UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A Aljava de Módulos Inclinantes

Danilo de Rezende Santiago

Orientador: Danilo Dias da Silva

São Cristóvão, 2017.

.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A Aljava de Módulos Inclinantes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Danilo de Rezende Santiago

Orientador: Danilo Dias da Silva

São Cristóvão, 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A Aljava de módulos inclinantes

por

Danilo De Rezende Santiago

Aprovada pela banca examinadora:

Danilo Dias da Silva

Prof. Dr. Danilo Dias da Silva - UFS
Orientador

Zaqueu Alves Ramos

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Flávio U. Coelho

Prof. Dr. Flavio Ulhoa Coelho - USP
Segundo Examinador

São Cristóvão, 03 de Fevereiro de 2017

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santiago, Danilo de Rezende
S235a A aljava de módulos inclinantes / Danilo de Rezende Santiago ; orientador Danilo Dias da Silva. – São Cristóvão, 2017.
119 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2017.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Módulos (Álgebras). I. Silva, Danilo Dias da, orient. II. Título.

CDU: 512

Agredecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Danilo Dias da Silva pela sua colaboração na realização deste trabalho. Agradeço também aos outros professores da graduação e pós-graduação que ajudaram na minha formação.

Agradeço aos meus familiares, colegas e a minha namorada, Maria Elismara de Sousa Lima, pelo apoio dado a mim durante toda a minha formação. Por fim, agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe e a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo o estudo da aljava de módulos r-inclinantes sobre uma álgebra de Artin A para se obter informações sobre o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado $(\Omega_A, \leq)$ de módulos r-inclinantes, como feito em [8], e sobre determinados vértices e caminhos, como encontrado em [9].

Para isso, começamos estudando a teoria de inclinação onde buscamos generalizações da definição de módulos inclinantes e de alguns teoremas importantes, dadas por Miyashita em [15]. Feito isso, seguindo Riedtmann e Schofield em [14], definiremos uma aljava de módulos r-inclinantes $\vec{\mathcal{K}}_A$ e um conjunto parcialmente ordenado $(\Omega_A, \leq)$, onde verificaremos que o grafo subjacente $\mathcal{K}_A$ de $\vec{\mathcal{K}}_A$ é o diagrama de Hasse de $(\Omega_A, \leq)$. Por fim, faremos um estudo da estrutura local de $\vec{\mathcal{K}}_A$, de acordo com [9].

Palavras Chave: Aljavas, módulos inclinantes, teoria de inclinação.

Abstract

This dissertation aims to study the quiver of r-tilting modules over an algebra of Artin A to obtain information about the Hasse diagram of the partially ordered set $(\Omega_A, \leq)$ of r-tilting modules, as done in [8], and on certain vertices and paths, as found in [9].

For this, we start by studying the inclination theory where we look generalizations of the definition of tilting modules and some important theorems, given by Miyashita in [15]. Done that, following Riedtmann and Schofield in [14], we will define a quiver of r-tilting modules $\vec{\mathcal{K}}_A$ and a partially ordered set $(\Omega_A, \leq)$, where we will verify that the underlying graph $\mathcal{K}_A$ of $\vec{\mathcal{K}}_A$ is the Hasse diagram of $(\Omega_A, \leq)$. Finally, we will study the local structure of $\vec{\mathcal{K}}_A$, according [9].

Keywords: Quivers, tilting modules, inclination theory.

Sumário

Introdução

Neste trabalho lidamos com um certo tipo de álgebra associativa A chamada álgebra de Artin e com a categoria $\operatorname{mod} A$, dos A-módulos à direita finitamente gerados. Uma álgebra de Artin A é um anel finitamente gerado sobre um anel comutativo artiniano K e são exemplos de álgebras de Artin as K-álgebras de dimensão finita sobre um corpo K. Uma das principais ferramentas da teoria de representações de álgebras é a teoria de inclinação.

