



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Soluções locais para uma equação hiperbólica

RAFAEL OLIVEIRA DE JESUS

PROFESSORA DRA. GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA
ORIENTADORA

São Cristóvão-SE
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Soluções locais para uma equação hiperbólica

por

RAFAEL OLIVEIRA DE JESUS

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

PROFESSORA DRA. GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA
ORIENTADORA

São Cristóvão-SE
2017

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

J58s Jesus, Rafael Oliveira de
Soluções locais para uma equação hiperbólica / Rafael Oliveira
de Jesus ; orientador Giovana Siracusa Gouveia. – São Cristóvão,
2017.
150 f. ; Il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2017.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais hiperbólicas –
Soluções numéricas. 3. Sobolev, Espaço de. I. Gouveia, Giovana
Siracusa, orient. II. Título.

CDU: 517.58



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Soluções locais para uma equação hiperbólica

por

Rafael Oliveira de Jesus

Aprovada pela banca examinadora:

Prof.^a Dr.^a Giovana Siracusa Gouveia - UFS

Orientador

Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Segundo Examinador

São Cristóvão, 02 de Fevereiro de 2017

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãos, em especial a minha mãe Edilene Oliveira de Jesus por toda confiança depositada e dedicação prestada para que esse sonho se tornasse realidade.

A minha esposa, Monique Evans Trindade de Jesus Oliveira, por todo carinho, amor, amizade e apoio durante todos esses anos.

A minha orientadora, professora Dra. Giovana Siracusa Gouveia, pela contribuição de extrema relevância em minha formação acadêmica e, pela dedicação, confiança e amizade a mim prestada.

Ao professor Dr. Aldo Trajano por ter proporcionado o artigo base deste trabalho e ter contribuído para a conclusão do mesmo.

Ao professor Dr. Marcelo Fernandes de Almeida por disponibilizar seu tempo em ler minha dissertação e pelas valiosas sugestões.

A todos os professores da graduação e pós-graduação.

Aos meus colegas de estudo durante a graduação e o mestrado.

A todos que de alguma maneira, direta ou indireta, contribuíram para a minha formação acadêmica.

Por fim, a FAPITEC, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

À memória do meu pai, Noel Tavares de Jesus.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade de solução para o seguinte problema hiperbólico não linear

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } \Omega \times (0, T_0), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T_0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h(\cdot, u') = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T_0), \end{array} \right. \quad (1)$$

onde Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ constituída de duas partes Γ_0 e Γ_1 , com $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, $\rho > 1$ é uma constante real e $h : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e fortemente monótona na segunda variável.

A existência do problema acima será feita utilizando o método de Faedo-Galerkin com uma base especial para $V \cap H^2(\Omega)$, aproximações à Strauss de funções contínuas e teoremas de traços para funções não suaves. A unicidade será obtida no caso em que $h = \delta p$, onde $\delta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, e $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana e fortemente monótona.

Palavras-chave: Método de Faedo-Galerkin, Aproximações à Strauss, Equação hiperbólica, Espaço de Sobolev, Teoria do traço.

Abstract

This work we will study the existence and uniqueness of the solution to the following nonlinear hyperbolic problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{in } \Omega \times (0, T_0), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times (0, T_0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h(\cdot, u') = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0, T_0), \end{array} \right.$$

where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ consisted of two parts Γ_0 and Γ_1 , with $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, $\rho > 1$ is a real constant and $h : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function and strongly monotonous in the second variable.

The existence of the above problem will be done using the Faedo-Galerkin method with a special basis for $V \cap H^2(\Omega)$, Strauss' approximations of continuous functions and trace theorems for non-smooth functions. The uniqueness will be obtained in the case where $h = \delta p$, where $\delta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, and $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a Lipschitzian function and strongly monotonous.

Keywords: Faedo-Galerkin Method, Strauss' approximations, Hyperbolic equation, Sobolev spaces, Trace Theory.

Sumário

1	Distribuições e Espaços de Sobolev	4
1.1	Espaço das Funções Testes	4
1.2	Distribuição	8
1.3	Espaço de Schwartz e Distribuição Temperada	13
1.4	Espaços de Sobolev	16
1.5	Distribuição Vetorial	24
2	Teoria de Traço	32
2.1	Conjunto Aberto Regular	32
2.2	Os Espaços $H^s(\Omega)$ e $H^s(\Gamma)$	37
2.3	Teoria de Traço	41
3	Equação Hiperbólica: Caso p Lipschitziana	51
3.1	Preliminares	52
3.2	Existência de Solução Local	64
3.2.1	Aproximações de Galerkin	66
3.2.2	Estimativas a Priori	72
3.2.3	Passagem ao Limite	82

3.2.4	Condições Iniciais	87
3.2.5	Considerações finais	89
3.3	Unicidade da Solução Local	89
4	Equação Hiperbólica: Caso $h(x, s)$ contínua em s	93
4.1	Preliminares	93
4.2	Existência de Solução Local	101
5	Apêndice	111
5.1	Espaços Topológicos	111
5.1.1	Elementos Gerais	111
5.1.2	Elementos Subjacentes	113
5.1.3	Axiomas de Enumerabilidade e Topologia Fraca	116
5.2	Espaços Vetoriais Topológicos	118
5.2.1	Elementos Gerais	118
5.2.2	Espaços de Hilbert	123
5.2.3	Topologia Fraca e Fraca *	127
5.3	Espaços de Medida	129
5.3.1	Elementos Gerais	129
5.3.2	Funções Mensuráveis	131
5.3.3	Espaço das Funções Integráveis L^p	134
	Referências Bibliográficas	138

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar o problema (1). Para tal, utilizaremos o artigo [25] (Local solutions for hyperbolic equation), dos autores A. T. Lourêdo, M. Milla Miranda, M. R. Clark e H. R. Clark. Segundo [25], K. Jörgens estimulado por uma teoria não-linear de campos mésons introduzida por L. I. Schiff [43], em [14] e [15], iniciou uma cuidadosa pesquisa, de um ponto de vista matemático, de equações do tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + F'(|u|^2)u = 0. \quad (2)$$

Em particular, K. Jörgens em [15] provou a existência e unicidade de soluções para a equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \mu^2 u + \eta^2 |u|^2 u = 0 \quad \text{sobre } \Omega \times (0, \infty), \quad (3)$$

onde Ω é um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ . Esta equação é do tipo (2) quando;

$$F(s) = \mu^2 s + \frac{1}{2} \eta^2 s^2. \quad (4)$$

Motivado pelos trabalhos K. Jörgens [14] e [15], os autores J.L. Lions e W. A. Strauss em [44] iniciaram e desenvolveram um vasto campo de investigação em equações de evolução não lineares.

L.A. Medeiros e colaboradores em [32] provaram a existência e unicidade de soluções globais do seguinte problema hiperbólico não linear:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{sobre } \Omega, \end{array} \right. \quad (5)$$

onde $\rho > 1$ é uma constante real com restrições dadas por imersões contínuas em espaços de Sobolev e com valores iniciais u^0 e u^1 não possuindo restrições sobre suas normas.

Considerando que a fronteira Γ de Ω é constituída de duas partes disjuntas Γ_0 e Γ_1 ambas com medida positiva, tal que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, Mila Miranda e Medeiros estudaram em [33] a existência e unicidade de solução do problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u''(x, t) - \mu(t)\Delta u(x, t) = 0 & \text{sobre } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \mu(t)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta(x)u'(x, t) = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{sobre } \Omega, \end{array} \right. \quad (6)$$

onde $\nu(x)$ é o vetor unitário normal exterior sobre $x \in \Gamma_1$.

No caso em que $\mu > 0$ é constante, a existência e unicidade de soluções fortes globais para (6) foi mostrada por Komornik e Zuazua [16], Quin e Russel [39] aplicando a teoria de semigrupo. Como a condição de fronteira do problema (6) depende de $\mu(t)$, este método não funciona. Por esta razão M. Miranda e Medeiros [33] construíram uma base especial, de modo que o método de Galerkin funciona bem com esta base. Para uma exposição detalhada, ver [13].

A existência de soluções do problema (6) com condições de fronteira não linear foi conseguido, utilizando a teoria de operadores monótonos por Zuazua [16], Lasiecka e Tataru [17], utilizando o método de Galerkin por A. T. Lourêdo e Mila Miranda [26].

Motivados por (5) e (6), A. T. Lourêdo e colaboradores em [25] consideraram o seguinte problema hiperbólico não linear:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } \Omega \times (0, T_0), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T_0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h(\cdot, u') = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T_0), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{sobre } \Omega, \end{array} \right. \quad (7)$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2 , $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ é uma partição de Γ , ambas com medida positiva, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ e $h(x, s)$ (para $x \in \Gamma_1$ e $s \in \mathbb{R}$) uma função contínua e fortemente monótona em s .

Nesta dissertação, estudaremos a existência e unicidade de solução para o problema (7) como foi feito em [25]. A mesma encontra-se dividida em 5 capítulos. No Primeiro capítulo, apresentaremos um pouco da teoria das distribuições e dos espaços de Sobolev. Essas duas teorias são fundamentais para o nosso objetivo.

O segundo capítulo, ficou responsável pela teoria de traço. Essa teoria nos permite dar sentido a restrição $u|_\Gamma$ de uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ à fronteira Γ de Ω .

O terceiro e quarto capítulo são baseados no artigo [25], onde estudaremos o problema de existência de soluções locais para a equação hiperbólica (7). Para isto, restringimos a função h a dois casos, e a fim de usar imersões do tipo Sobolev, restringiremos também o número real $\rho > 1$. No terceiro capítulo, será tratado o caso em que $h(x, s) = \delta(x)p(s)$, onde p é uma função lipschitziana fortemente monótona e δ é uma função em $W^{1,\infty}(\Gamma_1)$ tal que $\delta(x) \geq \delta_0$, com $\delta_0 > 0$. No quarto capítulo, exigiremos apenas que $h(x, s)$ seja uma função contínua e fortemente monótona na variável s . Neste último caso, impomos que os dados iniciais pertençam a uma classe mais regular do que a exigida para o caso tratado no terceiro capítulo.

O quinto capítulo é um apêndice. O mesmo contém toda teoria matemática necessária para um bom entendimento das distribuições, dos espaços de Sobolev e da teoria de traço. Além disso, neste último capítulo, enunciaremos resultados clássicos que serão usados nos demais capítulos.

Capítulo 1

Distribuições e Espaços de Sobolev

Neste capítulo, apresentaremos os fatos mais relevantes a respeito da teoria das Distribuição de Schwartz e dos espaços de Sobolev. O matemático Russo Sergei Lvovich Sobolev, motivado pela seguinte igualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}^n} u'(x)\varphi(x)dx,$$

onde u é uma função integrável e φ uma função diferenciável que se anula fora de um conjunto compacto fixo K , define a noção de derivada fraca e considera classes de funções integráveis que possuem derivada no sentido fraco até certa ordem. Por sua vez, o matemático Laurent Schwartz apresenta a teoria das distribuições. Esses objetos matemáticos introduzido por Schwartz generalizam a noção de derivada pensada por Sobolev.

Este capítulo está dividido em cinco seções. Na primeira seção, apresentaremos o espaço das funções testes. Essa classe de funções tem fundamental importância na teoria das distribuições. Na segunda seção, definiremos o que se entende por distribuição e apresentaremos suas principais características. Na terceira seção, estudaremos um classe especial de distribuição que terá uma utilidade especial no decorrer do texto. A quarta seção ficou responsável por reunir os fatos mais relevantes a respeito dos importantes espaços de Sobolev. Por fim, na quinta seção, estudaremos a noção de distribuição vetorial, em particular, as funções vetoriais somáveis.

1.1 Espaço das Funções Testes

Nesta seção estudaremos uma topologia especial, a qual muniremos o conjunto das funções infinitamente diferenciável e com suporte compacto. Esta topologia é de fundamental importância para

definição de uma nova noção de derivada, a saber, a derivada distribucional.

Começamos introduzindo algumas terminologias que são utilizadas na teoria de distribuições. Chamaremos de multi-índice, qualquer n-upla ordenada de inteiros não-negativo. Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ associamos um operador diferencial,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{sendo,} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Para $|\alpha| = 0$, isto é, $\alpha = (0, \dots, 0)$, D^α é o operador identidade. Definimos também a potência $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Definição 1.1. Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, defina $\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \text{supp}(f) \subset K\}$.

Observação 1.1. Quando $K \subset \Omega$, $\mathcal{D}_K$ pode ser identificado com um subconjunto de $C^\infty(\Omega)$. Neste caso denotamos $\mathcal{D}_k := \mathcal{D}_k(\Omega)$.

Definiremos em $C^\infty(\Omega)$ uma topologia que o torna um espaço de Fréchet, e que o conjunto $\mathcal{D}_K(\Omega)$ seja um subconjunto fechado de $C^\infty(\Omega)$ (munido desta topologia), sempre que $K \subset \Omega$.

Com efeito, devido ao Teorema 5.2 (Vide, apêndice), podemos escolher uma sequência $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos compactos, tal que $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$ e $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Defina uma sequência de seminormas p_i sobre $C^\infty(\Omega)$, considerando

$$p_i(f) = \max\{|D^\alpha f(x)|; x \in K_i \text{ e } |\alpha| \leq i\}, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

A sequência de seminormas acima, define uma topologia $\mathcal{L}_0$, localmente convexa e metrizável sobre $C^\infty(\Omega)$. Além disso, para cada $x \in \Omega$, o funcional

$$\begin{aligned} \delta_x : C^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

é contínuo em $\mathcal{L}_0$.

Note que, $\mathcal{D}_k(\Omega)$ é a interseção dos núcleos destes funcionais, com x variando sobre o complementar de K . Isto é,

$$\mathcal{D}_k(\Omega) = \bigcap_{x \in \Omega/K} \ker(\delta_x).$$

Portanto, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ é fechado em $C^\infty(\Omega)$.

Por outro lado, podemos definir uma base local para $\mathcal{L}_0$ considerando a seguinte sequência de conjuntos:

$$B_i = \left\{ f \in C^\infty(\Omega); p_i(f) < \frac{1}{i} \right\}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Afirmamos que $C^\infty(\Omega)$ munido da topologia $\mathcal{L}_0$ é um espaço métrico completo. De fato, se $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^\infty(\Omega)$ e $l \in \mathbb{N}$ é um número natural fixo, então $f_i - f_j \in \beta_l$ para i e j suficientemente grande. Assim, $|D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < \frac{1}{l}$ sobre K_l , se $|\alpha| < l$. Daí, resulta que $(D^\alpha f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω para uma função g_α . Em particular, $D^0 f_i = f_i \rightarrow g_0$. Assim, $g_0 \in C^\infty(\Omega)$, $g_\alpha = D^\alpha g_0$ e $f_i \rightarrow g_0$ em $\mathcal{L}_0$.

Portanto $(C^\infty(\Omega), \mathcal{L}_0)$ é um espaço de Fréchet (ver Definição 5.34), tal que cada $\mathcal{D}_K(\Omega)$, com $K \subset \Omega$ é um subconjunto fechado.

Observação 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Observe que,*

$$\bigcup_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); \text{supp}(f) \text{ é um conjunto compacto de } \Omega\}.$$

Muniremos $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia especial que torna $C_0^\infty(\Omega)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo. Veremos que essa topologia possui boas propriedades de convergência e continuidade, apesar de não ser uma topologia métrica.

Defina a seguinte sequência de normas em $C_0^\infty(\Omega)$

$$\|\varphi\|_i = \max\{|D^\alpha \varphi(x)|; x \in \Omega \text{ e } |\alpha| \leq i\}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

As restrições destas normas sobre o subconjunto $\mathcal{D}_K(\Omega)$ (fixo), induz sobre o espaço $\mathcal{D}_K(\Omega)$ a mesma topologia induzida pelas semi-normas p_i definidas em (1.1). Com efeito, note que para cada K corresponde um inteiro i_0 tal que $K \subset K_i$ sempre que $i \geq i_0$. Assim, $\|\varphi\|_i = p_i(\varphi)$, se $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Como

$$\|\varphi\|_i \leq \|\varphi\|_{i+1} \quad \text{e} \quad p_i(\varphi) \leq p_{i+1}(\varphi), \quad \text{sempre que } i \geq i_0,$$

as topologias induzidas por qualquer sequência de semi-normas mantém-se inalteradas se considermos iniciando-se do índice i_0 . Estas duas topologias de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ coincidem. Portanto, temos a seguinte base local

$$B'_i = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_K; \|\varphi\|_i < \frac{1}{i} \right\}.$$

Denotemos esta topologia por τ_K .

As normas em (1.3) podem ser usadas para definir uma topologia métrica localmente convexa sobre $C_0^\infty(\Omega)$. No entanto, esta topologia apresenta a desvantagem de não ser completa.

A seguir, definiremos outra topologia localmente convexa em $C_0^\infty(\Omega)$, a qual denotaremos por $\mathcal{L}$. Esta topologia não é metrizável.

Definição 1.2. Definimos a topologia $\mathcal{L}$ do limite indutivo como sendo a coleção de todas as uniões de conjuntos da forma $\varphi + W = \{\varphi + \psi, \psi \in W\}$, com $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $W \in \beta$, onde

$$\beta = \{W \subset C_0^\infty(\Omega), W \text{ é convexo balanceado e } \mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K \text{ para todo compacto } K \subset \Omega\}.$$

Teorema 1.1. $\mathcal{L}$ é uma topologia sobre $C_0^\infty(\Omega)$ que o torna um espaço vetorial topológico localmente convexo e β é uma base local para $\mathcal{L}$.

Demonstração. Ver [41], página 152. □

Definição 1.3. Definimos o espaço das funções testes como sendo $C_0^\infty(\Omega)$ munido da topologia do limite indutivo $\mathcal{L}$, o qual denotamos simplesmente por $\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \mathcal{L})$.

Teorema 1.2. (a) Um conjunto convexo balanceado $U \in \mathcal{D}(\Omega)$ é aberto se, e somente se $U \in \beta$.

(b) A topologia τ_K coincide com a topologia de subespaço que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ induz sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

(c) Se E é um subconjunto limitado de $\mathcal{D}(\Omega)$, então $E \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ para algum $K \subset \Omega$, e existem números reais $M_i < \infty$ tal que

$$\|\varphi\|_i \leq M_i \quad \forall \varphi \in E \quad \text{e} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

(d) Se $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ para algum compacto $K \subset \Omega$, e

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|_l = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

(e) Se $\varphi_i \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que, $\text{supp}(\varphi_i) \subset K$ e a sequência $(D^\alpha \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero sobre K , qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$ e o multi-índice α .

(f) Em $\mathcal{D}(\Omega)$, toda sequência de Cauchy é convergente.

Demonstração. Ver [41], página 153. □

1.2 Distribuição

Na seção anterior, estudamos as principais características do espaço vetorial topológico $\mathcal{D}(\Omega)$, bem como a estrutura dos seus abertos. Nesta seção, estudaremos os funcionais lineares sobre $C_0^\infty(\Omega)$ que são contínuo com relação a topologia $\mathcal{L}$ do limite indutivo, isto é, funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

Iniciaremos definindo o que se entende por distribuição.

Definição 1.4. *Chama-se distribuição, todo funcional linear contínuo $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições.*

Teorema 1.3. *Sejam Y um espaço vetorial localmente convexo e $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$ uma aplicação linear. As seguintes condições são equivalentes*

- (a) T é contínuo;
- (b) T é limitado;
- (c) Se $\varphi_i \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então, $T(\varphi_i) \rightarrow 0$ em Y ;
- (b) Para cada Compacto $K \subset \Omega$, a restrição de T a $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ é contínua.

Demonstração. Ver [41], página 155. □

Teorema 1.4. *Seja $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. As seguintes condições são equivalentes*

- (a) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$;
- (b) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe um inteiro não negativo i e uma constante $C > 0$ tal que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_i \text{ para cada } \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Demonstração. Ver [41], página 156. □

Exemplo 1.1. *Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Então,*

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

é uma distribuição. De fato,

$$\begin{aligned}\langle T_u, \varphi_1 + \lambda \varphi_2 \rangle &= \int_{\Omega} u(x)(\varphi_1 + \lambda \varphi_2) dx = \int_{\Omega} u(x)\varphi_1(x) dx + \lambda \int_{\Omega} u(x)\varphi_2(x) dx \\ &= \langle T_u, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle T_u, \varphi_2 \rangle, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

o que prova a linearidade. Para mostrar a continuidade, usaremos a caracterização do Teorema 1.4. Com efeito, para cada compacto $K \subset \Omega$ temos,

$$\begin{aligned}|\langle T_u, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx = \int_K |u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \\ &\leq \left(\int_K |u(x)| dx \right) \cdot \max\{|\varphi(x)|; x \in \Omega\} \\ &= \left(\int_K |u(x)| dx \right) \cdot \|\varphi\|_0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).\end{aligned}$$

Exemplo 1.2. Munindo o espaço vetorial $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com a topologia fraca*, obtemos a seguinte imersão contínua $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Com efeito, define

$$\begin{aligned}T : L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto T_u.\end{aligned}$$

Segue do Exemplo 1.1 que T está bem definida e é linear. Além disso, T é injetiva. De fato, seja $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $T_u = T_v$, então para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos,

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} v(x)\varphi(x) dx$$

logo,

$$\int_{\Omega} [u(x) - v(x)]\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

e portanto, pelo Lema de Du Bois Raymond (Teorema 5.16), segue que $u = v$, q.t.p. em Ω . Assim, $u = v$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Por esta razão, identifica-se a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ com a distribuição T_u por ela definida e diz-se a distribuição u ao invés de T_u . Uma vez feita essa identificação, temos $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$.

Finalmente mostraremos que a imersão é contínua. Para isso, sejam $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset L^1_{loc}(\Omega)$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $u_i \rightarrow u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Daí, para cada compacto $K \subset \Omega$ e para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega} |u_i(x) - u(x)| dx < \varepsilon, \quad \text{sempre que } i \geq i_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\langle T_{u_i} - T_u, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} [u_i(x) - u(x)] \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |u_i(x) - u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |u_i(x) - u(x)| dx < \max_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $T_{u_i} \rightarrow T_u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Observação 1.3. Existem distribuições que não são definidas por funções localmente integráveis. De fato, para cada $x_0 \in \Omega$, defina

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Inicialmente mostraremos que δ_{x_0} é uma distribuição. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle \delta_{x_0}, \varphi_1 + \lambda \varphi_2 \rangle &= (\varphi_1 + \lambda \varphi_2)(x_0) = \varphi_1(x_0) + \lambda \varphi_2(x_0) \\ &= \langle \delta_{x_0}, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle \delta_{x_0}, \varphi_2 \rangle, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

provando a linearidade. Mostraremos à seguir a continuidade,

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Finalmente, mostremos que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função localmente integrável, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Suponha que exista. Dada uma $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ arbitrária, considere a aplicação $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$, definida por, $\xi(x) = \|x - x_0\| \phi(x)$. Pela hipótese de absurdo, temos

$$\int_{\Omega} u(x) \xi(x) dx = \xi(x_0)$$

isto é,

$$\int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\| \phi(x) dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

e, pelo Lema de du Bois Raymond segue que $\|x - x_0\| u(x) = 0$ q.t.p em Ω , logo $u = 0$ q.t.p. em Ω , e assim $\varphi(x_0) = 0$ qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ o que é um absurdo. Portanto, $L^1_{loc}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$.

A distribuição δ_{x_0} é chamada delta de Dirac concentrado no ponto x_0 .

Observação 1.4. *Existem seqüências de funções localmente integráveis que converge para uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas o seu limite T não pode ser definido por uma função localmente integrável. Com efeito, seja $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por*

$$\rho_\nu(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \leq 1. \end{cases}$$

Prova-se que a seqüência definida da seguinte maneira:

$$\rho_\nu(x) = \begin{cases} C\nu^n \exp\left(\frac{1}{\|\nu x\|^2 - 1}\right), & \text{se } \|x\| < \frac{1}{\nu} \\ 0, & \text{se } \|x\| \leq \frac{1}{\nu}, \end{cases}$$

onde $C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx\right)^{-1}$ está contida em $L^1_{loc}(\Omega)$, e $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \rho_\nu, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Isto é,

$$\rho_\nu \in L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \text{ e } \rho_\nu \rightarrow \delta_0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Observação 1.5. *De forma geral, para $1 \leq p \leq \infty$ temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad (1.4)$$

sendo cada inclusão densa na seguinte.

Definição 1.5. *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição e α um multi-índice arbitrário. A derivada $D^\alpha T$ de ordem α de T é definida pela seguinte expressão*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposição 1.1. *O operador diferencial D^α mapeia continuamente $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Observação 1.6. *Note que a fórmula $D^\alpha D^\beta T = D^{\alpha+\beta} T = D^\beta D^\alpha T$, qualquer que seja a distribuição T e os multi-índices α e β .*

Proposição 1.2. *A derivada de uma distribuição é uma distribuição.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice. Defina,

$$\begin{aligned} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Da proposição 1.1, segue que $D^\alpha T$ está bem definida. O fato de ser linear decorre de forma imediata da linearidade do operador derivada para funções infinitamente diferenciáveis. Provemos a continuidade.

Como $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para cada compacto $K \subset \Omega$ existe um número inteiro não negativo n_0 e uma constante real C tal que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{n_0}$ qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Logo,

$$|\langle D^\alpha T, \varphi \rangle| = |(-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle| = |\langle T, D^\alpha \varphi \rangle| \leq C \|D^\alpha \varphi\|_{n_0} \leq C \|\varphi\|_{n_0+|\alpha|}, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

uma vez que,

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \varphi\|_{n_0} &= \max_{x \in \Omega} \{|D^\beta(D^\alpha \varphi(x))|; |\beta| \leq n_0\} = \max_{x \in \Omega} \{|D^{\beta+\alpha} \varphi(x)|; |\beta| \leq n_0\} \\ &\leq \max_{x \in \Omega} \{|D^{\beta+\alpha} \varphi(x)|; |\beta + \alpha| \leq n_0 + |\alpha|\}. \end{aligned}$$

□

Observação 1.7. A proposição 1.2, garante que o operador D^α mapeia $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, se munirmos $\mathcal{D}'(\Omega)$ com a topologia fraca*, pode-se mostrar que o operador

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínuo.

Observação 1.8. A derivada de uma distribuição definida por uma função localmente integrável não é necessariamente identificada com uma função localmente integrável (Ver Exemplo 1.3 a seguir). Este fato motivará a definição de uma classe relevante de espaços de Banach, denominadas espaços de Sobolev.

Exemplo 1.3. Seja u a função Heaviside definida por

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Ela é localmente integrável, mas a sua derivada u' no sentido das distribuições não é localmente integrável. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= -1 \langle u, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi'(x) dx \\ &= - \lim_{t \rightarrow \infty} [\varphi(t) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Logo, $u' = \delta_0$ que não é uma distribuição definida por uma função localmente integrável como foi visto na Observação 1.3.

Observação 1.9. Observamos que, se $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$, para cada multi-índice $\alpha \leq |m|$, a derivada $D^\alpha u$ no sentido das distribuições é igual à derivada de u no sentido clássico, isto é, $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$. Com efeito, para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$, integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned}\langle T_{D^\alpha u}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_u, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha T_u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

A Definição 1.5, foi baseada na igualdade integral da fórmula de integração por partes.

1.3 Espaço de Schwartz e Distribuição Temperada

Na seção anterior estudamos as distribuições e definimos uma nova noção de derivada, a derivada distribucional. Nesta seção, definiremos transformada de Fourier, espaço de Schwartz e distribuição temperada. Esses conceitos são ferramentas relevantes para definição de uma nova classe de espaços de Hilbert, a saber, os espaços $H^s(\Omega)$, onde s é um número real não negativo.

Iniciaremos esta seção definindo a transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.6. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier de u , como sendo a seguinte função

$$\begin{aligned}\widehat{u} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} u(x) dx,\end{aligned}$$

onde $i^2 = -1$ e $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

A transformada de Fourier de uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ está bem definida. Com efeito,

$$|\widehat{u}(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} u(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \langle x, y \rangle}| \cdot |u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

No que segue, definimos o que entendemos por espaço de Schwartz.

Definição 1.7. O espaço de Schwartz ou espaço das funções rapidamente decrescente, que denotamos por $\mathcal{S}$, é o subespaço vetorial formado pelas funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^j D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

qualquer que sejam o inteiro não negativo j e o multi-índice α .

Exemplo 1.4. O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto do espaço de Schwartz. Com efeito, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$. Consideremos uma constante $r > 0$ tal qual $K \subset B_r(0)$. Assim, se ε é um número real positivo, j um inteiro não negativo e α um multi-índice arbitrário. Então

$$\|x\|^j |D^\alpha \varphi(x)| = 0 < \varepsilon, \text{ sempre que } \|x\| > r.$$

Logo,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^j D^\alpha \varphi(x) = 0, \text{ isto é, } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 1.10. São válidas as seguintes caracterizações:

- (a) $\varphi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \|x\|^j D^\alpha \varphi(x)$ é limitada em $\mathbb{R}^n$ quaisquer que sejam o inteiro não negativo j e o multi-índice α .
- (b) $\varphi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} [x^\alpha D^\beta \varphi(x)] = 0$ quaisquer que sejam os multi-índices α e β .

Ver [5], páginas 51 e 52.

Observação 1.11. Prova-se que o produto de funções em $\mathcal{S}$ pertence a $\mathcal{S}$. Além disso, $D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$ quaisquer que sejam a função $\varphi \in \mathcal{S}$ e o multi-índice α .

A seguir, introduziremos uma topologia em $\mathcal{S}$ que o torna um espaço de Fréchet. Defina a seguinte família de semi-normas sobre $\mathcal{S}$:

$$p_{m,j}(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^j |D^\alpha \varphi(x)|,$$

onde j e m são inteiros não negativos.

A caracterização (a) da Observação 1.10, garante que a família acima está bem definida. Esta família enumerável de semi-normas define uma topologia metrizável e localmente convexa em $\mathcal{S}$. Além disso, pode-se provar que o espaço $\mathcal{S}$ munido da topologia definida acima é completo (Ver [41], página 184). Assim, uma sequência de funções $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathcal{S}$ se, e somente se, $(1 + \|x\|^2)^j |D^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^n$, quaisquer que sejam o inteiro positivo j e o multi-índice α .

Sempre que mencionarmos o espaço de Schwartz, $\mathcal{S}$, fica subentendido que estamos munindo-o com a topologia descrita acima.

Proposição 1.3. *Se $1 \leq p \leq \infty$, então a imersão $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua. Para $1 \leq p < \infty$, temos que $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Ver [5], páginas 55 e 56. □

Proposição 1.4. *Seja $\varphi \in \mathcal{S}$. Então $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e o operador $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, definido por $\psi(\varphi) = \widehat{\varphi}$ é linear e contínuo.*

Demonstração. Ver [5], página 64. □

Teorema 1.5. (Plancherel) *Existe uma única bijeção isométrica*

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\mathcal{P}(\varphi) = \widehat{\varphi}$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Ver [5], página 68. □

Para uma exposição mais detalhadas das afirmações feitas nesta seção até o momento, ver [5], Capítulo 1, Seção 5 ou [29], Capítulo 1, Seção 3.

Observação 1.12. (Transformada de Fourier em L^2) *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, de Plancherel (Teorema 1.5), decorre que $\|\widehat{u}\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$. Por outro lado, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência de funções testes $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - u_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$. Logo, $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e portanto $(\widehat{u}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, podemos definir $\widehat{f} := \lim \widehat{u}_\nu$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

No que segue, definimos o que se entende por distribuição temperada.

Definição 1.8. *Uma distribuição temperada é uma funcional linear e contínuo $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre o espaço de Schwartz. O conjunto das distribuições temperadas munido da topologia fraca* é denotado por $\mathcal{S}'$.*

Exemplo 1.5. *Qualquer função $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ onde, $1 \leq p \leq \infty$, define uma distribuição temperada. De fato, considere*

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Se $1 < p < \infty$, seja q um número real tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para cada $j > \frac{n}{2q}$, temos

$$(1 + \|x\|^2)^{-j} \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Logo, pela desigualdade de Hölder para funções em L^p ,

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^j |\varphi(x)| \cdot |u(x)| \cdot (1 + \|x\|^2)^{-j} dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + \|x\|^2)^j \cdot \varphi(x)| \cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|(1 + \|x\|^2)^{-j}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima, segue que, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ e $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$, então $\langle T_u, \varphi_\nu \rangle \rightarrow 0$, o que prova que $T_u \in \mathcal{S}'$. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} T : L^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}' \\ u &\longmapsto T_u \end{aligned}$$

é linear contínua e injetora. Mostraremos apenas a continuidade.

Se $p = 1$, então

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

No caso em que $p = \infty$. Para $j > \frac{n}{2}$ temos,

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + \|x\|^2)^j \cdot \varphi(x)| \cdot \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|(1 + \|x\|^2)^{-j}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Da Proposição 1.3 e do exposto acima, temos

$$\mathcal{S} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}', \quad \text{para } 1 \leq p \leq \infty.$$

Para maiores detalhes sobre distribuições temperadas vide, [5], Capítulo 1, Seção 6 ou [29], Capítulo 1, Seção 3.

1.4 Espaços de Sobolev

O matemático russo Sergei Lvovich Sobolev, definiu uma noção de derivada para funções integráveis da seguinte maneira:

Uma função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivada fraca se, e somente se, existem funções $g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} = - \int_{\Omega} g_j(x) \varphi(x) dx.$$

Essa noção de derivada coincide com a descrita na Definição 1.5, no caso em que consideramos funções localmente integráveis. Na seção 1.2, vimos que uma função em $L^p(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições e que essas derivadas não são necessariamente uma função em $L^p(\Omega)$. Por exemplo, uma função localmente integrável pode não possuir derivada fraca em $L^1_{loc}(\Omega)$ (ver Exemplo 1.3).

Nesta seção, estudaremos a coleção das funções $L^p(\Omega)$ tais que suas derivadas distribucionais são funções em $L^p(\Omega)$. Essa coleção define um importante espaço de Banach denominado por espaço de Sobolev. Além disso, definiremos o espaço dual de um subconjunto dos espaços de Sobolev, o qual possui restrições de seus elementos, imersas continuamente no espaço das distribuições. Por fim, enunciaremos importantes resultados de imersões e definiremos os relevantes espaços de Sobolev Fracionário, $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, m um inteiro não negativo e p um número real estendido tal que $1 \leq p \leq \infty$. Definimos por espaço de Sobolev (denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$), o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$, isto é,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), e |\alpha| \leq m\}.$$

Para $1 \leq p < \infty$, define

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Para $p = \infty$,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} : W^{m,\infty}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

A função definida acima define uma norma para o espaço de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, tal que $1 \leq p \leq \infty$. Mostraremos esta afirmação apenas para o caso em que $1 \leq p < \infty$.

É fácil ver que $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \geq 0$ para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e que $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Também é de verificação imediata que $\|\lambda u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = |\lambda| \cdot \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Provemos a desigualdade triangular. Com efeito, pela desigualdade

de Minkowski (Proposição 5.26) para funções em L^p e para números reais, temos

$$\begin{aligned}\|u + v\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(u + v)\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} [\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Proposição 1.5. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma definida acima é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{m,p}(\Omega)$. Provemos que $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para uma função $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Com efeito, como $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é Cauchy, dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_\nu - u_\mu\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p < \varepsilon, \quad \text{sempre que } \nu, \mu \geq \nu_0.$$

Portanto, para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq m$, temos

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_\mu\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_\mu\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &= \|u_\nu - u_\mu\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p < \varepsilon, \quad \text{sempre que } \nu, \mu \geq \nu_0,\end{aligned}$$

e, portanto, $(D^\alpha u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como o espaço $L^p(\Omega)$ é completo, para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$, existe uma função $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_\nu \rightarrow u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$.

