + \frac{\Big((3-t)n-4\Big)(n-1)(1-t)}{(n-2)^2}\sigma_1(A_g)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sigma_2(A_g^t) = \sigma_2(A_g) + \frac{\Big((3-t)n-4\Big)(n-1)(1-t)}{2(n-2)^2}\sigma_1(A_g)^2. \tag{1.23}$$

Definição 1.16. *Seja $A : V \to V$ uma aplicação linear auto-adjunta, onde V é um espaço com produto interno de dimensão n. A primeira transformação de Newton associada a A é*

$$T_1(A) := \sigma_1(A)\cdot I - A, \tag{1.24}$$

onde I é a identidade em V.

Para $t \in \mathbb{R}$ definimos a transformação linear

$$\mathrm{L}^t(A) := T_1(A) + \frac{1-t}{n-2}\sigma_1\Big(T_1(A)\Big) \cdot I. \tag{1.25}$$

Lema 1.17. *Se $A : \mathbb{R} \to Hom(V,V)$, então*

$$\frac{d}{ds}\sigma_2(A)(s) = \sum_{i,j} T_1(A)_{ij}(s)\frac{d}{ds}(A)_{ij}(s), \tag{1.26}$$

isto é, a primeira transformação de Newton surge a partir da diferenciação de σ_2.

Demonstração. Sabemos que $\sigma_2(A) = \sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\lambda_j$, onde λ_i são os autovalores de A. Assim,

$$\frac{d}{ds}\sigma_2(A) = \sum_{1\le i<j\le n}\Big(\lambda_i'\lambda_j + \lambda_i\lambda_j'\Big) = \sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i'\lambda_j + \sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j'.$$

Faça

$$S_1 = \sum_{i<j}\lambda_i'\lambda_j \quad e \quad S_2 = \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j'.$$

Agora, desenvolvendo o somatório S_1, fixando cada i e variando j, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j}\lambda_i'\lambda_j &= \lambda_1'\left(\sum_{j=2}^{n}\lambda_j\right) + \lambda_2'\left(\sum_{j=3}^{n}\lambda_j\right) + \cdots + \lambda_{n-2}'\left(\sum_{j=n-1}^{n}\lambda_j\right) + \lambda_{n-1}'\lambda_n \\
&= \lambda_1'(\sigma_1 - \lambda_1) + \lambda_2'\left(\sigma_1 - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k\right) + \cdots + \lambda_{n-2}'\left(\sigma_1 - \sum_{k=1}^{n-2}\lambda_k\right) \\
&\quad + \lambda_{n-1}'\left(\sigma_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\right) \\
&= \sigma_1(A)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i'\right) - \lambda_1'\lambda_1 - \lambda_2'\left(\sum_{k=1}^{2}\lambda_k\right) - \cdots - \lambda_{n-2}'\left(\sum_{k=1}^{n-2}\lambda_k\right) \\
&\quad - \lambda_{n-1}'\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\right) \\
&= \sigma_1(A)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_1'\right) - \lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j'\right) - \lambda_2\left(\sum_{j=2}^{n-1}\lambda_j'\right) - \cdots - \lambda_{n-2}\left(\sum_{j=n-2}^{n-1}\lambda_j'\right) \\
&\quad - \lambda_{n-1}\lambda_{n-1}'.
\end{aligned}$$

De forma análoga ,em S_2, fixando cada i e variando j, obtemos

$$\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j' = \lambda_1 \left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j' \right) + \lambda_2 \left(\sum_{j=3}^{n} \lambda_j' \right) + \cdots + \lambda_{n-2} \left(\sum_{j=n-1}^{n} \lambda_j' \right) + \lambda_{n-1}\lambda_n'.$$

Perceba que fazendo $S_1 + S_2$, vários termos serão cancelados, a saber

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &= \sigma_1(A) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j' \right) + \lambda_1(\lambda_n' - \lambda_1') + \lambda_2(\lambda_n' - \lambda_2') + \cdots + \lambda_{n-1}(\lambda_n' - \lambda_{n-1}') \\
&= \sigma_1(A) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j' \right) + (\sigma_1 - \lambda_n)\lambda_n' - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \lambda_i' \\
&= \sigma_1(A) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j' \right) + \sigma_1 \lambda_n' - \lambda_n \lambda_n' - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \lambda_i' \\
&= \sigma_1(A) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j' \right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_i'.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{ds}\sigma_2(A) = S_1 + S_2 = \sigma_1(A) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j' \right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_i',$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\sigma_2(A) &= \sum_{i,j} \sigma_1(A) I_{ij} \frac{d}{ds}(A)_{ij} - \sum_{i,j} (A)_{ij} \frac{d}{ds}(A)_{ij} \\
&= \sum_{i,j} \left[\Big(\sigma_1(A) I_{ij} - (A)_{ij} \Big) \frac{d}{ds}(A)_{ij} \right] \\
&= \sum_{i,j} T_1(A)_{ij} \frac{d}{ds}(A)_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.18. *Se os autovalores de A estão em Γ_2^+, então $T_1(A)$ é positivo definido. Consequentemente, para $t \leq 1$,*

$$\mathrm{L}^t(A) := T_1(A) + \frac{1-t}{n-2} \sigma_1\Big(T_1(A) \Big) \cdot I$$

também é positiva definida.

Demonstração. Para demonstração, ver [2] e [10]. $\square$

Agora, associaremos a A_g^t o tensor definido por

$$\widehat{A_g^t} := -\overline{A_g^t} + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g,$$

onde $\overline{A_g^t} = A_g^t - \dfrac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g$.

Vejamos o seguinte lema

Lema 1.19. *Os tensores $\widehat{A_g^t}$ e A_g^t satisfazem as seguintes igualdades*

i) $\sigma_1(\widehat{A_g^t}) = \sigma_1(A_g^t)$;

ii) $\sigma_2(\widehat{A_g^t}) = \sigma_2(A_g^t)$.

Demonstração. i) Temos que,

$$\begin{aligned}
\widehat{A_g^t} &= -\overline{A_g^t} + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g \\
&= -A_g^t + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g \\
&= -A_g^t + \frac{2}{n}\sigma_1(A_g^t)g.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sigma_1(\widehat{A_g^t}) = -\sigma_1(A_g^t) + 2\sigma_1(A_g^t) = \sigma_1(A_g^t).$$

ii) Observe que, de (1.11) obtemos que

$$\begin{aligned}
2\sigma_2(A_g^t) &= \sigma_1(A_g^t)^2 - |A_g^t|_g^2 \\
&= \sigma_1(A_g^t)^2 - \left|\overline{A_g^t} + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g\right|^2 \\
&= \sigma_1(A_g^t)^2 - \left(|\overline{A_g^t}|_g^2 + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)^2 + \frac{2}{n}\sigma_1(A_g^t)\sigma_1(\overline{A_g^t})\right).
\end{aligned}$$

Mas, note que

$$\sigma_1(\overline{A_g^t}) = \sigma_1(A_g^t) - \sigma_1(A_g^t) = 0.$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
2\sigma_2(A_g^t) &= \sigma_1(A_g^t)^2 - \left(|-\overline{A_g^t}|_g^2 + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)^2 - \frac{2}{n}\sigma_1(A_g^t)\sigma_1(\overline{A_g^t}) \right) \\
&= \sigma_1(A_g^t)^2 - \left| -\overline{A_g^t} + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g \right|^2 .
\end{aligned}
$$

Por $i)$, temos que $\sigma_1(\widehat{A_g^t}) = \sigma_1(A_g^t)$, logo

$$
\begin{aligned}
\sigma_2(A_g^t) &= \frac{1}{2}\sigma_1(\widehat{A_g^t})^2 - \frac{1}{2}|\widehat{A_g^t}|_g^2 \\
&= \sigma_2(\widehat{A_g^t}).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 1.20. *Se para alguma métrica Riemanniana g em M temos $A_g^t \in \Gamma_2^+$, então*

$$
-A_g^t + \sigma_1(A_g^t)g > 0 \tag{1.27}
$$

e

$$
A_g^t + \frac{n-2}{n}\sigma_1(A_g^t)g > 0. \tag{1.28}
$$

Demonstração. Como $A_g^t \in \Gamma_2^+$, pela Definição 1.16 e pela Proposição 1.18 temos que $T_1(A_g^t) = \sigma_1(A_g^t)g - A_g^t > 0$. Ou seja,

$$
-A_g^t + \sigma_1(A_g^t)g > 0.
$$

Por outro lado, pelo Lema 1.19 $\sigma_1(\widehat{A_g^t}) = \sigma_1(A_g^t)$, assim

$$
\begin{aligned}
T_1(\widehat{A_g^t}) &= -\widehat{A_g^t} + \sigma_1(\widehat{A_g^t})g \\
&= -\left(-\overline{A_g^t} + \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g \right) + \sigma_1(\widehat{A_g^t})g \\
&= \overline{A_g^t} - \frac{1}{n}\sigma_1(A_g^t)g + \sigma_1(A_g^t)g \\
&= A_g^t - \frac{2}{n}\sigma_1(A_g^t)g + \sigma_1(A_g^t)g \\
&= A_g^t + \frac{n-2}{n}\sigma_1(A_g^t)g.
\end{aligned}
$$

Como $A_g^t \in \Gamma_2^+$, então $\sigma_1(A_g^t)g > 0$ e $\sigma_2(A_g^t)g > 0$. Com isso, pelo Lema 1.19 obtemos que $\sigma_1(\widehat{A_g^t})g > 0$ e $\sigma_2(\widehat{A_g^t})g > 0$. Dessa forma, $\widehat{A_g^t} \in \Gamma_2^+$. Pela Proposição 1.18 a primeira transformação de Newton $T_1(\widehat{A_g^t})$ é positiva definida.

Portanto,

$$T_1(\widehat{A^t_g}) = A^t_g + \frac{n-2}{n}\sigma_1(A^t_g)g > 0.$$

$\square$

1.5 Métricas Conformes

Duas métricas Riemannianas g e $\tilde{g}$ em uma variedade diferenciável M são ditas conformes se existe uma função positiva suave $f : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{g} = fg.$$

O conjunto de todas as métricas conformes a uma métrica g é chamado de classe conforme e é denotado por $[g]$, isto é,

$$[g] := \Big\{\tilde{g} = fg \;/\; f \in C^\infty(M) \text{ é positiva}\Big\}.$$

Note que se $\tilde{g} \in [g]$, então podemos escrever $\tilde{g} = e^u g$, onde $u \in C^\infty(M)$.

Será necessário definir o seguinte funcional

$$Q(g) := \frac{\displaystyle\int_M R_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}}}{\left(\displaystyle\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

onde M é uma variedade diferenciável fechada de dimensão $n \geq 3$. Restrito a uma classe conforme, o funcional Q é limitado inferiormente. Assim, podemos definir

$$\text{Y(M,}[g]\text{)} := \inf_{\tilde{g}\in[g]} Q(g) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} \frac{\displaystyle\int_M R_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}}}{\left(\displaystyle\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}. \tag{1.29}$$

O número $Y(M,[g])$ é chamado **invariante de Yamabe**.

É possível mostrar que $Y(M,[g]) > 0$ se, e somente se, existe $\tilde{g} \in [g]$ tal que $R_{\tilde{g}} > 0$. Resultado análogo vale para o invariante negativo e nulo. Ver [18] para detalhes.

Proposição 1.21. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional. Se $\tilde{g} = e^{-2u}g$, então*

$$Ric_{\tilde{g}} = Ric_g + (n-2)\nabla_g^2 u + (\Delta_g u)g - (n-2)|\nabla_g u|_g^2 g + (n-2)du \otimes du \tag{1.30}$$

e

$$R_{\tilde{g}} = e^{2u}\Big(R_g + 2(n-1)(\Delta_g u) - (n-1)(n-2)|\nabla_g u|_g^2\Big). \tag{1.31}$$

Demonstração. Ver [8] para demonstração. □

Proposição 1.22. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional. Se $\tilde{g} = e^{-2u}g$, então*

$$A_{\tilde{g}}^t = A_g^t + \nabla_g^2 u + \frac{1-t}{n-2}(\Delta_g u)g + du \otimes du - \frac{2-t}{2}|\nabla_g u|_g^2 g.$$

Demonstração. Sabemos, por (1.17), que

$$A_{\tilde{g}}^t := \frac{1}{n-2}\left(Ric_{\tilde{g}} - \frac{tR_{\tilde{g}}}{2(n-1)}\tilde{g}\right).$$

Assim, pela Proposição 1.21

$$\begin{aligned}
A_{\tilde{g}}^t &= \frac{1}{n-2}\Big[Ric_g + (n-2)\nabla_g^2 u + (\Delta_g u)g - (n-2)|\nabla_g u|_g^2 g + (n-2)du \otimes du \\
&\quad - \frac{t}{2(n-1)}e^{2u}\tilde{g}\Big(R_g + 2(n-1)(\Delta_g u) - (n-1)(n-2)|\nabla_g u|_g^2\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{n-2}Ric_g + \nabla_g^2 u + \frac{1}{n-2}(\Delta_g u)g - |\nabla_g u|_g^2 g + du \otimes du - \frac{t}{2(n-1)(n-2)}R_g g \\
&\quad - \frac{t}{n-2}(\Delta_g u)g + \frac{t}{2}|\nabla_g u|_g^2 g \\
&= \frac{1}{n-2}\left(Ric_g - \frac{tR_g}{2(n-1)}g\right) + \nabla_g^2 u + \frac{1-t}{n-2}(\Delta_g u)g + du \otimes du - \frac{2-t}{2}|\nabla_g u|_g^2 g.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$A_{\tilde{g}}^t = A_g^t + \nabla_g^2 u + \frac{1-t}{n-2}(\Delta_g u)g + du \otimes du - \frac{2-t}{2}|\nabla_g u|_g^2 g.$$

□

Vejamos a seguinte observação importante que será bastante utilizada no decorrer do trabalho.

Observação 1.23. *Seja* $\tilde{g} = e^{-2u}g$. *A inversa de* $\tilde{g}$ *é dada por* $\tilde{g}^{-1} = e^{2u}g^{-1}$. *Note que,*

$$\sigma_1(A_g^t) = tr_g(A_g^t) = g^{ij}A_{ij}^t = e^{-2u}\tilde{g}^{ij}A_{ij}^t = e^{-2u}tr_{\tilde{g}}(A_g^t) = e^{-2u}\sigma_1(\tilde{g}^{-1}A_g^t). \tag{1.32}$$

Além disso

$$|A_g^t|_g^2 = g^{ij}g^{kl}A_{ik}^tA_{jl}^t = e^{-4u}\tilde{g}^{ij}\tilde{g}^{kl}A_{ik}^tA_{jl}^t = e^{-4u}|A_g^t|_{\tilde{g}}^2, \tag{1.33}$$

e daí

$$\begin{aligned} \sigma_2(A_g^t) &= \frac{1}{2}\Big(\sigma_1(A_g^t)^2 - |A_g^t|_g^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(e^{-4u}\sigma_1(\tilde{g}^{-1}A_g^t)^2 - e^{-4u}|A_g^t|_{\tilde{g}}^2\Big) \\ &= e^{-4u}\sigma_2(\tilde{g}^{-1}A_g^t). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Por outro lado, fazendo o mesmo processo, trocando a métrica g *por* $\tilde{g}$, *obtemos*

$$\sigma_1(A_{\tilde{g}}^t) = tr_{\tilde{g}}(A_{\tilde{g}}^t) = \tilde{g}^{ij}A_{ij}^t = e^{2u}g^{ij}A_{ij}^t = e^{2u}tr_g(A_{\tilde{g}}^t) = e^{2u}\sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t) \tag{1.35}$$

e

$$|A_{\tilde{g}}^t|_{\tilde{g}}^2 = \tilde{g}^{ij}\tilde{g}^{kl}A_{ik}^tA_{jl}^t = e^{4u}g^{ij}g^{kl}A_{ik}^tA_{jl}^t = e^{4u}|A_{\tilde{g}}|_g^2. \tag{1.36}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sigma_2(A_{\tilde{g}}^t) &= \frac{1}{2}\Big(\sigma_1(\tilde{g}^{-1}A_{\tilde{g}}^t)^2 - |A_{\tilde{g}}^t|_{\tilde{g}}^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(e^{4u}\sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t)^2 - e^{4u}|A_{\tilde{g}}^t|_g^2\Big) \\ &= e^{4u}\sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Note também que se $\tilde{g} = e^{-2u}g$, então

$$dV_g = e^{nu}dV_{\tilde{g}}, \tag{1.38}$$

já que, em coordenadas, $dV_g = \sqrt{detg_{ij}}dx$.