A noção de módulos inclinantes foi introduzida inicialmente por Brener e Butler em 1980. Atualmente é mais utilizada a definição dada por Happel e Ringel em 1982. Assim, chamaremos um A-módulo T de inclinante se ele satisfaz:
(T_1) $\operatorname{pd} T \leq 1$,
(T_2) $\operatorname{Ext}^1_A(T,T) = 0$ e
(T_3) existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0\ ,$$

com T_0 e T_1 pertencentes a subcategoria $\operatorname{add} T$ de $\operatorname{mod} A$ consistindo dos A-módulos que são somas diretas de somandos direto de T.
O principal objetivo da teoria de inclinação é, dada uma álgebra de Artin A e um A-módulo finitamente gerado T, comparar as categorias de módulos sobre A e sobre a álgebra de endomorfismos $B = \operatorname{End} T$. Assim, se T é um A-módulo inclinante, então as categorias $\operatorname{mod} A$ e $\operatorname{mod} B$ estão razoavelmente próximas entre si, mas não necessariamente equivalentes, a saber, o conhecimento de uma destas categorias implica o conhecimento de duas subcategorias do outro. Ao trabalharmos com a teoria de inclinação, um tipo de objeto em $\operatorname{mod} A$ que merece atenção são os A-módulos inclinantes parciais, isto é, os A-módulos satisfazendo (T_1) e (T_2) da definição acima. Bongartz percebeu que se M satisfaz essas duas condições então podemos completar M a um módulo inclinante, ou seja, existe um A-módulo E tal que $M \oplus E$ é incli-

nante. Já Happel nos disse que se M um módulo inclinante parcial quase completo e X é seu complemento Bongartz, então existe no máximo um complemento Y para M, com X e Y indecomponíveis e não isomorfos. Além disso, se tal complemento existe, então existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} T$.

De posse dessas informações, Riedtmann e Schofield definiram, em [14], a aljava $\vec{\mathcal{K}}_A$ de módulos inclinantes da seguinte maneira: Os vértices de $\vec{\mathcal{K}}_A$ são os elementos do conjunto Ω_A de todos os A-módulos inclinantes e para cada módulo inclinante parcial quase completo $M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i$, existe uma flecha $M \oplus T_n \to M \oplus T_n^{'}$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ se o indecomponível T_n é o complemento Bongartz de M e $T_n^{'}$ é um complemento indecomponível para M não isomorfo a T_n.

Esta dissertação tem por objetivo trabalhar com uma generalização da aljava de módulos inclinantes, encontrada em [8], além de servir como texto-base para estudantes que desejam ler sobre tal tema. Para tanto, buscamos numa quantidade razoável de artigos, vários resultados e definições que nos auxiliarão no desenvolvimento do texto. Devido a necessidade de generalizar o Teorema de Inclinação, buscaremos em [15] generalizações para alguns resultados fundamentais na teoria de inclinação. Um resultado que nos auxiliará na obtenção da definição da aljava de módulos r-inclinantes foi encontrado em [5], e nos diz que se $M \oplus Y$ é r-inclinante, $Y \in \operatorname{Gen} M$ é indecomponível, então existe um complemento indecomponível X para M e uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$.

Seguindo [8], definiremos a aljava de módulos r-inclinante e uma ordem parcial $\leq$ em Ω_A a fim de responder a seguinte questão colocada em [14]: É $\mathcal{K}_A$ o diagrama de Hasse de $(\Omega_A, \leq)$?

Para finalizarmos o trabalho faremos um estudo da estrutura local da aljava $\vec{\mathcal{K}}_A$, como apresentado em [9].

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

O primeiro capítulo é destinado a dar as principais definições e propriedades a serem utilizadas ao longo do texto.

No Capítulo 2 faremos um resumo da teoria de inclinação, onde nas primeiras seções introduziremos o conceito de módulos inclinantes parciais, módulos inclinantes dentre outros conceitos e veremos alguns resultados como, por exemplo, lema de Bongartz e o Teorema de Inclinação. Ao final deste capítulo, seguindo [15], generalizaremos o conceito de módulos inclinantes e a partir disto obteremos alguns resultados generalizados e justificaremos, com um exemplo, que o lema de Bongartz não pode ser generalizado.