Note que, $D^\alpha u_0 = u_\alpha$ para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$. Com efeito, como vimos acima, $D^\alpha u_\nu \rightarrow u_\alpha$ em $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, em particular, $D^0 u_\nu = u_\nu \rightarrow u_0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Assim, $D^\alpha u_\nu \rightarrow u_\alpha$ e, pela continuidade do operador derivada, $D^\alpha u_\nu \rightarrow D^\alpha u_0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Portanto, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(\Omega)$, segue que $D^\alpha u_0 = u_\alpha$.

Afirmamos que $u_\nu \rightarrow u_0$ em $W^{m,p}(\Omega)$. De fato, dado um número real $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\nu_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_0\|_{L^p(\Omega)}^p < \frac{\varepsilon}{\sum_{|\alpha| \leq m} 1}, \quad \text{sempre que } \nu \geq \nu_\alpha.$$

Portanto,

$$\|D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_0\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_0\|_{L^p(\Omega)}^p < \varepsilon, \quad \text{sempre que } \nu \geq \max_{|\alpha| \leq m} \{\nu_\alpha\}.$$

Logo, $u_\nu \rightarrow u_0$ em $W^{m,p}(\Omega)$, e portanto, segue o afirmado.

□

Observação 1.13. No caso particular em que $p = 2$, escrevemos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno dado por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

Observação 1.14. Quando $m = 0$ tem-se $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$.

Observação 1.15. $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$. Com efeito, defina

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \\ \varphi &\longmapsto \varphi. \end{aligned}$$

Por definição, T é linear. Mostraremos que T é contínua. Seja $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi_\nu \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ e $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0$ uniformemente em K , qualquer que seja o multi-índice α . Portanto, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\nu_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$|D^\alpha \varphi_\nu(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in K, \text{ sempre que } n \geq \nu_\alpha.$$

Assim, para $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\|\varphi_\nu\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (\varepsilon \cdot \text{med}(K))^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

sempre que $n \geq \max\{\nu_\alpha\}$ (Ver Teorema 1.3).

Quando $p = \infty$, o resultado segue de maneira análoga.

Observação 1.16. Combinando a Proposição 5.32 (Vide Apêndice) com a Observação 1.15, temos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$. Além disso, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, uma vez que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Definição 1.10. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, m um inteiro não negativo, p um número real estendido tal que $1 \leq p \leq \infty$ e um número real estendido $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Defina,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$.

Além disso, representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico forte $[W_0^{m,p}(\Omega)]'$ de $W_0^{m,p}(\Omega)$ (topologia induzida pela norma de $W^{m,p}(\Omega)$). O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.6. *Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ possui suporte compacto contido em Ω , então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [5], página 84. □

Observação 1.17. *Observamos que para $1 \leq p < \infty$, temos $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega) = W_0^{0,p}(\Omega)$, uma vez que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ quando $1 \leq p < \infty$ (ver apêndice, Proposição 5.32). Além disso, $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.*

Teorema 1.6. *O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é separável, para $1 \leq p < \infty$. Se $1 < p < \infty$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver apêndice, Observação 5.13, e a referência [5], página 92. □

Proposição 1.7. *Seja $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções testes tal que $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Então $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Como $\varphi_\nu \rightarrow 0$ existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ qualquer que seja $\nu \in \mathbb{N}$. Além disso, $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0$ uniformemente em K quaisquer que seja o natural ν e o multi-índice α . Logo,

$$\begin{aligned} \|\varphi_\nu\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi_\nu(x)\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p dx \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p \cdot \text{med}(K). \end{aligned}$$

Como para cada $\nu \in \mathbb{N}$ e cada multi-índice α , $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0$ uniformemente em K , segue que $\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p \rightarrow 0$, logo $\|\varphi_\nu\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p \rightarrow 0$. Isto é, $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $W^{m,p}(\Omega)$. □

Corolário 1.7. *Se $T \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $T|_{\mathcal{D}(u)} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma distribuição.*

Demonstração. Seja $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções testes tal que $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Da Proposição 1.7, segue que $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Portanto $\langle T, \varphi_\nu \rangle \rightarrow 0$, logo $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. □

Proposição 1.8. *A aplicação,*

$$\begin{aligned}\Upsilon : W^{-m,q}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto T|_{\mathcal{D}(\Omega)}\end{aligned}$$

é linear injetiva e contínua.

Demonstração. A linearidade é de fácil verificação. Mostremos a injetividade. Sejam $T_1, T_2 \in W^{-m,q}(\Omega)$ tal que $\Upsilon(T_1) = \Upsilon(T_2)$, isto é, $(T_1)|_{\mathcal{D}(\Omega)} = (T_2)|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Então dado $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ existe uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \rightarrow u$ em $W^{m,p}(\Omega)$, e, pelo fato de $\langle T_1, \varphi_\nu \rangle = \langle T_2, \varphi_\nu \rangle$, tem-se

$$\lim \langle T_1, \varphi_\nu \rangle = \langle T_1, u \rangle = \langle T_2, u \rangle = \lim \langle T_2, \varphi_\nu \rangle = \langle T_2, u \rangle.$$

Logo, $T_1 = T_2$, o que prova a injetividade da Υ . Resta mostrar a continuidade.

Seja $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset W^{-m,q}(\Omega)$ uma sequência tal que $T_\nu \rightarrow 0$ em $W^{-m,q}(\Omega)$. Assim, a sequência de números reais,

$$\|T_\nu\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{u \in W_0^{m,p}(\Omega)/\{0\}} \frac{|\langle T_\nu, u \rangle|}{\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}},$$

tende para zero. Portanto, $\langle T_\nu, u \rangle \rightarrow 0$ para cada $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Em particular, para cada função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

Devido a Proposição 1.8, temos

$$W^{-m,q}(\Omega)|_{\mathcal{D}(\Omega)} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

onde $W^{-m,q}(\Omega)|_{\mathcal{D}(\Omega)} = \{T|_{\mathcal{D}(\Omega)}; T \in W^{-m,q}(\Omega)\}$.

Observação 1.18. *Sempre que mencionarmos a distribuição $T \in W^{-m,q}(\Omega)$, fica subentendido que estamos considerando a restrição $T|_{\mathcal{D}(\Omega)}$.*

Para finalizar a seção, enunciaremos alguns resultados importantes de imersões de Sobolev.

Proposição 1.9. *(Desigualdade de Sobolev) Seja p um número real tal que $1 \leq p < n$. Então, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se:*

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n} \frac{(n-1)p}{n-p} \sum_{j=1}^n \|D_j \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Demonstração. Ver [5] página 132. □

Definição 1.11. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda \leq 1$. Consideramos o seguinte espaço vetorial:*

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}); \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda} < \infty \right\},$$

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{u|_{\overline{\Omega}}; u \in C^k(\mathbb{R}^n)\}.$$

A função definida por $\|u\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda}$, para todo $u \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ é uma norma em $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.

O espaço $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ munido da norma definida acima e das operações usuais de funções, formam um espaço de Banach. Esse espaço é usualmente chamado de espaço das funções Hölder contínuas. O espaço $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ é chamado espaço das funções lipschitziana.

Proposição 1.10. *O espaço das funções Hölder contínuas, $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ é Banach.*

Demonstração. Ver [9], página 241 ou [8], página 15. □

Teorema 1.8. (Imersões de Sobolev) *Seja $m \in \mathbb{N}$.*

(a) *Se $mp < n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.*

(b) *Se $mp = n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $q \in [p, +\infty)$.*

(c) *Se $mp > n$ e k é um número natural tal que $k < m - \frac{m}{p} \leq k + 1$. Então,*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n),$$

onde $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p}$, se $m - k - \frac{n}{p} < 1$, e, $0 < \lambda < 1$, se caso $m - k - \frac{n}{p} = 1$.

Demonstração. Ver [5], páginas 146, 152 e 166. □

No que segue, definiremos uma importante classe de espaços de Hilbert, a saber, os espaços de Sobolev Fracionários $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.9. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos:*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, a função $((\cdot, \cdot))_m : H^m(\mathbb{R}^n) \times H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$((u, v))_m = ((1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}, (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx, \quad \forall u, v \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

é um produto interno sobre $H^m(\mathbb{R}^n)$ tal qual a norma por ele induzida é equivalente a norma $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ usual do espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [5], página 242. □

Motivados pelo teorema anterior, se define as seguintes classes:

Definição 1.12. Para cada $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \geq 0$ defina,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}' ; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Proposição 1.11. O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ munido do produto interno definido por,

$$((u, v))_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx, \quad \forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Ver [5], página 245. □

Observação 1.19. Temos a seguinte imersão contínua: $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver [5], página 245).

Proposição 1.12. Sejam s um número real não negativo e um multi-índice α tal que $|\alpha| \leq s$. A aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto D^\alpha u \end{aligned}$$

é linear e contínua.

Demonstração. Ver [5], página 252. □

Definição 1.13. Para cada número real não negativo s , denotaremos o dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$, por

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = [H^s(\mathbb{R}^n)]'.$$

Proposição 1.13. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

$$H^{-s} = \{f \in \mathcal{S}'; (1 + \|x\|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \text{ e}$$

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{-s} |\widehat{f}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [5], página 254. □

1.5 Distribuição Vetorial

Nesta seção, definiremos a importante noção de distribuição vetorial. Estudaremos uma relevante classe de funções vetoriais, a saber, o espaço $L^p(0, T; X)$. O mesmo é ambiente natural das funções utilizadas nos problemas de evolução, onde consideramos funções u , com duas variáveis (tempo, t e posição, x) tais que, a função $t \rightarrow \|u(t)\|$ (onde, $[u(t)](x) = u(x, t)$) seja integrável. Além disso, veremos que as funções em $L^p(0, T; X)$, definem distribuições vetoriais e enunciaremos resultados sobre esses espaços, que serão usados nos Capítulos 3 e 4.

Começamos estendendo as noções de mensurabilidade e integrabilidade para funções vetoriais. Seja X um espaço de Banach e Y um espaço de medida. Existe uma noção de integral para funções definidas em Y e tomando valores em X . Esta integral é chamada integral de Bochner. Para uma exposição completa deste assunto ver, Yosida [46], capítulo 5. Nos limitaremos a estudar o caso em que $Y = [0, T]$. Isto é, funções do tipo $f : [0, T] \rightarrow X$, onde T é um número real positivo e X é um espaço de Banach.

Definição 1.14. *Uma função $\varphi : [0, T] \rightarrow X$, sendo X um espaço de Banach, é dita simples quando seu conjunto imagem tem apenas um número finito de elementos. Neste caso, podemos escrever:*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^m \chi_{E_j}(t) u_j,$$

onde cada E_j é um subconjunto Lebesgue mensurável de $[0, T]$ e cada $u_j \in X$.

Definição 1.15. *Sejam X um espaço de Banach e $f : [0, T] \rightarrow X$ uma função vetorial.*

- (a) *f é dita fortemente mensurável, quando existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de $[0, T]$ em X , tal que $\varphi_n(t) \rightarrow f(t)$, q.t.p. em $[0, T]$.*

(b) f é dita fracamente mensurável, quando para cada $\Psi \in X'$, a aplicação $t \longrightarrow \langle \Psi, f(t) \rangle$ é Lebesgue mensurável.

Definição 1.16. *Seja X um espaço de Banach.*

(a) Se $\varphi(t) = \sum_{j=1}^m \chi_{E_j}(t)u_j$ é uma função vetorial simples, definimos

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \sum_{j=1}^m \text{med}(E_j)u_j.$$

(b) Dizemos que uma função vetorial $f : [0, T] \longrightarrow X$ é somável, se existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\int_0^T \|\varphi_n(t) - f(t)\|dt \rightarrow 0.$$

Neste caso, escrevemos

$$\int_0^T f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t)dt.$$

(c) Se $T_0 \in [0, T]$, definimos

$$\int_0^{T_0} f(t)dt = \int_0^T f(t)\chi_{[0, T_0]}(t)dt.$$

Teorema 1.10. (Bochner) *Uma função fortemente mensurável $f : [0, T] \longrightarrow X$ é somável se, e somente se, a aplicação $t \longmapsto \|f(t)\|$ é somável. Neste caso,*

$$\left\| \int_0^T f(t)dt \right\| \leq \int_0^T \|f(t)\|dt.$$

Além disso, para cada $\Psi \in X'$, tem-se

$$\left\langle \Psi, \int_0^T f(t)dt \right\rangle = \int_0^T \langle \Psi, f(t) \rangle dt.$$

Demonstração. Ver Evans [9], página 650. □

A seguir, definiremos os espaços que representam o ambiente natural das soluções do problema proposto na Introdução. Mais geralmente, das soluções das EDP's que representam fenômenos evolutivos.

Definição 1.17. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Denota-se por $L^p(0, T; X)$ o espaço vetorial das (classes de) funções $f : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis, tais que a função, $t \mapsto \|u(t)\| \in L^p((0, T))$.*

Munimos o espaço vetorial $L^p(0, T; X)$ com a norma definida por

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(0, T; X) \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_X, \quad f \in L^\infty(0, T; X).$$

Definição 1.18. *Seja X um espaço de Banach. Denota-se por $C([0, T]; X)$, o espaço das funções contínuas $f : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme, definida por*

$$\|f\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_X, \quad \forall f \in C([0, T]; X).$$

Proposição 1.14. *Os espaços vetoriais $L^p(0, T; X)$ e $C([0, T]; X)$ são Banach. Além disso, $C([0, T]; X)$ é denso em $L^p(0, T; X)$.*

Demonstração. Ver [47], página 407. □

Corolário 1.11. *Seja X um espaço de Hilbert. Então o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno definido por*

$$((f, g))_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T ((f(t), g(t)))_X dt, \quad \forall f, g \in L^2(0, T; X).$$

Demonstração. Ver [47], página 407. □

Proposição 1.15. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^p(0, T; Y)$ para todo $1 \leq p \leq r \leq \infty$.*

Demonstração. Ver [47], página 407. □

Proposição 1.16. *Seja X um espaço de Banach separável e $1 \leq p < \infty$. Então $L^p(0, T; X)$ é separável. Se X é reflexivo e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [47], página 407. □

Teorema 1.12. *Seja X um espaço reflexivo e separável. Então $[L^p(0, T; X)]' = L^q(0, T; X')$, onde $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Além disso, $[L^1(0, T; X)]' = L^\infty(0, T; X)$.*

Demonstração. Ver [47], página 411. □

Definição 1.19. *Seja $f \in L^1(0, T; X)$. Dizemos que um vetor $g \in L^1(0, T; X)$ é a derivada fraca de f , e escrevemos $g = f'$ quando*

$$\int_0^T \varphi'(t) f(t) dt = - \int_0^T \varphi(t) g(t) dt,$$

para toda função teste $\varphi \in D((0, T))$.

Observação 1.20. *Observamos que, do conhecido teorema de Fubini-Tonelli (ver Folland, [10], página 67), se obtém a seguinte identificação:*

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) \equiv L^p(\Sigma), \text{ onde } \Sigma = \Omega \times (0, T) \text{ e } 1 \leq p < \infty.$$

Definição 1.20. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev vetorial $W^{m,p}(0, T; X)$ da seguinte forma:*

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{f \in L^p(0, T; X); f' \text{ existe e } f' \in L^p(0, T; X)\},$$

munido da norma definida por

$$\|f\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p + \|f'(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in W^{1,p}(0, T; X) \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} (\|f(t)\|_X + \|f'(t)\|_X), \quad f \in W^{1,\infty}(0, T; X).$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H^1(0, T; X) := W^{1,2}(0, T; X)$.

Observação 1.21. *Os espaços $W^{m,p}(0, T; X)$ são Banach (Ver [47], página 422).*

Teorema 1.13. *Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$. Então o espaço vetorial $W^{1,1}(0, T, X, Y) := \{f \in L^1(0, T; X); f' \in L^1(0, T; Y)\} \hookrightarrow C^0([0, T]; Y)$.*

Demonstração. Ver Medeiros [31], página 11. □

Corolário 1.14. *Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$. Então quaisquer que sejam $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, tem-se $W = \{f \in L^{p_0}(0, T; X); f' \in L^{p_1}(0, T; Y)\} \hookrightarrow C^0([0, T]; Y)$.*

Demonstração. Decorre do Teorema 1.13 combinado com a Proposição 1.15. □

Proposição 1.17. (Lema de Lions) *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis, limitada em $L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$), e que converge para uma função f , q.t.p. em Ω . Então:*

(a) $f_n \rightarrow f$ em $L^r(\Omega)$ para todo número r , tal que $1 \leq r < q$.

(b) $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver Medeiros [31], página 32. □

Teorema 1.15. (*Aubin-Lions*) *Sejam X, Y e Z espaços de Banach tais que:*

(a) Y e Z são reflexivos.

(b) $Y \xhookrightarrow{comp} X$ e $X \hookrightarrow Z$.

Sejam p_0 e p_1 números reais tais que $1 < p_0 \leq \infty$ e $1 \leq p_1 < \infty$. Então

$$W = W^{p_0, p_1}(0, T; Y; Z) := \{f \in L^{p_0}(0, T; Y); f' \in L^{p_1}(0, T; Z)\}$$

munido da norma definida por

$$\|f\|_W = \|f\|_{L^{p_0}(0, T; Y)} + \|f'\|_{L^{p_1}(0, T; Z)} \quad \forall f \in W$$

é um espaço de Banach e $W \xhookrightarrow{comp} L^{p_0}(0, T; X)$.

Demonstração. Ver Lions [21] ou Temam [45]. □

Definição 1.21. *Sejam X um espaço de Banach e T um número real positivo. Definimos o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X por*

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \{T : \mathcal{D}((0, T)) \rightarrow X; T \text{ é linear e contínua}\}$$

Observação 1.22. *Notação: $\mathcal{D}(0, T) := \mathcal{D}((0, T))$ e $L^p(0, T) := L^p((0, T))$.*

Exemplo 1.6. *Fixe $f \in L^p(0, T; X)$ e defina,*

$$\begin{aligned} \Psi_f : \mathcal{D}(0, T) &\longrightarrow X \\ \varphi &\longmapsto \int_0^T f(t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

Ψ_f é uma distribuição vetorial. A verificação desse fato é análoga a que foi feita no Exemplo 1.1. Provaremos apenas a continuidade.

Como X é localmente convexo (Exemplo 5.9), usaremos a caracterização do item (c) do Teorema 1.3. Seja $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(0, T)$ tal que $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(0, T)$. Então,

$$\begin{aligned} \|\langle \Psi_f, \varphi_\nu \rangle\|_X &= \left\| \int_0^T \varphi_\nu(t) f(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X \cdot |\varphi_\nu(t)| dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T |\varphi_\nu(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Como $\varphi_\nu \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(0, T)$, temos que $\left(\int_0^T |\varphi_\nu(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0$, e portanto $\|\langle \Psi_f, \varphi_\nu \rangle\|_X \rightarrow 0$.

Observação 1.23. A aplicação $f \mapsto \Psi_f$ é linear, contínua e injetiva. Assim, temos a seguinte imersão: $L^p(0, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.22. Seja $\Psi \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ uma distribuição. A derivada $\frac{d^n \Psi}{dt^n}$ de ordem n de Ψ é definida pela seguinte expressão

$$\left\langle \frac{d^n \Psi}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle \Psi, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Proposição 1.18. Sejam H e X espaços de Hilbert. Se uma função $f \in L^2(0, T, H)$ e sua derivada fraca $f' \in L^2(0, T; H')$, então existe uma função $g : (0, T) \rightarrow X$ contínua tal que $f(t) = g(t)$, q.t.p em $(0, T)$. além disso, no sentido das distribuições em $(0, T)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} |f(t)|_H^2 = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; X).$$

A igualdade acima está bem definida, desde que as funções

$$t \mapsto \|f(t)\|_H \quad \text{e} \quad t \mapsto \langle f'(t), f(t) \rangle$$

sejam ambas integráveis em $(0, T)$.

Demonstração. Ver Temam [45], página 261. □

No que segue, enunciaremos resultados que serão usados nos Capítulos 3 e 4.

Definição 1.23. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $[0, T] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $t \in [0, T]$, definimos

$$\begin{aligned} f(t) &:= f(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, t). \end{aligned}$$

De maneira análoga, para cada $x \in \Omega$ definamos

$$\begin{aligned} f(x) &:= f(x, \cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x, t). \end{aligned}$$

Definição 1.24. Dizemos que $f : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre $\Omega \times [0, T]$ se:

1. A função $f(x)$ é mensurável em $[0, T]$ para cada x fixo em Ω ;
2. A função $f(t)$ é contínua em Ω para cada t fixo em $[0, T]$;
3. Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrável, tal que

$$\|f(x, t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \quad \forall (x, t) \in K \times [0, T].$$

Teorema 1.16. (Teorema de Carathéodory) Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Seja $f : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $\Omega \times [0, T]$. Então, existe uma solução $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.5) sobre algum intervalo $I = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \beta\}$, onde $\beta > 0$ é uma constante positiva.

Demonstração. Para demonstração ver [27], página 42 ou [6], página 42. □

Teorema 1.17. (Teorema do Prolongamento) Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq b\}$, onde $b > 0$ é uma constante positiva e $\|\cdot\|$ a norma euclidiana do espaço $\mathbb{R}^n$. Suponha que $f : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função que satisfaz as duas primeiras condições do teorema de Carathéodory e que exista uma função $m : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ em $L(0, T)$ tal que

$$|f(x, t)| \leq m(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Seja $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de (1.5), satisfazendo $|x(t)| \leq M$, M independente de I e $M < b$ para todo $t \in I$. Então, x pode ser prolongada à todo intervalo $[0, T]$.

Demonstração. Para demonstração ver [6], página 45. □

Teorema 1.18. (*Desigualdade de Gronwall*) Sejam $c \geq 0$ uma constante não negativa, $u \geq 0$, q.t.p. em $(0, T)$ uma função integrável em $(0, T)$ e $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa tal que

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t u(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Então,

$$\varphi(t) \leq ce^{\int_0^t u(\tau)d\tau}, \forall t \in [0, T].$$

Demonstração. Para demonstração ver [34], página 36. □

Teorema 1.19. (*Agmon-Douglis-Nirenberg*) Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado regular de classe C^2 com fronteira Γ . Seja p um número real tal que $1 < p < \infty$. Então para todo $T \in L^p(\Omega)$, existe uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ da equação:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, então $u \in W^{m+2,p}(\Omega)$ e existe uma contante real $K > 0$ tal que $\|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq K \cdot \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Demonstração. Ver [3] página 316. □

Capítulo 2

Teoria de Traço

Dos cursos básico de análise, sabe-se que toda função contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pode ser estendida para uma única função contínua $\tilde{u} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, podemos considerar o valor da função u em um ponto x_0 pertencente a fronteira Γ de Ω como sendo $\tilde{u}(x_0)$. Além disso, definimos $u|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo definida por $u|_{\Gamma}(x) = \tilde{u}(x)$, para cada $x \in \Gamma$. Como no estudo das EDP's, lidamos com condições de contorno e a maior parte das soluções não são funções contínuas, precisamos dar um significado para o valor da solução na fronteira do seu domínio. Para isto, será necessário introduzir uma teoria que o justifique, a saber, a teoria de traço.

Este capítulo tem como objetivo definir a aplicação traço e enunciar os importantes teoremas de traço. Esses resultados permitem dar sentido a restrição $u|_{\Gamma}$ de uma função u definida em um aberto limitado regular Ω à sua fronteira Γ em certo espaço (de classe) de funções que não temos necessariamente o resultado de extensão citado acima. O mesmo está dividido em três seções. Na primeira seção, definiremos o que se entende por conjunto aberto regular e enfatizaremos os principais elementos geométricos gerados por essa definição. A segunda seção será responsável por definir os famosos espaços de Hilbert $H^s(\Gamma)$, onde Γ é a fronteira de um aberto limitado regular, Ω . Na terceira seção, definiremos o que se entende por aplicação traço, enunciaremos os resultados sobre essas aplicações denominados teoremas de traços e generalizaremos as fórmulas de Green.

2.1 Conjunto Aberto Regular

Nesta seção, definiremos uma certa condição de compatibilidade para o aberto Ω que nos permitirá definir um operador de prolongamento que tem como função transferir imersões contínuas que tínhamos entre os espaços $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ (devido o teorema de Sobolev) para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

Definição 2.1. Seja Ω um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$. Uma cobertura $\mathcal{A}$ de Ω é dita localmente finita se dado $x \in \Omega$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de x tal qual há apenas um número finito de elementos $U \in \mathcal{A}$ que intersectam $\mathcal{V}$.

Proposição 2.1. (Partição da Unidade) Seja $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável localmente finita de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então existe uma família $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de funções $C^k(\Omega)$, tal que

(a) Para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1, \forall x \in \Omega$.

(b) $\text{supp}(\varphi_j) \subset U_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

(c) $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$, para cada $x \in \Omega$.

Demonstração. Ver [5]. página 433. □

Definição 2.2. A família de funções $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ definidas na proposição anterior é denominada uma partição C^k da unidade subordinada a cobertura $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Definição 2.3. Diremos que um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é regular se sua fronteira é uma variedade de classe C^k e dimensão $n - 1$, Ω estando do mesmo lado de Γ . Isto é, para cada ponto $x_0 \in \Gamma$ existe um número real $r > 0$ e uma função de classe C^k , $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in B(x_0, r); x_n > \varphi_{x_0}(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado regular e Q o retângulo aberto:

$$Q = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; 0 < y_j < 1 \text{ para } j = 1, \dots, n-1, \text{ e } -1 < y_n < 1\}.$$

Sejam Q^+ e Q^- os quadrados abertos:

$$Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\}, \quad Q^- = Q \cap \{y_n < 0\}$$

e Σ , a hipersuperfície:

$$\Sigma = Q \cap \{y_n = 0\}$$

Se Consideramos um ponto $x \in \Gamma$, então existem uma vizinhança aberta limitada U_x em $\mathbb{R}^n$ do ponto x , e uma aplicação $\varphi_x : U_x \rightarrow Q$ tal que:

- (a) φ_x é uma bijeção de U_x sobre Q .
- (b) φ_x e φ_x^{-1} possuem derivadas parciais contínuas até a ordem k .
- (c) $\varphi_x(U_x \cap \Omega) = Q^+$, $\varphi_x(U_x \cap \mathbb{R}^n / \overline{\Omega}) = Q^-$, $\varphi_x(U_x \cap \Gamma) = \Sigma$.

As duas primeiras condições acima, expressam que a aplicação $\varphi_x : U_x \longrightarrow Q$ é um difeomorfismo de classe C^k . Além disso, temos também a seguinte condição de compatibilidade:

- (d) Sejam (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) satisfazendo as condições (a), (b), (c) e, tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Então existe um homeomorfismo diferenciável J_{12} de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ sobre $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$, com jacobiano positivo, tal que $\varphi_2(x) = J_{1,2}(\varphi_1(x))$, para todo $x \in U_1 \cap U_2$.

As condições acima são consequências direta da definição de aberto regular para Ω

Definição 2.4. *Seja Ω um aberto limitado regular com fronteira Γ . Diremos que a família $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in \lambda}$ é um sistema de cartas locais para a sua fronteira se:*

- (1) $\Gamma \subset \bigcup_{j \in \lambda} U_j$.
- (2) Para cada $j \in \lambda$, o par (U_j, φ_j) satisfaz as condições (a), (b), e (c) acima.
- (3) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então os pares (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) satisfazem a condição de compatibilidade dada em (d).

Notemos que, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado regular, sua fronteira Γ é um compacto de $\mathbb{R}^n$ e, por conseguinte, existirá um sistema finito de cartas locais $\{(U_j, \varphi_j)\}_{1 \leq j \leq m}$ para a fronteira Γ de Ω . De posse destas cartas locais, construímos uma partição C^k da unidade subordinada à cobertura aberta $\{U_j\}_{0 \leq j \leq m}$, onde $U_0 = \Omega$, do aberto $\left(\bigcup_{j=0}^m U_j\right) = \left(\bigcup_{j=1}^m U_j\right) \cup \Omega$ que contém $\overline{\Omega}$.

Denotaremos por $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ as funções desta partição. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \theta_j &\in C_0^k, \quad \forall j = 0, 1, \dots, m. \\
 \text{supp}(\theta_0) &\subset \Omega, \quad \text{supp}(\theta_j) \subset U_j, \quad \forall j = 1, \dots, m. \\
 0 &\leq \theta_j \leq 1, \quad \forall j = 0, \dots, m. \\
 \sum_{j=0}^m \theta_j(x) &= 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.
 \end{aligned}$$

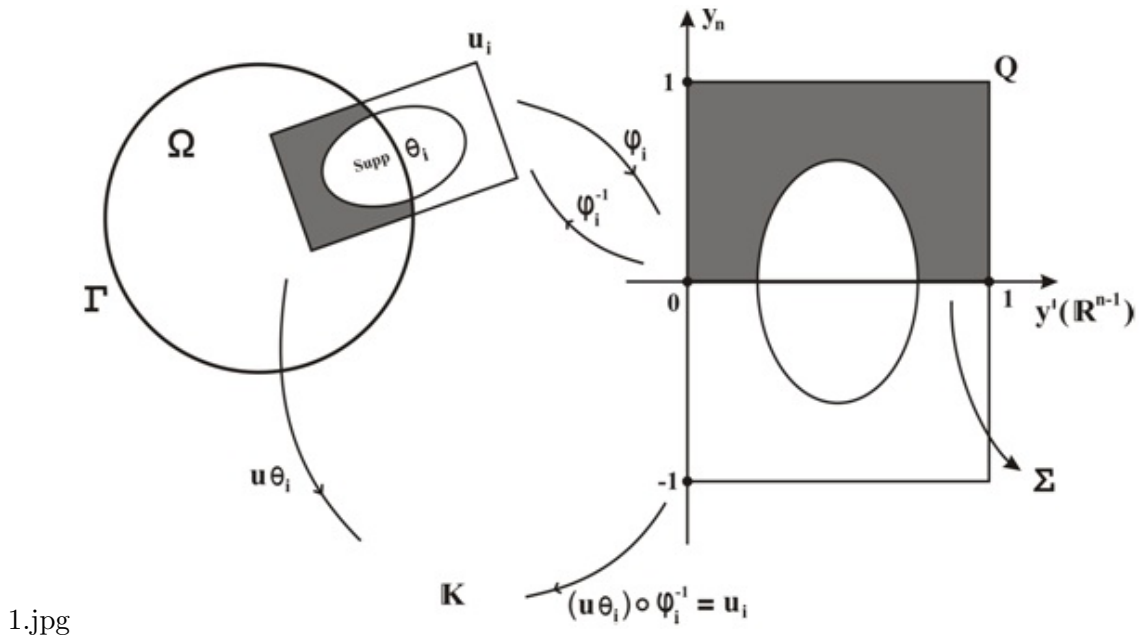


Figura 2.1: Aberto regular

Referência:[5]

Para uma visualização gráfica, ver Figura 2.1 acima:

Para maiores detalhes sobre variedades diferenciáveis, ver Munkres [36], Capítulo 5.

Definição 2.5. Para $m = \infty$ ou para cada número inteiro $m \geq 0$, definimos:

$$C_0^m(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_{\bar{\Omega}} ; \varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Teorema 2.1. Seja Ω um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$. Então $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [5], página 199. □

Teorema 2.2. Seja Ω um aberto limitado regular. Então existe um operador linear e contínuo $P : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, denominado operador prolongamento, tal qual, para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se $P(u) = u$, q.t.p. em Ω .

O teorema anterior nos permite herdar certos resultados de imersões que tínhamos para os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3. Seja Ω um aberto limitado regular do espaço $\mathbb{R}^n$. Para $n \geq 2$ temos:

- (a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, sempre que $mp < n$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.
- (b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, sempre que $mp = n$ e $p \leq q < \infty$.
- (c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{K,\lambda}(\overline{\Omega})$, sempre que $mp > n$ e $k \in \mathbb{N}$, tal qual $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, onde, $0 < \lambda m - k - \frac{n}{p}$, se $m - k - \frac{n}{p} < 1$ e $0 < \lambda < 1$, se caso $m - k - \frac{n}{p} = 1$.

Demonstração. Para a demonstração ver [5], página 208. □

Teorema 2.4. *Seja I um intervalo aberto limitado de $\mathbb{R}$. Então:*

- (a) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$, onde $0 < \lambda \leq 1 - \frac{1}{p}$ e $1 < p < \infty$.
- (b) $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{I})$.

Demonstração. Para a demonstração ver [29], página 76 ou [5], página 209. □

Teorema 2.5. (Rellich-Kondrachov) *Sejam Ω um aberto limitado regular de classe C^m do espaço $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

- (a) $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{comp} L^q(\Omega)$, sempre que $p < n$ e $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.
- (b) $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{comp} L^q(\Omega)$, sempre que $p = n$ e $1 \leq q < \infty$.
- (c) $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{comp} C^0(\overline{\Omega})$, sempre que $p > n$.

Demonstração. Para a demonstração ver [29], páginas 79 e 84. □

Corolário 2.6. *Sejam Ω um aberto limitado regular de classe C^m do espaço $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

- (a) $W^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{comp} W^{m,q}(\Omega)$, sempre que $p < n$ e $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.
- (b) $W^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{comp} W^{m,q}(\Omega)$, sempre que $p = n$ e $1 \leq q < \infty$.
- (c) $W^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{comp} C^m(\overline{\Omega})$, sempre que $p > n$.

Demonstração. Para a demonstração ver [5], página 214. □

Teorema 2.7. *Seja I um intervalo aberto limitado de $\mathbb{R}$. Então:*

(a) $W^{1,p}(I) \xrightarrow{comp} C^0(\bar{I})$, onde $1 < p \leq \infty$.

(b) $W^{1,1}(I) \xrightarrow{comp} L^q(I)$, onde $1 < q \leq \infty$.

Demonstração. Para a demonstração ver [5], página 221. □

2.2 Os Espaços $H^s(\Omega)$ e $H^s(\Gamma)$

Nesta seção, a fim de estudar o comportamento de certas funções restritas a condições de contorno, definiremos de maneira formal, os espaços ambiente das funções definidas na fronteira Γ de um aberto regular Ω .

Inicialmente, enunciaremos um resulta que prepara os requisitos necessários para definir os espaços de Hilbert $H^s(\Omega)$, onde Ω é um aberto regular e s um número real positivo.

Teorema 2.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado regular com fronteira Γ . Consideremos a aplicação:*

$$\begin{aligned} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto u|_\Omega. \end{aligned}$$

A aplicação r_Ω é linear e contínua. Além disso, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$H^m(\Omega) = \{r_\Omega(u); u \in H^m(\mathbb{R}^n)\},$$

e para cada multi-índice α , tem-se $D^\alpha(r_\Omega(u)) = r_\Omega(D^\alpha u)$ no sentido das distribuições.

Demonstração. Ver [5], página 265. □

O Teorema 2.8, nos sugere considerar a seguinte definição:

Definição 2.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto regular e s um número real não negativo. Definimos*

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observação 2.1. *Se $u \in H^s(\Omega)$ então $u = v|_\Omega$ para algum, $v \in H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, e portanto $u = v|_\Omega \in L^2(\Omega)$. Assim, $H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Logo, a seguinte aplicação:*

$$\begin{aligned} r_\Omega : H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^s(\Omega) \\ u &\longmapsto u|_\Omega. \end{aligned}$$

está bem definida.