1.6 Elipticidade e Estimativa Gradiente

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Dado $\alpha \in (0,1)$, defina

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sup_{x\neq y}\frac{|\nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

onde $x, y \in \Omega$ e

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty\}.$$

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) compacta, considere um número finito de cartas coordenadas (U_i, φ_i) tais que $B_2(0) = \varphi^{-1}(U_i)$ e

$$M = \bigcup_i \varphi_i(B_1(0)).$$

Defina

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(M)} = \sum_i \|u \circ \varphi_i\|_{C^{k,\alpha}(B_1(0))}.$$

Definição 1.24. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0,1)$. Defina o espaço de Hölder em M como*

$$C^{k,\alpha}(M) = \{u \in C^k(M); \|u\|_{C^{k,\alpha}(M)} < \infty\}.$$

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Nos próximos capítulos estudaremos a seguinte equação

$$\sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}}) \;=\; f^2 e^{4u}, \tag{1.39}$$

onde $\tilde{g} = e^{-2u}g$, para alguma função $u \in C^\infty(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Considere o operador

$$G_t(u) = \sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}}) - f^2 e^{4u}. \tag{1.40}$$

O operador linearizado de G em uma função u é definido como

$$\mathcal{L}^t(v) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} G_t(u + sv). \tag{1.41}$$

Proposição 1.25 (Propriedade de Elipticidade)**.** *Seja $u \in C^2(M)$ uma solução de*

$$\sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}}) = f^2 e^{4u}, \tag{1.42}$$

para algum $t \leq 1$ onde $\tilde{g} = e^{-2u}g$. Assuma que $A^t_{\tilde{g}} \in \Gamma_2^+$. Então o operador linearizado em u,

$$\mathcal{L}^t : C^{2,\alpha}(M) \to C^{0,\alpha}(M),$$

é inversível, com $\alpha \in (0,1)$.

Demonstração. Defina

$$F_t(u) = \sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}}) - f^2 e^{4u}. \tag{1.43}$$

Seja $u \in C^2(M)$ tal que $F_t(u) = 0$, com $A^t_{\tilde{g}} \in \Gamma_2^+$. Dado $\varphi \in C^{2,\alpha}(M)$ defina $u_s = u + s\varphi$. Daí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^t(\varphi) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} F_t(u_s) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}_s}) - \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(f^2 e^{4u_s}), \end{aligned} \tag{1.44}$$

onde $\tilde{g}_s = e^{-2u_s} g$.

Por (1.37)

$$\sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}}) = e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}_s}) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} e^{-4u_s}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_s}) \\ &= -4\varphi e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) + e^{-4u}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_s}). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Note que, por (1.26), temos

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_s}) = \sum_{i,j} T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(A^t_{\tilde{g}_s})_{ij}$$

Da Proposição 1.22, temos

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(A^t_{\tilde{g}_s}) = \left(\nabla^2\varphi + \frac{1-t}{n-2}(\Delta\varphi)g - (2-t)\langle du, d\varphi\rangle g + du \otimes d\varphi + d\varphi \otimes du\right). \tag{1.46}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_s}) &= \sum_{i,j} T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg(\nabla^2\varphi + \frac{1-t}{n-2}(\Delta\varphi)g - (2-t)\langle du, d\varphi\rangle g \\ &\quad + du \otimes d\varphi + d\varphi \otimes du\Bigg)_{ij}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Para o segundo termo do lado direito de (1.44), temos

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(f^2 e^{4u_s}) = 4f^2 e^{4u}\varphi. \tag{1.48}$$

Combinando (1.44), (1.45), (1.47) e (1.48), concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^t(\varphi) &= -4\varphi e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) + e^{-4u}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_s}) - 4f^2e^{4u}\varphi \\
&= e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg(\nabla^2\varphi + \frac{1-t}{n-2}(\Delta\varphi)g - (2-t)\langle du, d\varphi\rangle g \\
&\quad + du\otimes d\varphi + d\varphi\otimes du\Bigg)_{ij}\Bigg\} - 4\varphi e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) - 4f^2e^{4u}\varphi \\
&= e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg(\nabla^2\varphi + \frac{1-t}{n-2}(\Delta\varphi)g\Bigg)_{ij}\Bigg\} - 4e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}})\varphi - 4f^2e^{4u}\varphi \\
&\quad + e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg((t-2)\langle du, d\varphi\rangle g + \ du\otimes d\varphi + d\varphi\otimes du\Bigg)_{ij}\Bigg\} \\
&= e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi + \frac{1-t}{n-2}T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\delta_{ij}\Delta\varphi\Bigg\} - 4\Big(e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) + f^2e^{4u}\Big)\varphi \\
&\quad + e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg((t-2)\langle du, d\varphi\rangle g + \ du\otimes d\varphi + d\varphi\otimes du\Bigg)_{ij}\Bigg\} \\
&= e^{-4u}\Bigg\{\sum_{i,j}T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi + \frac{1-t}{n-2}\sigma_1(T_1(A^t_{\tilde{g}}))\Delta\varphi\Bigg\} - 4\Big(e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) + f^2e^{4u}\Big)\varphi \\
&\quad + e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg((t-2)\langle du, d\varphi\rangle g + \ du\otimes d\varphi + d\varphi\otimes du\Bigg)_{ij}\Bigg\} \\
&= e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi + \frac{1-t}{n-2}\sigma_1(T_1(A^t_{\tilde{g}}))\nabla_i\nabla_j\varphi\ \delta_{ij}\Bigg\} \\
&\quad - 4\Big(e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) + f^2e^{4u}\Big)\varphi \\
&\quad + e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg((t-2)\langle du, d\varphi\rangle g + \ du\otimes d\varphi + d\varphi\otimes du\Bigg)_{ij}\Bigg\} \\
&= e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{\Bigg(T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij} + \frac{1-t}{n-2}\sigma_1(T_1(A^t_{\tilde{g}}))\delta_{ij}\Bigg)\nabla_i\nabla_j\varphi\Bigg\} - 4\Big(e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) + f^2e^{4u}\Big)\varphi \\
&\quad + e^{-4u}\sum_{i,j}\Bigg\{T_1(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\Bigg((t-2)\langle du, d\varphi\rangle g + \ du\otimes d\varphi + d\varphi\otimes du\Bigg)_{ij}\Bigg\}. \qquad (1.49)
\end{aligned}$$

Usando a definição de L^t em (1.25), podemos reescrever os termos principais da equação (1.49) e obter

$$\mathcal{L}^t(\varphi) = e^{-4u}\sum_{i,j}\mathrm{L}^t(A^t_{\tilde{g}})_{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi - 4\Big(e^{-4u}\sigma_2(A^t_{\tilde{g}}) + f^2e^{4u}\Big)\varphi$$

$$+ e^{-4u}\sum_{i,j}\left\{T_1(A^t_{\tilde g})_{ij}\Big((t-2)\langle du, d\varphi\rangle g + \ du\otimes d\varphi + d\varphi\otimes du\Big)_{ij}\right\}. \quad (1.50)$$

Para $t \leq 1$, a Proposição 1.18 implica que $\mathrm{L}^t(A^t_{\tilde g})$ é positivo definido, e assim $\mathcal{L}^t$ é elíptico. Como os coeficientes de φ são estritamente negativos, temos que o operador linearizado em u é inversível no espaço de Hölder. □

Lema 1.26. *Em coordenadas normais em p, temos em p que*

$$\sum_{l,m}(\partial_i\partial_j g^{lm} + 2\partial_l\Gamma^m_{ij})u_l u_m = 2\sum_{l,m} R_{iljm}u_l u_m,$$

onde R_{iljm} são as componentes do tensor curvatura de Riemann de g.

Demonstração. Lembre-se que por (1.1) temos

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right).$$

Veja que

$$\begin{aligned} g^{rm}\Gamma^l_{jr} + g^{lr}\Gamma^m_{jr} &= \frac{1}{2}\Big\{g^{rm}g^{lk}(\partial_j g_{rk} + \partial_r g_{jk} - \partial_k g_{jr}) + g^{lr}g^{mk}(\partial_j g_{rk} + \partial_r g_{jk} - \partial_k g_{jr})\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{g^{rm}g^{lk}\partial_j g_{rk} + g^{rm}g^{lk}\partial_r g_{jk} - g^{rm}g^{lk}\partial_k g_{jr} + g^{lr}g^{mk}\partial_j g_{rk} \\ &\quad + g^{lr}g^{mk}\partial_r g_{jk} - g^{lr}g^{mk}\partial_k g_{jr}\Big\}. \end{aligned}$$

Permutando r e k obtemos

$$\begin{aligned} g^{rm}\Gamma^l_{jr} + g^{lr}\Gamma^m_{jr} &= \frac{1}{2}\Big\{g^{rm}g^{lk}\partial_j g_{rk} + g^{km}g^{lr}\partial_k g_{jr} - g^{rm}g^{lk}\partial_k g_{jr} + g^{lk}g^{mr}\partial_j g_{kr} \\ &\quad + g^{lk}g^{mr}\partial_k g_{jr} - g^{lr}g^{mk}\partial_k g_{jr}\Big\} \\ &= g^{rm}g^{lk}\partial_j g_{rk}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Por outro lado, $g^{lm}g_{mk} = \delta_{lk}$. Diferenciando na direção x_j temos que

$$\partial_j g^{lm}g_{mk} + g^{lm}\partial_j g_{mk} = 0.$$

Multiplicando por g^{kr} obtemos

$$\partial_j g^{lm}\delta_{mr} + g^{lm}g^{kr}\partial_j g_{mk} = 0.$$

Ou seja,

$$\partial_j g^{lr} = -g^{lm} g^{kr} \partial_j g_{mk},$$

o que implica que

$$\partial_j g^{lm} = -g^{lr} g^{km} \partial_j g_{rk} = -g^{lk} g^{rm} \partial_j g_{kr} = -g^{rm} g^{lk} \partial_j g_{rk}. \tag{1.52}$$

Assim, combinando (1.51) com (1.52) temos que

$$\partial_j g^{lm} + \Gamma^l_{jr} g^{rm} + \Gamma^m_{jr} g^{lr} = 0.$$

Logo, diferenciando na direção x_i temos, em p,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i \partial_j g^{lm} + \partial_i \Gamma^l_{jr} \delta^{rm} + \partial_i \Gamma^m_{jr} \delta^{lr} \\ &= \partial_i \partial_j g^{lm} + \partial_i \Gamma^l_{jm} + \partial_i \Gamma^m_{jl}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\partial_i \partial_j g^{lm} = -\partial_i \Gamma^l_{jm} - \partial_i \Gamma^m_{jl}. \tag{1.53}$$

Usando (1.53), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{l,m} (\partial_i \partial_j g^{lm} + 2\partial_l \Gamma^m_{ij}) u_l u_m &= \sum_{l,m} (-\partial_i \Gamma^l_{jm} - \partial_i \Gamma^m_{jl} + 2\partial_l \Gamma^m_{ij}) u_l u_m \\ &= 2 \sum_{l,m} (\partial_l \Gamma^m_{ij} - \partial_i \Gamma^m_{lj}) u_l u_m \\ &= 2 \sum_{l,m} R_{iljm} u_l u_m, \end{aligned}$$

a segunda igualdade segue permutando os índices do primeiro termo e a terceira igualdade segue de (1.2) e do fato que em coordenadas normais em p tem-se que $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$. □

Lema 1.27. *Existe uma constante $\beta > 0$ tal que para $t \in [\delta, 1]$,*

$$\sum_{i,j,l} T_{ij} u_{li} u_{lj} + \frac{1-t}{n-2} \sum_{i,j,l} T_{ll} u_{ij} u_{ij} \geq \beta \sum_l T_{ll} |\nabla_g u|^4.$$

Demonstração. Ver o Lema 4.1 de [13]. □

Proposição 1.28. *Seja $u_t \in C^3(M)$ uma solução de*

$$\sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}_t}) = f^2 e^{4u_t} \tag{1.54}$$

para algum $\delta \leq t \leq 1$ com $A^t_{\tilde{g}_t} \in \Gamma_2^+$. Assuma que $u_t \leq \bar{\delta}$, onde $\bar{\delta}$ é uma constante independente de t. Então $\|\nabla_g u_t\|_{g,\infty} < C_0$, onde C_0 depende somente de (M, g) e $\bar{\delta}$.

Demonstração. Considere a função $h = |\nabla u|^2$. Como M é compacta e h é contínua, suponha que o máximo de h ocorre em um ponto $p \in M$. Tome um sistema de coordenadas normais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em p. Então $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $\Gamma^i_{jk}(p) = 0$ e $\partial_i g_{ij}(p) = \partial_i g^{ij}(p) = 0$.

Dessa forma, localmente, podemos escrever h como

$$h \;=\; g^{lm} u_l u_m. \tag{1.55}$$

Diferenciando h na direção x_i, numa vizinhança de p, temos

$$\begin{aligned} h_i = \partial_i(g^{lm} u_l u_m) \;&=\; \partial_i g^{lm} u_l u_m + g^{lm} \partial_i(u_l u_m) \\ &=\; \partial_i g^{lm} u_l u_m + 2 g^{lm} u_{li} u_m. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Uma vez que p é ponto de máximo de h, avaliando (1.56) em p, temos

$$0 = \partial_i g^{lm} u_l u_m + 2\delta^{lm} u_{li} u_m.$$

Como num sistema de coordenadas normais, as primeiras derivadas da métrica se anulam em p, obtemos que

$$\sum_l u_{li} u_l = 0 \tag{1.57}$$

Em seguida, diferenciamos (1.56) na direção x_j, obtemos

$$\begin{aligned} h_{ij} = \partial_j \partial_i (g^{lm} u_l u_m) \;&=\; \partial_j\Big(\partial_i g^{lm} u_l u_m\Big) + \partial_j\Big(2 g^{lm} u_{li} u_m\Big) \\ &=\; \partial_j \partial_i g^{lm} u_l u_m + \partial_j(u_l u_m) \partial_i g^{lm} + 2\partial_j g^{lm} u_{li} u_m \\ &\quad + 2 g^{lm} u_{lij} u_m + 2 g^{lm} u_{li} u_{mj}. \end{aligned}$$

Como p é ponto de máximo, $\partial_j \partial_i (g^{lm} u_l u_m)$ é negativa semidefinida e temos, em p, que

$$\begin{aligned} 0 \geq \partial_j \partial_i (g^{lm} u_l u_m) \;&=\; \partial_j \partial_i g^{lm} u_l u_m + 2\delta^{lm} u_{lij} u_m + 2\delta^{lm} u_{li} u_{mj} \\ &=\; \partial_j \partial_i g^{lm} u_l u_m + 2\sum_l u_{lij} u_l + 2\sum_l u_{li} u_{lj}. \end{aligned}$$

Logo, em p, temos que

$$0 \geq \frac{1}{2}\partial_j\partial_i g^{lm}u_l u_m + \sum_l u_{lij}u_l + \sum_l u_{li}u_{lj}. \tag{1.58}$$

Recordamos da Proposição 1.18 que

$$\mathrm{L}_{ij}^t = T_{ij} + \frac{1-t}{n-2}\sum_l T_{ll}\delta_{ij} \tag{1.59}$$

é positivo definido, onde $T_{ij} = \Big(T_1(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t)\Big)_{ij}$.