No Capítulo 3 definiremos o objeto de estudo do nosso trabalho, a aljava de módulos r-inclinantes. Inicialmente, seguindo [14], definiremos a aljava para $r \leq 1$. Na tentativa de definir tal aljava para um r qualquer, buscamos uma generalização da proposição:

Proposição: Se M é módulo inclinante parcial quase completo, então existe no máximo um complemento $T_n^{'}$ não isomorfo a T_n, onde T_n é o complemento Bongartz para M, tal que $M \oplus T_n^{'}$ é um módulo inclinante. Além disso, se um tal $T_n^{'}$ existe, então existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow T_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i^{\lambda_i} \longrightarrow T_n^{'} \longrightarrow 0\,.$$

Em [5], encontramos o desejado na proposição (1.3). A partir daí, definimos a aljava de módulos r-inclinantes da seguinte maneira: Os vértices de $\vec{\mathcal{K}}_A$ são os elementos de Ω_A, onde Ω_A denota o conjunto de todos os A-módulos r-inclinantes a menos de isomorfismos, e existe uma flecha $T^{'} \to T$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ se $T^{'} = M \oplus X$, $T = M \oplus Y$ com X e Y indecomponíveis e não isomorfos, M livre de multiplicidade e existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$.

No capítulo 4 introduziremos uma ordem em Ω_A de tal forma que $T \leq T^{'}$ se $T^{\perp} \subseteq T^{'\perp}$. Verificaremos que essa ordem define um conjunto parcialmente ordenado $(\Omega_A, \leq)$. Com isso, na segunda seção responderemos a seguinte questão colocada em [14]. Se $\mathcal{K}_A$ é o diagrama de Hasse de $(\Omega_A, \leq)$? Mostraremos neste capítulo que de fato isto acontece. A última seção do capítulo é destinada a estudar os elementos

minimais em $(\Omega_A, \leq)$ ou equivalentemente, os poços em $\vec{\mathcal{K}}_A$, onde daremos um critério que nos permitirá dizer se tal aljava tem elementos minimais através da importante subcategoria $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ de $\operatorname{mod} A$, que é o seguinte:
Teorema: Seja A uma álgebra de Artin. Existe um elemento minimal em $(\Omega_A, \leq)$ se, e somente se, $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ é contravariante finita.

Apresentaremos também uma álgebra de Artin A, onde $\vec{\mathcal{K}}_A$ não tem poços.

O capítulo 5 é destinado ao estudo da estrutura local de $\vec{\mathcal{K}}_A$. Na primeira seção consideraremos A uma álgebra hereditária, onde veremos que o número de flechas chegando/saindo num dado vértice T de $\vec{\mathcal{K}}_A$ é menor ou igual ao posto de $\mathcal{K}_0(A)$ (grupo de Grothendiechk de A), isto é, não supera o número de vértices da aljava da álgebra de caminhos A. E se a igualdade ocorre, dizemos que T é saturado. Além disso, daremos algumas caracterizações para vértices saturados, uma delas é:
Proposição: $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ é saturado se, e somente se, $(\underline{\dim} T)_i \geq 2$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Já na segunda e última seção A denotará uma álgebra de Artin arbitrária. Da teoria de inclinação é conhecido que dado um A-módulo inclinante T existem duas $\operatorname{add} T$-resoluções, a saber,

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^r \longrightarrow 0 \tag{1}$$

e

$$\cdots \longrightarrow T_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_0 \longrightarrow DA_A \longrightarrow 0 \tag{2}$$

e a partir disto, para cada somando indecomponível X de T, escolhemos $i(X)$ como sendo o menor inteiro tal que X é um somando direto de $T^{i(X)}$. Se X ocorre em (2), escolhemos $j(X)$ como sendo o menor inteiro tal que X é um somando direto de $T_{j(X)}$. Caso contrário, dizemos $j(X) = \infty$. Buscamos, nesta seção, estabelecer uma relação entre comprimentos de caminhos começando/terminando num dado vértice T de $\vec{\mathcal{K}}_A$, somandos diretos indecomponíveis de T e as $\operatorname{add} T$-resoluções acima, onde tal relação será dada pelo seguinte teorema:
Teorema: Para cada somando direto indecomponível X de T, existem um caminho $w(X)$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ de comprimento $i(X)$ terminando em T e um caminho $u(X)$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ de comprimento $j(X)$ começando em T. Estes caminhos são dois a dois disjuntos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 A categoria de módulos

A categoria que usaremos com mais frequência ao longo desta dissertação é a categoria $\operatorname{mod} A$. Para tanto, apresentaremos nesta seção algumas subcategorias importantes de $\operatorname{mod} A$ e alguns objetos importantes em $\operatorname{mod} A$, dentre outros conceitos.