A aplicação $r_\Omega : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\Omega)$ é linear e sobrejetora. Além disso, $\ker(r_\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ (ver [5], página 266).

No que segue, definiremos uma topologia em $H^s(\Omega)$ que coincide com a topologia usual dos espaços $H^m(\Omega)$ quando $s = m \in \mathbb{N}$.

Para cada número real $s \geq 0$ considere o seguinte espaço quociente:

$$H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) = \{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\} := \{v + \ker(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

A aplicação $\|\cdot\| : H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$\|[v]\| = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\}, \quad \forall [v] \in H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega).$$

define uma norma no espaço $H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)$ que o torna um espaço de Banach.

Uma exposição detalhada sobre o espaço quociente de um espaço vetorial normado e a completude de sua norma usual, ver [5], páginas 258 e 259.

Por outro lado, para cada vetor $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\{w \in H^s(\mathbb{R}^n); w \in v + \ker(r_\Omega)\} = \{w \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(w) = r_\Omega(v)\},$$

uma vez que,

$$w \in v + \ker(r_\Omega) \Leftrightarrow w - v \in \ker(r_\Omega) \Leftrightarrow r_\Omega(w - v) = 0 \Leftrightarrow r_\Omega(w) = r_\Omega(v).$$

Assim, podemos escrever

$$\|[v]\| = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}, \quad \forall [v] \in H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega).$$

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{r_\Omega} & H^s(\Omega) \\ \downarrow \pi & \nearrow [r_\Omega] & \\ H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) & & \end{array}$$

onde, $[r_\Omega] : H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) \longrightarrow H^s(\Omega)$ é definida por $[r_\Omega]([v]) := r_\Omega(v)$, $\forall [v] \in H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)$.

Teorema 2.9. A aplicação $[r_\Omega]$ definida acima é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Ver [5], página 269. □

Teorema 2.10. Seja $m \in \mathbb{N}$. As norma definida por

$$\|u\|_m := \inf\{\|w\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(w) = u\},$$

é equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$, usual do espaço $H^m(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in H^m(\Omega)$. Então, $r_\Omega(v) = u$, para algum $v \in H^s(\mathbb{R}^n\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 &= \|r_\Omega\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(r_\Omega(v))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|r_\Omega(D^\alpha v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ é uma cota inferior do conjunto $\{\|w\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(w) = u\}$ e, por definição de ínfimo, obtemos $\|u\|_m \leq \|u\|_{H^m(\Omega)}$.

Reciprocamente, como $u \in H^m(\Omega)$, temos $P(u) \in H^m(\mathbb{R}^n)$ e $r_\Omega(P(u)) = u$, onde P é o operador prolongamento, definido no Teorema 2.2. Assim, face a continuidade do operador prolongamento, obtemos

$$\|u\|_m \leq \|P(u)\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^m(\Omega)},$$

onde C é uma constante positiva definida pela continuidade do operador linear P . □

Teorema 2.11. Da sobrejetividade da aplicação r_Ω , definida na Observação 2.1, segue que, para cada $u \in H^s(\Omega)$, existe um $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = r_\Omega(v)$. Assim, aplicação definida por

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|r_\Omega(v)\|_{H^s(\Omega)} = \|[v]\|; \quad \forall u \in H^s(\Omega)$$

define uma norma no espaço $H^s(\Omega)$, onde s é um número real não negativo e Ω é um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$. Além disso, o espaço $H^s(\Omega)$ munido desta norma é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Ver [5], página 271. □

Proposição 2.2. $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$ para cada $s \geq 0$.

Demonstração. Ver [29], página 94 ou [5], página 272. □

Proposição 2.3. $H^{s_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_2}(\Omega)$, sempre que $0 \leq s_2 \leq s_1$.

Demonstração. Ver [29], página 96 ou [5], página 273. □

Definição 2.7. *Seja Ω um aberto limitado regular. Definamos:*

$$H_0^s(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^s(\Omega)} \quad e \quad H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))'.$$

Existem outras maneiras de definir os espaço $H^s(\Omega)$, como através da teoria de interpolação em espaços de Hilbert, em Lions and Magenes [23], capítulo 9.

No que segue, definiremos os espaços $H^s(\Gamma)$.

Seja Ω um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ e consideremos $\{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_m, \varphi_m)\}$ um sistema de cartas locais para Γ . A cobertura aberta $\Omega, U_1, \dots, U_k$ de $\bar{\Omega}$ determina uma partição $\theta_1, \dots, \theta_m \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, C^k da unidade subordinada à mesma (Ver Figura 2.1) .

Seja $u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $u = \sum_{j=1}^m (\theta_j u)$. *q.t.p.* em Γ (Ver Definição 2.4). Assim, para cada $j \in 1, \dots, m$, a função definida por

$$\tilde{u}_j(y) = \begin{cases} u_j(y) := (\theta_j u)(\varphi_j^{-1}(y)), & \text{se } y \in \Sigma = (0, 1)^{n-1} \\ 0, & \text{se } y \in \mathbb{R}^n / \Sigma \end{cases}$$

é integrável. Além disso,

$$\text{supp}(u_j) \subset \overline{\{x \in \Sigma; u_j(x) \neq 0\}} \subset \Sigma \quad e \quad \int_{\Gamma} u d\Gamma = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma} u \theta_j d\Gamma = \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_j(y) \tilde{J}(y) dy,$$

onde $d\Gamma$ é a medida superficial de Γ induzida pela medida de Lebesgue, e $\tilde{J}$ é a extensão nula fora de $\Gamma_j = U_j \cap \Gamma$, de um operador diferenciável J_j determinado pela seguinte relação:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_j(y) dy = \int_{\Gamma_j} u \theta_j J_j d\Gamma.$$

Definição 2.8. *Designaremos por $L^p(\Gamma)$ o espaço das funções f , tais que $|f|^p$ é integrável sobre Γ com respeito a medida superficial Γ .*

Muniremos o espaço $L^p(\Gamma)$ da norma definida por

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty, \quad \text{ou } \|f\|_{L^\infty(\Gamma)} = \text{ess sup}_{x \in \Gamma} |f(x)|.$$

De maneira equivalente e usando a partição da unidade $\theta_1, \dots, \theta_m \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, temos

$$L^p(\Gamma) = \{f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}; \widetilde{f\theta_j \circ \varphi_j^{-1}} = \tilde{f}_j \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = 1, \dots, m\},$$

onde $\tilde{f}_j = \widetilde{f\theta_j \circ \varphi_j^{-1}}$ é a extensão de $f_j = f\theta_j \circ \varphi_j^{-1}$ à $\mathbb{R}^{n-1}$ zero fora de $\Sigma = (0, 1)^{n-1}$.

Além disso, temos a seguinte norma:

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^m \|\tilde{v}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in L^p(\Gamma) \text{ e } 1 \leq p < \infty.$$

Definimos também os seguintes conjuntos:

$$C^m(\Gamma) = \{v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}; \widetilde{v\theta_j \circ \varphi_j^{-1}} = \tilde{u}_j \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = 1, \dots, m\},$$

$$D(\Gamma) = \{v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}; \widetilde{v\theta_j \circ \varphi_j^{-1}} = \tilde{u}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = 1, \dots, m\}.$$

Definição 2.9. Definimos para todo número real $s > 0$:

$$H^s(\Gamma) = \{u; \phi_j(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = 1, \dots, m\}, \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} \phi_j : D(\Gamma) &\longrightarrow D(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\longmapsto \tilde{u}_j = \widetilde{u\theta_j \circ \varphi_j^{-1}} \end{aligned}$$

Teorema 2.12. O conjunto $H^s(\Gamma)$ munido da norma definida por:

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^m \|\phi_j(u)\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert. Além disso, $D(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.

Demonstração. Ver [5], página 281. □

Definição 2.10. Seja $s > 0$ um número real. Definamos o espaço dual forte, $H^{-s}(\Gamma) := [H^s(\Gamma)]$.

2.3 Teoria de Traço

Em EDP, consideram-se os problemas de Dirichlet e Neuman. Esses problemas consistem em encontrar uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = h \text{ sobre } \Gamma. \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ sobre } \Gamma. \end{array} \right.$$

respectivamente, onde $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ o operador de Laplace, ν a normal unitária exterior a fronteira Γ do aberto regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f uma função definida em Ω e h uma função definida em Γ .

Nestes problemas, as soluções devem satisfazer as condições de fronteira $u|_{\Gamma} = h$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = h$ respectivamente. Para tal, precisamos dar sentido preciso a uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ restrita a fronteira Γ de Ω , principalmente quando trabalharmos com classes de funções em $L^p(\Omega)$. Observe que, a fronteira de um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de dimensão $n - 1$, e que qualquer subvariedade de dimensão menor do que n tem medida de Lebesgue n -dimensional nula. Assim, qualquer subvariedade de dimensão $n - 1$ que substituirmos no lugar de Γ continuará na mesma classe, e portanto será a mesma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nesta seção, introduziremos a teoria de traço. A mesma, formaliza a noção de restringir uma (classe de) função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ à fronteira Γ de um aberto regular Ω . A grosso modo, a teoria de traço consiste no prolongamento ao fecho, de certas formas lineares. Esse prolongamento é possível graças a a boa estrutura da fronteira Γ do aberto limitado regular Ω . Em suma, utilizaremos a teoria de traço com intuito de definir a restrição de uma função $u \in H^1(\Omega)$ à fronteira Γ de Ω , e definir a restrição da normal $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ de uma função $u \in H^2(\Omega)$ a fronteira Γ de Ω .

Lema 2.1. *Seja $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, onde $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$. Definimos, para cada $t \geq 0$ fixado:*

$$\begin{aligned} \varphi(t) : \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x, t). \end{aligned}$$

Então, $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, para cada t .

Demonstração. Ver [5], página 287. □

Lema 2.2. *O Lema 2.1 garante que a aplicação:*

$$\begin{aligned} \gamma : C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) &\longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi(0), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi(0) : \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x, 0). \end{aligned}$$

está bem definida.

Denotemos $\varphi|_{\mathbb{R}^{n-1}} := \varphi(0)$

Lema 2.3. Para todo $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, temos $\|\gamma(\varphi)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \|\varphi|_{\mathbb{R}^{n-1}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}$.

Demonstração. Ver [5], página 288. □

Como $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ é denso em $H^1(\mathbb{R}_+^n)$, do Lema 2.3 nos permite estender a aplicação γ , a uma única aplicação linear contínua

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\mathbb{R}_+^n) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\longmapsto \gamma_0(u), \end{aligned} \tag{2.1}$$

tal que $\gamma_0(\varphi) = \varphi(0) := \varphi|_{\mathbb{R}^{n-1}}$, para cada $\forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$.

Lema 2.4. Se $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$, então $\gamma(u) = u(0)$, onde

$$\begin{aligned} u(0) : \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u(x, 0). \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [5], página 297. □

Faz sentido denotar, $u|_{\mathbb{R}^{n-1}} := u(0)$

Teorema 2.13. A aplicação γ_0 definida em (2.1) é sobrejetiva. Além disso, $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$.

Demonstração. Ver [5], páginas 299 e 309. □

Note que, a aplicação γ_0 transforma uma função u definida em $\mathbb{R}_+^n$ em $u|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ (restrição a fronteira $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\mathbb{R}_+^n$). Os próximos resultados, nos fornecem uma aplicação γ_0 que transforma funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas em um aberto limitado regular Ω em $u|_\Gamma$ (restrição de u à fronteira Γ de Ω).

A partir deste momento, no decorrer do texto, Ω sempre denotará um aberto limitado regular do espaço $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ .

Lema 2.5. Existe uma aplicação linear e contínua

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma) \\ \varphi &\longmapsto \varphi|_\Gamma. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [5], página 315. □

Lema 2.6. *Existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\|\gamma(\varphi)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [5], página 318. □

Como $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$, podemos estender a aplicação γ a uma única aplicação linear e contínua $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tal que $\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\Gamma}$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.14. *Existe uma única aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sobrejetiva, linear e contínua, tal que:*

$$(a) \quad \gamma_0(u) = u|_{\Gamma}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

$$(b) \quad \ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$$

Demonstração. Pelo visto acima, existe uma única aplicação γ_0 linear e contínua satisfazendo o item (a). Assim, resta mostrar que γ_0 é sobrejetiva e $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$. Provemos a sobrejetividade. Com efeito, seja $w \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Por definição, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ temos que

$$w_j(y) = \begin{cases} (\theta_j w) \circ \varphi_j^{-1}(y', 0); & y' \in \Sigma = (0, 1)^{n-1} \\ 0; & y' \in \mathbb{R}^{n-1}/\Sigma. \end{cases}$$

é uma função de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ com suporte contido em Σ . Portanto, pela sobrejetividade da aplicação $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}_+^n) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (Teorema 2.13) existe, para cada j , uma função $v_j \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ tal que $\gamma_0(v_j) = w_j$. Para cada índice j , escolha uma função $\rho_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; tal que $\text{supp}(\rho_j) \subset Q$ e $\rho_j(x', 0) = 1$, para todo $x' \in S(w_j)$, onde $S(u) = \overline{\{x \in \Sigma; u(x) \neq 0\}}$. Além disso,

$$\gamma_0((\rho_j)|_{\overline{\mathbb{R}_+^n}} v_j) = \gamma_0((\rho_j)|_{\overline{\mathbb{R}_+^n}})(\gamma_0(v_j)) = (\rho_j)|_{\overline{\mathbb{R}_+^n}} w_j = w_j \quad (2.2)$$

e,

$$S(\rho_j v_j) \subset \text{supp}(\rho_j) \cap S(v_j) \subset Q \cap \overline{\mathbb{R}_+^n} = Q^+ \cup \Sigma.$$

Definamos,

$$u_j(x) = \begin{cases} (\rho_j v_j)(\varphi_j(x)); & x \in U_j \cap \Omega = U_j^+ \\ 0; & x \in \Omega/U_j^+. \end{cases}$$

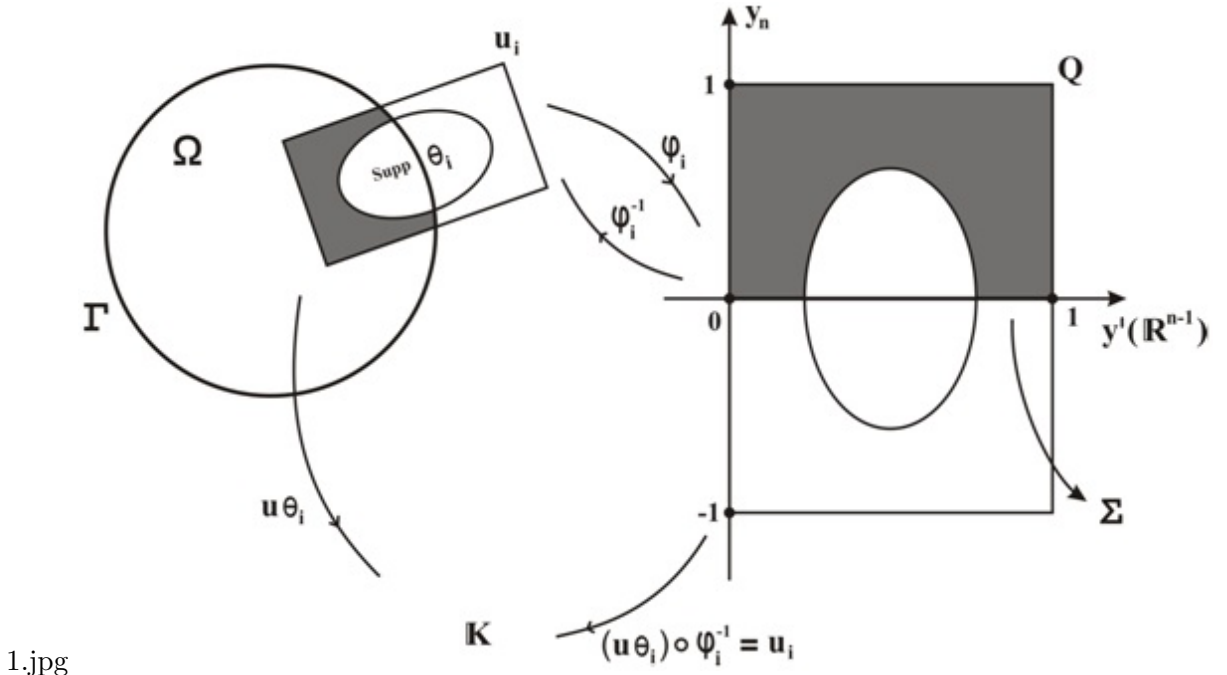


Figura 2.2: Aberto regular.

Portanto, $u_j \in H^1(\Omega)$ (ver Lema 4, [5], página 328.) e, além disso,

$$\gamma_0(u_j)(x) = \begin{cases} \gamma_0(\rho_j v_j)(\varphi_j(x)); & q.t.p. \text{ em } x \in U_j \cap \Gamma \\ 0; & x \in \Gamma/U_j. \end{cases}$$

Contudo, de (3.9), obtém-se

$$\gamma_0(\rho_j v_j)(\varphi_j(x)) = w_j(\varphi_j(x)) = [\theta_j w_0 \varphi_j^{-1}](\varphi_j(x)) = (\theta_j w)(x),$$

$q.t.p$ em $x \in \Gamma \cap U_j$. Portanto,

$$\gamma_0(u_j)(x) = \begin{cases} (\theta w)(x); & q.t.p. \text{ em } x \in U_j \cap \Gamma \\ 0; & x \in \Gamma/U_j. \end{cases}$$

Contudo, $\text{supp}(\theta_j) \subset U_j$. Então, $(\theta_j w)(x) = 0$, para cada $x \in \Gamma/U_j$. Logo,

$$\gamma_0(u_j) = \theta_j w, \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

Consequentemente,

$$\sum_{j=1}^k \gamma_0(u_j) = \sum_{j=1}^k \theta_j w = w, \text{ q.t.p. em } \Gamma. \quad (2.3)$$

Definindo-se $u = \sum_{j=1}^k u_j$, segue de (2.3) e da linearidade da aplicação γ_0 , que $\gamma_0(u) = w$, $q.t.p.$ em Γ_1 , que prova a sobrejetividade.

Finalmente, provemos que $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$. Com efeito, seja $u \in H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$. Então, existe uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, tal que $\varphi_\nu \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$. Defina,

$$\tilde{\varphi}_\nu(x) = \begin{cases} \varphi_\nu(x); & x \in \Omega \\ 0; & x \in \mathbb{R}^n/\Omega. \end{cases}$$

Daí, $(\tilde{\varphi}_\nu)|_{\overline{\Omega}} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\text{supp}(\tilde{\varphi}_\nu) \subset \Omega$ e $(\tilde{\varphi}_\nu)|_{\overline{\Omega}} \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$. Portanto, $\gamma_0(\tilde{\varphi}_\nu) \rightarrow \gamma_0(u)$. Por outro lado, $\gamma_0(\tilde{\varphi}_\nu) = (\tilde{\varphi}_\nu)_\Gamma = 0$, logo $\gamma_0(u) = 0$, isto é, $u \in \ker(\gamma_0)$, provando-se que $H_0^1(\Omega) \subset \ker(\gamma_0)$.

Reciprocamente, se $u \in \ker(\gamma_0)$, então $u \in H^1(\Omega)$ e $\gamma_0(u) = 0$. Daí,

$$u = u\theta_0 + \sum_{j=1}^k u\theta_j \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Ora, $u\theta_0 \in H^1(\Omega)$ e $\text{supp}(u\theta_0) \subset \text{supp}(\theta_0) \subset \Omega$. Logo, $u\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, $u\theta_j \in H^1(\Omega)$, uma vez que $u \in H^1(\Omega)$ e $\theta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Defina,

$$v_j(y) = \begin{cases} (u_j\theta_j)(\varphi_j^{-1}(y)); & y \in Q^+ \\ 0; & y \in \mathbb{R}_+^n/Q^+. \end{cases}$$

Notemos que $S(v_j) = \varphi_j(S(u\theta_j)) \subset \varphi_j(U_j \cap \overline{\Omega}) = Q^+ \cup \Sigma$. Assim, como $S(u\theta_j) \subset S(u) \cap \text{Supp}(\theta_j) \in U_j \cap \overline{\Omega}$, então $v_j \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ (ver [5], Lema 5, página 333). Além disso,

$$\gamma_0(v_j)(y) = \begin{cases} \gamma_0(u_j\theta_j)(\varphi_j^{-1}(y)); & y \in \Sigma \\ 0; & y \in \mathbb{R}^{n-1}/\Sigma. \end{cases}$$

Entretanto, $\gamma_0(u\theta_j) = (\gamma_0(u))(\gamma_0(\theta_j)) = 0; \forall j \in \{1, \dots, k\}$, uma vez que $u \in \ker(\gamma_0)$. Portanto, $(\gamma_0(v_j))(y) = 0$, q.t.p. em Σ , logo $(\gamma_0(v_j))(y) = 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^{n-1}$, para cada índice $j \in \{1, \dots, k\}$.

Por outro lado, $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$, onde $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Então, $v_j \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$, para cada índice j . Além disso, $S(v_j) \subset Q^+ \cup \Sigma$. Logo, $v_j \circ \varphi_j \in H_0^1(U_j)$ (ver [5], Lema 5, página 333), e portanto,

$$\widetilde{(v_j \circ \varphi_j)}(x) = \begin{cases} (u\theta_j)(x); & x \in U_j^+ \\ 0; & x \in \Omega/U_j^+, \end{cases}$$

e $\widetilde{v_j \circ \varphi_j} \in H^1(\Omega)$. Como $u\theta_j = 0$ em Ω/U_j^+ , segue que $v_j \circ \varphi_j = u\theta_j$ em Ω . Portanto, $u\theta_j \in H^1(\Omega)$, para cada índice $j \in \{1, \dots, k\}$. Daí, $u \in H_0^1(\Omega)$, logo $\ker(\gamma_0) \subset H_0^1(\Omega)$. Portanto, $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$, conforme queríamos demonstrar.

□

A aplicação γ_0 é denominada aplicação traço de ordem 0 em $H^1(\Omega)$.

Teorema 2.15. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$, existe uma aplicação linear e contínua $\gamma_j : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, tal que:*

$$\gamma_j(u) = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \Big|_{\Gamma}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\bar{\Omega}),$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, é o vetor unitário normal exterior a Γ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{r=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \nu_r$.

Demonstração. Ver [5], página 372, 380 e 386. □

A aplicação γ_j é denominada aplicação traço de ordem j em $H^m(\Omega)$.

Teorema 2.16. (Teorema do Traço) *Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma única aplicação sobrejetiva, linear e contínua*

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\longmapsto (\gamma_0(u), \gamma_1(u), \dots, \gamma_{m-1}(u)), \end{aligned}$$

tal que

$$(\gamma_0(u), \gamma_1(u), \dots, \gamma_{m-1}(u)) = \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\Gamma} \right), \quad \forall u \in C_0^\infty(\bar{\Omega}),$$

quando munimos o espaço $\prod_{j=0}^n H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ da topologia dada pela norma definida por

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^n H^{m-j-1/2}(\Gamma)} = \sum_{j=0}^{m-1} \|w_j\|_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)}, \quad \forall w = (w_0, w_1, \dots, w_{m-1}) \in \prod_{j=0}^n H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Além disso, $\ker(\gamma) = H_0^m(\Omega)$ e a sua inversa à direita é uma aplicação linear e contínua.

Demonstração. Para demonstração ver [5], página 387. □

A aplicação γ definida no Teorema 2.16 é denominada aplicação traço em $H^m(\Omega)$.

No que segue, definiremos as fórmulas de Green generalizadas. Começemos lembrando as seguintes fórmulas de Green clássicas:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_{\Gamma} u v \nu_j d\Gamma; \quad \forall u, v \in C^1(\bar{\Omega}), \quad (2.4)$$

e

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma; \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ e } \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \quad (2.5)$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é a normal unitária exterior à Γ e $\Delta(\cdot) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j^2}$ o operador Laplaciano.

Proposição 2.4. $H^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$

Demonstração. ver [5], página 396. □

Definição 2.11. *Seja Ω um aberto limitado regular. Definimos:*

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Observação 2.2. *O conjunto $\mathcal{H}^0(\Omega)$ munido do produto interno definido por:*

$$(u, v)_0 = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$$

é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.5. $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^0(\Omega)$.

Demonstração. Ver [5], página 399. □

Observação 2.3. *Identificando o espaço de Hilbert $L^2(\Gamma)$ com o seu dual (Teorema 5.10), para todo número real $s \geq 0$ temos a seguinte cadeia de imersões:*

$$H^s(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma) \equiv (L^2(\Gamma))' \hookrightarrow H^{-s}(\Gamma). \quad (2.6)$$

Usando as imersões acima e a aplicação inversa à direita $(\gamma)^{-1} : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^2(\Omega)$, da aplicação traço em $H^2(\Omega)$, pode-se definir a seguinte aplicação contínua:

$$\begin{aligned} \gamma' : C_0^\infty(\overline{\Omega}) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} \right). \end{aligned}$$

Ver [5], página 402.

Proposição 2.6. *A aplicação γ' definida acima, se estende por continuidade, à uma única aplicação linear e contínua:*

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}' : \mathcal{H}^0(\Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} \right). \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [5], página 403. □

A aplicação $\tilde{\gamma}'$ é denominada aplicação traço para funções em $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Além disso, em face da imersão (2.6), $\tilde{\gamma}'$ coincide com a aplicação traço em $H^2(\Omega)$. Por esta razão, escrevemos $\tilde{\gamma}' = \gamma$.

Teorema 2.17. (*1ª Fórmula de Green Generalizada*) Para todo $u \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e todo $v \in H^2(\Omega)$ tem-se:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1(u), \gamma_0(v) \rangle - \langle \gamma_0(u), \gamma_1(v) \rangle,$$

onde $\gamma_j(u) \in H^{-\frac{1}{2}-j}(\Gamma)$ e $\gamma_j(v) \in H^{\frac{3}{2}-j}(\Gamma)$, com $j = 0, 1$.

Demonstração. Para a demonstração ver [5], página 405. □

Definição 2.12. Seja Ω um aberto limitado regular. Definimos:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Observação 2.4. O conjunto $\mathcal{H}^1(\Omega)$ munido do produto interno dado por:

$$(u, v)_1 = ((u, v))_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$$

é um espaço de Hilbert. Além disso, $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Proposição 2.7. A aplicação linear:

$$\begin{aligned} \gamma : C_0^\infty(\bar{\Omega}) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \end{aligned}$$

se estende, por continuidade, a uma única aplicação linear e contínua:

$$\tilde{\gamma} : \mathcal{H}^1(\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração. Ver [5], página 411. □

A aplicação γ definida acima é chamada aplicação traço para funções em $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Além disso, $\tilde{\gamma}$ coincide com a aplicação traço de ordem 1 em $H^2(\Omega)$. Por esta razão, escrevemos $\tilde{\gamma} = \gamma_1$.

Teorema 2.18. (*2ª fórmula de Green Generalizada*) Seja $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$. Então:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \langle \gamma_1(u), \gamma_0(v) \rangle,$$

onde $\gamma_1(u) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e $\gamma_0(v) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Demonstração. Para a demonstração ver [5], página 413.

□

Capítulo 3

Equação Hiperbólica: Caso p Lipschitziana

Neste capítulo, demonstraremos a existência e a unicidade de solução local para o problema (7), onde consideramos restrições para a constante $\rho > 1$ e assumiremos que $h(\cdot, u') = \delta(\cdot)p(u')$, com $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana fortemente monótona e $\delta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$ tal que $\delta(x) \geq \delta_0$ (δ_0 constante positiva), para cada $x \in \Gamma_1$. Para tal, usaremos o método de Faedo-Galerkin com uma base especial e teoremas de traço para funções não-suave.

O método de Faedo-Galerkin consiste em quatro etapas:

1. Aproximações de Galerkin, que baseia-se em encontrar soluções aproximadas para o problema, projetando-o em subespaços de dimensão finita. Desse modo, estaremos lidando com um sistema de equações diferenciais ordinárias com valores iniciais que possui a existência de solução local garantida pelo teorema de Carathéodory (Teorema 1.16).
2. Estimativas a priori, que consiste em encontrar limitações para as soluções aproximadas e para suas derivadas. Essas estimativas nos permitirá utilizar o teorema do prolongamento (Teorema 1.17) para estender as soluções encontradas, a um domínio de definição maior.
3. Passagem ao limite, que tem como finalidade, mostrar que as soluções aproximadas convergem para a solução do problema original. Para tal, usaremos as limitações obtidas combinada com os resultados clássicos de compacidade da análise funcional (Teorema 5.13 e Teorema 5.12) e com o teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.15).
4. Verificação dos dados iniciais, que consiste em verificar se a solução obtida satisfaz os valores

iniciais dado.

3.1 Preliminares

Nesta seção introdutória, apresentaremos resultados que nos permitirão construir uma base especial para um certo subespaço do espaço de Hilbert $H^2(\Omega)$, a fim de utilizar o método de Feado-Galerkin. Começamos definindo os principais elementos que serão utilizados no decorrer do texto e adotando algumas notações.

Seja Ω um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2 , tendo duas partes disjuntas Γ_0 e Γ_1 , ambas com medida positiva, tal que, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ e seja $\nu(x)$ o vetor unitário normal exterior a $x \in \Gamma_1$. Definimos o seguinte subconjunto de $H^1(\Omega)$

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

O conjunto V munido do produto interno

$$((u, v)) = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx$$

é um espaço de Hilbert. De fato, como Ω é regular, faz sentido falar da seguinte aplicação traço:

$$\begin{aligned} (\gamma_0)|_{\Gamma_0} : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \\ v &\longmapsto v|_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que $(\gamma_0)|_{\Gamma_0}$ é linear e contínua. Assim, V é fechado em $H^1(\Omega)$ (Observação 5.6) e como $H^1(\Omega)$ é completo segue o afirmado (Teorema 5.3). Além disso,

$$H_0^1(\Omega) = \ker(\gamma_0) \subset \ker((\gamma_0)|_{\Gamma_0}) = V \subset H^1(\Omega).$$

No que segue, introduzimos hipóteses necessárias para a solução do problema (7).

Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana fortemente monótona na segunda variável. isto é, existe $b_0 > 0$ tal que

$$(p(s) - p(r))(s - r) \geq b_0(s - r)^2, \quad \forall s, r \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Seja $\delta : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\delta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1) \text{ e } \delta(x) \geq \delta_0, \quad (3.2)$$

para alguma constante $\delta_0 > 0$.

Seja ρ um número real, tal que

$$\rho > 1 \text{ se } n \in \{1, 2\} \text{ e } \frac{n+1}{n} \leq \rho \leq \frac{n}{n-2} \text{ se } n \geq 3 \quad (3.3)$$

Por conveniência de notação denotamos por $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$ o produto interno e a norma de $L^2(\Omega)$ respectivamente, salientado que também usaremos a notação $|\cdot|$ para representar o módulo de um número real, tendo seu significado definido pelo contexto.

Observação 3.1. *Uma vez que $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana, p define o seguinte operador linear contínuo:*

$$\begin{aligned} T_p : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ v &\longmapsto pv. \end{aligned}$$

Para maiores detalhes, ver [28].

Observação 3.2. *Como a restrição da aplicação traço de ordem zero, $(\gamma_0)|_V : V \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ é linear e contínua, temos que o operador $\tilde{p} = T_p \circ (\gamma_0)|_V : V \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ também o é. A fim de facilitar a notação, $\tilde{p}(v)$ para $v \in V$ será denotado por apenas $p(v)$.*

Observação 3.3. *Observe que, $\delta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, logo, $\delta v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ para todo $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e, portanto, o operador linear*

$$\begin{aligned} \delta : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ v &\longmapsto \delta v \end{aligned}$$

é contínuo. Com efeito, basta utilizar a teoria de interpolação para espaços de Hilbert feita em Lions [23], e o fato de que as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} \delta : H^1(\Gamma_1) &\longrightarrow H^1(\Gamma_1) \\ v &\longmapsto \delta v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta : L^2(\Gamma_1) &\longrightarrow L^2(\Gamma_1) \\ v &\longmapsto \delta v \end{aligned}$$

são contínuas. Ver Marcus e Mizel, [28].

Observação 3.4. Levando em conta as considerações feitas em (3.3) sobre ρ , temos

$$(\rho - 1)n \leq 2\rho \leq \frac{2n}{n-2} = q \quad \text{para } n \geq 3.$$

Portanto,

$$V \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega) \hookrightarrow L^{(\rho-1)n}(\Omega), \quad \text{se } n \geq 3. \quad (3.4)$$

Com efeito, em face da Proposição 5.33, obtemos a seguinte cadeia de imersões:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega) \hookrightarrow L^{(\rho-1)n}(\Omega).$$

Resta mostrar que $V \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Note que, para $n \geq 3$, $\frac{1}{q} = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Portanto, do Teorema 2.3 (considerando $p = 2$ e $m = 1$), segue que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Afirmamos que $V \hookrightarrow H^1(\Omega)$. De fato, como

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \right)^2 \leq \int_{\Omega} [v(x)]^2 + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \right)^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V,$$

o operador (linear e injetivo) inclusão $T : V \longrightarrow H^1(\Omega)$, definido por $T(v) = v$, para todo $v \in V$, é contínuo. O que prova o afirmado.

Do resultado obtido acima, existem constantes reais positivas C_0, C_1 e C_2 tais que:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_0 \|u\|, \quad \|u\|_{L^{2\rho}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|, \quad \|u\|_{L^{(\rho-1)n}} \leq C_2 \|u\| \quad \forall u \in V. \quad (3.5)$$

Observação 3.5. Temos também a seguinte imersão contínua:

$$V \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Com efeito, como $\rho > 1$ segue da Proposição 5.33 que $L^{2\rho}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Como pela Observação 3.4, $V \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$, logo $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Portanto, existe uma constante real $C_3 > 0$ tal que

$$|u| \leq C_3 \|u\| \quad \forall u \in V.$$

No que segue, demonstraremos alguns resultados que nos permitirá construir uma base especial em $V \cap H^2(\Omega)$ a fim de obter aproximações de Galerkin para o problema (7). A construção desta base espacial foi obtida por M. Miranda e L. A. Medeiros [33].

Proposição 3.1. A norma $\|\cdot\|$ do espaço V e a restrição da norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ ao conjunto V são equivalentes. Em outras termos, a topologia de subespaço de V em $H^1(\Omega)$ coincide com o espaço topológico V induzido pela norma $\|\cdot\|$.

Demonstração. Na Observação 3.4, vimos que $\|v\| \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$, para cada $v \in V$. Assim, resta-nos mostrar que existe uma constante real $C > 0$ tal que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot \|v\|$, para todo $v \in V$. Com efeito, suponhamos por absurdo, que tal constante não exista. Isto é, quaisquer que seja a constante C (fixada), existe ao menos um vetor $v_0 \in V$ tal que

$$C\|v_0\|_{H^1(\Omega)} > \|v_0\|.$$

Portanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um vetor $v_m \in V$, para o qual

$$\frac{1}{m}\|v_m\|_{H^1(\Omega)} > \|v_m\|.$$

Considerando a sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definida por $u_m = \frac{v_m}{\|v_m\|_{H^1(\Omega)}}$, obtemos

$$\|u_m\| = 1 \text{ e } \|u_m\| < \frac{1}{m}\|u_m\|_{H^1(\Omega)} < \frac{1}{m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

A sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ é reflexivo, em face ao Teorema 5.13, existe uma subsequência $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e um vetor $v \in H^1(\Omega)$ tal que $u_\nu \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega)$. Por outro lado, como Ω é um aberto limitado regular, de Rellich-Kondrachov (Teorema 2.5), segue que $H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^2(\Omega)$. Portanto, $u_\nu \rightarrow v$ em $L^2(\Omega)$.