Observe que em p temos que

$$g(\nabla^2 h, L) = \sum_{i,j}\nabla_i\nabla_j h L_{ij}^t.$$

Por outro lado, como $\nabla^2 h$ é simétrica então existe uma base ortonormal em p de autovetores de $\nabla^2 h$. Isto implica que todos os autovalores são não positivos, já que $\nabla^2 h$ é negativo semidefinido. Se (λ_i) são os autovalores de $\nabla^2 h$, então nesta base temos que

$$g(\nabla^2 h, L) = \sum_i \lambda_i L_{ii}^t.$$

Mas como L_{ij}^t é positivo definido, obtemos que $L_{ii}^t > 0$ para todo i. Logo,

$$g(\nabla^2 h, L) \leq 0.$$

Daí, por (1.58) e (1.59) obtemos

$$0 \geq \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mathrm{L}_{ij}^t\partial_j\partial_i g^{lm}u_l u_m + \sum_{i,j,l}\mathrm{L}_{ij}^t u_{lij}u_l + \sum_{i,j,l}\mathrm{L}_{ij}^t u_{li}u_{lj}. \tag{1.60}$$

Agora, diferenciaremos a equação (1.39) afim de substituir o termo u_{lij} por termos de ordem mais baixa. Com respeito ao sistema de coordenadas normais, temos pela Proposição 1.22 que

$$(A_{\tilde{g}}^t)_{ij} = (A_g^t)_{ij} + u_{ij} - u_r\Gamma_{ij}^r + \frac{1-t}{n-2}g^{kl}(u_{kl} - u_r\Gamma_{kl}^r)g_{ij} + u_i u_j - \frac{2-t}{2}(g^{pq}u_p u_q)g_{ij}. \tag{1.61}$$

Em seguida, diferencie (1.54) com respeito a x_m. Assim,

$$\partial_m\Big\{\sigma_2(A_{\tilde{g}}^t)\Big\} = \partial_m\Big(f^2 e^{4u}\Big).$$

Pelo Lema 1.17 e por (1.61), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j} T_{ij}\Big(\partial_m(A_g^t)_{ij} + u_{ijm} - u_{rm}\Gamma_{ij}^r - u_r\partial_m\Gamma_{ij}^r + \frac{1-t}{n-2}\Big\{\partial_m g^{kl}\Big(u_{kl} - u_r\Gamma_{kl}^r\Big)g_{ij} \\
&+ g^{kl}\Big[u_{klm} - (u_{rm}\Gamma_{kl}^r + u_r\partial_m\Gamma_{kl}^r)\Big]g_{ij} + g^{kl}\Big(u_{kl} - u_r\Gamma_{kl}^r\Big)\partial_m g_{ij}\Big\} \\
&+ u_{im}u_j + u_iu_{jm} - \frac{2-t}{2}\Big[\partial_m g^{pq}u_pu_q + g^{pq}(u_{pm}u_q + u_pu_{qm})\Big]g_{ij} \\
&- \frac{2-t}{2}g^{pq}u_pu_q\partial_m g_{ij}\Big) = \partial_m f^2e^{4u} + 4f^2e^{4u}u_m.
\end{aligned}
\tag{1.62}
$$

Avaliando (1.62) em p e usando (1.57), obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j} T_{ij}\Big(\partial_m(A_g^t)_{ij} + u_{ijm} - u_r\partial_m\Gamma_{ij}^r + \frac{1-t}{n-2}\sum_k\Big(u_{kkm} - u_r\partial_m\Gamma_{kk}^r\Big)\delta_{ij} + 2u_{im}u_j\Big) \\
&= \partial_m f^2e^{4u} + 4f^2e^{4u}u_m.
\end{aligned}
\tag{1.63}
$$

Note que os termos de terceira ordem da expressão acima são

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} T_{ij}\Big(u_{ijm} + \frac{1-t}{n-2}\sum_k u_{kkm}\delta_{ij}\Big) &= \sum_{i,j} T_{ij}u_{ijm} + \frac{1-t}{n-2}\sum_{i,j,k} T_{ij}\delta_{ij}u_{kkm} \\
&= \sum_{i,j} T_{ij}u_{ijm} + \frac{1-t}{n-2}\sum_{i,l} T_{ll}u_{iim} \\
&= \sum_{i,j} T_{ij}u_{ijm} + \frac{1-t}{n-2}\sum_{i,j,l} T_{ll}\delta_{ij}u_{ijm} \\
&= \sum_{i,j} \mathrm{L}_{ij}^t u_{ijm}.
\end{aligned}
\tag{1.64}
$$

Usando (1.64) podemos reescrever (1.63) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} \mathrm{L}_{ij}^t u_{ijm} \quad + \quad &\sum_{i,j} T_{ij}\Big(\partial_m(A_g^t)_{ij} - u_r\partial_m\Gamma_{ij}^r - \frac{1-t}{n-2}\sum_k\Big(u_r\partial_m\Gamma_{kk}^r\Big)\delta_{ij} \\
&= \partial_m f^2e^{4u} + 4f^2e^{4u}u_m.
\end{aligned}
\tag{1.65}
$$

Multiplicando (1.65) com u_m e usando (1.57) temos a seguinte igualdade

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,m} \mathrm{L}_{ij}^t u_m u_{ijm} \quad + \quad &\sum_{i,j,m} T_{ij}\Big(u_m\partial_m(A_g^t)_{ij} - u_mu_r\partial_m\Gamma_{ij}^r - \frac{1-t}{n-2}\sum_k\Big(u_ru_m\partial_m\Gamma_{kk}^r\Big)\delta_{ij}\Big) \\
&= u_m\partial_m f^2e^{4u} + 4f^2e^{4u}|\nabla u|^2.
\end{aligned}
\tag{1.66}
$$

Substituindo (1.66) em (1.60), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \quad \geq \quad & \frac{1}{2}\sum_{i,j,m} \mathrm{L}^t_{ij}\partial_j\partial_i g^{lm} u_l u_m + \sum_{i,j,m} T_{ij}\Big(- u_m\partial_m (A^t_g)_{ij} + u_m u_r \partial_m \Gamma^r_{ij} \\
& + \frac{1-t}{n-2}\sum_k \Big(u_r u_m \partial_m \Gamma^r_{kk}\Big)\delta_{ij}\Big) + u_m\partial_m f^2 e^{4u} + \sum_{i,j,l} \mathrm{L}^t_{ij} u_{li} u_{lj}. \qquad (1.67)
\end{aligned}
$$

Usando (1.59) e o Lema 1.26, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j,m} \mathrm{L}^t_{ij}\partial_j\partial_i g^{lm} u_l u_m \quad = \quad & T_{ij}\Big(R_{iljm} u_l u_m - \partial_l \Gamma^m_{ij} u_l u_m\Big) \\
& + \frac{1-t}{2}\sum_k T_{kk}\delta_{ij}\Big(R_{iljm} u_l u_m - \partial_l \Gamma^m_{ij} u_l u_m\Big) \\
= \quad & T_{ij}\Big(R_{iljm} u_l u_m - u_l u_m \partial_l \Gamma^m_{ij} \\
& \frac{1-t}{2}\sum_k R_{klkm} u_l u_m \delta_{ij} - \frac{1-t}{2}\sum_k (u_l u_m \partial_l \Gamma^m_{ij})\delta_{ij}\Big) \qquad (1.68)
\end{aligned}
$$

Com isso, substituindo (1.68) em (1.67) obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \quad \geq \quad & \sum_{i,j} T_{ij}\Big(\frac{1-t}{n-2}\sum_k R_{klkm} u_l u_m \delta_{ij} + R_{iljm} u_l u_m - u_m \partial_m (A^t_g)_{ij}\Big) \\
& + u_m \partial_m f^2 e^{4u} + \sum_{i,j,l} T_{ij} u_{li} u_{lj} + \frac{1-t}{n-2}\sum_{i,j,l} T_{ll} u_{ij} u_{ij}. \qquad (1.69)
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 1.27, temos

$$
\begin{aligned}
0 \quad \geq \quad & \sum_{i,j} T_{ij}\Big(\frac{1-t}{n-2}\sum_k R_{klkm} u_l u_m \delta_{ij} + R_{iljm} u_l u_m - u_m \partial_m (A^t_g)_{ij}\Big) \\
& + u_m \partial_m f^2 e^{4u} + \beta \sum_l T_{ll} |\nabla_g u|^4. \qquad (1.70)
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\beta \sum_l T_{ll} |\nabla_g u|^4 \quad \leq \quad & \sum_{i,j} T_{ij}\Big(\frac{t-1}{n-2}\sum_k R_{klkm} u_l u_m \delta_{ij} - R_{iljm} u_l u_m + u_m \partial_m (A^t_g)_{ij}\Big) \\
& - u_m \partial_m f^2 e^{4u}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $|u_i| \leq |\nabla_g u|$, para cada $1 \leq i \leq n$ e $u_t \leq \overline{\delta}$, obtemos

$$\beta \sum_l T_{ll} |\nabla_g u|^4 \leq C_1 |\nabla_g u|^2 + C_2 |\nabla_g u|,$$

onde C_1 e C_2 dependem apenas de (M, g) e $\overline{\delta}$.

Como $\beta > 0$ e T_{ll} é positiva definida, temos

$$|\nabla_g u|^4 \leq C_1' |\nabla_g u|^2 + C_2' |\nabla_g u|.$$

Note que se $|\nabla_g u| \neq 0$, então $1 \leq \dfrac{C_1'}{|\nabla_g u|^2} + \dfrac{C_2'}{|\nabla_g u|^3}$. Dessa forma, podemos ver que $|\nabla_g u|$ é limitada, pois caso contrário teríamos $1 \leq 0$, o que é um absurdo.

Logo, $\|\nabla_g u\|_{g,\infty} \leq C_0$, onde C_0 depende somente de (M, g) e $\overline{\delta}$. □

Proposição 1.29. *Seja $u_t \in C^4(M)$ uma solução de*

$$\sigma_2(g^{-1} A^t_{\tilde{g}_t}) = f^2 e^{4u_t}$$

para algum $\delta \leq t \leq 1$ tal que $A^t_{\tilde{g}_t} \in \Gamma_2^+$, $\underline{\delta} < u_t < \overline{\delta}$ e $\|\nabla u_t\|_{g,\infty} < C_0$. Então para $0 < \alpha < 1$, $\|u_t\|_{g,C^{2,\alpha}} \leq C_2$, onde C_2 depende somente de (M, g).

Demonstração. Ver [9], [12], [13], [16] e [19] para a demonstração. □

Capítulo 2

Deformações Conformes em variedades de dimensão 3

Neste capítulo, trabalharemos apenas com variedade de dimensão 3 e temos como objetivo principal provar o seguinte resultado de Catino e Djadli [3]

Teorema 2.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 3 com curvatura escalar positiva. Se*

$$\int_M |Ric_g|_g^2 \, dV_g \leq \frac{3}{8} \int_M R_g^2 \, dV_g,$$

então existe uma métrica $\tilde{g}$ conforme a g tal que $Ric_{\tilde{g}}$ é sempre positivo.

A demonstração deste teorema consiste em deformar a métrica g conformemente através de soluções para a equação

$$\sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t) \;\; = \;\; f^2 e^{4u}, \tag{2.1}$$

onde $\tilde{g} = e^{-2u}g$, $A_{\tilde{g}}^t = Ric_{\tilde{g}} - \frac{t}{4}R_{\tilde{g}}\tilde{g}$ e f é uma função suave positiva a ser escolhida. Usaremos o método da continuidade para mostrar que esta equação possui solução para $t = \frac{2}{3}$ e a métrica correspondente a essa solução terá Ricci positivo.

Assim, sob essa condição no tensor de Ricci, um resultado de Hamilton [14] garante que a variedade é difeomorfa à uma forma espacial esférica, ou seja, M admite uma métrica com curvatura seccional constante.

Corolário 2.2. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 3 com curvatura escalar positiva satisfazendo*

$$\int_M |Ric_g|_g^2 \, dV_g \leq \frac{3}{8} \int_M R_g^2 \, dV_g.$$

Então M admite uma métrica com curvatura seccional constante.

Demonstração. A demonstração segue direto do Teorema 2.1 e do resultado de Hamilton [14] para variedades Riemannianas de dimensão 3. □

2.1 Limite Superior

Proposição 2.3. *Seja $u_t \in C^2(M)$ uma solução de*

$$\sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t) = f^2 e^{4u}, \tag{2.2}$$

para algum $t \in [\delta, \frac{2}{3}]$ com $A_{\tilde{g}}^t \in \Gamma_2^+$. Então $u_t \leq \bar{\delta}$, onde $\bar{\delta}$ depende somente de (M, g).

Demonstração. Da desigualdade de Newton $\sqrt{3}\sigma_2^{1/2} \leq \sigma_1$, temos

$$\sqrt{3}\sigma_2^{1/2}(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t) \leq \sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t).$$

Por (2.2),

$$\sqrt{3} f e^{2u_t} \leq \sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t),$$

para todo $x \in M$.

Lembre-se que, da Proposição 1.22, temos

$$A_{\tilde{g}}^t = A_g^t + \nabla_g^2 u_t + (1-t)(\Delta_g u_t)g + du_t \otimes du_t - \frac{2-t}{2}|\nabla_g u_t|_g^2 g.$$

Como M é compacta, seja $p \in M$ máximo de u_t, assim $(\nabla_g u_t)(p) = 0$. Logo, em p, temos

$$A_{\tilde{g}}^t = A_g^t + \nabla_g^2 u_t + (1-t)(\Delta_g u_t)g.$$

Dessa forma, no ponto p, obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} f e^{2u_t} &\leq \sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t) \\
&= \sigma_1(A_g^t) + \Delta_g u_t + (3-3t)(\Delta_g u_t) \\
&= \sigma_1(A_g^t) + (4-3t)(\Delta_g u_t) \\
&\leq \sigma_1(A_g^t),
\end{aligned}$$

pois $4 - 3t \geq 0$ e $(\Delta_g u_t)(p) \leq 0$, uma vez que $p \in M$ é máximo de u_t. Com isso, como $f(p) > 0$,

$$e^{2u_t(p)} \leq \frac{\sigma_1(A_g^t)(p)}{\sqrt{3}f(p)}.$$

Note que, por (1.20), $\sigma_1(A_g^t) = (4-3t)\sigma_1(A_g) \leq (4-3\delta)\sigma_1(A_g)$, $\forall\ t \geq \delta$. Assim,

$$e^{2u_t(p)} \leq \frac{(4-3\delta)\sigma_1(A_g)(p)}{\sqrt{3}f(p)} = \frac{(4-3\delta)R_g}{4\sqrt{3}f(p)},$$

o que implica que

$$u_t(p) \leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{(4-3\delta)R_g}{4\sqrt{3}f(p)}\right) \leq \overline{\delta},$$

já que a curvatura escalar R_g é positiva.