Uma álgebra A é dita de **Artin** se é um módulo finitamente gerado sobre seu centro, que é um anel artiniano. Se K é um corpo, então A é dita ser uma K-**álgebra** se A é um anel com unidade e possui estrutura de K-espaço vetorial compatível com o produto do anel, isto é, $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$ para todo $\lambda \in K$ e todo $a, b \in A$. Além disso, dizemos que A é uma K-**álgebra de dimensão finita**, se for de dimensão finita como K-espaço vetorial. É claro que K-álgebras de dimensão finita são exemplos particulares de álgebras de Artin. Dizemos que A é **básica** se na decomposição em soma direta do A-módulo A_A seus fatores são dois a dois não isomorfos. Dizemos que A é **conexa** se não conseguimos escrever A como soma de duas álgebras com identidades. Ao longo do texto, a menos de indicação contrária, A corresponde a uma álgebra de Artin, conexa e básica.

Definição 1.1.1. *Seja A uma álgebra de Artin. A **categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados** , denotada por $\operatorname{mod} A$, é dada por*

(a) *$(\operatorname{mod} A)_0$ é o conjunto dos A-módulos finitamente gerados.*

(b) *Dados M, $N \in (\operatorname{mod} A)_0$, temos que $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ é o conjunto dos morfismos de A-módulos entre M e N.*

Consideraremos os A-módulos à esquerda como A^{op}-módulos à direita. Denotaremos por A_A o A-módulo à direita A. Uma das propriedades das álgebras de Artin é a existência de uma dualidade $D : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op}$.

1.1.1 Subcategorias de $\operatorname{mod} A$

Para cada A-módulo M associamos quatro importantes subcategorias de $\operatorname{mod} A$, as quais serão bastante trabalhadas ao longo do texto.

Denotaremos por $\operatorname{add} M$ a subcategoria aditiva de $\operatorname{mod} A$ formada pelas somas diretas de somandos diretos de M.

Dizemos que um A-módulo Y é **gerado** por M se existe um epimorfismo $M_0 \to Y$, com $M_0 \in \operatorname{add} M$ e denotaremos por $\operatorname{Gen} M$ a subcategoria plena de $\operatorname{mod} A$ consistindo de todos os A-módulos Y gerados por M. Dualmente, dizemos que um A-módulo Y é **cogerado** por M se existe um monomorfismo $Y \to M^0$, com $M^0 \in \operatorname{add} M$ e denotaremos por $\operatorname{Cogen} M$ a subcategoria plena de $\operatorname{mod} A$ formada por todos os A-módulos cogerados por M.

Outra importante subcategoria de $\operatorname{mod} A$ determinada por um A-módulo M, a qual será utilizada para definirmos posteriormente uma ordem parcial, é a categoria **perpendicular à direita** de M definida por

$$M^{\perp} = \{\, N \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}^i_A(M, N) = 0 \textit{ para todo } i > 0 \,\}.$$

Denotaremos por $\operatorname{ind} A$ uma subcategoria plena $\operatorname{mod} A$ cujos objetos formam um conjunto completo de A-módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismos.

Sabemos também, pelo Teorema de Krull-Schmidt, que todo A-módulo M pode ser decomposto de forma única como $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i^{d_i}$, onde M_i é indecomponível, $d_i > 0$ e $M_i \ncong M_j$ para $i \neq j$, onde o número m na decomposição acima está univocamente determinado e que denotaremos por $\delta(M)$. Dizemos que M é **básico** quando $d_i = 1$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$. Além disso, se M é básico, então para cada $1 \leqslant i \leqslant m$ definimos $M[i] = \bigoplus_{j \neq i} M_j$.

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de $\operatorname{mod} A$. Assumimos que ela é fechada para somas diretas, somandos diretos e isomorfismos.

Dizemos que um objeto $C \in \mathcal{C}$ é uma **cobertura** de $\mathcal{C}$ se para todo $X \in \mathcal{C}$ existe um epimorfismo $\mu : C' \to X$ para algum $C' \in \operatorname{add} C$. A cobertura C é dita ser minimal se nenhum somando próprio de C é uma cobertura.