Como $\|u_\nu\| < \frac{1}{\nu}$, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, temos $\|u_\nu\| \rightarrow 0$, logo,

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}. \quad (3.6)$$

Além disso, assumindo o fato que V é completo com a norma induzida de $H^1(\Omega)$, conclui-se que $v \in V$. Assim, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, logo v é constante em Ω . Como $v \in V$, $(\gamma_0)_{|\Gamma_0}(v) = v|_{\Gamma_0} = 0$, e portanto $v = 0$ em Ω . Assim,

$$v_\nu \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7), segue que $u_\nu \rightarrow 0$ em $H^1(\Omega)$, o que é um absurdo, porque $\|u_\nu\| = 1$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

□

Definição 3.1. Considere dois espaço de Hilbert arbitrário, H e X , tais que $H \hookrightarrow X$ e H é denso em X . Seja $\alpha : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear e coerciva. Denotaremos por $D(A)$, o conjunto dos vetores $u \in H$, tais que a forma linear $v \mapsto \alpha(u, v)$ é contínua em H com a topologia induzida por X . A densidade de H em X , nos permite estender continuamente a forma linear $v \mapsto \alpha(u, v)$

ao espaço X . Assim, pelo teorema de Riesz (Teorema 5.10), para cada $u \in D(A)$, existe um único $A(u) \in X$ tal que $\alpha(u, v) = ((A(u), v))_X$ para todo $v \in H$. Logo,

$$D(A) = \{u \in H; \exists f \in X, \text{ tal que } \alpha(u, v) = ((f, v))_X, \forall v \in H\}. \quad (3.8)$$

Portanto, $D(A)$ é um subespaço vetorial de X tal que $A : D(A) \longrightarrow X$ é um operador linear. Este operador A é dito definido pela terna $\{H, X, \alpha\}$.

Proposição 3.2. *Seja A o operador definido pela terna $\{H, X, \alpha\}$. Então, $D(A)$ é denso em X . Em particular, $D(A)$ é denso em H . Além disso, para cada $f \in X$, existe um único $u \in D(A)$ tal que $A(u) = f$.*

Demonstração. Ver [35], páginas 105 e 107. □

Exemplo 3.1. *Sejam A o operador definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), ((\cdot, \cdot))\}$ e M o conjunto dado por $M = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Afirmamos que $D(A) = M$ e $A = -\Delta$. Com efeito, seja $u \in D(A)$. De (3.8), segue que $u \in H_0^1(\Omega)$ e existe um $f \in L^2(\Omega)$, tal que*

$$((u, v)) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pela segunda fórmula de Green (Teorema 2.18), obtemos

$$(-\Delta u, v) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Contudo, $v \in H_0^1(\Omega) = \ker(\gamma_0)$, e portanto $v|_{\Gamma} = 0$. Logo,

$$(-\Delta u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$(-\Delta u, v) = (f, v), \quad \forall v \in D(\Omega).$$

Portanto $-\Delta u = f$ em $D'(\Omega)$, e como $f \in L^2(\Omega)$, segue que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Logo, $u \in M$.

Reciprocamente, seja $u \in M$. Então $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, e como $u \in H_0^1(\Omega)$, da segunda fórmula de Green, tem-se

$$(-\Delta u, \varphi) = ((u, \varphi)) \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (3.9)$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, dado $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $(v_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, tal que $v_\nu \rightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$. Fazendo $v_\nu = \varphi$ em (3.9) e passando o limite, resulta

$$(-\Delta u, v) = ((u, v)) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, de (3.8), segue que $u \in D(A)$ e $A = -\Delta$, o que mostra o afirmado.

Da Proposição 3.2 e do Exemplo 3.1, decorre que existe um único $u \in D(-\Delta) \subset H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

onde, $f \in L^2(\Omega)$.

Exemplo 3.2. No Exemplo (3.1), deu-se a terna $\{H, X, \alpha\}$ e determinou-se o operador A e o correspondente problema em equações diferenciais. Neste exemplo, faremos o percurso contrário. Dá-se o problema (e por consequência o operador A), e determina-se a terna $\{H, X, \alpha\}$. Consideramos o problema de determinar uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (3.10).

Supondo a equação (3.10) satisfeita, da segunda fórmula de Green, obtém-se

$$(f, v) = ((u, v)); \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Considere, $X = L^2(\Omega)$, $H = H_0^1(\Omega)$ e $\alpha = ((\cdot, \cdot))$. Pelo teorema de Lax-Milgram (Teorema 5.11), existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$((u, v)) = (f, v); \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.11)$$

Tomando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (3.11), resulta que $-\Delta u = f$. Além disso, $X = L^2(\Omega)$, $H = H_0^1(\Omega)$ e $\alpha = ((\cdot, \cdot))$ satisfazem as condições da Definição 3.1. Portanto, $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $-\Delta = A$.

Proposição 3.3. Existe uma única solução $u \in V \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ do seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$

Demonstração. Defina,

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto (f, v) + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma. \end{aligned}$$

Afirmamos que T é um funcional linear contínuo. De fato, dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle T, \alpha u + v \rangle &= (f, \alpha u + v) + \int_{\Gamma_1} g \cdot (\alpha u + v)|_{\Gamma} d\Gamma \\
&= \alpha(f, u) + (f, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} g \cdot u|_{\Gamma} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma \\
&= \alpha \left((f, u) + \int_{\Gamma_1} g \cdot u|_{\Gamma} d\Gamma \right) + \left((f, v) + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma \right) \\
&= \alpha \langle T, u \rangle + \langle T, v \rangle,
\end{aligned}$$

o que prova a linearidade da T . Além disso, pelas desigualdades de Schwartz (Proposição 5.15), Hölder (Proposição 5.27) e pela imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Observação 3.5), temos

$$\begin{aligned}
|\langle T, v \rangle| &= |(f, v) + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma| \\
&\leq |(f, v)| + \int_{\Gamma_1} |g| \cdot |v|_{\Gamma} d\Gamma \\
&\leq |f| \cdot |v| + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \cdot \|v|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq C_3 |f| \cdot \|v\| + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \cdot \|v|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma_1)}.
\end{aligned}$$

Segundo (2.6), $H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$. Portanto, existe uma constante de imersão C_4 tal que

$$\begin{aligned}
|\langle T, v \rangle| &\leq C_3 |f| \cdot \|v\| + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \cdot \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq C_3 |f| \cdot \|v\| + (C_4)^2 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \|v|_{\Gamma}\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)},
\end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.14,

$$\|v|_{\Gamma}\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} = \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} = \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_5 \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

onde C_5 é a constante garantida pela continuidade da aplicação traço de ordem zero γ_0 definida no Teorema 2.14. Logo,

$$\begin{aligned}
|\langle T, v \rangle| &\leq C_3 |f| \cdot \|v\| + (C_4)^2 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \|v|_{\Gamma}\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\
&\leq C_3 |f| \cdot \|v\| + (C_4)^2 \cdot C_5 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= C_3 |f| \cdot \|v\| + (C_4)^2 \cdot C_5 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \|v\| \\
&= (C_3 |f| + (C_4)^2 \cdot C_5 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}) \|v\| \\
&= C \|v\|,
\end{aligned}$$

onde $C = C_3 |f| + (C_4)^2 C_5 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}$, provando o afirmado.

Finalmente mostraremos a existência e unicidade de solução para o problema (3.12).

Note que, o produto interno $((\cdot, \cdot))$ do espaço V é uma forma bilinear, coerciva e contínua. Portanto por Lax-Milgram (Teorema 5.11), existe um único $u \in V$ tal que

$$((u, v)) = \langle T, v \rangle = (f, v) + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma, \quad \forall v \in V. \quad (3.13)$$

Em particular,

$$((u, \varphi)) = (f, \varphi) + \int_{\Gamma_1} g \cdot \varphi|_{\Gamma} d\Gamma = (f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

pois $\varphi = 0$ em Γ . Como

$$((u, \varphi)) = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx$$

Obtemos,

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. \quad (3.14)$$

Segue da definição de derivada distribucional e da equação (3.14), que

$$\begin{aligned} \langle u, \Delta \varphi \rangle &= \left\langle u, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \right\rangle = - \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = - \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle u, \Delta \varphi \rangle &= \left\langle u, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \varphi \right\rangle = \langle \Delta u, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Assim,

$$- \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = \langle \Delta u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \Delta u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Equivalentemente,

$$\int_{\Omega} [f(x) - \Delta u(x)]\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.15)$$

De (3.15) e pelo Lema de Du Bois Raymond (Teorema 5.16), temos que $-\Delta u = f$, q.t.p. em Ω , e como $f \in L^2(\Omega)$ segue que, $\Delta u \in L^2(\Omega)$, isto é, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Portanto $u \in V \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$. Como $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, da segunda fórmula de Green generalizada (Teorema 2.18, segue que

$$\langle \gamma_1(u), \gamma_0(v) \rangle = (\Delta u, v) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = (\Delta u, v) + ((u, v)), \quad (3.16)$$

onde $\gamma_1(u) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e $\gamma_0(v) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Como $f = -\Delta u$ em $L^2(\Omega)$, das equações (3.13) e (3.16), temos

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_1(u), \gamma_0(v) \rangle &= (\Delta u, v) + ((u, v)) = (\Delta u, v) + (f, v) + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}, v|_{\Gamma_1} \right\rangle = \int_{\Gamma_1} g \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma, \quad \forall v \in V. \quad (3.17)$$

Isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = g \text{ em } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Como $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]'$, do teorema da representação de Riesz-Fréchet (Apêndice, Teorema 5.10), segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = g \text{ em } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

□

Proposição 3.4. *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Então a solução do problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

pertence a $V \cap H^2(\Omega)$ e existe uma constante real C tal que, $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C[\|f\| + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}]$.

Demonstração. Seja $(0, \bar{g}) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definido por

$$\bar{g} = \begin{cases} g \text{ sobre } \Gamma_1, \\ 0 \text{ sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

Pela sobrejetividade da aplicação traço em $H^2(\Omega)$ (Ver Teorema (2.16)), existe uma função $h \in H^2(\Omega)$ tal que, $\gamma(h) = (\gamma_0(h), \gamma_1(h)) = (0, \bar{g})$. Logo, $h = 0$ em Γ_0 e $\frac{\partial h}{\partial \nu} = g$ em Γ_1 . Além disso, pela continuidade da aplicação traço γ , existe uma constante real $C_0 > 0$, tal que

$$\|h\|_{H^2(\Omega)} \leq C_0 \left[\|0\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \|\bar{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right] = C_0 \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}. \quad (3.19)$$

Seja w a solução fraca do seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w = f - \Delta h \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

garantida pela Proposição 3.3. Isto é,

$$(-\Delta w, v) = (f, v) - (\Delta h, v), \quad \forall v \in V.$$

Considere a aplicação $T = w + f - \Delta h \in L^2(\Omega)$. Note que, $-\Delta w = f - \Delta h$ implica que $-\Delta w + w = w + f - \Delta h = T$. Portanto, em face ao teorma de Agmon-Douglis-Nirenberg (Teorema 1.19), decorre que $w \in H^2(\Omega)$ existe uma constante real $K > 0$ tal que $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq K|w|$. Além disso, note que

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq K|w| \leq K|\Delta w| = K|f - \Delta h| \leq K[|f| + |\Delta h|] \quad (3.21)$$

Assim, da desigualdade de Young (Proposição 5.26), resulta que

$$\begin{aligned} |\Delta h|^2 &= \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right| \right]^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right|^2 + \sum_{i,j=1}^n \left[\left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right| \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left[\left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right|^2 \right] dx \\ &= \int_{\Omega} (n^2 + 1) \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right|^2 dx \\ &= (n^2 + 1) \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \right|^2 dx \\ &= (n^2 + 1) \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right|^2 \\ &\leq (n^2 + 1) \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha u|^2 = (n^2 + 1) \|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Afirmamos que a função $u = w - h$ é solução do problema (3.18). Com efeito, como as funções w e h pertencem a $V \cap H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial h}{\partial \nu} = g$ em Γ_1 , temos que $u \in H^2(\Omega) \cap V$ e portanto $u = 0$ em Γ_0 ,

$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{\partial h}{\partial \nu} = 0 + g = g$ sobre Γ_1 e $-\Delta u = -\Delta(w - h) = -\Delta w + \Delta h = f - \Delta h + \Delta h = f$. Além disso, das desigualdades (3.19), (3.21) e (3.22), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\Omega)} &= \|w - h\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \|w\|_{H^2(\Omega)} + \|h\|_{H^2(\Omega)} \leq K[|f| + |\Delta h|] + \|h\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq K[|f| + K_0\|h\|_{H^2(\Omega)}] + \|h\|_{H^2(\Omega)} \\
&= K|f| + (K \cdot K_0 + 1)\|h\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq K|f| + (K \cdot K_0 + 1)C_0\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\
&\leq C|f| + C\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\
&= C[|f| + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}],
\end{aligned}$$

onde $C = \max\{K, (K \cdot K_0 + 1)C_0\}$ e $K_0 = \sqrt{n^2 + 1}$. □

Proposição 3.5. *A norma*

$$u \longrightarrow \left[|\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \right]^{1/2}$$

e a norma usual de $H^2(\Omega)$ são equivalentes em $V \cap H^2(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in V \cap H^2(\Omega)$. Então, pela Proposição 3.4, existe uma constante real $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C^2 \left[|\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \right].$$

Assim, por Young (Proposição 5.26) segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \left[|\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 + 2|\Delta u| \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right] \\
&\leq 2C^2 \left[|\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \right].
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela continuidade da aplicação linear $\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida no Teorema 2.15, existe uma constante real $K > 0$ tal que:

$$\|\gamma_1(u)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq K\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Portanto, em face da desigualdade (3.22), obtemos

$$|\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \leq (n^2 + 1)\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + K\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq 2C_0\|u\|_{H^2(\Omega)},$$

onde $C_0 = \max\{n^2 + 1, K\}$. □

Observação 3.6. Da Proposição 3.4 e Proposição 3.3, segue que $-\Delta$ é o operador definido pela terna $\{V, L^2(\Omega), ((\cdot))\}$ e $D(-\Delta) = \{u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1\}$. Assim, da Proposição 3.2, segue que $D(-\Delta)$ é denso em V . Então, como $D(-\Delta) \subset V \cap H^2(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$, das Proposição 3.1 e Proposição 3.5, segue que $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V .

A seguir, enunciaremos e demonstraremos o resultado que permite construir uma base especial em $V \cap H^2(\Omega)$.

Proposição 3.6. Seja $\delta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana com $p(0) = 0$, $u^0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u^1 \in V$ e, $V \cap H^2(\Omega)$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \delta(\cdot)p(u^1) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$ existem w e z em $V \cap H^2(\Omega)$ tal que,

$$\|w - u^0\|_{V \cap H^2(\Omega)} < \varepsilon, \quad \|z - u^1\| < \varepsilon \quad e \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + \delta(\cdot)p(z) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Demonstração. Como $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V (Observação 3.6) e $u^1 \in V$, para cada número real $\varepsilon > 0$ dado, existe um elemento $z \in V \cap H^2(\Omega)$ tal que $\|z - u^1\| < \varepsilon$.

Seja, w solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta w = -\Delta u_0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = -\delta(\cdot)p(z) & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases}$$

Portanto, pela Proposição 3.4, segue que $w \in V \cap H^2(\Omega)$. Além disso, em face da Proposição 3.5 tem-se:

$$\begin{aligned} \|w - u^0\|_{V \cap H^2(\Omega)} &= |\Delta(w - u^0)|^2 + \left\| \frac{\partial(w - u^0)}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \\ &= |\Delta w - \Delta u^0|^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u^0}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \\ &= \| -\delta(\cdot)p(z) + \delta(\cdot)p(u^1) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \\ &= \| \delta(\cdot)[p(u^1) - p(z)] \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Como os operadores lineares $\delta : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $p \equiv \tilde{p} = T_p \circ \gamma_0 : V \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ são contínuos (Ver Observações 3.1 - 3.3) e p fortemente monótono, existem constantes reais positivas K_1 e K_2 tais que

$$\| \delta(\cdot)[p(u^1) - p(z)] \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \leq K_1 \|p(u^1) - p(z)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \leq K_2 \cdot K_1 \|u^1 - z\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2. \tag{3.24}$$

Pela continuidade da restrição da aplicação $(\gamma_0)|_V : V \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ (Observação 3.2) existe uma constante real positiva K_3 tal que:

$$\|u^1 - z\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \leq K_3 \|u^1 - z\|^2. \quad (3.25)$$

De (3.23), (3.24), (3.25), segue que

$$\begin{aligned} \|w - u^0\|_{V \cap H^2(\Omega)} &\leq K_2 \cdot K_1 \|u^1 - z\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \\ &\leq K_3 \cdot K_2 \cdot K_1 \|u^1 - z\|^2 \\ &= K \|u^1 - z\|^2 \\ &< K \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

onde $K = K_3 \cdot K_2 \cdot K_1$. □

3.2 Existência de Solução Local

Esta é a principal seção deste trabalho. Demonstraremos o teorema que garante a existência de solução local do Problema (7) no caso em que $h = \delta p$, com δ e p definido anteriormente em (3.1) e (3.2). Isto é:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } \Omega \times (0, T_0), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T_0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta(\cdot)p(u') = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T_0), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{sobre } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.26)$$

onde $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.

A força $\delta p(u')$ atua na direção contrária à derivada normal.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\delta p(u') \text{ sobre } \Gamma_1$$

. Ver Figura 3.2 abaixo:

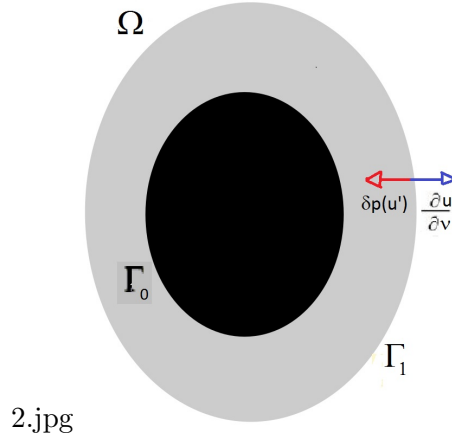


Figura 3.1: Aberto Ω .

Teorema 3.1. *Suponha que as condições (3.1), (3.2) e (3.3) sejam satisfeitas. Seja $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ e $\{u^0, u^1\} \in (V \cup H^2(\Omega)) \times V$ satisfazendo a seguinte condição de compatibilidade;*

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} = \delta(\cdot)p(u^1) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \quad (3.27)$$

Então existe um número real T_0 com $0 < T_0 \leq T$ e uma função u na classe,

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T_0; V \cap H^2(\Omega)), \\ u' \in L^\infty(0, T_0; V), \\ u'' \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta p(u') = 0 & \text{sobre } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)), \\ \frac{\partial u'}{\partial \nu} + \delta p'(u')u'' = 0 & \text{sobre } L^\infty(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \end{array} \right. \quad (3.29)$$

e as condições iniciais,

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (3.30)$$

Além disso, T_0 é dado explicitamente por:

$$T_0 = \min \left\{ \frac{1}{2M} \left(\frac{1}{2}|u^1|^2 + \frac{1}{2}\|u^0\| + 2 \right)^{\frac{(1-\rho)}{2}}, T \right\}. \quad (3.31)$$

onde,

$$M = \frac{(\rho-1)}{2} \left[2^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + 2^{\frac{(\rho+1)}{2}} (C_1)^\rho \right] \quad (3.32)$$

e C_1 é a constante da imersão contínua dada em (3.5).

Demonstração. Para a demonstração empregaremos o método de Faedo-Galerkin com uma base especial em $V \cap H^2(\Omega)$. A mesma estará contida e dividida nas subseções desta seção.

3.2.1 Aproximações de Galerkin

Nesta subseção, usaremos o teorema de Carathéodory (Teorema 1.16) para encontrar soluções aproximadas do Problema (7). Estas aproximações estarão definidas em subespaços de dimensão finita do espaço $V \cap H^2(\Omega)$.

De posse da Proposição 3.6, garantimos a existência de sequências $(u_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(u_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ de vetores em $V \cap H^2(\Omega)$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k^0 = u^0 & \text{sobre } V \cap H^2(\Omega), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u_k^1 = u^1 & \text{sobre } V, \\ \frac{\partial u_k^0}{\partial \nu} + \delta p(u_k^1) = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, construiremos uma base hilbertiana $\{w_1^k, \dots, w_j^k, \dots\}$ para o espaço vetorial $V \cap H^2(\Omega)$ de modo que $u_k^0, u_k^1 \in [w_1^k, w_2^k]$, onde $[u, v]$ é o subespaço gerado pelos vetores u, v . Com efeito, fixe $k \in \mathbb{N}$. Se u_k^0 e u_k^1 forem linearmente independente em $V \cap H^2(\Omega)$, defina

$$w_1^k = \frac{u_k^0}{\|u_k^0\|_{V \cap H^2(\Omega)}} \quad \text{e} \quad w_2^k = \frac{\beta_2^k}{\|\beta_2^k\|_{V \cap H^2(\Omega)}},$$

onde

$$\beta_2^k = u_k^1 - \frac{((u_k^1, w_1^k))_{V \cap H^2(\Omega)}}{\|w_1^k\|_{V \cap H^2(\Omega)}} w_1^k.$$

Considere um vetor u_k^2 fora do subespaço $[w_1^k, w_2^k]$ e defina

$$w_3^k = \frac{\beta_3^k}{\|\beta_3^k\|_{V \cap H^2(\Omega)}},$$

onde

$$\beta_3^k = u_k^2 - \frac{((u_k^2, w_1^k))_{V \cap H^2(\Omega)}}{\|w_1^k\|_{V \cap H^2(\Omega)}} w_1^k - \frac{((u_k^2, w_2^k))_{V \cap H^2(\Omega)}}{\|w_2^k\|_{V \cap H^2(\Omega)}} w_2^k.$$

Note que $V \cap H^2(\Omega)$ é separável, pois é subconjunto do espaço métrico separável $L^2(\Omega)$ (ver a Observação 5.13 e o Teorema 5.17). Portanto, em face da Proposição 5.19, podemos continuar

indefinidamente o processo acima (ortonormalização de Gram-Schmidt) até formar uma base hilbertiana $\{w_1^k, w_2^k, \dots, w_j^k, \dots\}$ para $V \cap H^2(\Omega)$.

Se caso, os vetores u_k^0 e u_k^1 forem linearmente dependentes, considere

$$w_1^k = \frac{u_k^0}{\|u_k^0\|_{V \cap H^2(\Omega)}} \quad \text{ou} \quad w_1^k = \frac{u_k^1}{\|u_k^1\|_{V \cap H^2(\Omega)}}.$$

Escolha u_k^2 um vetor fora do subespaço $[w_1^k]$ e considere

$$w_2^k = \frac{\beta_1^k}{\|\beta_1^k\|_{V \cap H^2(\Omega)}},$$

onde,

$$\beta_1^k = u_k^2 - \frac{((u_k^2, w_1^k))_{V \cap H^2(\Omega)}}{\|w_1^k\|_{V \cap H^2(\Omega)}} w_1^k.$$

De maneira análoga ao caso anterior, podemos continuar indefinidamente o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt e assim obter uma base $\{w_1^k, w_2^k, \dots, w_j^k, \dots\}$ para $V \cap H^2(\Omega)$. Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ a base $\{w_1^k, \dots, w_j^k, \dots\}$ é tal qual, $u_k^0, u_k^1 \in [w_1^k, w_2^k]$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ consideremos o subespaço $V_m^k = [w_1^k, \dots, w_m^k]$ gerado pelos m primeiros w_j^k da base $\{w_1^k, \dots, w_j^k, \dots\}$. Encontraremos soluções $u_{km}(t) \in V_m^k$, onde $t \in [0, t_{km})$ e $t_{km} > 0$, para o problema aproximado

$$\begin{cases} (u_{km}''(t), v) + ((u_{km}(t), v)) + (|u_{km}(t)|^\rho, v) + \int_{\Gamma_1} \delta p(u_{km}'(t)) v d\Gamma = (f(t), v), & \forall v \in V_m^k, \\ u_{km}(0) = u_k^0, \quad u_{km}'(0) = u_k^1, \end{cases} \quad (3.34)$$

tal que

$$u_{km}(t) = \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k,$$

onde $g_{kjm}(t)$ são escalares determinados pela base $\{w_1^k, \dots, w_m^k\}$ do espaço vetorial V_m^k . A razão de (3.34) é a seguinte. Se considerarmos o Problema (7) com $h = \delta p$, para cada $t \in [0, T]$ fixo, teríamos

$$\begin{cases} u''(t) - \Delta u(t) + |u(t)|^\rho = f(t) & \text{sobre } \Omega, \\ u(t) = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) + \delta p(u'(t)) = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \quad (3.35)$$

onde $|u(t)|^\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, é definida por $|u(t)|^\rho(x) = |u(x, t)|^\rho$, para todo $x \in \Omega$. Agora, multiplicando a primeira equação do problema (3.35) acima por uma função $v \in V$ e integrando sobre Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} [u''(t)](x)v(x)dx - \int_{\Omega} [\Delta u(t)](x)v(x)dx + \int_{\Omega} [|u(t)|^\rho](x)v(x)dx = \int_{\Omega} [f(t)](x)v(x)dx, \quad \forall v \in V.$$

Usando a segunda fórmula de Green (Teorema 2.18), tem-se

$$(u''(t), v) + ((u(t), v)) + (|u(t)|^\rho, v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma = (f(t), v), \quad \forall v \in V.$$

Portanto, a segunda e terceira equação do problema (3.35), implica

$$(u''(t), v) + ((u(t), v)) + (|u(t)|^\rho, v) + \int_{\Gamma_1} \delta p(u'(t))v d\Gamma = (f(t), v), \quad \forall v \in V. \quad (3.36)$$

Substituindo u por u_{km} em (3.36), obtemos (3.34).

Queremos encontrar uma função $u(t)$ para o qual a equação (3.36) seja verificada. Note que, sob as condições de contorno, se para cada t , $u(t)$ satisfizer o problema variacional (3.36), ele será uma boa aproximação para uma possível solução do problema pontual (3.35). Para tal, procuraremos soluções aproximadas nos subespaços de dimensão finita V_m^k .

Considerando o problema aproximado (3.34), mostraremos que o mesmo possui uma solução local para cada par (k, m) no espaço de dimensão finita V_m^k .

Suponha que exista uma função $u_{km}(t) = \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t)w_j^k$ satisfazendo o problema (3.34). Então, como $w_i^k \in V_m^k$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m g''_{kjm}(t)w_j^k, w_i^k \right) &+ \left(\left(\sum_{j=1}^m g_{kjm}(t)w_j^k, w_i^k \right) \right) + \left(\left| \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t)w_j^k \right|^\rho, w_i^k \right) \\ &+ \int_{\Gamma_1} \delta p \left(\sum_{j=1}^m g'_{kjm}(t)w_j^k \right) w_i^k d\Gamma = (f(t), w_i^k), \end{aligned} \quad (3.37)$$

logo, podemos reescrever a equação (3.37) na seguinte forma matricial.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (w_1^k, w_1^k) & (w_2^k, w_1^k) & \cdots & (w_m^k, w_1^k) \\ (w_1^k, w_2^k) & (w_2^k, w_2^k) & \cdots & (w_m^k, w_2^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_m^k) & (w_2^k, w_m^k) & \cdots & (w_m^k, w_m^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g''_{k1m}(t) \\ g''_{k2m}(t) \\ \vdots \\ g''_{kmm}(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} ((w_1^k, w_1^k)) & ((w_2^k, w_1^k)) & \cdots & ((w_m^k, w_1^k)) \\ ((w_1^k, w_2^k)) & ((w_2^k, w_2^k)) & \cdots & ((w_m^k, w_2^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((w_1^k, w_m^k)) & ((w_2^k, w_m^k)) & \cdots & ((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{k1m}(t) \\ g_{k2m}(t) \\ \vdots \\ g_{kmm}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} \left(\left| \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k \right|^\rho, w_1^k \right) \\ \left(\left| \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k \right|^\rho, w_2^k \right) \\ \vdots \\ \left(\left| \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k \right|^\rho, w_m^k \right) \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_1} \delta p(w_1^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_1^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_1^k) w_m^k d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \delta p(w_2^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_2^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_2^k) w_m^k d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \delta p(w_m^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_m^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_m^k) w_m^k d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_{k1m}(t) \\ g'_{k2m}(t) \\ \vdots \\ g'_{kmm}(t) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} (f(t), w_1^k) \\ (f(t), w_2^k) \\ \vdots \\ (f(t), w_m^k) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Denotemos cada matriz acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} (w_1^k, w_1^k) & (w_2^k, w_1^k) & \cdots & (w_m^k, w_1^k) \\ (w_1^k, w_2^k) & (w_2^k, w_2^k) & \cdots & (w_m^k, w_2^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_m^k) & (w_2^k, w_m^k) & \cdots & (w_m^k, w_m^k) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} g_{k1m}(t) \\ g_{k2m}(t) \\ \vdots \\ g_{kmm}(t) \end{pmatrix}, \\
A &= \begin{pmatrix} ((w_1^k, w_1^k)) & ((w_2^k, w_1^k)) & \cdots & ((w_m^k, w_1^k)) \\ ((w_1^k, w_2^k)) & ((w_2^k, w_2^k)) & \cdots & ((w_m^k, w_2^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((w_1^k, w_m^k)) & ((w_2^k, w_m^k)) & \cdots & ((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \left(\left| \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k \right|^\rho, w_1^k \right) \\ \left(\left| \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k \right|^\rho, w_2^k \right) \\ \vdots \\ \left(\left| \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k \right|^\rho, w_m^k \right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$G = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_1} \delta p(w_1^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_1^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_1^k) w_m^k d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \delta p(w_2^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_2^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_2^k) w_m^k d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \delta p(w_m^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_m^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} \delta p(w_m^k) w_m^k d\Gamma \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} (f(t), w_1^k) \\ (f(t), w_2^k) \\ \vdots \\ (f(t), w_m^k) \end{pmatrix}.$$

Das condições iniciais, obtemos

$$u_{km}(0) = \sum_{j=1}^m g_{kjm}(0) w_j^k = u_k^0 \quad \text{e} \quad u'_{km}(0) = \sum_{j=1}^m g'_{kjm}(0) w_j^k = u_k^1.$$

Assim,

$$z(0) = \begin{pmatrix} g_{k1m}(0) \\ g_{k2m}(0) \\ \vdots \\ g_{kmm}(0) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z'(0) = \begin{pmatrix} g'_{k1m}(0) \\ g'_{k2m}(0) \\ \vdots \\ g'_{kmm}(0) \end{pmatrix},$$

Desta forma, obtemos a seguinte EDO:

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) + H + Gz'(t) = F, \\ z(0) = [g_{k1m}(0), g_{k2m}(0), \dots, g_{kmm}(0)]^T, \quad z'(0) = [g'_{k1m}(0), g'_{k2m}(0), \dots, g'_{kmm}(0)]^T \end{cases} \quad (3.38)$$

Afirmamos que a matriz C é inversível. Com efeito, como C é uma matriz real e simétrica, é auto-adjunta, e portanto diagonalizável, isto é, existe M inversível tal que $D = M^{-1}CM$, é uma matriz diagonal. Então é suficiente mostrar que D é inversível, ou equivalentemente, que zero não é autovalor de D . Assim, suponha por absurdo que exista um vetor $v \neq 0$ tal que $Dv = 0$, logo $M^{-1}CMv = 0$. Como M é inversível, temos $Mv \neq 0$ e $CMv = 0$, pois caso contrário $M^{-1}CMv \neq 0$, uma vez que M^{-1} é inversível.

Considere,

$$Mv = \varphi := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Então,

$$CMv = C\varphi = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j^k, w_1^k) \\ \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j^k, w_2^k) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j^k, w_m^k) \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k, w_1^k\right) = 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$. Assim, o vetor $\alpha = \sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k$ é ortogonal a todo vetor de V_m^k . Em particular, $(\alpha, \alpha) = 0$, e portanto $\alpha = 0$. Daí,

$$\alpha = \sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k = 0 \quad \text{implica} \quad \varphi_j = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Logo, $\varphi = 0$, e portanto $0 = \varphi = Mv$. O que é um absurdo, uma vez que $Mv \neq 0$. Esta contradição demonstra o afirmado.

Como C é inversível, podemos escrever a equação diferencial (3.38) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}H + C^{-1}Gz'(t) = C^{-1}F, \\ z(0) = [g_{k1m}(0), g_{k2m}(0), \dots, g_{kmm}(0)]^T, \quad z'(0) = [g'_{k1m}(0), g'_{k2m}(0), \dots, g'_{kmm}(0)]^T \end{cases} \quad (3.39)$$

Defina,

$$Y_1(t) = z(t), \quad Y_2(t) = z'(t) \quad \text{e} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{pmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_2(t) \\ C^{-1}F - C^{-1}Az(t) - C^{-1}H - C^{-1}Gz'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}F - C^{-1}H \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto a equação (3.39) pode ser representada pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}F - C^{-1}H \end{pmatrix}, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \quad (3.40)$$

O Problema (3.40) é equivalente ao problema aproximado (3.34). Mostraremos que (3.40) possui solução local usando o Teorema de Carathéodory. Considere

$$h : \mathbb{R}^{2m} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \quad (3.41)$$

definida por $h(t, y) = M(y, t) + N(t)$, onde

$$M(y, t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} y \quad \text{e} \quad N(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}F - C^{-1}H \end{pmatrix},$$

onde $y = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{2m})$.

A função h acima definida, satisfaz as condições de Carathéodory (ver Definição 1.24). Com efeito,

1. Para todo $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixo, tem-se que $h(y, t)$ é mensurável. De fato, como δ e p são contínuas temos que N é mensurável. Por outro lado, seja $y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$. A aplicação $M(y_0, \cdot)$ é mensurável, uma vez que $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$.

2. Para todo t fixo, h é contínua como função de y . Com efeito, seja $t_0 \in [0, T]$. Então N é constante. Como δ e p são contínuas, segue que $M(\cdot, t_0)$ linear e contínua.

3. Seja $K \subset \mathbb{R}^{2m}$ um subconjunto compacto. A função N é contínua em $[0, T]$ por definição. Além disso, também por definição, segue que $M(\cdot, t_0)$ é contínua, para cada $t_0 \in [0, T]$, e portanto contínua em $K \times [0, T]$. Assim, existe constantes positivas M_K e N_K , tais que

$$\|M(y, t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K \quad \text{e} \quad \|N(t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq N_K.$$

Logo,

$$\|h(y, t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|M(y, t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|N(t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq 2C_K,$$

onde $C_K = \max\{M_K, N_K\}$.

Portanto, pelo teorema de Carathéodory (Teorema 1.16), segue que para cada par de índices (k, m) , existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial (3.40) em algum intervalo $[0, t_{km})$, com $t_{km} > 0$. Da equivalência dos problemas (3.40) e (3.34), decorre que, para cada par de índices (k, m) , o problema aproximado (3.34) possui uma solução u_{km} definida no intervalo $[0, t_{km})$, tal que $u_{km}(t) \in V_k^m$.

3.2.2 Estimativas a Priori

Nesta subseção, conseguiremos estimativas a priori para as soluções u_{km} definida em $[0, t_{km})$ com $t_{km} > 0$ encontradas na seção anterior, com o intuito de prolongar seu domínio de definição a todo intervalo $[0, T]$. Contudo, so foi possível estende-la ao intervalo $[0, T_0] \subset [0, T]$, onde T_0 é a

constante positiva descrita em (3.31). Para isto, usaremos o teorema do prolongamento (Teorema 1.17).