Portanto, $u_t \leq \overline{\delta}$, onde $\overline{\delta}$ só depende de (M, g). □

2.2 Limite Inferior

Lema 2.4. *Para uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u}g$, temos a seguinte transformação conforme*

$$\begin{aligned}\int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}})e^{-4u}\ dV_g &= \int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g + \frac{1}{8}\int_M R_g|\nabla_g u|_g^2\ dV_g - \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4\ dV_g \\ &+\frac{1}{2}\int_M \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2\ dV_g - \frac{1}{2}\int_M A_g(\nabla_g u, \nabla_g u)\ dV_g.\end{aligned}$$

Demonstração. Fazendo $t = 1$ e $n = 3$ na Proposição 1.22, obtemos

$$A_{\tilde{g}} = A_g + \nabla_g^2 u + du \otimes du - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2 g. \tag{2.3}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}e^{-2u}\sigma_1(A_{\tilde{g}}) &= \sigma_1(A_g) + \Delta_g u + |\nabla_g u|_g^2 - \frac{3}{2}|\nabla_g u|_g^2 \\ &= \sigma_1(A_g) + \Delta_g u - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}e^{-4u}\sigma_1(A_{\tilde{g}})^2 &= \sigma_1(A_g)^2 + (\Delta_g u)^2 + \frac{1}{4}|\nabla_g u|_g^4 + 2(\Delta_g u)\sigma_1(A_g) \\ &\quad -|\nabla_g u|_g^2\sigma_1(A_g) - \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2 \\ &= \sigma_1(A_g)^2 + (\Delta_g u)^2 + \frac{1}{4}|\nabla_g u|_g^4 + \frac{1}{2}(\Delta_g u)R_g \qquad (2.4) \\ &\quad -\frac{1}{4}|\nabla_g u|_g^2 R_g - \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
e^{-4u}|A_{\tilde{g}}|^2_{\tilde{g}} &= \left|A_g + \nabla^2_g u + du \otimes du - \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2_g g\right|^2_{\tilde{g}} \\
&= |A_g|^2_g + |\nabla^2_g u|^2_g + |\nabla_g u|^4_g + \frac{3}{4}|\nabla_g u|^4_g + 2\langle A_g, \nabla^2_g u\rangle \\
&\quad + 2\langle A_g, du \otimes du\rangle - \frac{1}{4}|\nabla_g u|^2_g R_g + 2\langle \nabla^2_g u, du \otimes du\rangle \\
&\quad - |\nabla_g u|^2_g \Delta_g u - |\nabla_g u|^4_g \\
&= |A_g|^2_g + |\nabla^2_g u|^2_g + \frac{3}{4}|\nabla_g u|^4_g + 2\langle Ric_g, \nabla^2_g u\rangle - \frac{1}{2}R_g \Delta_g u \\
&\quad + 2Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) - \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2_g R_g - \frac{1}{4}|\nabla_g u|^2_g R_g \\
&\quad + 2\nabla^2_g u(\nabla_g u, \nabla_g u) - \ |\nabla_g u|^2_g \Delta_g u.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
e^{-4u}|A_{\tilde{g}}|^2_{\tilde{g}} &= |A_g|^2_g + |\nabla^2_g u|^2_g + \frac{3}{4}|\nabla_g u|^4_g + 2\langle Ric_g, \nabla^2_g u\rangle - \frac{1}{2}R_g \Delta_g u \\
&\quad + 2Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) - \frac{3}{4}|\nabla_g u|^2 R_g + 2\nabla^2_g u(\nabla_g u, \nabla_g u) \qquad (2.5) \\
&\quad - |\nabla_g u|^2_g \Delta_g u.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, por (1.11), (2.4) e (2.5), obtemos

$$
\begin{aligned}
2e^{-4u}\sigma_2(A_{\tilde{g}}) &= e^{-4u}\sigma_1(A_{\tilde{g}})^2 - e^{-4u}|A_{\tilde{g}}|^2_{\tilde{g}} \\
&= \sigma_1(A_g)^2 + (\Delta_g u)^2 + \frac{1}{4}|\nabla_g u|^4_g + \frac{1}{2}(\Delta_g u)R_g \\
&\quad - \frac{1}{4}|\nabla_g u|^2 R_g - \Delta_g u|\nabla_g u|^2 - |A_g|^2 - |\nabla^2_g u|^2 \\
&\quad - \frac{3}{4}|\nabla_g u|^4 - 2\langle Ric_g, \nabla^2_g u\rangle + \frac{1}{2}R_g \Delta_g u - 2Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) \\
&\quad + \frac{3}{4}|\nabla_g u|^2 R_g - 2\nabla^2_g u(\nabla_g u, \nabla_g u) + |\nabla_g u|^2 \Delta_g u. \\
&= 2\sigma_2(A_g) + (\Delta_g u)^2 - \frac{1}{2}|\nabla_g u|^4_g + (\Delta_g u)R_g - |\nabla^2_g u|^2 \\
&\quad - 2\langle Ric_g, \nabla^2_g u\rangle - 2Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2 R_g \\
&\quad - 2\nabla^2_g u(\nabla_g u, \nabla_g u).
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
e^{-4u}\sigma_2(A_{\tilde{g}}) &= \sigma_2(A_g) + \frac{1}{2}(\Delta_g u)^2 - \frac{1}{4}|\nabla_g u|^4_g + \frac{1}{2}(\Delta_g u)R_g - \frac{1}{2}|\nabla^2_g u|^2 \\
&\quad - \langle Ric_g, \nabla^2_g u\rangle - Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{4}|\nabla_g u|^2 R_g \\
&\quad - \nabla^2_g u(\nabla_g u, \nabla_g u).
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u) = \frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g |\nabla_g u|^2\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} e^{-4u}\sigma_2(A_{\tilde{g}}) &= \sigma_2(A_g) + \frac{1}{2}\Big((\Delta_g u)^2 - |\nabla_g^2 u|^2 - \langle \nabla_g u, \nabla_g |\nabla_g u|^2\rangle\Big) \\ &- Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) - \langle Ric_g, \nabla_g^2 u\rangle + \frac{1}{2}(\Delta_g u)R_g - \frac{1}{4}|\nabla_g u|_g^4 \\ &+ \frac{1}{4}|\nabla_g u|^2 R_g. \end{aligned}$$

Agora, defina

$$G := -\ Ric(\nabla_g u, *\ ) + \frac{1}{2}R_g du - \frac{1}{2}\nabla_g^2 u(\nabla_g u, *\ ) + \frac{1}{2}(\Delta_g u)du - \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2 du.$$

Note que, usando a segunda identidade contraída de Bianch e a Identidade de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned} div\ G &= g^{ij}\nabla_i\Big(- g^{kl}\nabla_k u R_{lj} + \frac{1}{2}R_g\nabla_j u - \frac{1}{2}g^{kl}\nabla_k u\nabla_l\nabla_j u + \frac{1}{2}\Delta_g u\nabla_j u - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2\nabla_j u\Big) \\ &= g^{ij}\Big(- g^{kl}(R_{lj}\nabla_i\nabla_k u + \nabla_k u\nabla_i R_{lj}) + \frac{1}{2}(R_g\nabla_i\nabla_j u + \nabla_i R)g\nabla_j u \\ &\quad -\frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i\nabla_k u\nabla_l\nabla_j u + \nabla_k u\nabla_i\nabla_l\nabla_j u) + \frac{1}{2}(\nabla_i\Delta_g u\nabla_j u + \Delta_g u\nabla_i\nabla_j u) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\nabla_i|\nabla_g u|_g^2\nabla_j u + |\nabla_g u|_g^2\nabla_i\nabla_j u)\Big) \\ &= -\langle Ric_g, \nabla_g^2 u\rangle - \frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g R_g\rangle + \frac{1}{2}R_g\Delta_g u + \frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g R_g\rangle - \frac{1}{2}|\nabla_g^2 u|_g^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}g^{kl}\nabla_k u\Delta_g\nabla_l u + \frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g\Delta_g u\rangle + \frac{1}{2}(\Delta_g u)^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g|\nabla_g u|_g^2\rangle \\ &\quad -\frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2\Delta_g u \\ &= -\langle Ric_g, \nabla_g^2 u\rangle + \frac{1}{2}R_g\Delta_g u - \frac{1}{2}|\nabla_g^2 u|^2 - \frac{1}{2}g^{kl}\nabla_k u(\nabla_l\Delta_g u + g^{pq}R_{pl}\nabla_q u) \\ &\quad +\frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g\Delta_g u\rangle + \frac{1}{2}(\Delta_g u)^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g|\nabla_g u|^2\rangle - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2\Delta_g u \\ &= -\langle Ric_g, \nabla_g^2 u\rangle + \frac{1}{2}R_g(\Delta_g u) - \frac{1}{2}|\nabla_g^2 u|^2 - \frac{1}{2}Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta_g u)^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla_g u, \nabla_g|\nabla_g u|_g^2\rangle - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2\Delta_g u. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{-4u}\sigma_2(A_{\tilde{g}}) &= div\ G + \sigma_2(A_g) - \frac{1}{2}Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) - \frac{1}{4}|\nabla_g u|_g^4 \\ &+ \frac{1}{4}|\nabla_g u|^2 R_g + \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2\Delta_g u. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$-\frac{1}{2}Ric(\nabla_g u, \nabla_g u) = -\frac{1}{2}A_g(\nabla_g u, \nabla_g u) - \frac{1}{8}|\nabla_g u|^2 R_g.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} e^{-4u}\sigma_2(A_{\tilde{g}}) &= div\ G + \sigma_2(A_g) + \frac{1}{8}|\nabla_g u|^2 R_g - \frac{1}{4}|\nabla_g u|_g^4 \\ &+ \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2 \Delta_g u - \frac{1}{2}A_g(\nabla_g u, \nabla_g u). \end{aligned}$$

Finalmente, integrando com respeito à métrica g e usando o fato que M é compacta sem fronteira, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}})e^{-4u}\ dV_g &= \int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g + \frac{1}{8}\int_M R_g|\nabla_g u|_g^2\ dV_g - \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4\ dV_g \\ &+ \frac{1}{2}\int_M \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2\ dV_g - \frac{1}{2}\int_M A_g(\nabla_g u, \nabla_g u)\ dV_g. \end{aligned}$$

□

Lema 2.5. *Se $A_{\tilde{g}}^t \in \Gamma_2^+$, então temos a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_M A_g(\nabla_g u, \nabla_g u)\ dV_g &< \frac{3-2t}{8}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u}\ dV_g + \frac{1}{4}\int_M \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2\ dV_g \\ &- \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4\ dV_g, \end{aligned}$$

onde $\tilde{g} = e^{-2u}g$.

Demonstração. Como $A_{\tilde{g}}^t \in \Gamma_2^+$, pela Proposicão 1.20, obtemos $-A_{\tilde{g}}^t > -\sigma_1(A_{\tilde{g}}^t)\tilde{g}$. Por outro lado,

$$A_{\tilde{g}}^t = A_{\tilde{g}} + (1-t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})\tilde{g}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sigma_1(A_{\tilde{g}}^t) &= \sigma_1(A_{\tilde{g}}) + 3(1-t)\sigma_1(A_{\tilde{g}}) \\ &= (4-3t)\sigma_1(A_{\tilde{g}}). \end{aligned}$$

Asssim, $-\sigma_1(A_{\tilde{g}}^t)\tilde{g} = -(4-3t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})e^{-2u}g$. Com isso, $-A_{\tilde{g}}^t > -(4-3t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})e^{-2u}g$. Consequentemente,

$$-A_{\tilde{g}} - (1-t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})e^{-2u}g > -(4-3t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})e^{-2u}g.$$

Logo,

$$A_{\tilde{g}} < (3-2t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})e^{-2u}g.$$

Aplicando isto em $\nabla_g u$ e multiplicando a desigualdade por $\dfrac{1}{2}$ obtemos

$$\frac{1}{2}A_{\tilde{g}}(\nabla_g u, \nabla_g u) < \frac{3-2t}{8}R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u}. \tag{2.6}$$

Lembre que pela Proposição 1.22, temos que

$$A_{\tilde{g}}^t = A_g^t + \nabla_g^2 u + (1-t)(\Delta_g u)g + du\otimes du - \frac{2-t}{2}|\nabla_g u|_g^2 g.$$

Assim,

$$A_{\tilde{g}} = A_g + \nabla_g^2 u + du\otimes du - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2 g.$$

Aplicando em $\nabla_g u$, temos

$$\begin{aligned} A_{\tilde{g}}(\nabla_g u, \nabla_g u) &= A_g(\nabla_g u, \nabla_g u) + \nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u) + (du\otimes du)(\nabla_g u, \nabla_g u) \\ &\quad -\frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2 g(\nabla_g u, \nabla_g u) \\ &= A_g(\nabla_g u, \nabla_g u) + \nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^4. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Com isso, integrando (2.7) com respeito a dV_g, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M A_{\tilde{g}}(\nabla_g u, \nabla_g u)\, dV_g &= \int_M A_g(\nabla_g u, \nabla_g u)\, dV_g + \int_M \nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u)\, dV_g \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_M |\nabla_g u|_g^4\, dV_g. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Note que, combinando (2.6) e (2.7) temos que

$$\frac{1}{2}A_g(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2}\nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{4}|\nabla_g u|_g^4 < \frac{3-2t}{8}R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u}.$$

Integrando com respeito a dV_g, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_M A_g(\nabla_g u, \nabla_g u)\, dV_g &< \frac{3-2t}{8}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u}\, dV_g - \frac{1}{2}\int_M \nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u)\, dV_g \\ &\quad -\frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4\, dV_g. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Observe que,

$$\int_M \nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u)\, dV_g = \sum_{i,j}\int \nabla_i u \nabla_j u \nabla_i \nabla_j u\, dV_g$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i,j}\int \nabla_i u(\nabla_i\nabla_j u)\nabla_j u \; dV_g \\
&= -\sum_{i,j}\int (\nabla_i\nabla_i u\nabla_j u + \nabla_i\nabla_j u\nabla_i u)\nabla_j u \; dV_g \\
&= -\int_M |\nabla_g u|^2\Delta_g u \; dV_g - \int_M \nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u) \; dV_g.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\int_M \nabla_g^2 u(\nabla_g u, \nabla_g u) \; dV_g = -\frac{1}{2}\int_M |\nabla_g u|^2\Delta_g u \; dV_g. \tag{2.10}
$$

Agora, combinando (2.9) com (2.10), temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_M A_g(\nabla_g u, \nabla_g u) \; dV_g \;&<\; \frac{3-2t}{8}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u} \; dV_g + \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|^2\Delta_g u \; dV_g \\
&\quad -\frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4 \; dV_g.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue o resultado.

$\square$

Lema 2.6. *Se $\tilde{g} = e^{-2u}g$, então*

$$
\begin{aligned}
\int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}})e^{-4u} \; dV_g \;&\geq\; \int_M \sigma_2(A_g) \; dV_g - \frac{1-t}{4}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u} \; dV_g \\
&\quad -\frac{1}{4}\int_M \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2 \; dV_g + \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4 \; dV_g.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Da Proposição 1.21, temos que

$$
R_{\tilde{g}}e^{-2u} = R_g + 4\Delta_g u - 2|\nabla_g u|_g^2.
$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{8}|\nabla_g u|_g^2$ e integrando com respeito a dV_g, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u} \; dV_g &= \frac{1}{8}\int_M R_g|\nabla_g u|_g^2 \; dV_g + \frac{1}{2}\int_M \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2 \; dV_g \\
&\quad -\frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4 \; dV_g.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 2.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}})e^{-4u} \; dV_g \;&=\; \int_M \sigma_2(A_g) \; dV_g + \frac{1}{8}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u} \; dV_g \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_M A_g(\nabla_g u, \nabla_g u) \; dV_g.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 2.5,

$$\begin{aligned}\int_M \sigma_2(A_{\tilde g})e^{-4u}\ dV_g \ &> \int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g + \frac{1}{8}\int_M R_{\tilde g}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u}\ dV_g \\ &-\frac{3-2t}{8}\int_M R_{\tilde g}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u}\ dV_g - \frac{1}{4}\int_M \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2\ dV_g \\ &+\frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4\ dV_g.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_M \sigma_2(A_{\tilde g})e^{-4u}\ dV_g \ &\geq \int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g - \frac{1-t}{4}\int_M R_{\tilde g}|\nabla_g u|_g^2 e^{-2u}\ dV_g \\ &-\frac{1}{4}\int_M \Delta_g u|\nabla_g u|_g^2\ dV_g + \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u|_g^4\ dV_g.\end{aligned}$$

□

Lema 2.7. *Seja $A_{\tilde g}^t \in \Gamma_2^+$, com $t \in [\delta, \frac{2}{3}]$, dado $\varepsilon > 0$ temos que*

$$\int_M R_{\tilde g}^2 e^{-u_t}\ dV_{\tilde g} \geq \frac{2}{\varepsilon}\int_M R_{\tilde g}|\nabla_g u_t|_g^2 e^{-2u_t}\ dV_g - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_M |\nabla_g u_t|_g^4\ dV_g,$$

onde $\tilde g = e^{-2u}g$.