Dualmente, dizemos que um objeto $C \in \mathcal{C}$ é uma **cocobertura** de $\mathcal{C}$ se para todo $X \in \mathcal{C}$ existe um monomorfismo $\mu : X \to C^{'}$ para algum $C^{'} \in \operatorname{add} C$. A cocobertura C é dita ser minimal se nenhum somando próprio de C é uma cocobertura.

Dizemos que $\mathcal{C}$ é **contravariantemente finita** em $\operatorname{mod} A$, se para cada $X \in \operatorname{mod} A$ existe um morfismo $f : F_X \to X$ com $F_X \in \mathcal{C}$ tal que para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ e para cada morfismo $g : C \to X$ existe um morfismo $h : C \to F_X$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ F_X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $fh = g$. Dualmente, temos o conceito de covariantemente finita.

Dizemos que $\mathcal{C}$ é **resolvente** se $\mathcal{C}$ é fechada para extensões, kernels de epimorfismos e contém A_A.

Sejam Y e Z dois A-módulos tais que $Z = \bigoplus_{i=1}^{m} Z_i$ e $\operatorname{add} Y \cap \operatorname{add} Z = 0$. Dizemos que um morfismo $f : Y \to \bigoplus_{i=1}^{m} Z_i^{\lambda_i}$ é um **morfismo fonte** de Y para $\operatorname{add} Z$ se:

(a) para qualquer $Z^{'} \in \operatorname{add} Z$, qualquer morfismo de Y para $Z^{'}$ se fatora através de f, e

(b) f é minimal com respeito a propriedade (a), isto é, se αf tem a propriedade (a) para um endomorfismo α de $\bigoplus_{i=1}^{m} Z_i^{\lambda_i}$, então α é um isomorfismo.

Morfismos fonte existem e são únicos a menos de isomorfismos.

Dualmente definimos **morfismos poço** de $\operatorname{add} Z$ para Y.

1.1.2 Módulos projetivos e injetivos

Quando trabalhamos na categoria $\operatorname{mod} A$, os conceitos de módulos projetivos e módulos injetivos são indispensáveis.

Definição 1.1.2. *Seja A uma K-álgebra. Um A-módulo P é chamado **projetivo** quando para qualquer epimorfismo $f : M \to N$ e para qualquer morfismo $g : P \to N$ existe $h : P \to M$ tal que $fh = g$, isto é, existe $h : P \to M$ tal que o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Sejam $M_1, \ldots, M_n$ A-módulos. Então $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ é projetivo se, e somente se, M_i é projetivo para cada $1 \leq i \leq n$.

Definição 1.1.3. *Um A-módulo I é chamado **injetivo** quando para qualquer monomorfismo $f : M \to N$ e para qualquer morfismo $g : M \to I$ existe $h : N \to I$ tal que $hf = g$, isto é, existe $h : N \to I$ tal que o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Outros tipos de módulos importantes na categoria $\operatorname{mod} A$ são:

Dizemos que um A-módulo M é **fiel** se o anulador $\operatorname{Ann} M = \{ a \in A \mid Ma = 0 \}$ é nulo. Além disso, é fácil verificar que M é fiel se, e somente se, $A_A \in \operatorname{Cogen} M$ se, e somente se, $DA_A \in \operatorname{Gen} M$.

Dizemos que um A-módulo S é **simples** quando os únicos submódulos são zero e S. Em particular, todo módulo simples é indecomponível.

1.1.3 O grupo de Grothendieck

Seja $\mathcal{G}$ o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismos $\tilde{M}$ dos A-módulos finitamente gerados M, e seja $\mathcal{H}$ o subgrupo gerado por todas as expressões $\tilde{L} + \tilde{N} - \tilde{M}$, tal que

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata em $\operatorname{mod} A$.

Definição 1.1.4. *O **grupo de Grothendieck** de A denotado por $K_0(A)$ é o grupo quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.*

Denotaremos por $[M]$ a imagem de $\tilde{M}$ em $K_0(A)$.