Primeira estimativa:

Como $u'_{km}(t) = \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k$, então $u'_{km}(t) \in V_m^k$ e, de acordo com (3.34) temos

$$\begin{aligned} (u''_{km}(t), u'_{km}(t)) + ((u_{km}(t), u'_{km}(t))) + (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)) \\ + \int_{\Gamma_1} \delta p(u'_{km}(t))u'_{km}(t)d\Gamma = (f(t), u'_{km}(t)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Note que,

$$\frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(u'_{km}(t), u'_{km}(t)) = (u'_{km}(t), u''_{km}(t)) + (u''_{km}(t), u'_{km}(t)) = 2(u''_{km}(t), u'_{km}(t)),$$

e de maneira análoga,

$$\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}((u_{km}(t), u_{km}(t))) = 2((u_{km}(t), u'_{km}(t))) \text{ (ver Proposição 1.18).}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 = (u''_{km}(t), u'_{km}(t)) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2 = ((u_{km}(t), u'_{km}(t))). \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) em (3.42), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2 + (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)) \\ + \int_{\Gamma_1} \delta p(u'_{km}(t))u'_{km}(t)d\Gamma = (f(t), u'_{km}(t)), \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2 + \int_{\Gamma_1} \delta p(u'_{km}(t))u'_{km}(t)d\Gamma \\ = (f(t), u'_{km}(t)) - (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por outro lado, em virtude da desigualdade de Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} |(|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t))| &\leq | |u_{km}(t)|^\rho | \cdot |u'_{km}(t)| = \left(\int_{\Omega} | |u_{km}(t)|^\rho(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot |u'_{km}(t)| \\ &= \left(\int_{\Omega} |u_{km}(t)(x)|^{2\rho} dx \right)^{\frac{\rho}{2\rho}} \cdot |u'_{km}(t)| = \|u_{km}(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^\rho \cdot |u'_{km}(t)| \end{aligned}$$

e, em virtude de (3.5) segue que

$$|(|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t))| \leq \|u_{km}(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^\rho \cdot |u'_{km}(t)| \leq (C_1)^\rho \|u_{km}(t)\|^\rho \cdot |u'_{km}(t)|. \quad (3.45)$$

Defina,

$$\varphi_{km}(t) = \frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2 + 1. \quad (3.46)$$

Combinando (3.44) e (3.46) temos

$$\frac{d}{dt}\varphi_{km}(t) + \int_{\Gamma_1} \delta p(u'_{km}(t))u'_{km}(t)d\Gamma = (f(t), u'_{km}(t)) - (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)). \quad (3.47)$$

Por outro lado, segue da identificação feita na Observação 3.2 e das hipóteses (3.1) e (3.2) que,

$$p(u'_{km}(x, t))u'_{km}(x, t) = [p(u'_{km}(x, t)) - p(0)][u'_{km}(x, t)] \geq b_0[u'_{km}(x, t)]^2 \quad e \quad \delta(x) \geq \delta_0$$

para cada $x \in \Gamma_1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_{km}(t) + \delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} (u'_{km}(t))^2 d\Gamma &= \frac{d}{dt}\varphi_{km}(t) + \int_{\Gamma_1} \delta_0 b_0 (u'_{km}(t))^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{d}{dt}\varphi_{km}(t) + \int_{\Gamma_1} \delta p(u'_{km}(t))u'_{km}(t)d\Gamma \\ &= (f(t), u'_{km}(t)) - (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)). \end{aligned} \quad (3.48)$$

De (3.48), da desigualdade de Schwarz e de (3.45) segue que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_{km}(t) + \delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} (u'_{km}(t))^2 d\Gamma &\leq (f(t), u'_{km}(t)) - (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)) \\ &\leq |f(t)| \cdot |u'_{km}(t)| + (C_1)^\rho \|u_{km}(t)\|^\rho \cdot |u'_{km}(t)|. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como

$$\varphi_{km}(t) = \frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2 + 1,$$

temos

$$\frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2 = \varphi_{km}(t) - \left(\frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 + 1\right) \leq \varphi_{km}(t)$$

logo,

$$\|u_{km}(t)\| \leq 2^{\frac{1}{2}}(\varphi_{km}(t))^{\frac{1}{2}}$$

e, portanto

$$\|u_{km}(t)\|^\rho \leq 2^{\frac{\rho}{2}}(\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho}{2}}. \quad (3.50)$$

De maneira análoga, obtemos

$$|u'_{km}(t)| \leq 2^{\frac{1}{2}}(\varphi_{km}(t))^{\frac{1}{2}} \quad (3.51)$$

Como $\varphi_{km}(t) \geq 1$, das desigualdades (3.50) e (3.51), segue que

$$\begin{aligned}
|f(t)||u'_{km}(t)| + (C_1)^\rho \|u_{km}(t)\|^\rho \cdot |u'_{km}(t)| &\leq 2^{\frac{1}{2}} |f(t)| (\varphi_{km}(t))^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{\rho+1}{2}} \cdot (C_1)^\rho (\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}} |f(t)| (\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}} + 2^{\frac{\rho+1}{2}} \cdot (C_1)^\rho (\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}} \\
&= [2^{\frac{1}{2}} |f(t)| + 2^{\frac{\rho+1}{2}} \cdot (C_1)^\rho] (\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}} \\
&\leq [2^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + 2^{\frac{\rho+1}{2}} \cdot (C_1)^\rho] (\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|f(t)||u'_{km}(t)| + (C_1)^\rho \|u_{km}(t)\|^\rho \cdot |u'_{km}(t)| \leq N(\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}} \quad (3.52)$$

onde,

$$N = 2^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + 2^{\frac{\rho+1}{2}} \cdot (C_1)^\rho.$$

Combinando (3.49) e (3.52), temos

$$\frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) + \delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} (u'_{km}(t))^2 d\Gamma \leq N(\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}}. \quad (3.53)$$

Isto é,

$$(\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) \leq N.$$

Como $\frac{2}{1-\rho} < 0$, temos

$$\frac{2}{1-\rho} (\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) \geq \frac{2}{1-\rho} N. \quad (3.54)$$

Note que,

$$\frac{d}{dt} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}} = \left(\frac{1-\rho}{2}\right) (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}-1} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) = \frac{1-\rho}{2} (\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t)$$

logo,

$$\frac{2}{1-\rho} \frac{d}{dt} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}} = (\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t). \quad (3.55)$$

De (3.54) e (3.55) resulta que,

$$\frac{d}{dt} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}} = \frac{1-\rho}{2} (\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) \geq \frac{2}{1-\rho} N. \quad (3.56)$$

Integrando a desigualdade (3.56) de 0 a t_0 , onde $t_0 \in (0, T]$, obtemos

$$\int_0^{t_0} \frac{d}{dt} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}} dt \geq \int_0^{t_0} \frac{1-\rho}{2} N dt.$$

Isto é,

$$(\varphi_{km}(t_0))^{\frac{1-\rho}{2}} - (\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} \geq \frac{1-\rho}{2} N t_0.$$

Logo,

$$(\varphi_{km}(t_0))^{\frac{1-\rho}{2}} \geq (\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} + \frac{1-\rho}{2} N t_0 = (\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} - M t_0, \quad \forall t_0 \in (0, T], \quad (3.57)$$

onde $M = \frac{(\rho-1)}{2} N$.

De (3.46) e das condições iniciais do problema aproximado (3.34), obtemos

$$\varphi_{km}(0) = \frac{1}{2} |u'_{km}(0)|^2 + \frac{1}{2} \|u_{km}(0)\|^2 + 1 = \frac{1}{2} |u_k^1|^2 + \frac{1}{2} \|u_k^0\|^2 + 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim, de (3.33), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \varphi_{km}(0) - \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 1 \right) \right| < 1 \quad \text{sempre que } k \geq k_0.$$

Portanto,

$$\varphi_{km}(0) < \frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2.$$

Logo,

$$(\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} > \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{1-\rho}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } \forall k \geq k_0.$$

Assim, de (3.57)

$$(\varphi_{km}(t_0))^{\frac{1-\rho}{2}} \geq (\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} - M t_0 > \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{1-\rho}{2}} - M, \quad (3.58)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $k \geq k_0$. Considerando,

$$T_0 = \min \left\{ \frac{1}{2M} \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{(1-\rho)}{2}}, T \right\},$$

temos que

$$t \leq T_0 \leq \frac{1}{2M} \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{(1-\rho)}{2}},$$

para cada $t \in [0, T_0]$. Logo,

$$M t \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{(1-\rho)}{2}}, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Então, segue de (3.58) que

$$\begin{aligned} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}} &\geq \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{1-\rho}{2}} - M t \\ &\geq \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{1-\rho}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{(1-\rho)}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{1-\rho}{2}}, \quad \forall t \in [0, T_0]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\varphi_{km}(t) \leq 2^{\frac{2}{\rho-1}} \left(\frac{1}{2}|u^1|^2 + \frac{1}{2}\|u^0\|^2 + 2 \right) = P, \quad \forall t \in [0, T_0], \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.59)$$

Combinando (3.46) e (3.59), obtemos

$$\frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2 + 1 \leq P.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2 + 1 \leq P,$$

e de maneira análoga,

$$\frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2 \leq P.$$

Portanto,

$$\|u_{km}(t)\| \leq \sqrt{2P} \quad \text{e} \quad |u'_{km}(t)| \leq \sqrt{2P}. \quad (3.60)$$

Como P é uma constante real que independe de k e de m qualquer que seja o $t \in [0, T_0]$, as limitações (3.60) nos permite usar o teorema do prolongamento (Teorema 1.17) para estender a solução aproximada $u_{km}(t)$ definida em $[0, t_{km})$ para todo o intervalo $[0, T_0]$.

Além disso,

$$\|u_{km}\|_{L^\infty(0, T_0; V)} \leq \sqrt{2P} \quad \text{e} \quad \|u'_{km}\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2P}. \quad (3.61)$$

Por outro lado, combinando as desigualdades (3.53) e (3.59), encontramos

$$\delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} (u'_{km}(t))^2 d\Gamma \leq N(\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}} \leq N \cdot P^{\frac{\rho+1}{2}}.$$

Logo,

$$\|u'_{km}\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))} \leq (\delta_0)^{-1} (b_0)^{-1} N \cdot P^{\frac{\rho+1}{2}}. \quad (3.62)$$

Assim, das limitações (3.61) e da limitação (3.62), obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (u_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T_0; V), \\ (u'_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ (u'_{km}) \text{ é limitado em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \end{array} \right. \quad (3.63)$$

independente do $k \geq k_0$ e do $m \in \mathbb{N}$.

Segunda estimativa

Derivando a equação aproximada (3.34) com respeito a variável t , obtemos

$$\begin{aligned} (u_{km}'''(t), v) &+ ((u_{km}'(t), v)) + \rho(|u_{km}(t)|^{\rho-1} \cdot \frac{u_{km}(t)u_{km}'(t)}{|u_{km}(t)|}, v) \\ &+ \frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_1} \delta p(u_{km}'(t)) v d\Gamma \right) = \frac{d}{dt} (f(t), v), \quad \forall v \in V_m^k, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} (u_{km}'''(t), v) &+ ((u_{km}'(t), v)) + (\rho|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u_{km}'(t), v) \\ &+ \int_{\Gamma_1} \delta p'(u_{km}'(t)) [u_{km}''(t)] v d\Gamma = (f'(t), v), \quad \forall v \in V_m^k. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Substituindo $u_{km}''(t) = \sum_{j=1}^m g_{jkm}''(t) w_j^k \in V_m^k$ em (3.64), encontramos

$$\begin{aligned} (u_{km}'''(t), u''(t)) &+ ((u_{km}'(t), u''(t))) + (\rho|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u_{km}'(t), u''(t)) \\ &+ \int_{\Gamma_1} \delta p'(u_{km}'(t)) [u_{km}''(t)] u_{km}''(t) d\Gamma = (f'(t), u''(t)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u''(t)|^2 + \|u_{km}'(t)\|^2] &+ (\rho|u_{km}(t)|^{\rho-1} u_{km}(t) u_{km}'(t), u_{km}''(t)) \\ &+ \int_{\Gamma_1} \delta p'(u_{km}'(t)) [u_{km}''(t)]^2 d\Gamma = (f'(t), u_{km}''(t)). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Como $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2} = 1$, da desigualdade de Hölder generalizada (Proposição 5.28), temos que

$$\begin{aligned} |(|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u_{km}'(t), u_{km}''(t))| &= \left| \int_{\Omega} [|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u_{km}'(t) u_{km}''(t)](x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} [|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u_{km}'(t) u_{km}''(t)](x) dx \\ &\leq \| |u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) \|_{L^n(\Omega)} \cdot \| u_{km}'(t) \|_{L^q(\Omega)} \cdot |u_{km}''(t)|. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \| |u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) \|_{L^n(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} [|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t)](x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\int_{\Omega} [|u_{km}(t)|^{\rho-1}](x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u_{km}(t)(x)|^{(\rho-1)n} dx \right)^{\frac{\rho-1}{(\rho-1)n}} \\ &= \| u_{km}(t) \|_{L^{(\rho-1)n}}^{\rho-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |(|u_{km}(t)|^{\rho-2}u_{km}(t)u'_{km}(t), u''_{km}(t))| &\leq \| |u_{km}(t)|^{\rho-2}u_{km}(t) \|_{L^n(\Omega)} \cdot \|u'_{km}(t)\|_{L^q(\Omega)} \cdot |u''_{km}(t)| \\ &= \|u_{km}(t)\|_{L^{(\rho-1)n}}^{\rho-1} \cdot \|u'_{km}(t)\|_{L^q(\Omega)} \cdot |u''_{km}(t)|. \end{aligned}$$

Assim, decorre das imersões obtidas na Observação 3.4, que

$$\begin{aligned} \rho |(|u_{km}(t)|^{\rho-2}u_{km}(t)u'_{km}(t), u''_{km}(t))| &\leq \rho \|u_{km}(t)\|_{L^{(\rho-1)n}(\Omega)}^{\rho-1} \cdot \|u'_{km}(t)\|_{L^q(\Omega)} \cdot |u''_{km}(t)| \\ &\leq \rho(C_2)^{\rho-1} \cdot C_0 \|u_{km}(t)\|^{\rho-1} \cdot \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)| \quad (3.66) \end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.59), segue que

$$P \geq \varphi_{km}(t) = \frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 + \|u_{km}(t)\|^2 + 1 > \frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2,$$

e portanto,

$$\|u_{km}(t)\|^2 < 2P$$

logo,

$$\|u_{km}(t)\|^{\rho-1} < (2P)^{\frac{\rho-1}{2}}. \quad (3.67)$$

De (3.66), temos

$$\begin{aligned} |\rho(|u_{km}(t)|^{\rho-2}u_{km}(t)u'_{km}(t), u''_{km}(t))| &\leq \rho(C_2)^{\rho-1} \cdot C_0 \|u_{km}(t)\|^{\rho-1} \cdot \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)| \\ &\leq \rho(C_2)^{\rho-1} \cdot C_0 \cdot 2^{\frac{\rho-1}{2}} \cdot P^{\frac{\rho-1}{2}} \cdot \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)|, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\rho(|u_{km}(t)|^{\rho-2}u_{km}(t)u'_{km}(t), u''_{km}(t))| \leq R \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)|, \quad (3.68)$$

onde $R = \rho(C_2)^{\rho-1} \cdot C_0 \cdot 2^{\frac{\rho-1}{2}} \cdot P^{\frac{\rho-1}{2}}$.

Da hipótese (3.1), segue que

$$\frac{p(s) - p(r)}{r - s} \geq b_0, \text{ e portanto } p'(s) = \lim_{r \rightarrow s} \frac{p(r) - p(s)}{r - s} \geq b_0, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.69)$$

Assim, decorre de (3.69) e da hipótese (3.2), que

$$\int_{\Gamma_1} \delta p'(u'_{km}(t)) [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma \geq \int_{\Gamma_1} \delta_0 b_0 [u''_{km}(t)(x)]^2 d\Gamma = \delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma. \quad (3.70)$$

Então, combinando as desigualdades (3.68) e (3.70) com a equação (3.65), encontramos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] + \delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma \\
& \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] + \int_{\Gamma_1} \delta p'(u'_{km}(t)) [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma \\
& = (f'(t), u''_{km}(t)) - (\rho |u_{km}(t)|^{\rho-1} u_{km}(t) u'_{km}(t), u''_{km}(t)) \\
& \leq (f'(t), u''_{km}(t)) + R \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)|.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Schwarz (Proposição 5.15) e Young (Proposição 5.26), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u''(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] + \delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma \\
& \leq (f'(t), u''_{km}(t)) + R \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)| \\
& \leq |f'(t)| \cdot |u''_{km}(t)| + R \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)| \\
& \leq \frac{1}{2} |f'(t)|^2 + \frac{1}{2} |u''_{km}(t)|^2 + \frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + \frac{1}{2} |u''_{km}(t)|^2 \\
& = \frac{1}{2} |f'(t)|^2 + \frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + |u''_{km}(t)|^2,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo $[0, t_0]$, onde $t_0 \in (0, T_0]$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} [|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] dt + \delta_0 \cdot b_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^{t_0} |f'(t)|^2 dt + \int_0^{t_0} \left[\frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + |u''_{km}(t)|^2 \right] dt.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [|u''_{km}(t_0)|^2 + \|u'_{km}(t_0)\|^2] + \delta_0 b_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \\
& \leq \frac{1}{2} |u''_{km}(0)|^2 + \frac{1}{2} \|u'_{km}(0)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} |f'(t)|^2 dt + \int_0^{t_0} \left[\frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + |u''_{km}(t)|^2 \right] dt, \quad (3.71)
\end{aligned}$$

para todo $t_0 \in [0, T_0]$.

Almejamos usar a desigualdade de Gronwall (Teorema 1.18) na desigualdade (3.71) a fim de obter estimativas para $u''_{km}(t)$ e para $u'_{km}(t)$. Para tal, precisamos encontrar uma cota superior para $u''_{km}(0)$ em $L^2(\Omega)$. Obtemos esta limitação graças a escolha da base espacial de $V \cap H^2(\Omega)$ construída no início desta seção, a qual é o ponto chave da demonstração.

Afirmamos que $u''_{km}(0)$ é limitada em $L^2(\Omega)$. De fato, tomando $t = 0$ na equação aproximada (3.34), obtemos

$$(u''_{km}(0), v) + ((u_{km}(0), v)) + (|u_{km}(0)|^\rho, v) + \int_{\Gamma_1} \delta p(u'_{km}(0)) v d\Gamma = (f(0), v),$$

para cada $v \in V_m^k$. Como $u_{km}(0) = u_k^0$ e $u'_{km}(0) = u_k^1$, temos

$$(u''_{km}(0), v) + ((u_k^0, v)) + (|u_k^0|^\rho, v) + \int_{\Gamma_1} \delta p(u_k^1) v d\Gamma = (f(0), v),$$

para cada $v \in V_m^k$.

Pela segunda fórmula de Green generalizada (Teorema 2.18), encontramos

$$(u''_{km}(0), v) - (\Delta u_k^0, v) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_k^1}{\partial \nu} v d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \delta p(u_k^1) v d\Gamma + (|u_k^0|^\rho, v) = (f(0), v),$$

para todo $v \in V_m^k$. Por hipótese, $\frac{\partial u_k^0}{\partial \nu} = -\delta p(u_k^1)$ sobre Γ_1 . Então,

$$(u''_{km}(0), v) - (\Delta u_k^0, v) + (|u_k^0|^\rho, v) = (f(0), v), \quad \forall v \in V_m^k. \quad (3.72)$$

Considerando $v = u''_{km}(0)$ em (3.72), obtemos

$$(u''_{km}(0), u''_{km}(0)) - (\Delta u_k^0, u''_{km}(0)) + (|u_k^0|^\rho, u''_{km}(0)) = (f(0), u''_{km}(0)).$$

Usando a desigualdade de Schwarz, e as limitações em (3.5), tem-se

$$\begin{aligned} |u''_{km}(0)|^2 &= (f(0), u''_{km}(0)) - (|u_k^0|^\rho, u''_{km}(0)) + (\Delta u_k^0, u''_{km}(0)) \\ &\leq |f(0)| \cdot |u''_{km}(0)| + \|u_k^0\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^\rho \cdot |u''_{km}(0)| + |\Delta u_k^0| \cdot |u''_{km}(0)| \\ &\leq [|f(0)| + (C_1)^\rho \|u_k^0\|^\rho + |\Delta u_k^0|] \cdot |u''_{km}(0)|. \end{aligned}$$

Logo,

$$|u''_{km}(0)| \leq |f(0)| + (C_1)^\rho \|u_k^0\|^\rho + |\Delta u_k^0|.$$

Das convergências em (3.33), encontramos constantes positivas E_1 e E_2 , tais que

$$\|u_k^0\|^\rho < E_1 \quad \text{e} \quad |\Delta u_k^0| < E_2.$$

Assim,

$$|u_{km}(0)| \leq |f(0)| + (C_1)^\rho E_1 + E_2 = E \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3.73)$$

provando o afirmado.

Como $f \in H^1(0, T, L^2(\Omega))$ e $u'_{km}(0) = u_k^1 \in V$, existem constantes reais positivas A e B , tais que $\int_0^{t_0} |f'(t)|^2 dt \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \|f\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq A$ e $\|u_k^1\| < B$.

Assim, de (3.71) e da limitação encontrada em (3.73) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] + \delta_0 \cdot b_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \\
& \leq \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2} + \frac{A}{2} + \int_0^{t_0} \left[\frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + |u''_{km}(t)|^2 \right] dt \\
& = C + \int_0^{t_0} \left[\frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + |u''_{km}(t)|^2 \right] dt \\
& \leq C + \int_0^{t_0} \left[\frac{F}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + \frac{F}{2} |u''_{km}(t)|^2 \right] dt \\
& = C + \int_0^{t_0} F \left[\frac{1}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + \frac{1}{2} |u''_{km}(t)|^2 \right] dt,
\end{aligned}$$

onde $C = \frac{1}{2}[E^2 + B^2 + A]$ e $F = \max\{R^2, 2\}$. Portanto, podemos usar a desigualdade de Gronwall, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] & \leq \frac{1}{2} [|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] + \delta_0 b_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \\
& \leq C + \int_0^{t_0} F \left[\frac{1}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + \frac{1}{2} |u''_{km}(t)|^2 \right] dt \\
& \leq C e^{\int_0^{t_0} F dt} \leq G,
\end{aligned} \tag{3.74}$$

onde G é uma constante positiva independente de $k \in \mathbb{N}$, de $m \in \mathbb{N}$ e do $t \in [0, T_0]$.

De maneira análoga a que foi feita na primeira estimativa, de (3.74), decorre as seguintes limitações:

$$\left| \begin{array}{l} (u'_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T_0; V), \\ (u''_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ (u''_{km}) \text{ é limitado em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \end{array} \right. \tag{3.75}$$

3.2.3 Passagem ao Limite

Nesta subseção, mostraremos que as soluções aproximadas u_{km} do problema aproximado (3.34), convergem para uma função u , que satisfaz as condições (3.28) e (3.29).

Passagem ao limite quando $m \rightarrow \infty$

Note que os espaços $L^1(0, T; V)$ e $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ são separáveis e $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ é reflexivo, uma vez que V e $L^2(\Omega)$ são separáveis e $L^2(\Gamma_1)$ é reflexivo (ver Proposição 1.16). Por outro lado, as constantes P e G obtidas em (3.59) e (3.74) respectivamente, não dependem de $k \geq k_0$, $m \in \mathbb{N}$

e $t \in [0, T_0]$. Assim, em face ao Teorema 5.13, Teorema 5.12, e as limitações (3.63) e (3.75), para cada k fixo, existe uma subsequência de $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, e uma função u_k tais que

$$\begin{aligned}
u_{km} &\xrightarrow{*} u_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; V), \\
u'_{km} &\xrightarrow{*} u'_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; V), \\
u'_{km} &\xrightarrow{*} u_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\
u''_{km} &\xrightarrow{*} u''_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\
u'_{km} &\rightharpoonup u'_k \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \\
u''_{km} &\rightharpoonup u''_k \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)),
\end{aligned} \tag{3.76}$$

uma vez que, pelo teorema de Riesz-Fréchet e pelo Teorema 1.12, temos as seguintes identificações:

$$L^\infty(0, T; V) \equiv L^\infty(0, T; V') \equiv [L^1(0, T; V)]'$$

e

$$L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]') \equiv [L^1(0, T; L^2(\Omega))]'.$$

Como $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, pela Proposição (1.15), temos $L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Então, das duas primeiras convergências em (3.76), segue que

$$u_{km} \in W = \{u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)); u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\} \quad \forall k \geq k_0, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim, podemos considerar o teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.15) no caso em que temos $p_0 = p_1 = 2$ e $Y = X = Z = L^2(\Omega)$ para obter uma subsequência de $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, que ainda será denotada por $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_{km} \rightarrow u_k \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(\Omega \times (0, T_0)) \text{ (Observação 1.20).}$$

Portanto, da Proposição 5.31, segue que existe uma subsequência de $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ que ainda será denotado por $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, tal que

$$|u_{km}(x, t)|^\rho \rightarrow |u_k(x, t)|^\rho, \text{ q.t.p. em } \Omega \times (0, T_0) := Q_0. \tag{3.77}$$

Por (3.60), temos $\|u_{km}(t)\|^{2\rho} \leq (2P)^\rho$. Logo,

$$\int_\Omega [|u_{km}(t)(x)|^\rho]^2 dx = \|u_{km}(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{2\rho} \leq (C_1)^{2\rho} \|u_{km}(t)\|^{2\rho} \leq (C_1)^{2\rho} \cdot (2P)^\rho, \tag{3.78}$$

onde C_1 é a constante de imersão introduzida em (3.5).

Portanto, existe uma constante real $C > 0$ tal que

$$\| |u_{km}|^\rho \|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))} < C, \quad \forall k \geq k_0 \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.79)$$

De (3.77) e (3.78), podemos utilizar o lema de Lions (Proposição 1.17) para obter

$$|u_{km}(t)|^\rho \rightharpoonup |u_k(t)|^\rho \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.80)$$

Como $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) = [L^1(0, T_0; L^2(\Omega))]'$, de (3.79) e Teorema 5.13, segue que existe uma subseqüência de $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ que ainda será denotado por $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, tal que

$$|u_{km}|^\rho \xrightarrow{*} |u_k|^\rho \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)). \quad (3.81)$$

Do teorema de traço sobre $\gamma_0 : V \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, segue que $\gamma_0(u'_{km}(t)) = [u'_{km}(t)]|_{\Gamma_1}$ e portanto, $\|\gamma_0(u'_{km}(t))\| \leq \|u'_{km}\| \leq C$, para alguma constante C . Daí, existe um vetor β tal que:

$$u'_{km} \xrightarrow{*} \beta \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.82)$$

Por outro lado, $u'_{km} \rightharpoonup u'_k$ em $L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))$. Como $L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))$ (ver Proposição 1.15), de 3.82, decorre que

$$u'_{km} \xrightarrow{*} u'_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.83)$$

Assim, como $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \xrightarrow{comp} L^2(\Gamma_1)$ (Ver [40], página 56 e [11], página 37) podemos utilizar as duas últimas convergências em (3.76) combinada com (3.83) para aplicar o teorema de Aubin-Lions.

Pelo teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(u'_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, que ainda será denotada por $(u'_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u'_{km} \rightarrow u'_k \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)).$$

Como p é lipschitziana e δ contínua, temos

$$\delta p(u'_{km}) \rightarrow \delta p(u'_k) \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)).$$

Portanto, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\|\delta p(u'_{km}(t))\|_{L^2(\Gamma_1)} < A, \quad \forall k \geq k_0, \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } \forall t \in [0, T_0].$$

Assim,

$$\delta p(u'_{km}) \rightarrow \delta p(u'_k) \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \quad (3.84)$$

As convergências em (3.76), (3.81), e (3.84) nos permite passar o limite em m , na equação aproximada (3.34) (observe que $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V).

Passando o limite, multiplicando por uma função $\theta \in L^2(0, T_0)$, e integrando de 0 a T_0 , na equação aproximada (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (u_k''(t), v) \theta(t) dt &+ \int_0^{T_0} ((u_k(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u_k(t)|^\rho, v) \theta(t) dt \\ &+ \int_0^{T_0} \int_{\Gamma_1} \delta p(u_k'(t)) v \theta(t) d\Gamma dt = \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Em particular, considerando funções testes, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T_0)$ na Equação (3.85), encontramos

$$u_k'' - \Delta u_k + |u_k|^\rho = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q_0).$$

A regularidade de u_k e f nos permite escrever

$$u_k'' - \Delta u_k + |u_k|^\rho = f \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)). \quad (3.86)$$

Como $u_k \in L^\infty(0, T_0; V)$ e $\Delta u_k \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$, temos $\frac{\partial u_k}{\partial \nu} \in L^\infty(0, T_0; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$. Multiplicando a Equação (3.86) por $v\theta$, onde $v \in V$ e $\theta \in L^2(0, T_0)$, e integrando sobre $Q_0 = \Omega \times (0, T_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} [u_k''(x, t)] v(x) \theta(t) d(x, t) &- \int_{Q_0} [\Delta u_k(x, t)] v(x) \theta(t) d(x, t) \\ &+ \int_{Q_0} [|u_k|^\rho(x, t)] v(x) \theta(t) d(x, t) = \int_{Q_0} [f(x, t)] v(x) \theta(t) d(x, t). \end{aligned}$$

Usando o teorema de Tonelli Fubini (ver Folland, [10], página 67),

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \left[\int_\Omega [u_k''(t)(x)] v(x) dx \right] \theta(t) dt &- \int_0^{T_0} \left[\int_\Omega [\Delta u_k(t)(x)] v(x) dx \right] \theta(t) dt \\ &+ \int_0^{T_0} \left[\int_\Omega [|u_k(t)(x)|^\rho] v(x) dx \right] \theta(t) dt = \int_0^{T_0} \left[\int_\Omega [f(t)(x)] v(x) dx \right] \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Pela segunda fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (u_k'', v) \theta(t) dt &+ \int_0^{T_0} ((u_k(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u_k(t)|^\rho, v) \theta(t) dt \\ &+ \int_0^{T_0} \left\langle \frac{\partial u_k(t)}{\partial \nu}, v \right\rangle \theta(t) dt = \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Das Equações (3.85) e (3.87), encontramos

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu} + \delta p(u_k') = 0 \text{ em } L^2(0, T_0; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Como $u'_k \in L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$, temos que $\delta p(u'_k) \in L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$, e assim

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu} + \delta p(u'_k) = 0 \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.88)$$

Como $u_k \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$, $\Delta u_k \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$ e $\frac{\partial u_k}{\partial \nu} \in L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$, da Proposição 3.5 segue que

$$u_k \in L^\infty(0, T_0; V \cap H^2(\Omega)). \quad (3.89)$$

Derivando a Equação (3.88) com respeito a variável t , obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial \nu} \right] + \frac{d}{dt} [\delta p(u'_k(x, t))] = 0.$$

Isto é,

$$\frac{\partial u'_k(x, t)}{\partial \nu} + \delta p'(u'_k(x, t))u''_k(x, t) = 0. \quad (3.90)$$

Como $u''_k \in L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))$, de (3.90), segue que

$$\frac{\partial u'_k}{\partial \nu} + \delta p'(u'_k)u''_k = 0 \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Gamma_1)).$$

Passagem ao limite quando $k \rightarrow \infty$

Como as limitações obtidas nas estimativas (3.63) e (3.75) não dependem do $k \geq k_0$, das convergências $u_{km} \xrightarrow{*} u_k$ em $L^\infty(0, T_0; V)$ e $u'_{km} \rightharpoonup u'_k$ em $L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))$ obtidas em (3.76), do Teorema 5.22 e, do Teorema 5.20, existem constantes reais $L_1 > 0$ e L_2 tais que

$$\|u'_k\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))} \leq \liminf \|u'_{km}\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))} \leq L_1 \quad \forall k > k_0 \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}$$

e,

$$\|u_k\|_{L^\infty(0, T_0; V)} \leq \liminf \|u_{km}\|_{L^\infty(0, T_0; V)} \leq L_2 \quad \forall k > k_0 \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim, passando o limite quando $k \rightarrow \infty$ em $(u_k)_{k \geq k_0}$ obtemos uma função $u : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T_0; V) \quad \text{e} \quad u'_k \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \quad (3.91)$$

De maneira análoga, (usando as outras convergências em (3.76)) obtemos

$$\begin{aligned} u'_k &\xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T_0; V), \\ u'_k &\xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ u''_k &\xrightarrow{*} u'' \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ u''_k &\rightharpoonup u'' \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Portanto, de maneira similar, obtemos as seguintes regularidades:

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T_0; V \cap H^2(\Omega)), \\ u' &\in L^\infty(0, T_0; V), \\ u'' &\in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \end{aligned}$$

satisfazendo,

$$\begin{aligned} u'' - \Delta u + |u|^\rho &= f && \text{em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta p(u') &= 0 && \text{em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)), \\ \frac{\partial u'}{\partial \nu} + \delta p'(u')u'' &= 0 && \text{em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \end{aligned}$$

3.2.4 Condições Iniciais

Nesta subseção, verificaremos se a função u encontrada acima verifica os dados iniciais (3.30), e portanto, é uma solução para o Problema (7) proposto na Introdução.

Inicialmente, notemos que faz sentido calcular os valores das funções $u : (0, T_0) \rightarrow V \cap H^2(\Omega)$ e $u' : (0, T_0) \rightarrow V$, no tempo $t = 0$. De fato, da cadeia de imersão $V \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e das seguintes regularidades, $u \in L^\infty(0, T_0; V \cap H^2(\Omega))$, $u' \in L^\infty(0, T_0; V)$ e $u'' \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$, segue que $u \in C^0([0, T_0]; V)$ e $u' \in C^0([0, T_0]; L^2(\Omega))$ (ver Corolário 1.14). Portanto, as funções $u(0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $u'(0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ estão bem definidas. Além disso, com a mesma razão, estão bem definidas as funções $u(T_0)$, $u'(T_0)$, $u_k(0)$, $u'_k(0)$, $u_k(T_0)$ e $u'_k(T_0)$.