Demonstração. Como $A_{\tilde g}^t \in \Gamma_2^+$, temos por (1.9) e (1.19) que

$$0 < \sigma_1(A_{\tilde g}^t) \ = \ \frac{4-3t}{4}\cdot R_{\tilde g},$$

o que implica que $R_{\tilde g} > 0$.
Pela desigualdade $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, com $a = \sqrt{\varepsilon}R_{\tilde g}e^{-2u_t} > 0$ e $b = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\nabla_g u_t|_g^2 \geq 0$, temos

$$\int_M R_{\tilde g}|\nabla_g u_t|_g^2 e^{-2u_t}\ dV_g \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_M R_{\tilde g}^2 e^{-4u_t}\ dV_g + \frac{1}{2\varepsilon}\int_M |\nabla_g u_t|_g^4\ dV_g,$$

ou seja,

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_M R_{\tilde g}^2 e^{-4u_t}\ dV_g \geq \int_M R_{\tilde g}|\nabla_g u_t|_g^2 e^{-2u_t}\ dV_g - \frac{1}{2\varepsilon}\int_M |\nabla_g u_t|_g^4\ dV_g.$$

Logo,

$$\int_M R_{\tilde g}^2 e^{-4u_t}\ dV_g \geq \frac{2}{\varepsilon}\int_M R_{\tilde g}|\nabla_g u_t|_g^2 e^{-2u_t}\ dV_g - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_M |\nabla_g u_t|_g^4\ dV_g,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como

$$\int_M R_{\tilde g}^2 e^{-4u_t}\ dV_g = \int_M R_{\tilde g}^2 e^{-u_t}\ dV_{\tilde g},$$

segue o resultado. □

Proposição 2.8. *Seja $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que para $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$, tem-se que $Vol(M, \tilde{g}) = 1$. Se p é um ponto onde φ atinge o mínimo, temos que*

$$e^{-3\varphi(p)}\,Vol(M, g) \geq 1$$

e existe C_0 dependendo somente de (M, g) tal que $\varphi(p) \leq C_0$. Se $|\nabla_g \varphi|_g \leq C_1$, então

$$\max \varphi \leq {C_0}',$$

onde ${C_0}'$ depende somente de (M, g). Além disso,

$$e^{-{C_0}'}\Big(Y(M, [g])\Big)^2 \leq \int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi}\, dV_{\tilde{g}}.$$

Demonstração. Observe que

$$1 = \mathrm{Vol}(M, \tilde{g}) = \int_M dV_{\tilde{g}} = \int_M e^{-3\varphi}\, dV_g$$

pois $dV_{\tilde{g}} = e^{-3\varphi}\, dV_g$. Assim,

$$1 = \int_M e^{-3\varphi}\, dV_g \leq \max_M\, (e^{-3\varphi}) \int_M dV_g = \max_M\, (e^{-3\varphi}) \cdot \mathrm{Vol}(M, g).$$

Como φ atinge o mínimo em p, $\max\, (e^{-3\varphi}) = e^{-3\varphi(p)}$ e com isso

$$1 \leq e^{-3\varphi(p)}\mathrm{Vol}(M, g).$$

Vejamos que $\varphi(p)$ é limitada por uma constante que depende somente de (M, g). De fato,

$$e^{3\varphi(p)} \leq \mathrm{Vol}(M, g),$$

o que implica que

$$\varphi(p) \leq \frac{1}{3}\log\Big(\mathrm{Vol}(M, g)\Big).$$

Basta tomar $C_0 = \dfrac{1}{3}\log\Big(\mathrm{Vol}(M, g)\Big)$.

Agora, seja $q \in M$ onde $\varphi(q) = \max \varphi$ e seja $\alpha : [0, l] \to M$ uma curva diferenciável, onde $l = \mathrm{diam}(M)$, tal que $\alpha(0) = q$ e $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in [0, l]$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\frac{(\varphi \circ \alpha)(t) - (\varphi \circ \alpha)(0)}{t} = (\varphi \circ \alpha)'(c), \text{para algum } c \in (0, t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mid (\varphi \circ \alpha)(t) - (\varphi \circ \alpha)(0) \mid &= \mid (\nabla_g \varphi(\alpha(c)) \cdot \alpha'(c) \mid \cdot\, t \\ &\leq l \cdot \mid \nabla_g \varphi(\alpha(c)) \cdot \alpha'(c) \mid \\ &\leq l \cdot \mid \nabla_g \varphi(\alpha(c)) \mid \cdot \mid \alpha'(c) \mid \\ &= l \cdot \mid \nabla_g \varphi(\alpha(c)) \mid \\ &\leq l \cdot C_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $t_0 \in [0, l]$ é tal que $\alpha(t_0) = p$, então

$$\begin{aligned} \mid (\varphi \circ \alpha)(t_0) - (\varphi \circ \alpha)(0) \mid &= \mid \varphi(p) - \varphi(q) \mid \\ &\geq \mid \varphi(q) \mid - \mid \varphi(p) \mid . \end{aligned}$$

Logo,

$$\mid \varphi(q) \mid - \mid \varphi(p) \mid \leq l \cdot C_1,$$

o que implica que

$$\mid \varphi(q) \mid \leq l \cdot C_1 + \mid \varphi(p) \mid \leq {C_0}',$$

ou seja,

$$\mid \varphi(q) \mid \leq {C_0}',$$

onde $\varphi(q) = \max\ \varphi$.
Portanto,

$$\max\ \varphi \leq {C_0}'.$$

Dessa forma, $e^{\varphi} \leq e^{{C_0}'}$, o que implica que $e^{-{C_0}'} \leq e^{-\varphi}$ e assim

$$e^{-{C_0}'} \int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}} \leq \int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi}\, dV_{\tilde{g}}. \tag{2.11}$$

Usando a Desigualdade de Hölder com $p = q = 2$, $f = 1$ e $g = R_{\tilde{g}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M R_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}} &\leq \left(\int_M dV_{\tilde{g}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathrm{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_M R_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}} \leq \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

Por outro lado, como

$$Y(M,[g]) := \inf_M \frac{\displaystyle\int_M R_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}}}{\left(\displaystyle\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

e $\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{Vol}(M,\tilde{g})^{\frac{1}{3}} = 1$, temos que

$$Y(M,[g]) := \inf_M \int_M R_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}} \leq \int_M R_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}} \leq \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

por (2.12). Logo,

$$Y(M,[g]) \leq \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

o que implica que

$$\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \leq \int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}}.$$

Com isso, por (2.11), concluímos que

$$e^{-C_0{}'}\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \leq e^{-C_0{}'}\int_M R_{\tilde{g}}^2\, dV_{\tilde{g}} \leq \int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi}\, dV_{\tilde{g}}.$$

$\square$

Proposição 2.9. *Assuma que*

$$\int_M |Ric_g|_g^2\, dV_g \leq \frac{3}{8}\int_M R_g^2\, dV_g.$$

Então existe $\underline{\delta}$ *dependendo somente de* (M,g) *tal que se* $u_t \in C^2(M)$ *é solução de*

$$\sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t) = f^2 e^{4u_t}, \tag{2.13}$$

e se $A_{\tilde{g}}^t \in \Gamma_2^+$ *então* $u_t \geq \underline{\delta}$, *onde* $t \in [\delta, 2/3]$ *e* $\tilde{g} = e^{-2u}g$.

Demonstração. Por (1.23)

$$\sigma_2(A_g^t) = \sigma_2(A_g) + (1-t)(5-3t)\sigma_1(A_g)^2, \tag{2.14}$$

Considere $\tilde{g} = e^{-2u_t}g$. Por (1.37), (2.13) e (2.14), obtemos que

$$\begin{aligned}
e^{4u_t}f^2 &= \sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}}) + (1-t)(5-3t)\sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}})^2 \\
&= e^{-4u_t}\sigma_2(A_{\tilde{g}}) + e^{-4u_t}(1-t)(5-3t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})^2 \\
&= e^{-4u_t}\Big(\sigma_2(A_{\tilde{g}}) + (1-t)(5-3t)\sigma_1(A_{\tilde{g}})^2\Big) \\
&= e^{-4u_t}\left(\sigma_2(A_{\tilde{g}}) + (1-t)(5-3t)\left(\frac{R_{\tilde{g}}}{4}\right)^2\right) \\
&= e^{-4u_t}\left(\sigma_2(A_{\tilde{g}}) + \frac{1}{16}(1-t)(5-3t)R_{\tilde{g}}^2\right).
\end{aligned}$$

Seja $C > 0$ uma constante tal que $C \geq f^2$. Integrando com respeito a dV_g, obtemos

$$\begin{aligned}
C\int_M e^{4u_t}\,dV_g &\geq \int_M e^{4u_t}f^2\,dV_g \\
&= \int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}})e^{-4u_t}\,dV_g + \frac{1}{16}(1-t)(5-3t)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-4u_t}\,dV_g \\
&= \int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}})e^{-4u_t}\,dV_g + \frac{1}{16}(1-t)(5-3t)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\,dV_{\tilde{g}},
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{16}(1-t)(5-3t) = \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right) + P_2(t),$$

onde $P_2(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}
P_2(t) &= \frac{1}{16}(1-t)(5-3t) - \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right) \\
&= \frac{3}{16}t^2 - \frac{11}{24}t + \frac{7}{20}.
\end{aligned}$$

Como o coeficiente de t^2 é positivo, o gráfico de $P_2(t)$ é uma parábola de concavidade voltada para cima. Já que o discriminante é negativo não existem raízes reais e segue que $P_2(t)$ é positivo para todo t.

Assim,

$$C\int_M e^{4u_t}\,dV_g \geq \int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}})e^{-4u_t}\,dV_g + \left(\frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right) + P_2(t)\right)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\,dV_{\tilde{g}}.$$

E, pelo o Lema 2.6, obtemos

$$C\int_M e^{4u_t}\,dV_g \;\geq\; \int_M \sigma_2(A_g)\,dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\,dV_{\tilde{g}}$$

$$
\begin{aligned}
&+P_2(t)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\, dV_{\tilde{g}} - \frac{1-t}{4}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u_t|_g^2 e^{-2u_t}\, dV_g \\
&-\frac{1}{4}\int_M \Delta_g u_t|\nabla_g u_t|_g^2\, dV_g + \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u_t|_g^4\, dV_g.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade, $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, com $a = \sqrt{\varepsilon} R_{\tilde{g}} e^{-2u_t} > 0$ e $b = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\nabla_g u_t|_g^2 > 0$, temos

$$
\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u_t|^2 e^{-2u_t}\, dV_g \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-4u_t}\, dV_g + \frac{1}{2\varepsilon}\int_M |\nabla_g u_t|^4\, dV_g,
$$

o que implica que

$$
\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-4u_t}\, dV_g \geq \frac{2}{\varepsilon}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u_t|^2 e^{-2u_t}\, dV_g - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_M |\nabla_g u_t|^4\, dV_g.
$$

Como $P_2(t)$ é positivo, temos

$$
P_2(t)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-4u_t}\, dV_g \geq \frac{2P_2(t)}{\varepsilon}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u_t|^2 e^{-2u_t}\, dV_g - \frac{P_2(t)}{\varepsilon^2}\int_M |\nabla_g u_t|^4\, dV_g.
$$

Mas, lembre-se que

$$
\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-4u_t}\, dV_g = \int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\, dV_{\tilde{g}}.
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
C\int_M e^{4u_t}\, dV_g \quad \geq \quad & \int_M \sigma_2(A_g)\, dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\, dV_{\tilde{g}} \\
& + \frac{2P_2(t)}{\varepsilon}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u_t|^2 e^{-2u_t}\, dV_g - \frac{P_2(t)}{\varepsilon^2}\int_M |\nabla_g u_t|^4\, dV_g \\
& - \frac{1-t}{4}\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u_t|_g^2 e^{-2u_t}\, dV_g \\
& - \frac{1}{4}\int_M \Delta_g u_t|\nabla_g u_t|_g^2\, dV_g + \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g u_t|_g^4\, dV_g \\
= \quad & \int_M \sigma_2(A_g)\, dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\, dV_{\tilde{g}} \\
& + \left(\frac{2P_2(t)}{\varepsilon} - \frac{1-t}{4}\right)\int_M R_{\tilde{g}}|\nabla_g u_t|_g^2 e^{-2u_t}\, dV_g \\
& - \frac{1}{4}\int_M \Delta_g u_t|\nabla_g u_t|_g^2\, dV_g + \left(\frac{1}{4} - \frac{P_2(t)}{\varepsilon^2}\right)\int_M |\nabla_g u_t|^4\, dV_g.
\end{aligned}
$$

Sabemos pela Proposição 1.21 que $R_{\tilde{g}}e^{-2u_t} = R_g + 4\Delta_g u_t - 2|\nabla_g u_t|_g^2$, com isso

$$\begin{aligned}
C\int_M e^{4u_t}\, dV_g \;\geq\; & \int_M \sigma_2(A_g)\, dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\, dV_{\tilde{g}} \\
& + \left(\frac{2P_2(t)}{\varepsilon} - \frac{1-t}{4}\right)\int_M (R_g + 4\Delta_g u_t - 2|\nabla_g u_t|_g^2)|\nabla_g u_t|_g^2\, dV_g \\
& - \frac{1}{4}\int_M \Delta_g u_t |\nabla_g u_t|_g^2\, dV_g + \left(\frac{1}{4} - \frac{P_2(t)}{\varepsilon^2}\right)\int_M |\nabla_g u_t|^4\, dV_g \\
= \;& \int_M \sigma_2(A_g)\, dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\, dV_{\tilde{g}} \\
& + \left(\frac{2P_2(t)}{\varepsilon} - \frac{1-t}{4}\right)\int_M R_g|\nabla_g u_t|_g^2\, dV_g \\
& + \left(\frac{8P_2(t)}{\varepsilon} - (1-t) - \frac{1}{4}\right)\int_M \Delta_g u_t|\nabla_g u_t|_g^2\, dV_g \\
& + \left(\frac{3-2t}{4} - \frac{P_2(t)}{\varepsilon^2} - \frac{4P_2(t)}{\varepsilon}\right)\int_M |\nabla_g u_t|^4\, dV_g.
\end{aligned}$$

Como $P_2(t) > 0$ podemos escolher $\varepsilon = \dfrac{32}{5-4t}P_2(t) > 0$. Dessa forma,

$$\frac{8P_2(t)}{\varepsilon} - (1-t) - \frac{1}{4} = 0. \tag{2.15}$$

Podemos concluir então, com essa escolha, que

$$\frac{2P_2(t)}{\varepsilon} - \frac{1-t}{4} = \frac{1}{16} \geq 0$$

e

$$\frac{3-2t}{4} - \frac{P_2(t)}{\varepsilon^2} - \frac{4P_2(t)}{\varepsilon} = P_2(t)\left(\frac{P_2(t)}{8} - \frac{(5-4t)^2}{32^2}\right) \geq 0,$$

pois $P_2(t)$ é positivo e $\dfrac{P_2(t)}{8} - \dfrac{(5-4t)^2}{32^2} = \dfrac{5}{128}t^2 - \dfrac{37}{384}t + \dfrac{349}{5120}$ que é um polinômio em t onde seu gráfico tem concavidade voltada para cima e não possui raízes reais.

Finalmente, lembrando que pela Proposição 2.3, temos que existe $\overline{\delta}$ que não dependente de t tal que $u_t \leq \overline{\delta}$. Logo, pela Proposição 1.28 temos $\|\nabla_g u_t\|_{g,\infty} \leq C_0$, com C_0 dependendo somente de (M, g) e, para algum $C > 0$ também dependendo somente de (M, g), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
C\int_M e^{4u_t}\, dV_g \;\geq\; & \int_M \sigma_2(A_g)\, dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right)\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-u_t}\, dV_{\tilde{g}} \\
\geq\; & \int_M \sigma_2(A_g)\, dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right)\inf_{\tilde{g}=e^{-2\varphi}g,\, |\nabla_g\varphi|_g \leq C_0}\left(\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi}\, dV_{\tilde{g}}\right).
\end{aligned}$$

Defina

$$I(M,g) := \inf_{\tilde{g}=e^{-2\varphi}g, |\nabla_g\varphi|_g \leq C_0} \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi} \, dV_{\tilde{g}} \right).$$

Assim, para $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ faça $i(\tilde{g}) := \int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi} \, dV_{\tilde{g}}$. Note que $i(\lambda g) = i(g)$, para todo $\lambda > 0$, constante, pois neste caso $R_{\lambda g} = \lambda^{-1} R_g, dV_{\lambda g} = \lambda^{\frac{3}{2}} dV_g$ e $e^{-\varphi} = \lambda^{\frac{1}{2}}$. Temos que

$$I(M,g) := \inf_{\tilde{g}=e^{-2\varphi}g, Vol(M,\tilde{g})=1 \ e \ |\nabla_g\varphi|_g \leq C_0} \left(\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi} \, dV_{\tilde{g}} \right).$$

Seja $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $\|\nabla_g \varphi\|_{g,\infty} \leq C_0$, onde C_0 é dada pela Proposição 1.28, e se $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ tem-se que $\mathrm{Vol}(M,\tilde{g}) = 1$. Daí pela Proposição 2.8 temos que

$$e^{-C_0{}'} \Big(Y(M,[g]) \Big)^2 \leq \int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi} \, dV_{\tilde{g}}.$$

Assim, $e^{-C_0{}'} \Big(Y(M,[g]) \Big)^2$ é cota inferior de $\int_M R_{\tilde{g}}^2 e^{-\varphi} \, dV_{\tilde{g}}$. Por outro lado $I(M,g)$ é a maior das cotas inferiores, logo

$$e^{-C_0{}'} \Big(Y(M,[g]) \Big)^2 \leq I(M,g).$$

Isto prova que existe uma constante positiva $C = C(M,g)$ dependendo somente de (M,g) tal que

$$C \Big(Y(M,[g]) \Big)^2 \leq I(M,g).$$

Usando este controle inferior de $I(M,g)$, temos que

$$C \int_M e^{4u_t} \, dV_g \geq \int_M \sigma_2(A_g) \, dV_g + \frac{1}{24} \left(\frac{7}{10} - t \right) C \Big(Y(M,[g]) \Big)^2.$$

Agora, defina

$$\mu_t := \int_M \sigma_2(A_g) \, dV_g + \frac{1}{24} \left(\frac{7}{10} - t \right) C \Big(Y(M,[g]) \Big)^2.$$

Afirmação 2.10. $\mu_t > C > 0$, *para alguma constante que depende somente da classe conforme de g..*

Primeiramente observe que $\sigma_1(A_g)^2 = \dfrac{1}{16} R_g^2$ e $|A_g|_g^2 = |Ric|_g^2 - \dfrac{5}{16} R_g^2$.