Seja $\{ S_1, \ldots, S_n \}$ o conjunto de todos os A-módulos simples a menos de isomorfismo. Segue do Teorema de Jordan-Holder (ver [2], página 17) que para cada $M \in \operatorname{mod} A$ o número $m_i(M)$ de fatores de composição de M isomorfos a S_i depende somente de M e de S_i (e não da série de composição de M). Chamamos **vetor dimensão** de M o vetor

$$\underline{\dim}(M) = [m_1(M), m_2(M), \ldots, m_n(M)] \in \mathbb{Z}^n.$$

Teorema 1.1.5. *O grupo $K_0(A)$ é abeliano livre com base $\{[S_1], \ldots, [S_n]\}$ e a aplicação $\underline{\dim} : K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Ver [1], página 2. □

Neste caso dizemos que o posto do grupo de Grothendieck é n, o qual denotaremos por $\operatorname{rank} K_0(A) = n$.

1.2 Dimensões homológicas

Nesta seção definiremos dimensão projetiva e injetiva de um módulo sobre uma álgebra, dimensão global e dimensão finitística, como também apresentaremos algumas ferramentas úteis para o cálculo dessas dimensões.

1.2.1 Dimensão projetiva e injetiva

Seja M um A-módulo.

(1) Uma **resolução projetiva** de M é uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

onde cada P_i é um A-módulo projetivo. A sequência exata $P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$ é chamada **apresentação projetiva**.

(2) Uma **resolução injetiva** de M é uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h_0} I_0 \xrightarrow{h_1} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{m-1} \xrightarrow{h_m} I_m \longrightarrow \cdots$$

onde cada I_i é um A-módulo injetivo.

A **dimensão projetiva** de M é um número inteiro não negativo m denotado por $\operatorname{pd} M$ tal que existe uma resolução projetiva

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

de M de comprimento m e M não tem resolução projetiva de comprimento $m-1$. Se M não admite uma resolução projetiva de comprimento finito, dizemos que a dimensão projetiva de M é infinita.

A **dimensão injetiva** de M é um número inteiro não negativo m denotado por $\operatorname{id} M$ tal que existe uma resolução injetiva

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h_0} I_0 \xrightarrow{h_1} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{m-1} \xrightarrow{h_m} I_m \longrightarrow 0$$

de M de comprimento m e M não tem resolução injetiva de comprimento $m-1$. Se M não admite uma resolução injetiva de comprimento finito, dizemos que a dimensão injetiva de M é infinita.

Vejamos alguns resultados importantes das dimensões projetivas e injetivas.

Corolário 1.2.1 (ver [2], A.4)**.** *Sejam M e N A-módulos e $n \geq 0$. Então:*

(a) $\operatorname{pd}_A M = n$ *se, e somente se,* $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(M,-) = 0$ *e* $\operatorname{Ext}_A^{n}(M,-) \neq 0$.

(b) $\operatorname{id}_A N = n$ *se, e somente se,* $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(-,N) = 0$ *e* $\operatorname{Ext}_A^{n}(-,N) \neq 0$.

Proposição 1.2.2 (ver [2], A.4)**.** *Seja* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta em* $\operatorname{mod} A$. *Então:*

(a) $\operatorname{pd}_A N \leq \max\{\operatorname{pd}_A M,\, 1+\operatorname{pd}_A L\}$, *e a igualdade ocorre se* $\operatorname{pd}_A M \neq \operatorname{pd}_A L$.

(b) $\operatorname{pd}_A L \leq \max\{\operatorname{pd}_A M,\, -1+\operatorname{pd}_A N\}$, *e a igualdade ocorre se* $\operatorname{pd}_A M \neq \operatorname{pd}_A N$.

(c) $\operatorname{pd}_A M \leq \max\{\operatorname{pd}_A L,\, \operatorname{pd}_A N\}$, *e a igualdade ocorre se* $\operatorname{pd}_A N \neq 1+\operatorname{pd}_A L$.

1.2.2 Dimensão global

Definição 1.2.3. *Sejam K um corpo e A uma K-álgebra de dimensão finita. O número*

$$d = \sup\{\operatorname{pd} M \mid M \in \operatorname{mod} A\}$$

*é chamado **dimensão global** de A e é denotada por* $\operatorname{dim.gl.} A$.

Ao calcular a dimensão global de uma álgebra A, o seguinte resultado é muito útil.