Das convergências $u_k \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T_0; V)$ e $u'_k \xrightarrow{*} u'$ em $L^\infty(0, T_0; V)$ obtidas em (3.91) e (3.92) respectivamente, obtemos

$$\int_0^{T_0} ((u_k(t), v))\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^{T_0} ((u(t), v))\theta'(t)dt$$

e,

$$\int_0^{T_0} ((u'_k(t), v))\theta(t)dt \rightarrow \int_0^{T_0} ((u'(t), v))\theta(t)dt$$

quaisquer que seja as funções $v \in V = V'$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T_0)$. Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} [((u_k(t), v))\theta(t)]dt &= \int_0^{T_0} ((u_k(t), v))\theta'(t) + ((u'_k(t), v))\theta(t)dt \\ &= \int_0^{T_0} ((u_k(t), v))\theta'(t)dt + \int_0^{T_0} ((u'_k(t), v))\theta(t)dt \\ &\rightarrow \int_0^{T_0} ((u(t), v))\theta'(t)dt + \int_0^{T_0} ((u'(t), v))\theta(t)dt \\ &= \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} [((u(t), v))\theta(t)]dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$((u_k(T_0), v))\theta(T_0) - ((u_k(0), v))\theta(0) \rightarrow ((u(T_0), v))\theta(T_0) - ((u(0), v))\theta(0),$$

para todo $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T_0)$. Em particular, para θ tal que $\theta(T_0) = 0$ e $\theta(0) = 1$, segue que

$$((u_k(0), v)) \rightarrow ((u(0), v)) \quad \forall v \in V.$$

Logo,

$$u_k(0) \xrightarrow{*} u(0) \text{ em } V.$$

Da imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$u_k(0) \xrightarrow{*} u(0) \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.93)$$

Por outro lado, da convergência $u_k^0 \rightarrow u^0$ em $V \cap H^2(\Omega)$, obtida em (3.33), temos

$$u_k^0 \rightarrow u^0 \text{ em } L^2(\Omega) \quad (V \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)).$$

Note que, $u_k(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_{km}(0) = u_k^0$. Assim,

$$u_k(0) \rightarrow u^0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Logo,

$$u_k(0) \xrightarrow{*} u^0 \text{ em } L^2(\Omega) \quad (\text{Teorema 5.20 e Teorema 5.22}) \quad (3.94)$$

De (3.93), (3.94) e da unicidade da convergência fraca estrela, obtemos

$$u(0) = u^0.$$

Para provar que $u'(0) = u^1$ procedemos de maneira análoga. Com efeito, das convergências $u'_k \xrightarrow{*} u'$ em $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$ e $u''_k \xrightarrow{*} u''$ em $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$ obtidas em (3.92), obtemos

$$\int_0^{T_0} \frac{d}{dt} [(u'_k(t), v)\theta(t)] dt \rightarrow \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} [(u'(t), v)\theta(t)] dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega) \text{ e } \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T_0).$$

Portanto, para θ , tal que $\theta(T_0) = 0$ e $\theta(0) = 1$ encontramos

$$u'_k(0) \xrightarrow{*} u'(0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Considerando a convergência $u_k^1 \rightarrow u^1$ em V , a imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a igualdade $u'_{km}(0) = u_k^1$, segue que

$$u'_k(0) \xrightarrow{*} u^1 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.95)$$

Portanto, $u'(0) = u^1$.

3.2.5 Considerações finais

O que foi provado até o presente momento, conclui a demonstração do teorema para o caso em que $n \geq 3$. Nesta subseção, concluiremos a demonstração do Teorema 3.1.

Quando $n = 1$ ou $n = 2$, considere $\rho > 1$, e neste caso $V \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para cada número real $r \geq 1$. Assim, obtemos a desigualdade (3.45), uma vez que $V \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$. Para a segunda estimativa aplicamos a desigualdade de Hölder em

$$|(|u_{km}(t)|^{\rho-2}u_{km}(t)u'_{km}(t), u''_{km}(t))|,$$

considerando

$$\frac{1}{(\rho-1)j} + \frac{1}{s} + \frac{1}{2} = 1,$$

onde j é um número natural tal que $(\rho-1)j > 2$ e $s = \frac{2(\rho-1)j}{(\rho-1)j-2}$. Com estas considerações e aplicando argumentos semelhantes aos utilizados no caso em que $n \geq 3$, prova-se o teorema. $\square$

3.3 Unicidade da Solução Local

Nesta seção, mostraremos que a solução do problema (7), obtida no Teorema 3.1 (para o caso em que $h = \delta p$) é única. Para isto, usaremos a desigualdade de Gronwall (Teorema 1.18).

Teorema 3.2. *A solução $u : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ do problema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta p(u') = 0 & \text{sobre } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)), \\ \frac{\partial u'}{\partial \nu} + \delta p'(u')u'' = 0 & \text{sobre } L^\infty(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \end{array} \right. \quad (3.96)$$

proposto no Teorema 3.1 é única.

Demonstração. Suponha que existam duas soluções u e v nas condições do Teorema 3.1. Assim,

$$\begin{aligned} u'' - \Delta u + |u|^\rho &= f, \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta p(u') &= 0, \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)), \\ u(0) &= u^0, \quad u'(0) = u^1 \end{aligned} \quad (3.97)$$

e,

$$\begin{aligned} v'' - \Delta v + |v|^\rho &= f, \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \delta p(v') &= 0, \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)), \\ v(0) &= u^0, \quad v'(0) = u^1. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Definindo $w = u - v$ e subtraindo (3.97) de (3.98), obtemos

$$\begin{aligned} w'' - \Delta w + |u|^\rho - |v|^\rho &= 0, \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \delta[p(u') - p(v')] &= 0, \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)), \\ w(0) &= 0, \quad w'(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Multiplicando a primeira equação em (3.99) por w' , obtemos

$$w''w' - [\Delta w]w' = [|v|^\rho - |u|^\rho]w'.$$

Integrando sobre Ω , encontramos

$$\int_{\Omega} [w''(t)](x)[w'(t)](x)dx - \int_{\Omega} [\Delta w(t)](x)[w'(t)](x)dx = \int_{\Omega} [|v(t)|^\rho(x) - |u(t)|^\rho(x)][w'(t)](x)dx.$$

Isto é,

$$(w''(t), w'(t)) - (\Delta w(t), w'(t)) = (|v(t)|^\rho - |u(t)|^\rho, w'(t)).$$

Pela segunda fórmula de Green (Teorema 2.18), obtemos

$$(w''(t), w'(t)) + ((w'(t), w(t))) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w(t)}{\partial \nu} w'(t) d\Gamma = (|v(t)|^\rho - |u(t)|^\rho, w'(t)).$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w(t)}{\partial \nu} w'(t) d\Gamma = (|v(t)|^\rho - |u(t)|^\rho, w'(t)).$$

E, pela segunda equação em (3.99), encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] + \int_{\Gamma_1} \delta[p(u'(t)) - p(v'(t))] d\Gamma = -(|u(t)|^\rho - |v(t)|^\rho, w'(t)). \quad (3.100)$$

Considere a função φ , definida por $f(s) = |s|$, para cada número real $s > 0$. Pelo teorema do valor médio, para cada par $(x, t) \in Q_0 = \Omega \times (0, T_0)$, existe um número real ξ entre $u(x, t)$ e $v(x, t)$ tal que

$$|u(x, t)|^\rho - |v(x, t)|^\rho \leq \rho |\xi|^{\rho-2} \xi w(x, t).$$

Assim,

$$||u(x, t)|^\rho - |v(x, t)|^\rho| = |\rho |\xi|^{\rho-2} \xi w(x, t)| = \rho |\xi|^{\rho-1} |w(x, t)| \leq \rho (g(x, t))^{\rho-1} |w(x, t)|,$$

onde $g(x, t) = |u(x, t)| + |v(x, t)|$. Portanto,

$$\begin{aligned} |(|u(t)|^\rho - |v(t)|^\rho, w'(t))| &\leq \int_{\Omega} ||u(t)(x)|^\rho - |v(t)(x)|^\rho| \cdot |w'(t)(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} \rho (g(t)(x))^{\rho-1} |w(t)(x)| \cdot |w'(t)(x)| dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder generalizada (Proposição 5.28), segue que

$$\begin{aligned}
|(|u(t)|^\rho - |v(t)|^\rho, w'(t))| &\leq \int_{\Omega} \rho(g(t)(x))^{\rho-1} |w(t)(x)| \cdot |w'(t)(x)| dx \\
&\leq \rho \|g(t)\|_{L^{\rho-1}(\Omega)}^{\rho-1} \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} |w'(t)| \\
&\leq \rho [\|u(t)\|_{L^{\rho-1}(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^{\rho-1}(\Omega)}]^{\rho-1} \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} |w'(t)| \\
&\leq \rho [C_2(\|u(t)\| + \|v(t)\|)]^{\rho-1} \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} |w'(t)|, \tag{3.101}
\end{aligned}$$

onde C_2 é a contante de imersão introduzida em (3.5).

Como $u(t), v(t) \in V$, existe uma constante real $K > 0$ tal que

$$\rho [C_2(\|u(t)\| + \|v(t)\|)]^{\rho-1} \leq K, \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{3.102}$$

De (3.101), (3.102), e da desigualdade de Young, encontramos

$$\begin{aligned}
|(|u(t)|^\rho - |v(t)|^\rho, w'(t))| &\leq \rho [C_2(\|u(t)\| + \|v(t)\|)]^{\rho-1} \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} |w'(t)| \\
&\leq K \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} |w'(t)| \leq \frac{K^2}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.1), (3.2), (3.100) e das identificações que foram feitas na Observação 3.1 e na Observação 3.2, encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] + \delta_0 b_0 \int_{\Gamma_1} [w'(t)]^2 d\Gamma \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] + \int_{\Gamma_1} \delta p(w'(t)) d\Gamma \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] + \int_{\Gamma_1} \delta [p(u'(t)) - p(v'(t))] d\Gamma \\
&= -(|u(t)|^\rho - |v(t)|^\rho, w'(t)) \leq \frac{K^2}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2.
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima em $(0, t_0)$, com $t_0 \in (0, T_0]$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] - \frac{1}{2} [|w'(0)|^2 + \|w(0)\|^2] + \delta_0 b_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} [w'(t)]^2 d\Gamma dt \\
&\leq \int_0^{t_0} \frac{K^2}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2 dt \\
&\leq \int_0^{t_0} K_1 \left[\frac{1}{2} (\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2) \right] dt,
\end{aligned}$$

onde $K_1 = \max\{1, K^2\}$. Assim, usando as condições iniciais obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] &\leq \frac{1}{2} [|w'(0)|^2 + \|w(0)\|^2] + \delta_0 b_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} [w'(t)]^2 d\Gamma dt \\
&\leq 0 + \int_0^{t_0} K_1 \left[\frac{1}{2} (|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) \right] dt.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall, segue que

$$\frac{1}{2} [|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] \leq 0 \cdot e^{\int_0^{t_0} K_1 dt} = 0.$$

Portanto, $\|w(t)\| = 0$. Logo, $u(t) = v(t)$, q.t.p. em $[0, T_0]$.

□

Capítulo 4

Equação Hiperbólica: Caso $h(x, s)$ contínua em s

Este Capítulo tem como objetivo principal, provar a existência de solução local para o problema (7), onde $h(x, s)$ é uma função contínua (em um sentido que especificaremos mais adiante) e fortemente monótona na segunda variável. Para tal, exigiremos que as condições iniciais pertençam a uma classe mais regular do que a exigida no capítulo anterior.

Para demonstrar a existência de solução do problema (7) no caso mencionado acima, usaremos o método de Galerkin e aproximações à Strauss.

4.1 Preliminares

Como no capítulo anterior, introduziremos nesta seção introdutória, as notações e os elementos que vão ser utilizados ao longo deste capítulo.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado regular, com fronteira $\Gamma = \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2$, tal que $med(\Gamma_1) > 0$, $med(\Gamma_2) > 0$ e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ e seja $\nu(x)$ o vetor unitário normal exterior a $x \in \Gamma_1$.

Consideraremos o espaço de Hilbert $(V, ((\cdot, \cdot)))$ e o operador auto-adjunto $-\Delta = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, definidos na primeira seção do capítulo anterior. Como vimos anteriormente, o operador $-\Delta$ é definido pela terna $(V, L^2(\Omega), ((\cdot, \cdot)))$ e seu domínio $D(-\Delta) = \{u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$ é denso em V . Além disso, consideremos uma função, $h : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes

condições:

$$r \mapsto h(\cdot, r) \in C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Gamma_1)) \quad \text{e} \quad h(x, 0) = 0, \quad \text{q.t.p. em } \Gamma_1, \quad (4.1)$$

h é fortemente monótona na segunda variável, i.e.

$$[h(x, r) - h(x, s)](r - s) \geq d_0(r - s)^2, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}, \quad \text{q.t.p. em } \Gamma_1 \quad (d_0 \geq 0). \quad (4.2)$$

Observação 4.1. *Note que, $[h(x, r) - h(x, s)](r - s) \geq d_0(r - s)^2$, $\forall r, s \in \mathbb{R}$, q.t.p. em Γ_1 se, e somente se, $h(x, r) - h(x, s) \geq d_0(r - s)$, $\forall r > s$, q.t.p. em Γ_1*

Observação 4.2. *Da Observação 4.1, segue que*

$$h(x, r) \geq d_0 r, \quad \forall r > 0, \quad \text{q.t.p. em } \Gamma_1 \quad \text{e} \quad h(x, r) \leq d_0 r, \quad \forall r < 0, \quad \text{q.t.p. em } \Gamma_1. \quad (4.3)$$

Da proposição subsequente, devida à Louredo [26], obtém-se (como consequência da continuidade da função h) aproximações de Straus.

Proposição 4.1. (Aproximações à Strauss) *Seja $h : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições (4.1) e (4.2). Então, existe uma sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funções em $C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Gamma_1))$ satisfazendo as seguintes condições*

(a) $h_k(x, 0) = 0$, q.t.p. em Γ_1 ,

(b) $[h_k(x, s) - h_k(x, r)](s - r) \geq d_0(s - r)^2$, $\forall s, r \in \mathbb{R}$, q.t.p. em Γ_1 ,

(c) Existe uma função $c_k \in L^\infty(\Gamma_1)$, tal que

$$|h_k(x, s) - h_k(x, r)| \leq c_k(x)|s - r|, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}, \quad \text{q.t.p. em } \Gamma_1,$$

(d) $(h_k(x, \cdot))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para função $h(x, \cdot)$ uniformemente sobre cada conjunto limitado de $\mathbb{R}$, q.t.p. em Γ_1 .

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$h_k(x, r) = \begin{cases} C_{1k}(x)r, & \text{se } r < -k, \\ -k \int_{r-\frac{1}{k}}^r h(x, \tau) d\tau, & \text{se } -k \leq r \leq -\frac{1}{k}, \\ C_{2k}(x)r, & \text{se } -\frac{1}{k} \leq r \leq 0, \\ C_{3k}(x)r, & \text{se } 0 \leq r \leq \frac{1}{k}, \\ k \int_r^{r+\frac{1}{k}} h(x, \tau) d\tau, & \text{se } \frac{1}{k} \leq r \leq k, \\ C_{4k}(x)r, & \text{se } r > k, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} C_{1k}(x) &= - \int_{-k-\frac{1}{k}}^{-k} h(x, \tau) d\tau, & C_{2k}(x) &= -k^2 \int_{-\frac{2}{k}}^{-\frac{1}{k}} h(x, \tau) d\tau, \\ C_{3k}(x) &= k^2 \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} h(x, \tau) d\tau, & C_{4k}(x) &= \int_k^{k+\frac{1}{k}} h(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Por definição, segue que a sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Gamma_1))$. O item (a) decorre diretamente da segunda condição em (4.1). Provemos os demais itens.

Considere os intervalos, $I_1 = (-\infty, a_1]$, $I_6 = [a_5, +\infty)$ e $I_j = [a_{j-1}, a_j]$, onde $j \in \{2, 3, 4, 5\}$, $a_1 = -k$, $a_2 = -\frac{1}{k}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{k}$ e $a_5 = k$. Mostraremos que $h(x, r) - h(x, s) \geq d_0(r - s)$, $\forall r > s$, *q.t.p.* em Γ_1 , e pela Observação 4.1 segue o item (b). Isto será feito em vários casos:

1º Caso: $s < r \leq -k$.

$$\begin{aligned} [h_k(x, r) - h_k(x, s)] &= C_{1k}(x)(r - s) \\ &= \left[- \int_{-k-\frac{1}{k}}^{-k} h(x, \tau) d\tau \right] (r - s) \\ &= \left[\int_{-k-\frac{1}{k}}^{-k} -h(x, \tau) d\tau \right] (r - s) \\ &\geq \left[d_0 \int_{-k-\frac{1}{k}}^{-k} -\tau d\tau \right] (r - s) \\ &\geq \left[d_0 \frac{-\tau^2}{2} \Big|_{-k-\frac{1}{k}}^{-k} \right] (r - s) \\ &= \frac{d_0}{2} \left[\left(-k - \frac{1}{k} \right)^2 - (-k)^2 \right] (r - s) \\ &= \frac{d_0}{2} \left(1 + \frac{1}{2k^2} \right) (r - s) \geq d_0(r - s), \end{aligned}$$

uma vez que, $-h(x, r) \geq -d_0 r$, $\forall r < 0$, *q.t.p.* em Γ_1 (Ver Observação 4.2).

2º Caso: $-k \leq s < r \leq -\frac{1}{k}$.

Do Teorema do valor médio, existe um número real $s^* \in (s, r)$ tal que

$$\begin{aligned} h_k(x, r) - h_k(x, s) &= \frac{\partial h_k}{\partial \tau}(x, s^*)(r - s) \\ &= k \left[h(x, s^*) - h(x, s^* - \frac{1}{k}) \right] (r - s) \end{aligned}$$

$$\geq kd_0[s^* - (s^* - \frac{1}{k})](r - s) = d_0(r - s).$$

3º Caso: $-\frac{1}{k} \leq r < s \leq 0$.

$$\begin{aligned} h_k(x, r) - h_k(x, s) &= \left[-k^2 \int_{-\frac{2}{k}}^{-\frac{1}{k}} h(x, \tau) d\tau \right] (r - s) \\ &\geq \left[k^2 d_0 \int_{-\frac{2}{k}}^{-\frac{1}{k}} -\tau d\tau \right] (r - s) \\ &\geq \left[k^2 d_0 \frac{-\tau^2}{2} \Big|_{-\frac{2}{k}}^{-\frac{1}{k}} \right] (r - s) \\ &= k^2 \frac{d_0}{2} \left(\frac{3}{k^2} \right) (r - s) \\ &= \frac{3}{2} d_0 (r - s) \geq d_0 (r - s), \end{aligned}$$

uma vez que, $-h(x, r) \geq -d_0 r$, $\forall r < 0$, *q.t.p.* em Γ_1 .

4º Caso: $0 \leq s < r \leq \frac{1}{k}$.

$$\begin{aligned} h_k(x, r) - h_k(x, s) &= \left[k^2 \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} h(x, \tau) d\tau \right] (r - s) \\ &\geq \left[k^2 d_0 \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} \tau d\tau \right] (r - s) \\ &\geq k^2 \frac{d_0}{2} \tau^2 \Big|_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} (r - s) \\ &= \frac{3}{2} d_0 (r - s) \geq d_0 (r - s), \end{aligned}$$

uma vez que, $h(x, r) \geq d_0 r$, $\forall r > 0$, *q.t.p.* em Γ_1 (Ver Observação 4.2).

5º Caso: $\frac{1}{k} \leq s < r \leq k$.

Do Teorema do valor médio, existe um número real $s^* \in (s, r)$ tal que

$$\begin{aligned} h_k(x, r) - h_k(x, s) &= \frac{\partial h_k}{\partial \tau}(x, s^*)(r - s) \\ &= k \left[h(x, s^* + \frac{1}{k}) - h(x, s^*) \right] (r - s) \\ &\geq kd_0 \left(s^* + \frac{1}{k} - s^* \right) (r - s) = d_0 (r - s). \end{aligned}$$

6º Caso: $k \leq s < r$.

$$[h_k(x, r) - h_k(x, s)] = C_{4k}(x)(r - s)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_{k+\frac{1}{k}}^k h(x, \tau) d\tau \right] (r - s) \\
&\geq \left[d_0 \int_{k+\frac{1}{k}}^k \tau d\tau \right] (r - s) \\
&\geq \left[d_0 \frac{\tau^2}{2} \Big|_{k+\frac{1}{k}}^k \right] (r - s) \\
&= \frac{d_0}{2} \left[\left(k + \frac{1}{k} \right)^2 - (k)^2 \right] (r - s) \\
&= \frac{d_0}{2} \left(1 + \frac{1}{2k^2} \right) (r - s) \\
&\geq d_0(r - s),
\end{aligned}$$

uma vez que, $h(x, r) \geq d_0 r$, $\forall r > 0$, q.t.p. em Γ_1 .

7º Caso: $s \in I_i$ e $r \in I_j$ com $i < j$.

Dos casos anteriores, segue que

$$\begin{aligned}
&h_k(x, r) - h_k(x, s) \\
&= [h_k(x, r) - h_l(x, a_{j-1})] + [h_k(x, a_{j-1}) - k_k(x, a_{j-2})] + \dots + [h_k(x, a_i) - h_k(x, s)] \\
&\geq d_0(r - a_{j-1}) + d_0(a_{j-1} - a_{j-2}) + \dots + d_0(a_i - s) \\
&= d_0(r - s).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[h_k(x, r) - h_k(x, s)] \geq d_0(r - s), \forall r \geq s, \text{ q.t.p. em } \Gamma_1,$$

ou equivalentemente,

$$[h_k(x, r) - h_k(x, s)] \geq d_0(r - s), \forall r, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Gamma_1.$$

Mostraremos a seguir o item (c).

Note inicialmente que as funções h_k são contínuas nos intervalos I_j , onde $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $h \in L^\infty([-k-1, k+1]; L^\infty(\Gamma_1)) = L^\infty(\Gamma_1 \times [-k-1, k+1])$. Provemos que para cada k , h_k é uma função lipschitziana em I_j para quase todo $x \in \Gamma_1$. Isto será feito em sete casos:

Denotamos por

$$C_k = \sup_{\substack{x \in \Gamma_1 \\ -k-1 \leq r \leq k+1}} |h(x, r)| < \infty.$$

1º Caso: Se $s < r$ com $s, r \in I_1 = (-\infty, -k]$.

$$\begin{aligned}
|h_k(x, r) - h_k(x, s)| &= \left| C_{1k}(x) \right| |r - s| \\
&\leq \left[\int_{-k-\frac{1}{k}}^{-k} |h(x, \tau)| d\tau \right] |r - s| \\
&\leq C_k \left[-k - \left(-k - \frac{1}{k} \right) \right] |r - s| \\
&= \frac{1}{k} C_k |r - s|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \leq \frac{1}{k} C_k |r - s| \leq 2k C_k |r - s|.$$

2º Caso: Se $s < r$ com $s, r \in I_2 = [-k, -\frac{1}{k}]$.

$$\begin{aligned}
|h_k(x, r) - h_k(x, s)| &= \left| \frac{\partial h_k}{\partial s}(x, s^*) \right| |r - s| \\
&= k \left| h(x, s^*) - h(x, s^* - \frac{1}{k}) \right| |r - s| \\
&\leq 2k C_k |r - s|,
\end{aligned}$$

para algum $s^* \in (s, r)$ (teorema do valor médio). Logo,

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \leq 2k C_k |r - s|.$$

3º Caso: Se $s < r$ com $s, r \in I_3 = [-\frac{1}{k}, 0]$.

$$\begin{aligned}
|h_k(x, r) - h_k(x, s)| &= \left| C_{2k}(x) \right| (r - s) \\
&\leq k^2 \left[\int_{-\frac{2}{k}}^{-\frac{1}{k}} |h(x, \tau)| d\tau \right] |r - s| \\
&\leq k^2 C_k \left[-\frac{1}{k} - \left(-\frac{2}{k} \right) \right] |r - s| \\
&= 2k C_k |r - s|.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \leq 2k C_k |r - s|.$$

4º Caso: Se $s < r$ com $s, r \in I_4 = [0, \frac{1}{k}]$.

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| = \left| C_{3k}(x) \right| |r - s|$$

$$\begin{aligned}
&\leq k^2 \left[\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} |h(x, \tau)| d\tau \right] |r - s| \\
&\leq k^2 \frac{1}{k} C_k |r - s| \\
&= k C_k |r - s|.
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \leq 2k C_k |r - s|.$$

5º Caso: Se $s < r$ com $s, r \in I_5 = [\frac{1}{k}, k]$.

$$\begin{aligned}
|h_k(x, r) - h_k(x, s)| &= \left| \frac{\partial h_k}{\partial s}(x, s^*) \right| |r - s| \\
&= k \left| h(x, s^* + \frac{1}{k}) - h(x, s^*) \right| |r - s| \\
&\leq 2k C_k |r - s|,
\end{aligned}$$

para algum $s^* \in (s, r)$. Portanto,

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \leq 2k C_k |r - s|.$$

6º Caso: Se $s < r$ com $s, r \in I_6 = [k, \infty)$.

$$\begin{aligned}
|h_k(x, r) - h_k(x, s)| &= \left| C_{4k}(x) \right| |r - s| \\
&\leq \left[\int_k^{k+\frac{1}{k}} |h(x, \tau)| d\tau \right] |r - s| \\
&\leq C_k \left[k + \frac{1}{k} - k \right] |r - s| \\
&= \frac{1}{k} C_k |r - s|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \leq 2k C_k |s - r|.$$

7º Caso: $s \in I_i$ e $r \in I_j$ com $i < j$.

Dos casos anteriores, segue que

$$\begin{aligned}
&|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \\
&\leq |h_k(x, r) - h_k(a_{j-1})| + |h_k(x, a_{j-1}) - h_k(x, a_{j-2})| + \dots + |h_k(x, s) - h_k(a_i)| \\
&\leq 2k C_k |r - a_{j-1}| + 2k C_k |a_{j-1} - a_{j-2}| + \dots + 2k C_k |s - a_i| \\
&\leq 2k C_k |r - s|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|h_k(x, r) - h_k(x, s)| \leq 2kC_k|r - s|.$$

O que mostra o item (c).

(d) Mostraremos que $h_k \rightarrow h$ converge uniformemente sobre conjuntos limitados da reta, para quase todo $x \in \Gamma_1$.

Seja R um conjunto limitado da reta. Então, existe k_0 tal que $|r| \leq k_0$ para todo $r \in R$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|r - s| < \delta$, e $s, r \in [-k_0 - 1, k_0 + 1]$, então

$$\|h(\cdot, r) - h(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Gamma_1)} < \varepsilon,$$

isto é,

$$\sup_{x \in \Gamma_1} |h(x, r) - h(x, s)| < \varepsilon, \quad \text{q.t.p em } \Gamma_1. \quad (4.5)$$

Considere $\frac{k_1}{2} > \frac{1}{\delta}$. Seja $k \geq \max\{k_0, k_1\}$. Calcula-se

$$|h_k(x, r) - h(x, r)|, \quad |r| \leq k_0.$$

(i) Seja $\frac{1}{k} \leq r \leq k_0$. Então, $\frac{1}{k} \leq r \leq k$. Tem-se pelo teorema do Valor Médio para Integral que

$$\begin{aligned} h_k(x, r) - h(x, r) &= k \left[\int_r^{r+\frac{1}{k}} h(x, \tau) d\tau \right] - h(x, r) \\ &= kh(x, r^*) \frac{1}{k} - h(x, r) \\ &= h(x, r^*) - h(x, r), \end{aligned}$$

onde $r \leq r^* \leq r + \frac{1}{k} < r + k$. Decorre de (4.5) que

$$\sup_{x \in \Gamma_1} |h_k(x, r) - h(x, r)| < \varepsilon.$$

(ii) Seja $0 \leq r < \frac{1}{k}$. Tem-se

$$\begin{aligned} h_k(x, r) - h(x, r) &= k^2 \left[\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} h(x, \tau) r d\tau \right] - h(x, r) \\ &= kh(x, r^*)r - h(x, r), \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{k} \leq r^* \leq \frac{2}{k}$, o que implica

$$|h_k(x, r) - h(x, r)| \leq |h_k(x, r)| + |h(x, r)| \leq |h(x, r^*)| + |h(x, r)|.$$

Sendo $0 \leq r^* \leq \frac{2}{k} < \frac{2}{k_1} < \delta$ e $0 \leq r \leq \frac{1}{k} < \frac{2}{k_1} < \delta$. Resulta de (4.5) que

$$\sup_{x \in \Gamma_1} |h(x, r^*)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sup_{x \in \Gamma_1} |h(x, r)| < \varepsilon, \quad \text{q.t.p. em } \Gamma_1.$$

Como $0 \leq r \leq k_0$, concluimos que

$$\sup_{x \in \Gamma_1} |h_k(x, r) - h(x, r)| < 2\varepsilon, \quad \forall k \geq \max\{k_0, k_1\}.$$

Para $-k_0 \leq r \leq 0$, e utilizando os mesmos argumentos, obtém-se resultado semelhante.

Portanto, $h_k \rightarrow h$ uniformemente sobre conjuntos limitados de $\mathbb{R}$, para quase todo $x \in \Gamma_1$.

□

4.2 Existência de Solução Local

Nesta seção mostraremos a existência de solução local para o problema (7), onde $h : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo as condições (4.1) e (4.2). Isto é:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } \Omega \times (0, T_0), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T_0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h(\cdot, u') = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T_0), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{sobre } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

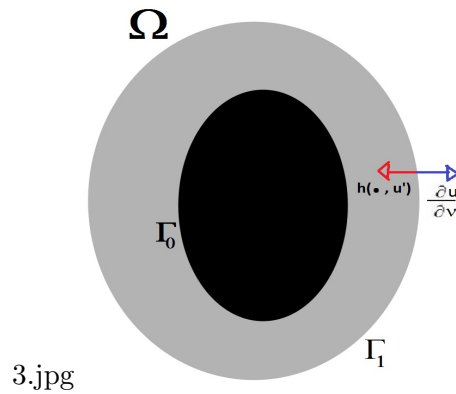


Figura 4.1: Aberto Ω

A força $h(\cdot, u')$ atua na direção contrária à derivada normal.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -h(\cdot, u') \quad \text{sobre } \Gamma_1.$$

Teorema 4.1. *Suponha que as condições (3.3), (4.1) e (4.2) sejam satisfeitas. Seja $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ e $\{u^0, u^1\} \in D(-\Delta) \times H_0^1(\Omega)$. Então existe um número real $T_0 > 0$ (o mesmo T_0 do Teorema 3.1, explicitado em (3.31)) e pelo menos uma função u na classe,*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T_0; V), \quad \Delta u \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ u' \in L^\infty(0, T_0; V), \\ u'' \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f & \text{sobre } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h(\cdot, u') = 0 & \text{sobre } L^1(0, T_0; L^1(\Gamma_1)), \end{array} \right. \quad (4.8)$$

e as condições iniciais,

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (4.9)$$

Demonstração. Usaremos o método de Galerkin. A demonstração deste teorema é parcialmente análoga à feita no Teorema 3.1 do capítulo anterior. Por esta razão, a mesma será apresentada de forma sucinta e sem trazer detalhes que foram feitos de forma detalhada na prova do Teorema 3.1.

Como $D(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e $u^1 \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência de funções testes $(u_k^1)_{k \in \mathbb{N}} \in D(\Omega)$ tal que

$$u_k^1 \rightarrow u^1 \quad \text{em } H_0^1(\Omega). \quad (4.10)$$

Como $D(-\Delta) \subset V \cap H^2(\Omega)$, a Proposição 3.6 nos garanti a existência de uma sequência $(u_k^0)_{k \in \mathbb{N}} \subset V \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$u_k^0 \rightarrow u^0 \quad \text{em } V \cap H^2(\Omega) \quad (4.11)$$

Além disso,

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + h_k(\cdot, u_1^k) = 0, \quad \text{q.t.p em } \Gamma_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Com efeito, como $u^0 \in D(-\Delta) = \{u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$ e $u_k^1 \in H_0^1(\Omega) = \ker(\gamma_0)$, temos que $\frac{\partial u^0}{\partial \nu} = 0$ sobre Γ_1 , e $u_k^1 = 0$ sobre Γ_1 . Assim, da Proposição 4.1 segue que $h_k(\cdot, u_k^1) = 0$, q.t.p. em Γ_1 , o que prova a afirmação feita acima.

De maneira análoga à que foi feita na demonstração do Teorema 3.1 (usando o processo de ortogonalização), construímos uma base hilbertiana enumerável $\{w_1^k, w_2^k, \dots\}$ de $V \cap H^2(\Omega)$ tal que $u_k^0, u_k^1 \in [w_1^k, w_2^k]$. Com esta base podemos determinar uma solução $u_{km} = \sum_{j=1}^m g_{kjm}(t) w_j^k$ para o

problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} (u''_{km}(t), v) + ((u_{km}(t), v)) + (|u_{km}(t)|^\rho, v) + \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, u'_{km}(t)) v d\Gamma = (f(t), v), \quad \forall v \in V_m^k, \\ u_{km}(0) = u_k^0, \quad u'_{km}(0) = u_k^1, \end{array} \right. \quad (4.13)$$

onde $V_m^k = [w_1^k, \dots, w_m^k]$ e os $g_{kjm}(t)$ são determinados pela base $\{w_1^k, \dots, w_m^k\}$ do espaço V_m^k .

Para isso, basta proceder de forma análoga à feita na demonstração do Teorema 3.1, exceto a matriz G , ao qual definiremos da seguinte maneira:

$$G = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_1^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_1^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_1^k) w_m^k d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_2^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_2^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_2^k) w_m^k d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_m^k) w_1^k d\Gamma & \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_m^k) w_2^k d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, w_m^k) w_m^k d\Gamma \end{pmatrix}.$$

Considerando $v = u'_{km}(t)$ em (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{km}(t)\|^2 + \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, u'_{km}(t)) u'_{km}(t) d\Gamma \\ = (f(t), u'_{km}(t)) - (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pela desigualdade de Schwarz e por (3.5), obtemos

$$|(|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t))| \leq \|u_{km}(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^\rho \cdot |u'_{km}(t)| \leq (C_1)^\rho \|u_{km}(t)\|^\rho \cdot |u'_{km}(t)|. \quad (4.15)$$

Considerando a função φ_{km} definida em (3.46), combinando (4.14) com (4.15), e usando a Proposição 4.1, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) + d_0 \int_{\Gamma_1} (u'_{km}(t))^2 d\Gamma & \leq (f(t), u'_{km}(t)) - (|u_{km}(t)|^\rho, u'_{km}(t)) \\ & \leq |f(t)| \cdot |u'_{km}(t)| + (C_1)^\rho \|u_{km}(t)\|^\rho \cdot |u'_{km}(t)|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observe que

$$\|u_{km}(t)\|^\rho \leq 2^{\frac{\rho}{2}} (\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho}{2}} \quad \text{e} \quad |u'_{km}(t)| \leq 2^{\frac{1}{2}} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1}{2}}$$

e como $\varphi_{km}(t) \geq 1$, encontramos

$$|f(t)| |u'_{km}(t)| + (C_1)^\rho \|u_{km}(t)\|^\rho \cdot |u'_{km}(t)| \leq N(\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}}$$

onde, $N = 2^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + 2^{\frac{\rho+1}{2}} \cdot (C_1)^\rho$.

Assim,

$$(\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) \leq N, \quad (4.17)$$

Combinando (4.16) e (4.17), temos

$$\frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) + d_0 \int_{\Gamma_1} (u'_{km}(t))^2 d\Gamma \leq N(\varphi_{km}(t))^{\frac{\rho+1}{2}}. \quad (4.18)$$

Isto é,

$$(\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) \leq N.$$

Como $\frac{2}{1-\rho} < 0$, temos

$$\frac{2}{1-\rho} (\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) \geq \frac{2}{1-\rho} N.$$

e recordando a identidade

$$\frac{2}{1-\rho} \frac{d}{dt} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}} = (\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t),$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} (\varphi_{km}(t))^{\frac{1-\rho}{2}} = \frac{1-\rho}{2} (\varphi_{km}(t))^{-\frac{\rho+1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_{km}(t) \geq \frac{2}{1-\rho} N.$$

Integrando de 0 a t_0 , onde $t_0 \in (0, T]$, obtemos

$$(\varphi_{km}(t_0))^{\frac{1-\rho}{2}} \geq (\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} - Mt_0, \quad \forall t_0 \in (0, T],$$

onde $M = \frac{(\rho-1)}{2} N$.