Assim, por (1.11) obtemos que

$$\begin{aligned}\sigma_2(A_g) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}R_g^2 - |Ric|_g^2 + \frac{5}{16}R_g^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}R_g^2 - |Ric|_g^2\right).\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g = \frac{1}{2}\int_M \left(\frac{3}{8}R_g^2 - |Ric|_g^2\right)\ dV_g,$$

o que implica que

$$2\int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g = \frac{3}{8}\int_M R_g^2\ dV_g - \int_M |Ric|_g^2\ dV_g \geq 0,$$

pois $\displaystyle\int_M |Ric|_g^2\ dV_g \leq \frac{3}{8}\int_M R_g^2\ dV_g$, por hipótese.

Por outro lado, temos que $\displaystyle\frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right) C\Big(Y(M,[g])\Big)^2 > 0$, para todo $t \in \left[\delta, \frac{2}{3}\right]$, já que o menor valor é assumido em $\frac{2}{3}$.

Portanto, a afirmação está provada.

Dessa forma,

$$e^{4\max u_t} \cdot C\int_M\ dV_g \geq \mu_t,$$

que implica em

$$4\max_M u_t \geq \log\mu_t - \log\Big(C\Big(\mathrm{Vol}(M,g)\Big)\Big).$$

Portanto,

$$\max_M u_t \ \geq\ \frac{1}{4}\log\mu_t - C(g). \tag{2.16}$$

Agora, sejam $p_t, q_t \in M$ e uma geodésica $\alpha : [0,l] \to M$ tal que $\alpha(0) = p_t$ e $\alpha(1) = q_t$, com $|\alpha'(s)| = 1$, $s \in [0,l]$, onde $u_t(p_t) = \min u_t$ e $u_t(q_t) = \max u_t$. Assim, usando o fato de que $\|\nabla u_t\|_{g,\infty} < C_0$, temos

$$\begin{aligned}\max_M u_t - \min_M u_t &= u_t(q_t) - u_t(p_t)\\ &= u_t(\alpha(1)) - u_t(\alpha(0))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{d}{ds}(u_t \circ \alpha)(s)\ ds \\
&= \int_0^1 \nabla u_t(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\ ds \\
&\leq \int_0^1 |\nabla u_t(\alpha(s))|\ ds \\
&\leq C_0 = C(M,g).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\max_M u_t - \min_M u_t \ \leq \ C(M,g). \tag{2.17}
$$

Comparando as desigualdades (2.16) e (2.17), vermos que

$$
\min_M u_t + C(M,g) \geq \max_M u_t \geq \frac{1}{4}\log \mu_t - C(g),
$$

o que implica que

$$
\min_M u_t \geq \frac{1}{4}\log \mu_t - \Big(C(g) + C(M,g)\Big).
$$

Agora, veja que

$$
\begin{aligned}
\mu_t &= \int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - t\right) C\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \\
&\geq \int_M \sigma_2(A_g)\ dV_g + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{10} - \frac{2}{3}\right) C\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \\
&= \mu_{\frac{2}{3}},\ \forall\ t \in \left[\delta, \frac{2}{3}\right].
\end{aligned}
$$

Logo, $\log \mu_t \geq \log \mu_{\frac{2}{3}}$, para todo $t \in \left[\delta, \frac{2}{3}\right]$. Assim,

$$
\min u_t \geq \frac{1}{4}\log \mu_{\frac{2}{3}} - C = \underline{\delta}.
$$

Portanto, $u_t \geq \underline{\delta}$, onde $\underline{\delta}$ depende somente de (M,g). $\square$

2.3 Demonstração do Teorema Principal

Para demonstrar o resultado principal, Teorema 2.1, usaremos o método da continuidade. Observe que $\sigma_2(A_g^\delta) > 0$ para $\delta < 0$ com $|\delta|$ suficientemente grande, pois

$$
A_g^\delta = Ric_g - \frac{\delta}{4}R_g g
$$

tem autovalores positivos para esta escolha de δ, já que $R_g > 0$. Considere a equação

$$\sigma_2(g^{-1}A^t_{\tilde{g}_t}) = f^2 e^{4u_t}, \tag{2.18}$$

para $t \in [\delta, 2/3]$, com $f = \sigma_2^{1/2}(A^\delta_g) > 0$, onde $\tilde{g}_t = e^{-2u_t}g$.

Defina

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in \left[\delta, \frac{2}{3}\right];\ \text{existe uma solução } u_t \in C^{2,\alpha}(M) \text{ de (2.18) com } A^t_{\tilde{g}_t} \in \Gamma_2^+ \right\}.$$

Afirmação 2.11. $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Claramente, com a escolha de f, $u \equiv 0$ é uma solução para $t = \delta$. Como A^δ_g é definido positivo, segue que $\sigma_1(A^\delta_g) > 0$ e $\sigma_2(A^\delta_g) > 0$, o que implica que $A^\delta_g \in \Gamma_2^+$. Logo $\delta \in \mathcal{S}$.

Afirmação 2.12. $\mathcal{S}$ *é aberto.*

Suponha que $t_0 \in \mathcal{S}$, então existe u_{t_0} solução de (2.18). Pela Proposição 1.25 o operador linearizado em u_{t_0},

$$\mathcal{L}^{t_0} : C^{2,\alpha}(M) \to C^{0,\alpha}(M),$$

é inversível. Pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe uma vizinhança V_{t_0} de t_0 e uma função contínua $h : V_{t_0} \to C^{2,\alpha}(M)$ tal que $h(t_0) = u_{t_0}$ e $F(t, h(t)) = 0$, para todo $t \in V_{t_0}$. Além disso, a condição $A^t_{\tilde{g}_t} \in \Gamma_2^+$ é uma condição aberta.

Logo, $\mathcal{S}$ é aberto e, como $f \in C^\infty(M)$, pela teoria de regularidade elíptica segue que $u_t \in C^\infty(M)$.

Afirmação 2.13. $\mathcal{S}$ *é fechado.*

Seja $(t_n) \subseteq \mathcal{S}$ uma sequência convergente, por exemplo para $t_0 \in [\delta, 2/3]$, e considere as correspondentes soluções (u_{t_n}) em $C^{2,\alpha}(M)$ de (2.18). Pela Proposição 2.3, existe $\overline{\delta}$, independente de t, tal que $u_t \leq \overline{\delta}$. Assim, pela Proposição 1.28 temos que $\sup_M |\nabla_g u_t| < C_0$, para alguma constante C_0 independente de t, e pela Proposição 2.9 existe $\underline{\delta}$, independente de t, tal que $u_t \geq \underline{\delta}$. Pela Proposição 1.29, existe uma constante C_2 que depende somente de (M, g) tal que $\|u_t\|_{g, C^{2,\alpha}} \leq C_2$. Assim pelo Teorema de Arzela-Ascoli, existe uma subsequência, que continuaremos denotando por (u_{t_n}), que converge na norma C^2 para alguma função u_{t_0} em $C^2(M)$. Como a convergência é na norma C^2, segue que u_{t_0} é solução de (2.18).

Vejamos que $A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}} \in \Gamma_2^+$. De fato, por (2.18) e pela Observação 1.23 temos que

$$f^2 e^{4u_{t_0}} = \sigma_2(g^{-1} A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) = e^{-4u_{t_0}} \sigma_2(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}),$$

isto é,

$$\sigma_2(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) > 0. \tag{2.19}$$

Note que $2\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_t}) = \sigma_1(A^t_{\tilde{g}_t})^2 - |A^t_{\tilde{g}_t}|^2$. Daí,

$$\sigma_1(A^t_{\tilde{g}_t})^2 = 2\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_t}) + |A^t_{\tilde{g}_t}|^2 > 0,$$

para todo $t \in \mathcal{S}$. Logo, de (2.19) obtemos que

$$\sigma_1(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}})^2 > 0. \tag{2.20}$$

Por outro lado, por continuidade temos que $\sigma_1(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) \geq 0$, já que $\lim t_n = t_0$ e $t_n \in \mathcal{S}$. Portanto, por (2.20) segue que $\sigma_1(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) > 0$.

Logo,

$$A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}} \in \Gamma_2^+.$$

Com isso, temos que (t_n) converge para t_0. Logo $\mathcal{S}$ é fechado.

Portanto $\mathcal{S} = [\delta, 2/3]$.

A métrica $\tilde{g} = e^{-2u_{\frac{2}{3}}} g$ satisfaz $\sigma_2(A^{\frac{2}{3}}_{\tilde{g}}) > 0$ e $R_{\tilde{g}} > 0$. Finalmente, pela Proposição 1.20, temos que

$$A^{\frac{2}{3}}_{\tilde{g}} + \frac{1}{3}\sigma_1(A^{\frac{2}{3}}_{\tilde{g}})\tilde{g} > 0,$$

ou seja,

$$Ric_{\tilde{g}} - \frac{R_{\tilde{g}}}{6}\tilde{g} + \frac{R_{\tilde{g}}}{6}\tilde{g} > 0,$$

pois $\sigma_1(A^{\frac{2}{3}}_{\tilde{g}}) = \dfrac{1}{2}R_{\tilde{g}}$. Portanto,

$$Ric_{\tilde{g}} > 0,$$

como queríamos demonstrar.

2.4 Aplicação

Nesta seção faremos uma aplicação do Corolário 2.2 envolvendo hipersuperfícies compactas de dimenão 3 imersas em formas espaciais de dimensão 4, seguindo o que foi feito em [15].

Teorema 2.14. *Se (M^3, g) é uma hipersuperfície compacta de dimensão 3 numa forma espacial $F^4(c)$ de dimensão 4 e curvatura seccional c, tal que a curvatura escalar de M é positiva e a segunda forma fundamental de M, B, satisfaz*

$$\int_M \left(32c^2 - 12c|B|^2 - 213|B|^4\right) dV_g \geq 0 \tag{2.21}$$

então M é difeomorfa a uma forma espacial esférica de dimensão 3. Em particular, se M é simplesmente conexa, então M é difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^3$ de dimensão 3.

Demonstração. Escolha um sistema de coordenadas locais ortonormais $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ em $F^4(c)$ tal que restrita a M, os vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$ são tangentes a M. Então, pela Proposição 1.9, temos a equaçao de Gauss

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \tag{2.22}$$

para $1 \leq i, j, k, l \leq 3$, onde h_{ij} é a segunda forma fundamental e $\overline{R}_{ijkl}$ e R_{ijkl} são os tensores curvatura de Riemann de $F^4(c)$ e M, respectivamente. Como $F^4(c)$ é uma forma espacial, pela Proposição 1.8, temos

$$\overline{R}_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{2.23}$$

Além disso, como a matriz $(h_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ é simétrica, podemos escolher $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $(h_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ seja diagonal, isto é,

$$h_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } 1 \leq i, j \leq 3. \tag{2.24}$$

Note que por (2.22), (2.23) e (2.24),

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{2.25}$$

Suponha que $i \neq k$. Daí, se $i = j$ ou $k = j$, então $R_{ijkj} = 0$. Caso contrário, $i \neq j$, por exemplo, então também temos $R_{ijkj} = 0$. Logo, quando $i \neq j$ temos que $R_{ijkj} = 0$ para todo $j \in \{1, 2, 3\}$. Logo, o tensor de Ricci de M satisfaz

$$Ric_{ik} = \sum_{j=1}^{3} R_{ijkj} = 0, \tag{2.26}$$

para $i \neq k$ e $1 \leq i, k \leq 3$.

Agora vejamos que para $i = k$, temos que

$$Ric_{ii} = \sum_{j=1}^{3} R_{ijij} = \sum_{j=1}^{3} c(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}) + (h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji}). \tag{2.27}$$

Com isso, quando $j = i$ temos que $R_{ijij} = 0$. Logo, obtemos que

$$\begin{aligned} Ric_{ii} = \sum_{j \neq i}^{3} R_{ijij} &= 2c + h_{ii} \sum_{j \neq i} h_{jj} \\ &= 2c + h_{ii}\left(\sum_{j=1}^{3} h_{jj} - h_{ii} \right) \\ &= 2c + Hh_{ii} - h_{ii}^2, \end{aligned} \tag{2.28}$$

para cada i fixado, onde $H = \sum_{j=1}^{3} h_{jj}$ é a curvatura média de M. Portanto,

$$Ric_{ii} = 2c + Hh_{ii} - h_{ii}^2$$

para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Logo

$$Ric_{ii}^2 = 4c^2 + 4cHh_{ii} - 4ch_{ii}^2 + H^2h_{ii}^2 - 2Hh_{ii}^3 + h_{ii}^4$$

para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Assim, somando em i de 1 a 3 obtemos

$$\sum_{i=1}^{3} Ric_{ii}^2 = 12c^2 + 4cH^2 - 4c\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + H^2 \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 - 2H\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^3 + \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^4.$$

Segue de (2.26) que o quadrado da norma do tensor de Ricci de M é dado por

$$\begin{aligned} |Ric|^2 &= \sum_{i,k=1}^{3} Ric_{ik}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3} Ric_{ii}^2 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned} |Ric|^2 &= \sum_{i=1}^{3} Ric_{ii}^2 \\ &= 12c^2 + 4cH^2 - 4c\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + H^2 \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 - 2H\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^3 + \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^4. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Por (2.28) segue que a curvatura escalar de M é dada por

$$R_g = \sum_{i=1}^{3} Ric_{ii} = 6c + H\sum_{i=1}^{3} h_{ii} - \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 = 6c + H^2 - \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2, \tag{2.31}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} R_g^2 &= \left(6c + H^2 - \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2 \\ &= 36c^2 + 12cH^2 - 12c\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + H^4 - 2H^2\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Assim, por (2.30) e (2.32), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}R_g^2 - |Ric|_g^2 &= \frac{3}{8}\left(36c^2 + 12cH^2 - 12c\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + H^4 - 2H^2\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2\right) \\ &\quad - 12c^2 - 4cH^2 + 4c\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 - H^2\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + 2H\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^3 - \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^4 \\ &= \frac{27}{2}c^2 + \frac{9}{2}cH^2 - \frac{9}{2}c\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + \frac{3}{8}H^4 - \frac{3}{4}H^2\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2 \\ &\quad - 12c^2 - 4cH^2 + 4c\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 - H^2\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + 2H\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^3 - \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^4 \\ &= \left(\frac{3}{2}c^2 + \frac{1}{2}cH^2 + \frac{3}{8}H^4\right) - \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{4}H^2\right)\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 \\ &\quad + 2H\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^3 + \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^4 \\ &= \frac{4}{3}c^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}H^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}c\right)^2 - \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{4}H^2\right)\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 \\ &\quad + 2H\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^3 + \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^4 \\ &\geq \frac{4}{3}c^2 - \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{4}H^2\right)\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2 + 2H\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^3 - \frac{5}{8}\left(\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{3} h_{ii}^2\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{3} h_{ii}^4.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_M \left(\frac{3}{8}R_g^2 - |Ric|_g^2\right) dV_g \\
&\quad \geq \int_M \left[\frac{4}{3}c^2 - \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{4}H^2\right)\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2 + 2H\sum_{i=1}^3 h_{ii}^3 - \frac{5}{8}\Big(\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2\Big)^2\right] dV_g. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Para $1 \leq i \leq 3$, temos

$$|h_{ii}H| \leq \left|h_{ii}\sum_{j=1}^3 h_{jj}\right| \leq \frac{3}{2}\sum_{j=1}^3 h_{jj}^2,$$

o que implica que

$$\left|H\sum_{i=1}^3 h_{ii}^3\right| \leq \sum_{i=1}^3 h_{ii}^2|Hh_{ii}| \leq \frac{3}{2}\Big(\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2\Big)^2. \quad (2.34)$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$H^2 = \left(\sum_{i=1}^3 h_{ii}\right)^2 \leq 3\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2. \quad (2.35)$$

Usando (2.34) e (2.35), podemos reescrever (2.33) da seguinte forma

$$\int_M \left(\frac{3}{8}R_g^2 - |Ric|_g^2\right) dV_g \;\geq\; \int_M \left[\frac{4}{3}c^2 - \left(\frac{1}{2}c + \frac{21}{4}\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2\right)\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2 - \frac{29}{8}\Big(\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2\Big)^2\right] dV_g. \quad (2.36)$$

Por (2.24), o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M é dado por

$$|B|^2 = \sum_{i,j=1}^3 h_{ij}^2 = \sum_{i=1}^3 h_{ii}^2. \quad (2.37)$$

Combinando (2.37) com (2.36), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8}\int_M R_g^2\, dV_g - \int_M |Ric|_g^2\, dV_g \;&\geq\; \int_M \left[\frac{4}{3}c^2 - \left(\frac{1}{2}c + \frac{21}{4}|B|^2\right)|B|^2 - \frac{29}{8}|B|^4\right] dV_g \quad (2.38) \\
&\geq\; \int_M \left(\frac{4}{3}c^2 - \frac{1}{2}c|B|^2 - \frac{71}{8}|B|^4\right) dV_g. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\int_M \left(\frac{4}{3}c^2 - \frac{1}{2}c|B|^2 - \frac{71}{8}|B|^4\right)\, dV_g = \frac{1}{24}\int_M \left(32c^2 - 12c|B|^2 - 213|B|^4\right)\, dV_g \geq 0,$$

por hipótese.

Portanto, M é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 3 com curvatura escalar positiva tal que

$$\frac{3}{8}\int_M R_g^2\, dV_g \geq \int_M |Ric|_g^2\, dV_g.$$

Logo, pelo Teorema 2.1 e o Corolário 2.2, podemos concluir que M é difeomorfa a uma forma espacial esférica. $\square$

Capítulo 3

Deformações Conformes em variedades de dimensão 4

Neste capítulo iremos considerar (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 4. Inicialmente defina um funcional $\mathcal{F}_2 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(g) &:= \int_M \left(-\frac{1}{2}|Ric_g|^2 + \frac{1}{6}R_g^2 \right) dV_g \\ &= 4\int_M \sigma_2(A_g) dV_g, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{M}$ é o conjunto de todas as métricas Riemannianas em M^4 e $A_g = \frac{1}{2}\left(Ric_g - \frac{1}{6}R_g g\right)$ é o tensor de Schouten.

Pela Proposição 1.21 mostra-se que $\mathcal{F}_2$ é um invariante conforme, isto é,

$$\mathcal{F}_2(e^f g) = \mathcal{F}_2(g), \tag{3.2}$$

pra toda $f \in C^\infty(M)$. Desta forma, podemos escrever

$$\mathcal{F}_2([g]) := 4\int_M \sigma_2(A_g) dV_g, \tag{3.3}$$

onde $[g]$ é a classe conforme de g.

Neste capítulo, como iremos trabalhar com variedades de dimensão 4, definimos o seguinte tensor

$$A_g^t = \frac{1}{2}\left(Ric_g - \frac{t}{6}R_g g \right). \tag{3.4}$$

Observe que, com $t = 1$ temos o tensor de Schouten.

Nosso principal interesse é provar o seguinte teorema

Teorema 3.1. *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 4 com curvatura escalar constante positiva. Se*

$$\mathcal{F}_2([g]) + \frac{1}{6}(1-t_0)(2-t_0)\Big(Y(M,[g])\Big)^2 > 0, \tag{3.5}$$

para algum $t_0 \leq 1$, então existe uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u}g$ com $R_{\tilde{g}} > 0$ e $\sigma_2(A_{\tilde{g}}^{t_0}) > 0$. Isso implica a desigualdade tensorial

$$(t_0 - 1)R_{\tilde{g}}\tilde{g} < 2Ric_{\tilde{g}} < (2 - t_0)R_{\tilde{g}}\tilde{g}. \tag{3.6}$$

Um corolário imediato é aplicar o teorema para $t_0 = 1$.

Corolário 3.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 4 com curvatura escalar constante positiva. Se $\mathcal{F}_2([g]) > 0$, então existe uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u}g$ com $R_{\tilde{g}} > 0$ e $\sigma_2(A_{\tilde{g}}^{t_0}) > 0$. Em particular, o tensor de Ricci satisfaz*

$$0 < Ric_{\tilde{g}} < R_{\tilde{g}}\tilde{g}.$$

Demonstração. Perceba que se $\mathcal{F}_2([g]) > 0$ a equação (3.5), do Teorema 3.1, em $t_0 = 1$ também é positiva. Logo, segue o resultado. $\square$

3.1 Limite Superior

Proposição 3.3. *Seja $u_t \in C^2(M)$ uma solução de*

$$\sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}_t}^t) = f^2 e^{4u_t}$$

para algum $t \in [\delta, 1]$, onde $\tilde{g} = e^{-2u}g$. Então $u_t \leq \overline{\delta}$, onde $\overline{\delta}$ depende apenas de g.

Demonstração. Da Desigualdade de Newton $\dfrac{4}{\sqrt{6}}\sigma_2^{1/2} \leq \sigma_1$, temos que

$$\frac{4}{\sqrt{6}} f e^{2u_t} = \frac{4}{\sqrt{6}}\sigma_2^{1/2}(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t) \leq \sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}}^t).$$

Pela Proposição 1.22, temos que

$$A_{\tilde{g}}^t = A_g^t + \nabla_g^2 u_t + \frac{1-t}{2}(\Delta_g u_t)g + du_t \otimes du_t - \frac{2-t}{2}|\nabla_g u_t|_g^2.$$

Como M é compacta, seja $p \in M$ máximo de u_t, assim $\nabla_g u_t(p) = 0$ e $(\Delta_g u_t)(p) \leq 0$ em p. Logo,

$$A^t_{\tilde{g}} = A^t_g + \nabla^2_g u_t + \frac{1-t}{2}(\Delta_g u_t)g.$$

Dessa forma, no ponto p, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{6}} f e^{2u_t} &\leq \sigma_1(g^{-1}A^t_{\tilde{g}}) \\
&= \sigma_1(A^t_g) + \Delta_g u_t + (2-2t)(\Delta_g u_t) \\
&= \sigma_1(A^t_g) + (3-2t)(\Delta_g u_t) \\
&\leq \sigma_1(A^t_g),
\end{aligned}$$

pois $3 - 2t \geq 0$, já que $t \leq 1$. Com isso, como $f(p) > 0$,

$$e^{2u_t(p)} \leq \frac{\sqrt{6}\ \sigma_1(A^t_g)(p)}{4f(p)}.$$

Note que, $\sigma_1(A^t_g) = (3-2t)\sigma_1(A_g) \leq (3-2\delta)\sigma_1(A_g)$, para todo $t \geq \delta$. Assim,

$$e^{2u_t(p)} \leq \frac{\sqrt{6}(3-2\delta)\sigma_1(A_g)}{4f(p)} = \frac{\sqrt{6}(3-2\delta)R_g}{24f(p)},$$

o que implica que

$$u_t(p) \leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{6}(3-2\delta)R_g}{24f(p)}\right) \leq \overline{\delta}.$$

Portanto, $u_t \leq \overline{\delta}$, onde $\overline{\delta}$ só depende de (M, g). □

3.2 Limite Inferior

Lema 3.4. *Para toda métrica $g' \in [g]$, temos*

$$\int_M R^2_{g'}\ dV_{g'} \geq \Big(Y(M,[g])\Big)^2.$$

Demonstração. Usando a Desigualdade de Hölder com $p = q = 2$, $f = 1$ e $h = R_{g'}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M R_{g'} dV_{g'} &\leq \left(\int_M dV_{g'}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_M R^2_{g'}\ dV_{g'}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\mathrm{Vol}(M,g')\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_M R^2_{g'}\ dV_{g'}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\int_M R_{g'}^2\, dV_{g'}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\displaystyle\int_M R_{g'} dV_{g'}}{\left(\mathrm{Vol}(M,g')\right)^{\frac{1}{2}}} \geq Y(M,[g]).$$

Como g tem curvatura escalar positiva, segue que $Y(M,[g]) > 0$. Assim,

$$\int_M R_{g'}^2\, dV_{g'} \geq \Big(Y(M,[g])\Big)^2.$$

□

Proposição 3.5. *Assuma que para algum $t \in [\delta, 1]$,*

$$\mathcal{F}_2([g]) + \frac{1}{6}(1-t)(2-t)\Big(Y(M,[g])\Big)^2 = \lambda_t > 0.$$

Se $u_t \in C^2(M)$ é uma solução de

$$\sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}_t}^t) = f^2 e^{4u_t} \tag{3.7}$$

satisfazendo $\|\nabla u_t\|_{g,\infty} < C_0$, onde $\tilde{g}_t = e^{-2u_t}g$, então $u_t > \underline{\delta}$, onde $\underline{\delta}$ depende somente de g, C_0 e $\log \lambda_t$.

Demonstração. Temos por (1.23)

$$\sigma_2(A_g^t) = \sigma_2(A_g) + \frac{3}{2}(1-t)(2-t)(\sigma_1(A_g))^2. \tag{3.8}$$

Considere $\tilde{g}_t = e^{-2u_t}g$. Por (1.37), (3.7) e (3.8), temos

$$\begin{aligned} e^{4u_t} f^2 &= \sigma_2(g^{-1}A_{\tilde{g}_t}) + \frac{3}{2}(1-t)(2-t)\sigma_1(g^{-1}A_{\tilde{g}_t})^2 \\ &= e^{-4u_t}\sigma_2(A_{\tilde{g}_t}) + e^{-4u_t}\frac{3}{2}(1-t)(2-t)\sigma_1(A_{\tilde{g}_t})^2 \\ &= e^{-4u_t}\Big(\sigma_2(A_{\tilde{g}_t}) + \frac{3}{2}(1-t)(2-t)\sigma_1(A_{\tilde{g}_t})^2\Big) \\ &= e^{-4u_t}\left(\sigma_2(A_{\tilde{g}_t}) + \frac{3}{2}(1-t)(2-t)\left(\frac{R_{\tilde{g}_t}}{6}\right)^2\right) \\ &= e^{-4u_t}\left(\sigma_2(A_{\tilde{g}_t}) + \frac{1}{24}(1-t)(2-t)R_{\tilde{g}_t}^2\right). \end{aligned}$$

Seja $C > 0$ uma constante tal que $C \geq f^2$. Integrando com respeito a dV_g, obtemos

$$\begin{aligned}
C\int_M e^{4u_t}\, dV_g &\geq \int_M e^{4u_t} f^2\, dV_g \\
&= \int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}_t}) e^{-4u_t}\, dV_g + \frac{1}{24}(1-t)(2-t)\int_M R^2_{\tilde{g}} e^{-4u_t}\, dV_g \\
&= \int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}_t})\, dV_{\tilde{g}} + \frac{1}{24}(1-t)(2-t)\int_M R^2_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}_t},
\end{aligned}$$

pois $e^{-4u_t}\, dV_g = dV_{\tilde{g}_t}$.

Usando o Lema 3.4 e a invariância conforme de $\mathcal{F}_2$,

$$\begin{aligned}
C\int_M e^{4u_t}\, dV_g &\geq \int_M \sigma_2(A_{\tilde{g}_t}) e^{-4u_t}\, dV_g + \frac{1}{24}(1-t)(2-t)\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \\
&= \frac{1}{4}\mathcal{F}_2(g) + \frac{1}{24}(1-t)(2-t)\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \\
&= \frac{1}{4}\mathcal{F}_2([g]) + \frac{1}{24}(1-t)(2-t)\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \\
&= \frac{1}{4}\lambda_t > 0,
\end{aligned}$$

uma vez que $\lambda_t > 0$, por hipótese.

Com isso,

$$C \cdot e^{4\max u_t}\int_M dV_g \geq \lambda_t,$$

que implica que

$$\log\Big(e^{4\max u_t} \cdot C\Big(\mathrm{Vol}(M,g)\Big)\Big) \geq \log\lambda_t,$$

ou seja,

$$4\max_M u_t \geq \log\lambda_t - \log\Big(C\Big(\mathrm{Vol}(M,g)\Big)\Big).$$

Portanto,

$$\max_M u_t \;\geq\; \frac{1}{4}\log\lambda_t - C(g). \tag{3.9}$$

Agora, sejam $p_t, q_t \in M$ e uma geodésica $\alpha : [0,l] \to M$ tal que $\alpha(0) = p_t$ e $\alpha(1) = q_t$, com $|\alpha'(s)| = 1$, $s \in [0,l]$, onde $u_t(p_t) = \min u_t$ e $u_t(q_t) = \max u_t$. Assim, usando o fato que $\|\nabla u_t\|_{g,\infty} < C_0$, temos

$$\max_M u_t - \min_M u_t \;=\; u_t(q_t) - u_t(p_t)$$

$$
\begin{aligned}
&= u_t(\alpha(1)) - u_t(\alpha(0)) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{ds}(u_t \circ \alpha)(s)\ ds \\
&= \int_0^1 \nabla u_t(\alpha(s))\alpha'(s)\ ds \\
&\leq \int_0^1 |\nabla u_t(\alpha(s))|\ ds \\
&\leq C_0 = C(M).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\max_M u_t - \min_M u_t \;\; \leq \;\; C(M). \tag{3.10}
$$

Comparando as desigualdades (3.9) e (3.10), podemos ver que

$$
\min_M u_t + C(M,g) \geq \max_M u_t \geq \frac{1}{4}\log\lambda_t - C(g),
$$

ou seja,

$$
\min_M u_t \geq \frac{1}{4}\log\lambda_t - \Big(C(g) + C(M,g)\Big).
$$

Portanto, $u_t \geq \underline{\delta}$, onde $\underline{\delta}$ depende somente de g, $C(g) + C(M,g)$ e $\log\lambda_t$.

Em particular, observe que

$$
\begin{aligned}
\lambda_t \geq \frac{1}{4}\lambda_t \;\; &= \;\; \frac{1}{4}\mathcal{F}_2([g]) + \frac{1}{24}(1-t)(2-t)\Big(Y(M,[g])\Big)^2 \\
&\geq \;\; \frac{1}{4}\mathcal{F}_2([g]) \\
&= \;\; \frac{1}{4}\lambda_1, \text{para todo } t \in [\delta, 1].
\end{aligned}
$$

Logo, $\log\lambda_t \geq \log\frac{\lambda_1}{4}$, para todo $t \in [\delta, 1]$. Assim,

$$
\min u_t \geq \frac{1}{4}\log\frac{\lambda_1}{4} - C = \underline{\delta},
$$

onde $\underline{\delta}$ depende somente de (M,g). □

3.3 Demonstração do Teorema Principal

Finalmente, usando os resultados anteriores, podemos provar o Teorema 3.1. A demonstração segue de forma análoga à demonstração do Teorema 2.1, no capítulo anterior, sendo o conjunto $\mathcal{S}$ estendido para $t \leq 1$.

Note que $\sigma_2(A_g^\delta) > 0$ para $\delta < 0$ com $|\delta|$ suficientemente grande, pois

$$\sigma_2(A_g^\delta) = Ric_g - \frac{\delta}{4} R_g g$$

tem autovalores positivos para esta escolha de δ, já que $R_g > 0$. Considere a equação

$$\sigma_2(g^{-1} A_{\tilde{g}_t}^t) = f^2 e^{4u_t}, \tag{3.11}$$

para $t \in [\delta, 1]$, com $f = \sigma_2^{1/2}(A_g^\delta) > 0$, onde $\tilde{g}_t = e^{-2u_t} g$.