Das convergências em (4.10) e (4.11), obtemos

$$(\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} > \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{1-\rho}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } \forall k \geq k_0.$$

Assim,

$$(\varphi_{km}(t_0))^{\frac{1-\rho}{2}} \geq (\varphi_{km}(0))^{\frac{1-\rho}{2}} - Mt_0 > \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{1-\rho}{2}} - M, \quad \forall t_0 \in (0, T].$$

Considerando

$$T_0 = \min \left\{ \frac{1}{2M} \left(\frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + 2 \right)^{\frac{(1-\rho)}{2}}, T \right\},$$

obtemos

$$\varphi_{km}(t) \leq 2^{\frac{2}{\rho-1}} \left(\frac{1}{2}|u^1|^2 + \frac{1}{2}\|u^0\|^2 + 2 \right) = P, \quad \forall t \in [0, T_0], \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.19)$$

Isto é,

$$\frac{1}{2}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{km}(t)\|^2 \leq P. \quad (4.20)$$

Combinando (4.19) e (4.18), encontramos

$$d_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} (u'_{km}(t))^2 d\Gamma dt \leq \int_0^{t_0} N \cdot P^{\frac{\rho+1}{2}} dt = D, \quad \forall t_0 \in (0, T_0]. \quad (4.21)$$

A estimativa (4.19) nos permite usar o teorema do prolongamento para estender a solução aproximada $u_{km}(t)$ para todo o intervalo $[0, T_0]$.

Derivando a equação aproximada (4.13) com respeito a variável t e considerando $v = u''_{km}(t)$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u''(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] &+ (\rho|u_{km}(t)|^{\rho-1} u_{km}(t) u'_{km}(t), u''_{km}(t)) \\ &+ \int_{\Gamma_1} h'(u'_{km}(t)) [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma = (f'(t), u''_{km}(t)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Usando Hölder, obtemos

$$|(|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u'_{km}(t), u''_{km}(t))| \leq \|u_{km}(t)\|_{L^{(\rho-1)n}}^{\rho-1} \cdot \|u'_{km}(t)\|_{L^q(\Omega)} \cdot |u''_{km}(t)|.$$

Da Observação 3.4 segue que,

$$\rho(|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u'_{km}(t), u''_{km}(t)) \leq \rho(C_2)^{\rho-1} \cdot C_0 \|u_{km}(t)\|^{\rho-1} \cdot \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)|.$$

Portanto,

$$|\rho(|u_{km}(t)|^{\rho-2} u_{km}(t) u'_{km}(t), u''_{km}(t))| \leq R \|u'_{km}(t)\| \cdot |u''_{km}(t)|, \quad (4.23)$$

onde $R = \rho(C_2)^{\rho-1} \cdot C_0 \cdot 2^{\frac{\rho-1}{2}} \cdot P^{\frac{\rho-1}{2}}$.

Da Proposição 4.1, segue que

$$\int_{\Gamma_1} h'(\cdot, u'_{km}(t)) [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma \geq \int_{\Gamma_1} d_0 [u''_{km}(t)(x)]^2 d\Gamma = d_0 \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma. \quad (4.24)$$

Combinando as expressões (4.23), (4.24), (4.22), e, usando desigualdades conhecidas, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u''(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] &+ d_0 \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2} |f(t)|^2 + \frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + |u''_{km}(t)|^2, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo $[0, t_0]$, onde $t_0 \in (0, T_0]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [|u''_{km}(t_0)|^2 + \|u'_{km}(t_0)\|^2] + d_0 \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \\ & \leq \frac{1}{2} |u''_{km}(0)|^2 + \frac{1}{2} \|u'_{km}(0)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} |f'(t)|^2 dt + \int_0^{t_0} \left[\frac{R^2}{2} \|u'_{km}(t)\|^2 + |u''_{km}(t)|^2 \right] dt, \end{aligned} \quad (4.25)$$

para todo $t_0 \in [0, T_0]$.

De maneira análoga à feita na demonstração do teorema 3.1, mostra-se que $u''_{km}(0)$ é limitado superiormente em $L^2(\Omega)$. Assim, de (4.25) e da desigualdade de Gronwall, segue que

$$\frac{1}{2} [|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2] + d_0 \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \leq G. \quad (4.26)$$

Como as constantes P , D e G são independentes do $k \geq k_0$, de $m \in \mathbb{N}$, e do $t \in [0, T_0]$, as estimativas obtidas em (4.20), (4.21) e (4.26), nos fornece, para cada k fixo, uma subsequência de $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, e uma função u_k , tais que

$$\begin{aligned} u_{km} & \xrightarrow{*} u_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; V), \\ u'_{km} & \xrightarrow{*} u'_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; V), \\ u'_{km} & \xrightarrow{*} u_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ u''_{km} & \xrightarrow{*} u''_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ u'_{km} & \rightharpoonup u'_k \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \\ u''_{km} & \rightharpoonup u''_k \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Do teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.15), segue que

$$|u_{km}(x, t)|^\rho \rightarrow |u_k(x, t)|^\rho, \text{ q.t.p. em } \Omega \times (0, T_0) = Q_0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega [|u_{km}(t)(x)|^\rho]^2 dx = \|u_{km}(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{2\rho} \leq (C_1)^{2\rho} \|u_{km}(t)\|^{2\rho} \leq (C_1)^{2\rho} \cdot (2P)^\rho,$$

onde C_1 é a constante de imersão introduzida em (3.5). Pelo lema de Lions (Proposição 1.17), obtemos (como feito em 3.81)

$$|u_{km}|^\rho \xrightarrow{*} |u_k|^\rho \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)). \quad (4.28)$$

Por outro lado, como $u'_{km} \xrightarrow{*} u'_k$ em $L^\infty(0, T_0; V) \hookrightarrow L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$ e $\gamma_0(u'_{km}(t)) = [u'_{km}(t)]|_{\Gamma_1}$, de maneira análoga, (ver 3.82) obtém-se

$$u'_{km} \xrightarrow{*} u'_k \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Assim, utilizando o teorema de Aubin-Lions, encontramos uma subsequência de $(u'_{km})_{m \in \mathbb{N}}$, que ainda será denotada por $(u'_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u'_{km} \rightarrow u'_k \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)).$$

Como h_k é contínua na primeira variável, temos

$$h_k(\cdot, u'_{km}) \rightarrow h_k(\cdot, u'_k) \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)).$$

Logo,

$$h_k(\cdot, u'_{km}) \rightarrow h_k(\cdot, u'_k) \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \quad (4.29)$$

As convergências obtidas em (4.27), (4.28) e (4.29), nos permite passar o limite em m na equação aproximada (4.13). Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (u''_k(t), v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} ((u_k, v)) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u_k(t)|^\rho, v) \theta(t) dt \\ + \int_0^{T_0} \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, u'_k(t)) v \theta(t) d\Gamma dt = \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt, \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ e $\theta \in L^2(0, T_0)$. Assim, encontramos

$$u''_k - \Delta u_k + |u_k|^\rho = f \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)). \quad (4.30)$$

Multiplicando a equação (4.30) por $v\theta$, integrando sobre $Q_0 = \Omega \times (0, T_0)$ e usando a segunda fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (u''_k, v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} ((u_k(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u_k(t)|^\rho, v) \theta(t) dt \\ + \int_0^{T_0} \left\langle \frac{\partial u_k(t)}{\partial \nu}, v \right\rangle \theta(t) dt = \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu} + h_k(\cdot, u'_k) = 0 \text{ em } L^2(0, T_0; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Da regularidade de u'_k e da continuidade de h_k , segue que

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu} + h_k(\cdot, u'_k) = 0 \text{ em } L^\infty(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (4.31)$$

As estimativas (4.27) garante a existência de uma subsequência de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, a qual denotaremos ainda por $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, e uma função u tais que

$$\begin{aligned} u_k &\overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T_0; V), \\ u'_k &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0, T_0; V), \\ u'_k &\overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ u''_k &\overset{*}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ u'_k &\rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \\ u''_k &\rightharpoonup u'' \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Como em (4.28), obtemos

$$|u_k|^\rho \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^\rho \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

Assim, das convergências $u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0, T_0; V)$, $u''_k \overset{*}{\rightharpoonup} u''$ em $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$, e da equação (4.30), encontramos

$$u'' - \Delta u + |u|^\rho = f \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

Usando as convergências $u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0, T_0; V)$, $u'_k \rightharpoonup u'$ em $L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1))$, e do teorema de Aubin-Lions, obtemos uma subsequência de $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que ainda será denotada por $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u'_k \rightarrow u' \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)).$$

Portanto,

$$u'_k \rightarrow u', \text{ q.t.p em } \Sigma_0 = \Gamma_1 \times (0, T_0). \tag{4.33}$$

Fixe $(x, t) \in \Sigma_0$. A convergência em (4.33) garante que o conjunto $\{u'_k(x, t); k \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Então, do item (d) da Proposição 4.1 e da convergência em (4.33), segue que

$$h_k(\cdot, u'_k) \rightarrow h(\cdot, u'), \text{ q.t.p sobre } \Sigma_0. \tag{4.34}$$

Por outro lado, multiplicando a Equação (4.30) por $u'_k(t)$, integrando sobre Ω e usando a segunda fórmula de Green, obtemos

$$(u''_k(t), u'_k(t)) + ((u'_k(t), u_k(t))) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_k(t)}{\partial \nu} u'_k(t) d\Gamma + (|u_k(t)|^\rho, u'_k(t)) = (f(t), u'_k(t)).$$

De (4.31), segue que

$$(u''_k(t), u'_k(t)) + ((u'_k(t), u_k(t))) + \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, u'_k(t)) u'_k(t) d\Gamma + (|u_k(t)|^\rho, u'_k(t)) = (f(t), u'_k(t)).$$

Logo,

$$\int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, u'_k(t)) u'_k(t) d\Gamma = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_k(t)|^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k(t)\|^2 - (|u_k(t)|^\rho, u'_k(t)) + (f(t), u'_k(t)). \quad (4.35)$$

Note que,

$$\begin{aligned} |(|u_k(t)|^\rho, u'_k(t))| &\leq \|u_k(t)\|_{L^{2p}(\Omega)}^\rho \cdot |u'_k(t)| \\ &\leq (C_1)^\rho \|u_k(t)\| \cdot |u'_k(t)| \\ &\leq \frac{(C_1)^{2\rho}}{2} \|u_k(t)\|^2 + \frac{1}{2} |u'_k(t)|^2 \\ &\leq K_1 \left[\frac{1}{2} \|u_k(t)\|^2 + \frac{1}{2} |u'_k(t)|^2 \right] \\ &\leq K_1 \cdot P, \end{aligned}$$

onde $K_1 = \max\{(C_1)^{2\rho}, 1\}$. Além disso,

$$|(f(t), u'_k(t))| \leq |f(t)| \cdot |u'_k(t)| \leq \frac{1}{2} |f(t)|^2 + \frac{1}{2} |u'_k(t)|^2 \leq \frac{A_1}{2} + N,$$

onde A_1 é uma constante positiva tal que $|f(t)|^2 \leq A_1$ ($f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$). Considerando $C = \max\{K_1 \cdot P, \frac{A_1}{2} + N\}$, obtemos

$$(|u_k(t)|^\rho, u'_k(t)) \leq C \quad \text{e} \quad (f(t), u'_k(t)) \leq C. \quad (4.36)$$

Como C é uma constante que não depende do $k \geq k_0$ e do $t \in [0, T_0]$, (4.36), e (4.32), nos permite utilizar o Teorema 1.14, obtendo

$$u_k \in C^0([0, T_0]; V) \quad \text{e} \quad u'_k \in C^0([0, T_0]; L^2(\Omega)).$$

Por (4.20), segue que as sequências $(u_k(T_0))_{k \in \mathbb{N}}$ e $(u'_k(T_0))_{k \in \mathbb{N}}$ são limitadas nos espaços V e $L^2(\Omega)$ respectivamente. Assim, integrando (4.35) sobre o intervalo $(0, T_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_0} \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, u'_k(t)) u'_k(t) d\Gamma dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} [|u'_k(t)|^2 + \|u_k(t)\|^2] dt + \int_0^{T_0} -(|u_k(t)|^\rho, u'_k(t)) dt + \int_0^{T_0} (f(t), u'_k(t)) dt \\ &\leq -\frac{1}{2} |u'_k(T_0)|^2 - \frac{1}{2} \|u_k(T_0)\|^2 + \frac{1}{2} |u_k^1|^2 + \|u_k^0\|^2 + 2C \\ &\leq A_2 + 2C = K. \end{aligned}$$

onde A_2 é uma constante tal que $|u_k^1|^2 \leq A_2$ e $\|u_k^0\|^2 \leq A_2$. Portanto,

$$\int_0^{T_0} \int_{\Gamma_1} h_k(\cdot, u'_k(t)) u'_k(t) d\Gamma dt \leq K, \quad \forall k \geq k_0 \text{ e } \forall t \in [0, T_0]. \quad (4.37)$$

De (4.37), da convergência em (4.34) e do teorema de Strauss, segue que

$$h_k(\cdot, u'_k) \rightarrow h(\cdot, u') \text{ em } L^1(\Sigma_0). \quad (4.38)$$

Por outro lado, das convergências $u_k \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T_0; V)$ e $u''_k \rightharpoonup u''$ em $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$, encontramos

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T_0; V) \quad \text{e} \quad \Delta u_k \rightharpoonup \Delta u \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

Desta forma, como mostra Milla Miranda [34], concluimos que

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ em } L^2(0, T_0; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (4.39)$$

De (4.38) e da Equação (4.31), temos que

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu} \rightarrow -h(\cdot, u') \text{ em } L^1(\Sigma_0). \quad (4.40)$$

De (4.39) e (4.40), encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(\cdot, u') = 0 \text{ em } L^1(0, T_0; L^1(\Gamma_1)).$$

A verificação dos dados iniciais decorre das convergências em (4.35), sendo obtida de maneira análoga à que foi feita na demonstração do Teorema 3.1, o que prova o teorema para o caso em que $n \geq 3$. Para $n = 1$ ou $n = 2$ segue as considerações feitas na subseção 3.2.5 do Capítulo 3. $\square$

Observação 4.3. *A unicidade de solução para o problema proposto no Teorema 4.1 está em aberto.*

Capítulo 5

Apêndice

Neste capítulo, reunimos de forma sucinta toda tecnologia matemática que julgamos necessária para o entendimento das distribuições, dos espaços de Sobolev e da teoria de traço. Estes últimos, são ferramentas de fundamental importância para o estudo das equações diferenciais parciais.

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção reunimos as propriedades mais relevantes sobre os espaços topológicos arbitrários. Na segunda seção, trabalharemos com espaços vetoriais reais munidos de uma boa estrutura topológica. Em especial, estudaremos as propriedades mais relevantes dos importantes espaços de Banach e Hilbert. Além disso, definiremos as importantes topologias fraca $\sigma(X, X')$ e fraca $^* \sigma(X', X)$. A terceira seção ficou responsável em abordar os fatos mais relevantes sobre teoria da medida e integração. Além disso, estudaremos os espaços L^p , de classes de funções.

5.1 Espaços Topológicos

Começamos esta seção definindo os elementos gerais e descrevendo as principais propriedades estruturais dos espaços topológicos. Em particular, dos espaços métricos.

5.1.1 Elementos Gerais

Definição 5.1. *Uma Topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjunto de X satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (a) $\emptyset$ e X pertencem à τ .

(b) A união de uma família arbitrária de elementos de τ pertence à τ .

(c) A interseção de uma coleção finita de conjuntos em τ pertence à τ .

O par (X, τ) satisfazendo às condições descritas acima é denominado um espaço topológico. A coleção τ é dita ser uma topologia em X e os elementos da coleção τ são chamados os conjuntos abertos do espaço topológico (X, τ) . Frequentemente diz-se apenas o espaço topológico X , ficando subentendido que estamos considerando uma topologia fixa τ .

Definição 5.2. Seja X um conjunto e sejam τ e τ' duas topologias em X . Dizemos que a topologia τ' é mais fina do que a topologia τ quando $\tau' \supset \tau$. Neste caso, dizemos que τ é menos fina do que τ' .

Definição 5.3. Seja X um espaço topológico. Uma coleção β de conjuntos abertos de X é denominada uma base para X quando qualquer conjunto aberto de X pode ser escrito como união de elementos em β . Neste caso, dizemos que a coleção β gera o espaço topológico X .

Observação 5.1. Qualquer espaço topológico (X, τ) possui pelo menos uma base β . A saber, $\beta = \tau$.

Definição 5.4. Seja X um conjunto arbitrário. Uma métrica sobre X é uma função

$$\begin{aligned} d_X : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d_X(x, y) \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $d_X(x, y) \geq 0$, quaisquer que sejam $x, y \in X$ e $d_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(b) $d_X(x, y) = d_X(y, x)$, quaisquer que sejam $x, y \in X$.

(c) (**Desigualdade Triangular**) $d_X(x, y) \leq d_X(x, z) + d_X(z, y)$, quaisquer que sejam $x, y, z \in X$.

O par (X, d_X) satisfazendo as condições descritas acima é denominado um espaço métrico. O número real $d_X(x, y)$ é chamado a distância do ponto x ao ponto y . Como de costume, na maioria das vezes diremos simplesmente a métrica d e o espaço métrico X , deixando subentendida a métrica e o espaço que está sendo considerado.

Exemplo 5.1. Podemos definir métricas no espaço $\mathbb{R}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ considerando

$$d(x, y) = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad d'(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \quad e \quad d''(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são elementos de $\mathbb{R}^n$.

Em $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ as três métricas coincidem.

Definição 5.5. Sejam X um espaço métrico, ε um número real positivo e $a \in X$. Definimos a bola aberta de centro a e raio ε como sendo o seguinte conjunto

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X; d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Observação 5.2. Observamos que a coleção de todas as bolas abertas de um espaço métrico X é uma base para uma topologia em X . Assim, todo espaço métrico (X, d) induz um espaço topológico. Basta considerar a topologia gerada pela coleção de todas as bolas abertas. Esta topologia é denotada por τ_d e, é chamada a topologia métrica induzida por d .

Definição 5.6. Seja X um espaço métrico. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito limitado quando existe uma constante real $C > 0$ tal que $d(y_1, y_2) < C$, qualquer que seja os pontos $x, y \in X$. De forma equivalente, Y limitado se, e somente se, existe uma bola aberta contendo Y .

Definição 5.7. Seja (X, τ) um espaço topológico. Quando existe uma métrica d que induz a topologia τ . Isto é, $\tau = \tau_d$, dizemos que o espaço topológico X é metrizável.

Observação 5.3. As métricas definidas no Exemplo 5.1 induzem a mesma topologia no espaço $\mathbb{R}^n$. Esta topologia é chamada a topologia usual do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Definição 5.8. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$. A coleção $\tau_Y = \{\Omega \cap Y; \Omega \in \tau\}$ é uma topologia em Y , chamada a topologia de subespaço.

Exemplo 5.2. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Neste caso, a topologia de subespaço coincide com a topologia métrica induzida pela restrição $d|_{Y \times Y}$ da métrica d .

5.1.2 Elementos Subjacentes

Nesta subseção, definiremos alguns elementos subjacentes da teoria dos espaços topológicos.

Definição 5.9. Um subconjunto F de um espaço topológico X é dito ser fechado, quando o seu complemento X/F é um conjunto aberto.

Definição 5.10. *Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Um subconjunto $\mathcal{V} \subset X$ é dito uma vizinhança do ponto x se existir um aberto Ω tal que $x \in \Omega$ e $\Omega \subset \mathcal{V}$.*

Definição 5.11. *Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Um ponto $x \in X$ é dito aderente a Y se toda vizinhança de x contém algum ponto de Y . Denota-se por $\overline{Y}^X$ o conjunto de todos os pontos do espaço X que são aderentes a Y . Este conjunto denomina-se fecho de Y em X . Quando não tiver risco de confusão com respeito ao espaço topológico utilizado, escrevemos simplesmente $\overline{Y}$.*

Proposição 5.1. *Um subconjunto F de um espaço topológico X é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$.*

Definição 5.12. *Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Definimos o interior do conjunto Y como sendo a união de todos os abertos que estão contidos em Y . Denotemos este conjunto por $\text{int}(Y)$.*

Definição 5.13. *Um espaço topológico X é chamado um espaço Hausdorff se para cada par de pontos $x, y \in X$, existem vizinhanças $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ de x e y , respectivamente, que são disjuntas.*

Observação 5.4. *Observemos que todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.*

Definição 5.14. *Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é dita uma cobertura de Y quando a união dos elementos de $\mathcal{A}$ contém Y . Neste caso, dizemos que a coleção $\mathcal{A}$ cobre o conjunto Y . Se os conjuntos da família $\mathcal{A}$ são abertos dizemos que a cobertura $\mathcal{A}$ é aberta.*

Definição 5.15. *Sejam X um espaço topológico, $Y \subset X$ e $\mathcal{A}$ uma cobertura de Y . Uma subcoleção $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ é dita ser uma subcobertura de $\mathcal{A}$, quando $\mathcal{B}$ ainda cobre Y .*

Definição 5.16. *Um subconjunto K de um espaço topológico X é dito compacto se toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de K admite uma subcobertura com uma quantidade finita de elementos.*

Proposição 5.2. *Seja X um espaço topológico. Todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto.*

Proposição 5.3. *Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado.*

Observação 5.5. *Note que, se X é um espaço métrico e K é um subconjunto compacto de X , então K é fechado e limitado.*

Teorema 5.1. (Borel-Lebesgue) *Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano com sua topologia usual. Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Teorema 5.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então existe uma sequência de conjuntos compactos $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$.*

Definição 5.17. *Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. A aplicação f é contínua em um ponto $x \in X$ se dada qualquer vizinhança $\mathcal{V}$ de $f(x)$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x tal que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Dizemos simplesmente que f é contínua quando for contínua em todo ponto $x \in X$.*

Proposição 5.4. *Sejam X um espaço topológico e Y um espaço topológico gerado por uma base β . Uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ seja contínua, é que imagem inversa de qualquer conjunto em β seja um aberto de X .*

Observação 5.6. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos X e Y . A imagem inversa de qualquer conjunto fechado de Y é fechado em X .*

Proposição 5.5. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então $f(K)$ é um conjunto compacto de Y qualquer que seja o conjunto compacto $K \subset X$.*

Observação 5.7. *Para espaços métricos temos a seguinte caracterização:*

$f : X \longrightarrow Y$ é contínua em um ponto $a \in X$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ sempre que $d_X(x, a) < \delta$.

Definição 5.18. *Sejam X um espaço topológico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos em X . Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um ponto $x \in X$ e, escrevemos $x_n \rightarrow x$ em X ou $\lim x_n = x$, quando para qualquer vizinhança $\mathcal{V}$ de x , existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{V}$ sempre que $n \geq n_0$.*

Observação 5.8. *Para espaços métricos temos a seguinte caracterização:*

$x_n \rightarrow x$ em X se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, podemos obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_n, x) < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$.

Observação 5.9. *O limite de qualquer sequência de elementos num espaço de Hausdorff é único.*

Definição 5.19. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto K de X é dito sequencialmente compacto se toda sequência de elementos em K possui uma subsequência convergente.*

Observação 5.10. *Um espaço topológico X pode ser compacto sem que seja sequencialmente compacto e vice-versa. Porém, para espaços metrizáveis esses conceitos coincidem.*

Proposição 5.6. *Seja X um espaço métrico. Um subconjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se é sequencialmente compacto.*

Definição 5.20. *Seja X um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de X chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$.*

Proposição 5.7. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Observação 5.11. *Salientamos que as sequências convergentes e as sequências de Cauchy são limitadas.*

Definição 5.21. *Um espaço métrico X é dito ser completo, quando toda sequência de Cauchy é convergente.*

Exemplo 5.3. *O espaço $\mathbb{R}^n$ munido de qualquer uma das três métricas definidas no Exemplo 5.1 é um exemplo de espaço métrico completo.*

Teorema 5.3. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

5.1.3 Axiomas de Enumerabilidade e Topologia Fraca

A seguir, enunciaremos os axiomas de enumerabilidade dos espaços topológicos a fim de caracterizar as noções de convergência, fecho e função contínua para tais classes.

Definição 5.22. *Uma coleção β_x de conjuntos abertos de um espaço topológico X é uma base local no ponto x , se para cada vizinhança $\mathcal{V}$ de x , existe um conjunto $B \in \beta_x$ tal que $x \in B$ e $B \subset \mathcal{V}$.*

Definição 5.23. *(Axiomas da Enumerabilidade) Seja X um espaço topológico. Dizemos que X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade se X possui uma base local com uma quantidade enumerável de elementos. Dizemos que o espaço X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade se existe uma base enumerável de abertos que gera o espaço topológico X .*

Observação 5.12. *Observamos que todo espaço topológico que satisfaz o segundo axioma também satisfaz o primeiro.*

Exemplo 5.4. *Todo espaço métrico satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Proposição 5.8. *Sejam X e Y espaços topológicos. Se uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a sequência $f(x_n) \rightarrow f(x)$ sempre que $x_n \rightarrow x$ em X . A recíproca é válida se X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Proposição 5.9. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$. Se $x \in \overline{Y}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos em Y tal que $x_n \rightarrow x$ em X . A recíproca é válida se X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Definição 5.24. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito denso em X quando $\overline{Y}^X = X$. O espaço X é dito separável se existe um subconjunto $Y \subset X$, enumerável e denso em X .*

Teorema 5.4. *Todo espaço topológico que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade é separável. Reciprocamente, todo espaço topológico metrizável e separável satisfaz o segundo axioma.*

Observação 5.13. *Todo subespaço de um espaço métrico separável é separável.*

Para maiores detalhes das afirmações feitas nesta seção até o presente momento, indicamos as seguintes referências clássicas, Munkres [37] e Lima [20]

Finalizaremos esta subseção definindo o que se entende por topologia fraca.

Proposição 5.10. *A interseção arbitrária de uma família de topologias sobre um conjunto X é uma topologia sobre X .*

Proposição 5.11. *Sejam X um conjunto arbitrário, Y um espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Então, a coleção de todos os subconjuntos de X da forma $f^{-1}(\Omega)$, onde Ω é aberto em Y , constitui uma topologia sobre X .*

Observação 5.14. *A topologia definida na Proposição 5.11 é chamada a topologia induzida em X por Y . Notemos que com essa topologia, f é contínua. Além disso, essa é a topologia menos fina para a qual f é contínua.*

Definição 5.25. *Sejam X um conjunto arbitrário, $\{(Y_\lambda, \sigma_\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ uma família arbitrária de espaços topológicos e $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ uma coleção qualquer de aplicações $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$. Cada espaço topológico Y_λ induz uma topologia τ_λ sobre X , para a qual f_λ é contínua. Assim, se em X existe uma topologia tal qual todas as aplicações pertencentes a família $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ sejam contínuas, então esta topologia deve conter todas as τ_λ . Definimos a topologia fraca τ induzida pela família de aplicações $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ como sendo a topologia menos fina (menos abertos) para a qual todas as aplicações em $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ sejam contínuas. Observemos que a coleção de todas as interseções finitas da família $\bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \tau_\lambda$ é uma base para a topologia fraca τ .*

Proposição 5.12. *Seja X um conjunto arbitrário, $\{(Y_\lambda, \sigma_\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ uma família arbitrária de espaços topológicos e $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ uma coleção qualquer de aplicações $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X converge para um ponto $x \in X$ na topologia fraca induzida pela família $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ se, e somente se, para cada índice $\lambda \in \mathcal{L}$ tem-se*

$$f_\lambda(x_n) \rightarrow f_\lambda(x), \text{ na topologia } \sigma_\lambda \text{ de } Y_\lambda.$$

Para as demonstrações dos resultados acima enunciados sobre topologia fraca, ver Cavalcanti [4], capítulo 3, seção 1, ou o clássico Brezis [3], Capítulo 3, seção 1.

5.2 Espaços Vetoriais Topológicos

Os espaços vetoriais fazem parte de uma categoria com constante presença no estudo das equações diferenciais, mais geralmente, em toda matemática. Para problemas analíticos a noção de limite tem relevância profunda, e, portanto é de se esperar que esses espaços sejam munidos com uma topologia que seja compatível com a sua estrutura vetorial. Tais espaços são chamados de espaços vetoriais topológicos.

5.2.1 Elementos Gerais

Começamos esta subseção definindo a estrutura de espaço vetorial normado. Esta talvez seja o exemplo mais importante de espaço vetorial topológico.

Definição 5.26. *Seja X um espaço vetorial real. uma norma em X é uma função*

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_X : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_X\end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) $\|x\|_X > 0$ se $x \neq 0$.
- (b) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \cdot \|x\|_X$, $\forall x \in X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- (c) (**desigualdade triângular**) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$, $\forall x, y \in X$.

O par $(X, \|\cdot\|_X)$ satisfazendo as condições descritas acima é denominado espaço vetorial normado. Frequentemente se designa o espaço vetorial X e a norma $\|\cdot\|$, deixando a norma e o espaço considerando subentendido.

Para uma exposição detalhada sobre espaços vetoriais, bases algébricas (base de Hamel) e aplicações lineares, indicamos Coelho [7], e o clássico Hoffman [12].

Exemplo 5.5. *Todo espaço vetorial normado X pode ser considerado como um espaço métrico. Basta definir a seguinte distância $d(x, y) = \|x - y\|$, para cada par de pontos $x, y \in X$. Esta métrica é dita induzida pela norma $\|\cdot\|$. Portanto podemos induzir em X uma topologia métrica.*

Definição 5.27. *Duas normas definidas em um espaço vetorial X são ditas equivalentes, quando induzem a mesma topologia sobre X .*

Exemplo 5.6. *Podemos definir normas no espaço $\mathbb{R}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ pondo:*

$$\|x\| = \left[\sum_{j=1}^n (x_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|' = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad e \quad \|x\|'' = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

onde, $x = (x_1, \dots, x_n)$ é um elemento de $\mathbb{R}^n$.

Essas normas induz as métricas d , d' e d'' do Exemplo 5.1 respectivamente.

Observação 5.15. *As operação de adição vetorial e multiplicação por escalares de um espaço vetorial normado X são funções contínuas. Para adição de vetores consideramos a topologia gerada pelo produto cartesiano dos abertos de X considerando-o como espaço topológico. Para multiplicação por escalar considere o produto dos abertos de $\mathbb{R}$ com os abertos de X .*

Definição 5.28. *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado que é completo na métrica induzida por sua norma.*

Definição 5.29. *Seja X um espaço vetorial e seja $C \subset A$. O conjunto C é dito convexo se $tx + (1 - t)y \in C$ sempre que $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$. Dizemos que C é balanceado se $\lambda x \in C$ sempre que $x \in C$ e $|\lambda| \leq 1$.*

Definição 5.30. *Seja X um espaço vetorial e τ uma topologia em X . Dizemos que τ é uma topologia vetorial sobre X quando satisfaz as seguintes condições:*

- (a) *Todo subconjunto unitário de X é um conjunto fechado.*
- (b) *As operações de espaço vetorial são contínuas com respeito a τ .*

Neste caso o par (X, τ) é dito um espaço vetorial topológico.

Exemplo 5.7. *Os espaços vetoriais normados são exemplos de espaços vetoriais topológicos.*

Observação 5.16. *Observemos que todo espaço vetorial topológico é um espaço de Hausdorff.*

Definição 5.31. *Um homeomorfismo é uma bijeção contínua entre espaços topológicos tal que sua inversa também é contínua. Quando existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos X e Y , dizemos que esses espaços são homeomorfos. Dois espaços homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista topológico.*

Para espaços vetoriais topológicos, a fim de obter espaços indistinguíveis, é importante que sejam preservados tanto a estrutura algébrica quanto a estrutura topológica. Portanto, consideramos a seguinte definição:

Definição 5.32. *Dizemos que uma bijeção entre espaços vetoriais topológicos é um isomorfismo topológico se ele é linear, contínuo e tem inversa contínua.*

No caso dos espaços métricos, temos as isometrias (bijeção isométrica). Uma aplicação bijetora $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos é uma isometria quando $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$. As isometrias preservam a estrutura métrica. Salientamos que toda isometria é um homeomorfismo, mas existem homeomorfismos entre espaços métricos que não são isometrias. Portanto, existem propriedades métricas que não são topológicas.

Exemplo 5.8. *Seja X um espaço vetorial topológico. Para cada vetor $a \in X$ e cada escalar $\lambda \neq 0$ associaremos os seguintes mapas:*

$$\begin{array}{ll} T_a : X & \longrightarrow X, \\ x & \longmapsto a + x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} M_\lambda : X & \longrightarrow X \\ x & \longmapsto \lambda x. \end{array}$$

Os mapas T_a e M_λ são isomorfismos topológicos de X em X .

Uma das consequências desse fato é que todo espaço topológico é invariante por translações. Isto é se, $\Omega \subset X$ é aberto então o conjunto $a + \Omega := \{a + x; x \in \Omega\}$ é aberto. Assim, um espaço vetorial topológico é completamente determinado por qualquer base local. Quando falarmos uma base local para um espaço vetorial topológico fica subentendido que estamos nos referimos a uma base local na origem.

Definição 5.33. *Uma métrica d de um espaço vetorial topológico metrizável X é dita invariante se $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ qualquer que sejam $x, y, z \in X$.*

Definição 5.34. *Seja X um espaço vetorial topológico. Dizemos que X é localmente convexo se existe uma base local β tal que seus elementos sejam conjuntos convexos. Um espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico localmente convexo, metrizável, completo e tal que a métrica que induz sua topologia é invariante.*

Exemplo 5.9. *Seja X um espaço vetorial. Se em X existe uma métrica d , invariante. Então X é um espaço vetorial localmente convexo (topologia métrica induzida por d). Em particular, os espaços normados são localmente convexos.*

Definição 5.35. *Seja X um espaço vetorial topológico e seja β uma base local (fixa) para a topologia de X . Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos em X é dita uma sequência de Cauchy se para cada $B \in \beta$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in B$ sempre que $n, m \geq n_0$.*

Observação 5.17. *Observamos que as diferentes bases locais dão origem a mesma classe de sequência de Cauchy. Observemos também que quando X é um espaço topológico metrizável com uma métrica invariante d , uma sequência é de Cauchy na Definição 5.35 se, e somente se, é de Cauchy com respeito à Definição 5.20.*

Proposição 5.13. *Se duas métricas invariantes d e d' sobre um espaço vetorial X induz a mesma topologia sobre X então, d e d' produzem as mesmas sequências de Cauchy. Além disso, (X, d) é completo se, e somente se, (X, d') é completo.*

Definição 5.36. *Seja X um espaço vetorial topológico. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito limitado se para cada vizinhança $\mathcal{V}$ da origem, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $Y \subset t\mathcal{V} := \{tx; x \in \mathcal{V}\}$.*

Observação 5.18. *Observemos que quando um espaço topológico vetorial é metrizável com uma métrica invariante, a Definição 5.36 coincide com a Definição 5.6. Salientamos que todo conjunto compacto é limitado.*

Teorema 5.5. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos e seja $T : X \longrightarrow Y$ uma mapa linear. Se T é contínuo na origem então T é contínuo.*

Teorema 5.6. *Seja $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear sobre um espaço vetorial topológico X . As afirmações abaixo são todas equivalentes:*

- (a) T é contínuo.
- (b) $\text{Ker}(T)$ é fechado.
- (c) $\text{Ker}(T)$ é denso em X .
- (D) T é limitado em alguma vizinhança da origem.