Defina

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in [\delta, 1];\ \text{existe uma solução } u_t \in C^{2,\alpha}(M) \text{ de (3.11) com } A_{\tilde{g}_t}^t \in \Gamma_2^+ \right\}.$$

Afirmação 3.6. $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Claramente, com a escolha de f, $u \equiv 0$ é uma solução para $t = \delta$. Como A_g^δ é definido positivo, segue que $\sigma_1(A_g^\delta) > 0$ e $\sigma_2(A_g^\delta) > 0$, o que implica que $A_g^\delta \in \Gamma_2^+$. Logo $\delta \in \mathcal{S}$.

Afirmação 3.7. $\mathcal{S}$ *é aberto.*

Suponha que $t_0 \in \mathcal{S}$, então existe u_{t_0} solução de (3.11). Pela Proposição 1.25 o operador linearizado em u_{t_0},

$$\mathcal{L}^{t_0} : C^{2,\alpha}(M) \to C^{0,\alpha}(M),$$

é inversível. Pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe uma vizinhança V_{t_0} de t_0 e uma função contínua $h : V_{t_0} \to C^{2,\alpha}(M)$ tal que $h(t_0) = u_{t_0}$ e $F(t, h(t)) = 0$, para todo $t \in V_{t_0}$. Além disso, a condição $A_{\tilde{g}_t}^t \in \Gamma_2^+$ é uma condição aberta.

Logo, $\mathcal{S}$ é aberto e, como $f \in C^\infty(M)$, pela teoria de regularidade elíptica segue que $u_t \in C^\infty(M)$.

Afirmação 3.8. $\mathcal{S}$ *é fechado.*

Seja $(t_n) \subseteq \mathcal{S}$ uma sequência convergente, por exemplo para $t_0 \in [\delta, 1]$, e considere as correspondentes soluções (u_{t_n}) em $C^{2,\alpha}(M)$ de (3.11). Pela Proposição 3.3, existe $\overline{\delta}$, independente de t, tal que $u_t \leq \overline{\delta}$. Assim, pela Proposição 1.28 temos que $\sup\limits_M |\nabla_g u_t| < C_0$, para alguma constante C_0 independente de t, e pela Proposição 3.5 existe $\underline{\delta}$, independente de t, tal que $u_t \geq \underline{\delta}$. Pela Proposição 1.29, existe uma constante C_2 que depende somente de (M, g)

tal que $\|u_t\|_{g,C^{2,\alpha}} \leq C_2$. Assim pelo Teorema de Arzela-Ascoli, existe uma subsequência, que continuaremos denotando por (u_{t_n}), que converge na norma C^2 para alguma função u_{t_0} em $C^2(M)$. Como a convergência é na norma C^2, segue que u_{t_0} é solução de (3.11).

Vejamos que $A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}} \in \Gamma_2^+$. De fato, por (3.11) e pela Observação 1.23 temos que

$$f^2 e^{4u_{t_0}} = \sigma_2(g^{-1} A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) = e^{-4u_{t_0}} \sigma_2(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}),$$

isto é,

$$\sigma_2(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) > 0. \tag{3.12}$$

Note que $2\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_t}) = \sigma_1(A^t_{\tilde{g}_t})^2 - |A^t_{\tilde{g}_t}|^2$. Daí,

$$\sigma_1(A^t_{\tilde{g}_t})^2 = 2\sigma_2(A^t_{\tilde{g}_t}) + |A^t_{\tilde{g}_t}|^2 > 0,$$

para todo $t \in \mathcal{S}$. Logo, de (3.12) obtemos que

$$\sigma_1(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}})^2 > 0. \tag{3.13}$$

Por outro lado, por continuidade temos que $\sigma_1(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) \geq 0$, já que $\lim t_n = t_0$ e $t_n \in \mathcal{S}$. Portanto, por (3.13) segue que $\sigma_1(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) > 0$.

Logo,

$$A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}} \in \Gamma_2^+.$$

Com isso, temos que (t_n) converge para t_0. Logo $\mathcal{S}$ é fechado.

Portanto $\mathcal{S} = [\delta, 1]$.

A métrica $\tilde{g} = e^{-2u_{t_0}} g$ satisfaz $\sigma_2(A^{t_0}_{\tilde{g}_{t_0}}) > 0$ e $R_{\tilde{g}_{t_0}} > 0$.

Pela Proposição 1.20 temos que

$$0 < A^t_{\tilde{g}} + \frac{1}{2}\sigma_1(A^t_{\tilde{g}})\tilde{g}.$$

Assim

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} Ric_{\tilde{g}} - \frac{t}{12} R_{\tilde{g}} \tilde{g} + \frac{3-2t}{12} R_{\tilde{g}} \tilde{g} \\ &= \frac{1}{2} Ric_{\tilde{g}} + \frac{3-3t}{12} R_{\tilde{g}} \tilde{g}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2Ric_{\tilde{g}} > (t-1)R_{\tilde{g}}\tilde{g}. \tag{3.14}$$

Por outro lado, também pela Proposição 1.20, sabemos que

$$0 < -A^t_{\tilde{g}} + \sigma_1(A^t_{\tilde{g}})\tilde{g},$$

com isso

$$\begin{aligned} 0 &< -\frac{1}{2}Ric_{\tilde{g}} + \frac{t}{12}R_{\tilde{g}}\tilde{g} + \frac{3-2t}{6}R_{\tilde{g}}\tilde{g} \\ &= -\frac{1}{2}Ric_{\tilde{g}} + \frac{6-3t}{12}R_{\tilde{g}}\tilde{g}, \end{aligned}$$

isto é,

$$2Ric_{\tilde{g}} < (2-t)R_{\tilde{g}}\tilde{g}. \tag{3.15}$$

Concluímos por (3.14) e (3.15) que

$$(t-1)R_{\tilde{g}}\tilde{g} < 2Ric_{\tilde{g}} < (2-t)R_{\tilde{g}}\tilde{g},$$

onde $t \in [\delta, 1]$.

Assim, concluímos a demonstração.

3.4 Aplicação

Nesta seção faremos uma aplicação em variedades Riemannianas fechadas de dimensão 4 com curvatura escalar positiva. Ver [13] para mais detalhes.

Definição 3.9. *A Q-curvatura de Branson é definida por*

$$Q_g = -\frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R_g + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}R_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|Ric_g|^2. \tag{3.16}$$

Definição 3.10. *O operador de Paneitz é definido por*

$$P_g = \Delta_g^2 + div_g\left\{\Big(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}R_g g - \frac{4}{n-2}Ric_g\Big)(\nabla_g, *)\right\} + \frac{n-4}{2}Q_g. \tag{3.17}$$

Proposição 3.11. *Se*

$$Ric_g \leq R_g g,$$

então $P_g \geq 0$, e $KerP_g = \{const.\}$.

Demonstração. Temos, pela Definição 3.10, com $n = 4$, que

$$P_g u = \Delta_g^2 u + div_g \left\{ \left(\frac{2}{3} R_g g - 2Ric_g \right) (\nabla_g u, *) \right\}. \tag{3.18}$$

Integrando por partes,

$$\int_M u P_g u \; dV_g = \int_M \left((\Delta_g u)^2 + \frac{2}{3} R_g |\nabla_g u| - 2Ric_g(\nabla_g u, \nabla_g u) \right) dV_g. \tag{3.19}$$

Pela Fórmula Integral de Böchner-Weitzenböck, Corolário 1.15, temos que

$$\int_M (\Delta_g f)^2 \; dV_g = \int_M |\nabla_g^2 f|^2 \; dV_g + \int_M Ric_g(\nabla_g f, \nabla_g f) \; dV_g. \tag{3.20}$$

Ou seja,

$$0 = \int_M \left(|\nabla_g^2 u|^2 + Ric_g(\nabla_g u, \nabla_g u) - (\Delta_g u)^2 \right) dV_g. \tag{3.21}$$

Substituindo (3.21) em (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} \int_M u P_g u \; dV_g &= \int_M \left(-\frac{1}{3}(\Delta_g u)^2 + \frac{4}{3}(\Delta_g u)^2 + \frac{2}{3} R_g |\nabla_g u| - 2Ric_g(\nabla_g u, \nabla_g u) \right) dV_g \\ &= \int_M \left(-\frac{1}{3}(\Delta_g u)^2 + \frac{4}{3}|\nabla_g^2 u|^2 + \frac{2}{3} R_g |\nabla_g u| - \frac{2}{3} Ric_g(\nabla_g u, \nabla_g u) \right) dV_g. \end{aligned}$$

Defina $\widehat{\nabla}_g^2 u = \nabla_g^2 u - \frac{1}{4}(\Delta_g u) g$. Assim,

$$|\widehat{\nabla}_g^2 u|^2 = |\nabla_g^2 u|^2 - \frac{1}{4}(\Delta_g u)^2,$$

o que implica que

$$\frac{4}{3}|\widehat{\nabla}_g^2 u|^2 = \frac{4}{3}|\nabla_g^2 u|^2 - \frac{1}{3}(\Delta_g u)^2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_M u P_g u \; dV_g &= \int_M \left(\frac{4}{3}|\widehat{\nabla}_g^2 u|^2 + \frac{2}{3}\Big(R_g g - Ric_g \Big)(\nabla_g u, \nabla_g u) \right) dV_g \\ &\geq \frac{4}{3} \int_M |\widehat{\nabla}_g^2 u|^2 \; dV_g, \end{aligned} \tag{3.22}$$

pois $Ric_g \leq R_g g$, por hipótese. Consequentemente, $P_g \geq 0$.

Suponha, por absurdo, que $P_g u = 0$, e que u não é constante. Assim,

$$0 = \int_M u P_g u \; dV_g \geq \frac{4}{3} \int_M |\widehat{\nabla}_g^2 u|^2 \; dV_g,$$

o que implica que $\widehat{\nabla}_g^2 u \equiv 0$.

Dessa forma, $\nabla_g^2 u - \dfrac{1}{4}(\Delta_g u) g = 0$, ou seja,

$$\nabla_g^2 u = \frac{1}{4}(\Delta_g u) g.$$

Por [[20], Teorema A], g é homotética a $\mathbb{S}^4$, ou seja, existe uma constante positiva $\lambda > 0$ tal que $g = \lambda g_{\mathbb{S}^4}$, onde $g_{\mathbb{S}^4}$ é a métrica canônica de $\mathbb{S}^4$. Assim, $R_g = 12\lambda^{-1}$ e $Ric_g = Ric_{g_{\mathbb{S}^4}} = 3 g_{\mathbb{S}^4} = 3\lambda^{-1} g = \frac{1}{4} R_g g$. Logo,

$$R_g g - Ric_g = R_g g - \frac{1}{4} R_g g = \frac{3}{4} R_g g.$$

Daí, de (3.22) obtemos que

$$0 = \int_M u P_g u \; dV_g = \frac{4}{3} \int_M |\widehat{\nabla}_g^2 u|^2 \; dV_g + \frac{1}{2} R_g \int_M |\nabla_g u|^2 \; dV_g.$$

Logo $\nabla_g u = 0$, o que é um absurdo, pois supomos u não constante.

Portanto, $\mathrm{Ker} P_g = \{const.\}$. □

Teorema 3.12. *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 4 com curvatura escalar positica, $R_g > 0$. Se*

$$\int_M Q_g \; dV_g + \frac{1}{3}\Big(Y(M, [g])\Big)^2 > 0, \tag{3.23}$$

então o operador de Paneitz é não-negativo, $P_g \geq 0$, e Ker $P_g = \{const.\}$. Portanto, por um resultado em [4], existe uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u} g$ com

$$Q_{\tilde{g}} = const.$$

Demonstração. A Q-curvatura é dada por

$$Q_g = -\frac{1}{6}\Delta_g R_g + \frac{1}{6} R_g^2 - \frac{1}{2}|Ric_g|^2 = -\frac{1}{6}\Delta_g R_g + 4\sigma_2(A_g). \tag{3.24}$$

Integrando temos

$$\int_M Q_g \; dV_g = 4 \int_M \sigma_2(A_g) \; dV_g = \mathcal{F}_2([g]).$$

Logo de (3.23), obtemos

$$\mathcal{F}_2([g]) + \frac{1}{3}\Big(Y(M,[g])\Big)^2 > 0. \tag{3.25}$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 3.1 com $t_0 = 0$ para obter uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u}g$,

$$Ric_{\tilde{g}} < R_{\tilde{g}}\tilde{g}.$$

Pela Proposição 3.11, concluímos que o operador de Paneitz $P_{\tilde{g}}$ é não-negativo e Ker$P_{\tilde{g}} = \{const.\}$.

Finalmente, por um resultado em [4], existe uma métrica conforme $\overline{g} = e^{-2u}g$ com

$$Q_{\overline{g}} = const,$$

como queríamos demonstrar.

□

Referências Bibliográficas

[1] Brendle, S., Schoen, R., *Manifolds with* 1/4*-pinched curvature are space forms.* J. Amer. Math (1) 287-307 (2009).

[2] Caffarelli, L., Nirenberg, L., Spruck, J., *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations.* III. Funcions of the eigenvalues of the Hessian, Acta Math. 155(3-4), (1985).

[3] Catino, G., Djadli, Z., *Conformal deformations of integral pinched 3-manifolds.* Adv. Math. 223, 393-404, (2010).

[4] Chang, S.-Y. A., Gursky, M. J., Yang, P.C., *A conformally invariant sphere theorem in four dimensions.* Pupl. Math. Inst Ht. Études Sci. 98, 105-143, (2003).

[5] Cheng, S.Y., *A characterization of the 2-sphere by eigenfuntions.* Proc. Am. Math. Soc. 55, 379-381, (1976).

[6] Chow, B., Lu, P., Ni, L., *Hamilton's Ricci Flow.* Volume 77. USA: Science Press, 2006.

[7] Do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[8] Escobar, J. F., *Topics in PDE's and diferential geometry.* XII Escola de Geometria Diferencial. [XII School of Diferential Geometry] Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2002.

[9] Evans, L. C., *Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. 35(3) 333-363 (1982).

[10] Gårding, L., *An inequality for hyperbolic polynomials.* J. Math. Mech. 8, 957-965, (1959).

[11] Gilbarg, T., Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* New York: Springer-Verlag, Berlim Heidelberg, 1977.

[12] Guan, P., Wang, G., *Local Estimatives for a Class os Fully Nonlinear Equations Arising from Conformal Geometry.* IMRN. no. 26, 1413-1432, 2003.

[13] Gursky, M.J., Viaclovsky, J.A., *A fully nonlinear equation on four-manifolds with positive scalar curvature.* J. Differential Geom. 63 (1) 131-154, (2003).

[14] Hamilton, R. S., *Three-manifolds with positive Ricci curvature.* J. Differential Georm. 17(2) 255-306 (1982).

[15] Ho, P. T., *Differentiable rigidity of hypersurface in space forms*. Manuscripta Math. 146, no. 3-4, 463-472, (2015).

[16] Krylov, N. V., *Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain*. Izv, Akad. Nauk SSSR Ser, Mat. 47(1) 75-108 (1983).

[17] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition. Verlag New York: Springer, 2012.

[18] Lee, J. M., Parker, T. H., *The Yamabe Problem*. American Mathematical Society. no 1, (1987).

[19] Li, A., Li, Y., *On some conformally invariant fully nonlinear equations*. Comm. Pure Appl. Math. 56(10) 1416-1464 (2003).

[20] Obata, M., Certain conditions for a Riemannian manifolds o be isometric with a sphere, J. Math. Soc. Japan 14 333-340, MR25 ♯5479, (1962)

[21] Rauch, H. E., *A contribution to differential geometry in the large*. Ann. of Math. 54, 38-55 (1951).

[22] Santos, M. S., *Métricas com Q-curvatura constante via um fluxo não local e um princípio do máximo para o operador de Paneitz*. Dissertação de Mestrado: PROMAT/UFS, 2015.

[23] Viaclovsky, J. A., *Estimates and Existence Results for some Fully Nonlinear Elliptic Equations on Riemannian Manifolds*. Communications in Analysis and Geometry 10 , no.4, 815-846, (2002).