Proposição 5.14. *Todo espaço vetorial topológico com dimensão finita é isomorfo ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a sua topologia usual. Seja X um espaço vetorial com dimensão finita e Y é um espaço vetorial topológico qualquer. Então o mapa $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo.*

Teorema 5.7. *Seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Então, existe uma métrica d sobre X tal que:*

- (a) d induz a topologia de X .
- (b) As bolas abertas centradas na origem são balanceadas.
- (c) d é invariante.
- (d) Todas as bolas abertas são convexas.

Definição 5.37. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos. Se $T : Y \longrightarrow X$ for linear, injetivo e contínuo, dizemos que o espaço Y está imerso continuamente no espaço X , e escrevemos, $Y \hookrightarrow X$. Neste caso identificamos o vetor $T(x) \in X$ com o vetor $x \in Y$. Se além disso, $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ for convergente sempre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for limitada, dizemos que Y está imerso compactamente em X , e escrevemos $Y \xrightarrow{\text{comp}} X$.*

Definição 5.38. *Uma seminorma sobre um espaço vetorial X é uma função*

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (a) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ quaisquer que sejam $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.

Definição 5.39. *Uma família $\mathcal{P}$ de seminormas sobre um espaço vetorial X é dita separável se para cada vetor $x \neq 0$, existe uma seminorma $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.*

Observação 5.19. *A noção de seminorma está relacionada com a noção de convexidade local. Em cada espaço localmente convexo existe uma família contínua de seminormas separável. Por outro lado, se $\mathcal{P}$ é uma família de seminormas sobre um espaço vetorial X , então $\mathcal{P}$ pode ser usada para induzir uma topologia localmente convexa sobre X tal que toda seminorma $p \in \mathcal{P}$ seja contínua.*

Teorema 5.8. *Suponha que $\mathcal{P}$ é uma família de seminormas separável sobre um espaço vetorial X . Para cada $p \in \mathcal{P}$ e cada $n \in \mathbb{N}$ associamos o seguinte conjunto:*

$$\mathcal{V}(p, n) = \left\{ x \in X; p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

A coleção de todas as interseções finitas dos conjuntos $\mathcal{V}(p, n)$ é uma base local convexa e balanceada para uma topologia τ em X . Além disso, X munido desta topologia é um espaço vetorial topológico localmente convexo, satisfazendo

(a) Cada $p \in \mathcal{P}$ é contínuo.

(b) Um conjunto $Y \subset X$ é limitado se, e somente se, cada $p \in \mathcal{P}$ é limitada sobre Y .

Olhemos de perto o caso em que a família de semi-normas separável $\mathcal{P} = \{P_i; i \in \mathbb{N}\}$ é enumerável. Pelo Teorema 5.8, a família $\mathcal{P}$ induz uma topologia localmente convexa τ sobre X com uma base local enumerável. Assim, do Teorema 5.7, segue que τ é metrizável. Neste caso, podemos definir uma métrica invariante que induz τ . A saber,

$$d(x, y) = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i \cdot p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)},$$

onde $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é qualquer sequência de números reais positivos convergindo para zero.

Para uma exposição detalhada sobre os espaços vetoriais topológicos e as demonstrações dos resultados enunciados nesta seção, ver o clássico Rudin [41].

5.2.2 Espaços de Hilbert

Esta subseção está encarregada de reunir os fatos mais relevantes para nosso propósito à cerca dos espaços de Hilbert.

Definição 5.40. *Seja X um espaço vetorial. Um produto interno sobre X é uma função*

$$\begin{aligned} ((\cdot, \cdot))_X : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto ((x, y))_X \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(a) $((x, x))_X > 0$ se $x \neq 0$.

(b) $((x, y))_X = ((y, x))_X$, $\forall x, y \in X$.

(c) $((x + y, z))_X = ((x, z))_X + ((y, z))_X$, $\forall x, y, z \in X$.

(d) $((\lambda x, y))_X = \lambda((x, y))_X$, $\forall x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

O par $(X, ((\cdot, \cdot))_X)$ satisfazendo as condições acima é chamado espaço vetorial com produto interno. Diremos apenas o espaço com produto interno X , deixando subentendida o produto interno considerado. Quando o espaço X é fixado, escrevemos apenas $((\cdot, \cdot))$.

Observação 5.20. Todo espaço vetorial X com produto interno $((\cdot, \cdot))$ pode ser considerado como uma espaço vetorial normado. Definimos uma norma em X pondo, $\|x\| = \sqrt{((x, x))}$. Esta norma é dita proveniente do produto interno $((\cdot, \cdot))$.

Exemplo 5.10. Nem toda norma é proveniente de um produto interno. Por exemplo, as normas $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ do Exemplo 5.6, não provém de um produto interno. A norma $\|\cdot\|$ do Exemplo 5.6 é proveniente do seguinte produto interno,

$$((x, y)) = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são elementos de $\mathbb{R}^n$.

Este produto interno é chamado produto interno usual do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Um produto interno induz uma noção de ângulo entre elementos de um espaço vetorial. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ munido com o seu produto interno usual é o espaço universo da geometria espacial. Definiremos, a classe abstrata de espaço vetorial normado que mais se assimila com este espaço.

Definição 5.41. Um espaço vetorial com produto interno X é chamado espaço de Hilbert se seu produto interno induz uma norma em X tal qual o torne um espaço de Banach.

Exemplo 5.11. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido com seu produto interno usual é um exemplo de espaço de Hilbert.

Proposição 5.15. Seja X um espaço com produto interno. Então as seguintes relações são válidas:

(a) (*Desigualdade de Schwarz*)

$$|((x, y))| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

(b) (*Identidade do paralelogramo*)

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

Onde, $\|\cdot\| := \sqrt{((\cdot, \cdot))}$.

Proposição 5.16. *Uma norma sobre um espaço normado X provém de um produto interno se, e somente se, vale a identidade do paralelogramo.*

A seguir, enunciemos alguns resultados sobre aplicações lineares entre espaços vetoriais normados com o intuito de definir o dual topológico de um espaço normado.

Proposição 5.17. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Então T é contínua se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X$ qualquer que seja $x \in X$. Portanto podemos definir uma norma no conjunto $\mathcal{L}(X; Y)$ das aplicações lineares de X em Y pondo,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X; Y)} = \inf \{C; \|T(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}; \quad \forall T \in \mathcal{L}(X; Y).$$

Observação 5.21. *Quando $Y = \mathbb{R}$ na proposição acima, o conjunto $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ munido da topologia métrica induzida pela norma definida acima é denotado por X' . Este espaço é chamado o dual topológico do espaço normado X . O dual topológico do espaço vetorial normado X' é chamado o bidual topológico de X e é denotado por X'' .*

Observação 5.22. *Observamos que quando trabalharmos com um funcional linear contínuo T definido em um espaço topológico X , escrevemos $\langle T, x \rangle$ para denotar a imagem $T(x)$ de um elemento $x \in X$ pelo funcional T .*

Exemplo 5.12. *O dual topológico X' de um espaço vetorial normado X é um espaço de Banach.*

Proposição 5.18. *Seja X um espaço vetorial normado. Defina,*

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto J_x, \end{aligned}$$

onde $J_x(f) = \langle f, x \rangle$ para todo $f \in X'$.

O mapa J é um isomorfismo isométrico (isometria) de X em $J(X)$. Este mapa é chamado injeção canônica.

Observação 5.23. *Em virtude do isomorfismo acima, identifica-se X a $J(X)$ e escreve-se $X \subset X''$.*

Definição 5.42. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que X é reflexivo quando $J(X) = X$. Isto é, quando a injeção canônica J é sobrejetiva. Neste caso temos $X = X''$ via a identificação feita na observação acima.*

No que segue, enunciaremos resultados de fundamental importância na teoria dos espaços de Hilbert.

Teorema 5.9. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. ver [4], página 164. □

Teorema 5.10. (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) *Seja X um espaço de Hilbert com produto interno $((\cdot, \cdot))$ e norma $\|\cdot\|$. Dado um funcional linear $T \in X'$, existe um único elemento $x_0 \in X$ tal que*

$$\langle T, x \rangle = ((x, x_0)), \quad \forall x \in X.$$

Além disso, $\|T\|_{X'} = \|x_0\|$.

Demonstração. Para a demonstração ver [4], página 171. □

Observação 5.24. *Seja X é um espaço de Hilbert. Devido o Teorema 5.10, podemos considerar a identificação, $X = X'$.*

Definição 5.43. *Seja X um espaço de Hilbert. Dizemos que uma forma bilinear $\alpha : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ é,*

- (a) **(Contínua)** *Se existe uma constante real C tal que $|\alpha(u, v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\|$, para cada $u, v \in X$.*
- (b) **(Coerciva)** *Se existir uma constante real C tal que $\alpha(u, v) \geq C\|v\|^2$, parar todo $v \in X$.*

Teorema 5.11. (Lax-Milgran) *Seja $\alpha(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre um espaço de Hilbert X . Então dado $\varphi \in X'$ existe um único $u \in X$ tal que*

$$\alpha(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in X.$$

Além disso, se α for simétrica, então u é caracterizado pela seguinte propriedade:

Existe um único $u \in X$ tal que

$$\frac{1}{2}\alpha(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in X} \left\{ \frac{1}{2}\alpha(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração. Para demonstração ver [3], página 140. □

Definição 5.44. *Seja X um espaço de Hilbert munido com o produto interno $((\cdot, \cdot))$ e com a norma $\|\cdot\| = \sqrt{((\cdot, \cdot))}$. uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X é denominada uma base Hilbertiana para X quando satisfaz as seguintes condições:*

- (a) $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $((u_n, u_m)) = 0$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.
- (c) O subespaço $[(u_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ gerado pelos vetores da sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em X . em outros termos, $\overline{[(u_n)_{n \in \mathbb{N}}]} = X$

Proposição 5.19. *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

5.2.3 Topologia Fraca e Fraca *

No que segue, definamos a topologia fraca $\sigma(X, X')$ sobre um espaço de Banach X e a topologia fraca * $\sigma(X', X)$ sobre o seu dual X' . Essas topologias possuem menos abertos do que a topologia usual, porém induz uma quantidade maior de subconjuntos compactos.

Definição 5.45. *Sejam X um espaço de Banach. Definimos a topologia fraca $\sigma(X, X')$ sobre X como sendo a topologia menos fina em X para a qual são contínuos todos os funcionais lineares $f \in X'$ (isto é, os $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ que são contínuos na topologia métrica induzida pela norma dual definida na Proposição 5.17).*

Observação 5.25. *Observemos que um espaço de Banach X munido da topologia fraca $\sigma(X, X')$ é um espaço de Hausdorff. Quando X possui dimensão infinita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ não é metrizável, pois X não satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Definição 5.46. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos em X converge fracamente para um ponto $x \in X$ e escrevemos, $x_n \rightharpoonup x$, quando a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o ponto x na topologia fraca $\sigma(X, X')$. Quando $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x na topologia métrica induzida pela norma do espaço X dizemos que x_n converge fortemente para x . Neste caso escrevemos, $x_n \rightarrow x$.*

Proposição 5.20. *Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos em X e $x \in X$. Então:*

- (a) $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in X'$.

(b) Se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightharpoonup x$.

(c) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(d) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos em X' tal que $f_n \rightarrow f$ em X' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ em $\mathbb{R}$.

Observação 5.26. Observamos que a topologia $\sigma(X, X')$ é a topologia menos fina sobre X para a qual todos os funcionais $f \in X'$ são contínuas. Como os funcionais $f \in X'$ são contínuas na topologia da norma (topologia forte), resulta que a topologia forte é mais fina do que a topologia fraca.

Proposição 5.21. Sejam X um espaço de Banach e τ a topologia forte (topologia métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_X$) em X . Então, $(X, \tau) = (X, \sigma(X, X'))$ se, e somente se, a dimensão de X é finita.

Definição 5.47. Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca * , denotada por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X' , para a qual todas as funções da família $\{J_x\}_{x \in X} \subset X''$ (definida na Proposição 5.18) são contínuas.

Observação 5.27. Observemos que o conjunto X' munido da topologia fraca $^* \sigma(X', X)$ é um espaço de Hausdorff. A topologia fraca $^* \sigma(X', X)$ é menos fina do que a topologia fraca $\sigma(X', X'')$.

Definição 5.48. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos em X' converge fraco * para uma função $f \in X'$, e escrevemos $f_n \xrightarrow{*} f$, quando a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f na topologia fraco $^* \sigma(X', X)$.

Proposição 5.22. Sejam X um espaço de Banach, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos em X' e $f \in X'$. Então:

(a) $f_n \xrightarrow{*} f$ se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall x \in X$.

(b) Se $f_n \rightharpoonup f$ então, $f_n \xrightarrow{*} f$.

(c) Se $f_n \xrightarrow{*} f$, então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(d) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos em X tal que $x_n \rightarrow x$ em X , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ em $\mathbb{R}$.

Observação 5.28. Quando X é um espaço de Banach munido da topologia usual (topologia métrica induzida pela norma), a bola unitária fechada é compacto se, e somente se, a dimensão vetorial de X é finita.

Observação 5.29. Quando a dimensão de X' é finita, as três topologias (forte, fraca e fraca $*$) coincidem.

Teorema 5.12. Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X' . Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge fraco $*$ para uma função $f \in X'$.

Teorema 5.13. Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada de elementos de X . Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente para um ponto $x \in X$.

Para as demonstrações dos resultados enunciados nesta seção, ver Brezis [3] ou Cavalcanti [4].

5.3 Espaços de Medida

A teoria da medida de Lebesgue talvez seja a teoria mais importante de toda análise. Nesta seção, será abordada um pouco da teoria da medida clássica e definiremos a integral de uma função com respeito a uma medida dada.

5.3.1 Elementos Gerais

Definição 5.49. Uma σ -álgebra sobre um conjunto X é uma família $\mathfrak{X}$ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes condições.

- (a) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathfrak{X}$.
- (b) Se $A \in \mathfrak{X}$, então $X/A \in \mathfrak{X}$.
- (c) A união enumerável de elementos em $\mathfrak{X}$ pertence a $\mathfrak{X}$.

O par $(X, \mathfrak{X})$ satisfazendo às condições descritas acima é denominado um espaço mensurável. A coleção $\mathfrak{X}$ é dita uma σ -álgebra em X e os elementos da família $\mathfrak{X}$ são chamados conjuntos $\mathfrak{X}$ -mensuráveis. Usualmente diz-se apenas o espaço mensurável X e o conjunto mensurável $A \in \mathfrak{X}$, ficando subentendido que estamos considerando uma σ -álgebra fixa $\mathfrak{X}$.

Observação 5.30. Da mesma forma que acontece com topologias, a interseção de uma família arbitrária de σ -álgebras é uma σ -álgebra. Assim, dada qualquer coleção $\mathfrak{A}$ de subconjuntos de um conjunto X , podemos considerar a interseção de todas as σ -álgebras sobre X que contém a coleção $\mathfrak{A}$. Essa σ -álgebra é chamada a σ -álgebra gerada pela coleção $\mathfrak{A}$.

Exemplo 5.13. Seja X um espaço topológico. A σ -álgebra gerada pela coleção de todos os conjuntos abertos do espaço X é chamada a σ -álgebra de Borel sobre X e é denotada por $\mathfrak{B}_X$. Seus elementos são chamados conjuntos de Borel.

Observação 5.31. Observamos que a σ -álgebra gerada por todos os conjuntos fechados de um espaço topológico X coincide com a σ -álgebra de Borel sobre X .

Definição 5.50. Sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{L}}$ uma coleção arbitrária de conjuntos não vazios, $X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{L}} X_\alpha$ o produto cartesiano desta família, $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ a projeção na coordenada α e $\mathfrak{X}_\alpha$ uma σ -álgebra sobre X_α , para cada índice $\alpha \in \mathfrak{L}$. Definimos a σ -álgebra produto $\bigotimes_{\alpha \in \mathfrak{L}} \mathfrak{X}_\alpha$ sobre X como sendo a σ -álgebra gerada pelo seguinte conjunto:

$$\{\pi^{-1}(A_\alpha); A_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha \text{ e } \alpha \in \mathfrak{L}\}$$

Exemplo 5.14. $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

Definição 5.51. Seja $(X, \mathfrak{X})$ um espaço mensurável. Uma medida sobre a σ -álgebra $\mathfrak{X}$ é uma função $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu(A) \geq 0$ para cada $A \in \mathfrak{X}$.

(c) Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis $\mathfrak{X}$ dois-a-dois disjuntos, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

A tripla $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ satisfazendo as condições descritas acima é denominado um espaço de medida. Comumente falaremos apenas o espaço de medida X , deixando subentendido qual σ -álgebra e qual medida estamos considerando.

Observação 5.32. Se $\mu(A) < \infty$ para cada conjunto $A \in \mathfrak{X}$, dizemos que a medida μ é finita. Mais geralmente, se existe uma sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjunto mensuráveis tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então a medida μ é dita σ -finita.

Definição 5.52. Seja $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma proposição aberta $P(x)$ acontece, $\mu - q.t.p.$ (em quase toda parte) em X , se existir um conjunto $E \in \mathfrak{X}$ tal que $\mu(E) = 0$ e $P(x)$ é verdadeira para todo $x \in X/E$. Se não houver risco de confusão a respeito da medida utilizada, dizemos apenas que a propriedade $P(x)$ acontece, $q.t.p.$ em X .

Observação 5.33. *Seja $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ um espaço de medida. Observamos que se $E \subset A$ então $\mu(E) \leq \mu(A)$. Em particular, se $\mu(A) = 0$, então $\mu(E) = 0$.*

Definição 5.53. *Uma medida é dita completa quando seu domínio contém todos os subconjuntos de cada conjunto com medida nula.*

Observação 5.34. *Observamos que existe uma única medida σ -finita μ sobre a σ -álgebra de Borel $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, tal que a medida de cada intervalo finito coincida com o seu comprimento. Pode-se mostrar que se pode aumentar o domínio da medida μ para uma σ -álgebra $\mathfrak{L}$ de tal modo que essa nova medida seja completa. Esta medida completa, denotada por med é chamada medida de Lebesgue, a σ -álgebra é dita σ -álgebra de Lebesgue e seus elementos são chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis.*

A tripla $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \text{med})$ é chamada espaço de Lebesgue. Para uma exposição detalhada da construção da medida e da σ -álgebra de Lebesgue, ver Bartle [2] Capítulo 9 ou o clássico Folland [10] Capítulo 1.

A σ -álgebra $\mathfrak{L}$ de Lebesgue é estritamente maior do que a σ -álgebra de Borel $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Assim, existem conjuntos Lebesgue mensurável que não é um conjunto de Borel. Pode-se mostrar que $\mathfrak{L}$ tem cardinalidade maior do que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Em verdade, $|\mathfrak{L}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathbb{R}| = |\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}|$, onde o símbolo $|A|$ denota a cardinalidade do conjunto A .

Em geral, para o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ existe uma σ -álgebra $\mathfrak{L}$ chamada σ -álgebra de Lebesgue que contém estritamente a σ -álgebra de Borel $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ e é domínio de uma única medida completa med , tal que a medida de cada retângulo finito (produto cartesiano de intervalos) coincida com o seu volume. Sempre que estivermos usando o conjunto $\mathbb{R}^n$ fica subentendo que estará munido da σ -álgebra e da medida de Lebesgue. Para maiores detalhes veja Bartle [2], Capítulos 13-17 ou Folland [10], Capítulo 2.

5.3.2 Funções Mensuráveis

Definição 5.54. *Sejam $(X, \mathfrak{X})$, e $(Y, \mathfrak{Y})$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ -mensurável se $f^{-1}(A) \in \mathfrak{X}$ para todo $A \in \mathfrak{Y}$. Isto é, a imagem inversa de cada conjunto mensurável de Y é um conjunto mensurável de X . Quando considerarmos σ -álgebras fixadas, dizemos simplesmente que a aplicação f é mensurável.*

Proposição 5.23. *Sejam X e Y espaços topológicos. Toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y)$ -mensurável.*

Definição 5.55. Seja X um espaço mensurável e seja $A \subset X$. Defina $\mathcal{X}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo,

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

A função $\mathcal{X}_A$ é chamada, função característica do conjunto A .

Observação 5.35. A função $\mathcal{X}_A$, característica de um subconjunto A de um espaço mensurável X , é uma função mensurável se, e somente se, A é um conjunto mensurável.

Definição 5.56. Seja X um espaço mensurável. Uma função $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita simples quando é mensurável e o seu conjunto imagem $f(X)$ é finito.

Observação 5.36. Um função simples $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser representada de maneira única, tendo a seguinte expressão:

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{A_j},$$

onde os a_j 's são números reais distintos e os A_j 's são conjuntos mensuráveis não-vazios disjuntos tais que $X = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Neste caso, $A_j = f^{-1}(a_j)$ e $f(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Esta representação é chamada representação canônica.

Definição 5.57. Sejam X um espaço mensurável e Y um espaço métrico. Dizemos que uma sequência de funções mensuráveis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X em Y converge pontualmente para uma função $f : X \longrightarrow Y$, e escrevemos $f_n \rightarrow f$, quando para cada $x \in X$ tem-se,

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ em } Y.$$

A sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre um conjunto $A \subset X$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \text{sempre que } x \in A \text{ e } n \geq n_0.$$

Neste caso escrevemos, $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre A .

Proposição 5.24. Sejam X um espaço mensurável e $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função mensurável. Então existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre X tal que:

(a) $0 < \varphi_n < \varphi_{n+1} < f$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\varphi_n \rightarrow f$ pontualmente.

(c) $\varphi_n \rightarrow f$ uniformemente sobre qualquer conjunto tal qual f seja limitado.

Proposição 5.25. *Seja $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. A medida μ é completa se, e somente se, são válidas as seguintes afirmações:*

(a) *Se f é mensurável e $f(x) = g(x)$, q.t.p. em X , então g é mensurável.*

(b) *Se f_n é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$, q.t.p. em X , então f é mensurável.*

Definição 5.58. *Seja $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ um espaço de medida. Denote por $M^+(X, \mathfrak{X})$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mensuráveis e não-negativas.*

Se φ é uma função simples em $M^+(X, \mathfrak{X})$ com representação canônica $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{A_j}$, definimos a integral de φ com respeito a medida $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por:

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \mu(A_j) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Mais geralmente, se $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$, temos,

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi \cdot d\mu; \varphi \in M^+(X, \mathfrak{X}) \text{ é simples e } \varphi \leq f \right\}.$$

Se $A \in \mathfrak{X}$ e $A \subset X$, definimos a integral de f sobre A com respeito à μ :

$$\int_A f d\mu = \int (f \cdot \mathcal{X}_A) d\mu.$$

Teorema 5.14. (Teorema da Convergência Monótona) *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de funções em $M^+(X, \mathfrak{X})$ tal que $f_n \rightarrow f$, então*

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

Definição 5.59. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Definimos a parte negativa f^+ e a parte positiva f^- de f pondo,*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

f^+ , e f^- são funções não-negativas tais que, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

Observação 5.37. Note que, f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Definição 5.60. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ como sendo o conjunto das funções integráveis. $\mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ consiste da coleção de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{X}$ -mensuráveis tais que a parte positiva f^+ e a parte negativa f^- de f , tenha integral finita com respeito a μ . Isto é,

$$\int f^+ d\mu < \infty \quad e \quad \int f^- d\mu < \infty.$$

Neste caso, definimos a integral de f com respeito a μ por:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Teorema 5.15. (Teorema da Convergência Dominada) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um sequência de funções em $\mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, q.t.p. em X , onde $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Se existir uma função integrável $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ tal que $|f_n| < g$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ e $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Para as demonstrações dos resultados enunciados e mais detalhes sobre os fatos descritos acima ver Bartle [2], Capítulos 3 e 4, ou, Folland [10], Capítulo 2.

5.3.3 Espaço das Funções Integráveis L^p

Nesta subseção, estudaremos os espaços de (classes) funções L^p .

Definição 5.61. Seja $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$. Dizemos que f e g são μ -equivalentes, e escrevemos $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$, μ -q.t.p. em X ; a classe de equivalência de f pela relação $\sim$ será denotada por $[f]$.

Definimos o espaço de Lebesgue $L^1(X, \mathfrak{X}, \mu)$ como sendo o seguinte conjunt por: o quociente:

$$L^1(X, \mathfrak{X}, \mu) = \mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu) / \sim = \left\{ [f]; \int |f| d\mu < \infty \right\}$$

Mais geralmente, para cada número real p tal que $1 \leq p < \infty$, definimos o conjunto,

$$L^p(X, \mathfrak{X}, \mu) = \left\{ [f]; \int |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Escrevemos apenas L^p deixando subentendido que estamos fixando um espaço de medida $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ arbitrário. Salientamos que indicaremos a classe de funções $[f]$ simplesmente pelo representante f .

Observação 5.38. O conjunto L^p munido das operações de soma de funções e produto por escalares, possui uma estrutura de espaço vetorial.

Proposição 5.26. (Desigualdade de Young) Sejam p e q números reais tais que $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$A \cdot B \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}, \text{ quaisquer que sejam os números reais não negativos } A \text{ e } B.$$

Proposição 5.27. (Desigualdade de Hölder) Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposição 5.28. (Desigualdade de Hölder Generalizada) Para cada $j \in \mathbb{N}$ sejam $p_j > 1$ e $\sum_{j=1}^n (p_j)^{-1} = r^{-1} \leq 1$. Se $f_j \in L^{p_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ então $\prod_{j=1}^n f_j \in L^r$ e $\| \prod_{j=1}^n f_j \|_{L^r} \leq \prod_{j=1}^n \| f_j \|_{L^{p_j}}$.

Proposição 5.29. (Desigualdade de Minkowski) Se $f, g \in L^p$ tal que $p > 1$, então $f + g \in L^p$. Além disso,

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $A, B \in \mathbb{R}$. Então,

$$\left(\sum_{j=1}^n |A + B|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^n |A|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |B|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 5.62. Para cada número real $1 \leq p < \infty$, defina

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p} : L^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

A função $\|\cdot\|$ é uma norma completa no espaço vetorial L^p . Assim, L^p munido desta norma é um espaço de Banach.

Definição 5.63. O espaço $L^\infty := L^\infty(X, \mathfrak{X}, \mu)$ consiste de todas as classes de funções reais mensuráveis que são limitadas μ -q.t.p..

Se $f \in L^\infty$ definimos uma norma completa em L^∞ da seguinte maneira,

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf \left\{ \sup_{x \in X/E} |f(x)|; E \in \mathfrak{X} \text{ e } \mu(E) = 0 \right\}.$$

Assim, L^∞ é um espaço de Banach munido das operações usuais dos espaços vetoriais de funções e a norma definida acima.

Observação 5.39. Observamos que se $f \in L^\infty$, então $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ para todo $x \in X$, $\mu - q.t.p.$. Uma função $f \in L^\infty$ é chamada uma função essencialmente limitada

Proposição 5.30. O espaço L^p é um espaço de Hilbert se, e somente se, $p=2$.

Proposição 5.31. Seja (f_n) uma sequência que converge em L^p para uma função mensurável f . Então, existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$, $q.t.p.$ em X .

Os resultados sobre espaços L^p estão demonstrados e detalhados em Bartle [2], Capítulo 6 ou Folland [10], Capítulo 6.

No que segue, nos restringimos ao espaço de medida $(\Omega, \mathfrak{L}, med)$, onde Ω é um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{L}$ é a σ -álgebra de Lebesgue restrita á Ω e med a restrição da medida de Lebesgue ao aberto Ω .

A seguir, faremos considerações sobre a notação utilizada no decorrer do texto.

Definição 5.64. Seja Ω um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Definamos $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathfrak{L}, med)$ e, escrevemos,

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \int f d(med).$$

Além disso, definimos o suporte de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua como sendo o seguinte conjunto:

$$supp(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{R}/\{0\})} = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 5.65. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Definimos o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, das funções infinitamente diferenciáveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que o suporte $supp(f)$ é um subconjunto compacto de Ω . Denotamos por $C^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis e indicamos por $C^0(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são contínuas (Ω munido da topologia de subespaço).

Para uma exposição detalhada sobre derivadas e classes de diferenciabilidade, indicamos os clássicos Rudin [42], Munkres [36], e Lima [18] e [19].

Definição 5.66. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Definimos o espaço vetorial das funções localmente integráveis $L_{loc}^p(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$ como sendo o espaço das classes de funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tais que;

$$\|f\|_{L^p(K)} < \infty \quad \text{para cada conjunto compacto } K \subset \Omega.$$

Observação 5.40. Observamos que $L^p_{loc}(\Omega)$ não é um espaço vetorial normado. porém pode-se mostrar que é um espaço de Fréchet. Além disso, temos a imersão contínua, $L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$.

Observação 5.41. Observamos que o conjunto $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 5.16. (Lema de Du Bois Raymond) Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e,

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, $f(x) = 0$, q.t.p. em Ω .

Demonstração. Ver [5], página 20. □

Proposição 5.32. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Proposição 5.33. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado. Então $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ sempre que $1 \leq r \leq p$.

Observação 5.42. Observamos que existe um isomorfismo isométrico entre o dual topológico $[L^p(\Omega)]'$, do espaço $L^p(\Omega)$ e o espaço $L^q(\Omega)$, com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Além disso, existe um isomorfismo isométrico entre o dual topológico $[L^1(\Omega)]'$, do espaço $L^1(\Omega)$ e o espaço $L^\infty(\Omega)$. Assim. Podemos considera as seguintes identificações:

$$[L^p(\Omega)]' = L^q(\Omega), \text{ para } 1 < p < \infty \quad \text{e} \quad [L^1(\Omega)]' = L^\infty(\Omega).$$

Basta considerarmos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T_f : L^q(\Omega) &\longrightarrow (L^p(\Omega))' \\ f &\longmapsto T_f, \end{aligned}$$

onde $T_f(g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ para cada $g \in L^p(\Omega)$.

Teorema 5.17. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. O espaço $L^p(\Omega)$ é separável, para $1 \leq p < \infty$. Quando $1 < p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Para maiores detalhes sobre as propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$ vide, o clássico Brezis [3], capítulo 6.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, ROBERT A. and FOURNIER, JHON J. F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, N.Y., 1975.
- [2] BARTLE, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons Inc.USA, 1996.
- [3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* .2010, Springer: USA.
- [4] CAVALCANTI, M., CAVALCANTI, V. e KOMORNIK, V., *Introdução à análise funcional*. Maringá: UEM, 2011.
- [5] CAVALCANTI, M. e CAVALCANTI, V., *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. Maringá: UEM, 2009.
- [6] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGrall-Hill. New York, 1955.
- [7] COELHO, F. U. e LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*. edUSP, São Paulo, 2013.
- [8] DACOROGNA, BERNARD. *Indrotuction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, USA, 2004.
- [9] EVANS, LAWRENCE C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, A.M.S.
- [10] FOLLAND, B., *Modern Techniques and their Applications*. John Wiley & Sons Inc.USA, 1999.
- [11] HEBEY, EMMANUEL, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*. Université de Cergy-Pontoise, 1964.
- [12] HOFFMAN, K. e KUNZE, R., *Linear Algebra*. Prentice-Hall, inc. New Jersey, 1971.
- [13] JESUS FILHO, THIAGO de, *Sobre um problema de valor de fronteira para equação da onda*, Dissertação. UFS, São Cristóvão, 2016.
- [14] JORGENS, K., *Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen*, In German, Math. Z. 77(1961), 295-308. MR0130462; url.
- [15] JORGENS, K., *Nonlinear wave equations*, University of Colorado, Department of Mathematics, Colorado, USA, 1970.
- [16] KOMORNIK, V. and ZUAZUA, E., *A direct method for boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pures Appl. (9) 69(1990), 33-54. MR1054123.
- [17] LASIECKA, I. and TATARU, D., *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, Differential Integral Equations 6(1993), 507-533. MR1202555.
- [18] LIMA, ELON LAGES, *Análise no Espaço R^n* . ISBN, Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [19] LIMA, ELON LAGES, *Curso de análise*. vol 2. ISBN, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

- [20] LIMA, ELON LAGES, *Espaços métricos*, Rio de Janeiro: IMPA, projeto Euclides, 2015.
- [21] LIONS and ROBERT, DAUTRAY, *Functional and Variable methods*, Springer, Berlin, 2000.
- [22] LIONS, J. L., *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Vol. I, EDP Sciences, Paris, France, 2003.
- [23] LIONS, J. L. and MAGENES, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris 1968.
- [24] LIONS, J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des problèmes aux limites Non-Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [25] LOURÊDO, A. T., MIRANDA, M. M., CLARK, M. R. and CLARK, H. R. *Local solutions for hyperbolic equation*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2015, No. 30, 1-16.
- [26] LOURÊDO, A. T. and MIRANDA, M. MILLA *Nonlinear boundary dissipation for a coupled system of Klein-Gordon equations*, Electron. J. Differential Equations 2010, No. 120, 1-19. MR2685030.
- [27] LOURÊDO, A. T., *Introdução aos Métodos Variacionais*, III Escola de Verão do Departamento de Matemática da UFS. São Cristóvão, 2014.
- [28] MARCUS, M. and MIZEL, V. L., *Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous*, J. Funct. Anal. 33(1979), 217-229. MR0546508; url.
- [29] MEDEIROS, L. A. e MIRANDA e M. Milla *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*, Rio de Janeiro, 2000.
- [30] MEDEIROS, L. A. e MIRANDA, M. MILLA. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, UFRJ/IM, 2011.
- [31] MEDEIROS, L. A. e MIRANDA, M. MILLA., *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, IM-UFRJ - Abril de 2005. Rio de Janeiro - RJ.
- [32] MEDEIROS, L. A., LIMACO, J. and FROTA, C. L., *On wave equations without global a priori estimates*, Bol. Soc. Parana. Mat. (3) 30(2012), No. 2, 19-32. MR2852611; url.
- [33] MIRANDA, M. MILLA and MEDEIROS, L. A. *On a boundary value problem for wave equations: Existence-uniqueness-asymptotic behavior*, Rev. de Mat. Appl. Univ. de Chile 17(1996), 47-73.
- [34] MIRANDA, M. MILLA., *Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev*, Bol. Soc. Paran. Matemática (2º série) 11(2), (1990), 131-157.
- [35] MIRANDA, M. MILLA., *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*, Editora Livraria da Física, EdUEPB, Campo Grande-PB, 2013.
- [36] MUNKRES, JAMES R., *Analysis on Manifolds*. by Addison-Wesley Publishing Compan, Redwood City, 1991.
- [37] MUNKRES, JAMES R., *Topology*. Prentice-Hall, Inc. USA, 2000.
- [38] PAZ, F. LOPES DE A., *Existência de Solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear*, Dissertação. UFPB, Campinas Grande, 2012.
- [39] QUINN, J. P. and RUSSELL, D. L., *Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of hyperbolic equation with boundary damping*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 77(1977), 97-127. MR0473539.
- [40] VICENTE, ANDRÉ *Equações de Ondas com Condições de Fronteira da Acústica*, Tese. Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- [41] RUDIN, WALTER. *Functional analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1991.
- [42] RUDIN, WALTER. *Principles of Mathematical Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill, Inc. 1976.

- [43] SCHIFF, L. I., *Nonlinear meson theory of nuclear forces. I. Neutral scalar mesons with point-contact repulsion*, Physical Rev. 84(1951), 1-9. url.
- [44] STRAUSS, W. A., *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, An. Acad. Brasil. Ci. 42, 1970, 645-651. MR0306715.
- [45] TEMAM, R., *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1974.
- [46] YOSIDA, K., *Functional Analysis*, Springer-Berlin Heidelberg New York , 1965.
- [47] ZEIDLER, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications part II/A: Linear Monotone Operators*. Springer-Verlag, New York 1990.