Teorema 1.2.4 (ver [2], A.4)**.** *Seja A uma K-álgebra de Artin. Então*

$$\operatorname{dim.gl.} A = \sup\{\operatorname{pd} S \mid S \text{ é um } A-\text{módulo simples}\}.$$

Outro conceito de dimensão a ser utilizado no texto é:

Definição 1.2.5. *Seja A uma álgebra de Artin. A* ***dimensão finitística*** *de A é definida como*

$$\mathrm{fd}(A) = \sup\{\, \mathrm{pd}\, M \mid M \in \mathrm{mod}\, A \text{ e } \mathrm{pd}\, M < \infty \,\}.$$

1.3 Aljavas

Uma **aljava** é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ formada por dois conjuntos, Q_0 (cujos elementos chamaremos de **vértices**) e Q_1 (cujos elementos chamaremos de **flechas**), e duas funções $s, t : Q_1 \to Q_0$ que associa a cada flecha $\alpha \in Q_1$ seu início $s(\alpha)$ e seu fim $t(\alpha)$. Denotaremos a aljava $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ por Q.

Dizemos que Q é finito se os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos.

O grafo subjacente $\bar{Q}$ da aljava Q é um grafo obtido de Q sem considerar a orientação das flechas, isto é, $\bar{Q}$ é um grafo com os mesmos vértices de Q e tal que existe uma aresta entre os vértices a e b em $\bar{Q}$ se existe uma flecha $\alpha : a \to b$ ou $\beta : b \to a$. Dizemos que a aljava Q é **conexa** se o grafo subjacente $\bar{Q}$ é conexo. Sejam $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ uma aljava e $a\, b \in Q_0$. Um **caminho** de comprimento $l \geq 1$ com começo em a e final em b é uma sequência de flechas

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)$$

onde $\alpha_k \in Q_1$, para $1 \leq k \leq l$, $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$, para cada $1 \leq k \leq l-1$, e $t(\alpha_l) = b$. Denotaremos tal caminho por $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l$. Além disso, a cada vértice $a \in Q_0$ associamos um caminho de comprimento $l = 0$ que chamamos de **caminho constante** e denotamos por e_a ou $(a||a)$.

Um caminho de comprimento $l \geq 1$ é chamado **ciclo** quando seu começo e seu final coincidem. Uma aljava que não contém ciclos é chamada **acíclica**.

Exemplo 1.3.1. *Na aljava $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ temos $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$, $s(\alpha) = 1$, $s(\beta) = 3$ e $t(\alpha) = t(\beta) = 2$.*

1.4 Teoria de Auslander-Reiten

Sabemos que o objetivo principal da teoria de Representações de Álgebras é, dada uma álgebra A, descrever todos os A-módulos indecomponíveis de dimensão finita e os morfismos entre eles. Uma vez que todo A-módulo M é escrito de forma única a menos de isomorfismos como soma direta de A-módulos indecomponíveis, basta descrevermos os morfismos entre os A-módulos indecomponíveis. Uma primeira aproximação da categoria $\operatorname{mod} A$ é a aljava de Auslander-Reiten.

Nesta seção introduziremos as noções de morfismos irredutíveis e sequências de Auslander-Reiten também chamadas de sequências quase cindidas. Em seguida enunciaremos o teorema de existência de sequências de Auslander-Reiten na categoria $\operatorname{mod} A$. Isso nos permitirá definir uma nova aljava (a aljava de Auslander-Reiten). Para maiores detalhes e demonstrações ver [2].

No que segue, considere A uma álgebra de Artin básica e conexa.

1.4.1 Morfismos irredutíveis e sequências de Auslander-Reiten

Sejam $f : L \to M$ e $g : M \to N$ morfismos de A-módulos.

Dizemos que o morfismo f é **minimal à esquerda** quando para todo morfismo $h : M \to M$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & M \\ & M \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, então h é um isomorfismo.

Dizemos que o morfismo f é **quase cindido à esquerda** quando ele satisfaz as seguintes condições:

(a) Não é um monomorfismo que cinde;

(b) Para todo morfismo $u : L \to U$ que não é um monomorfismo que cinde, existe $u^{'} : M \to U$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & M \arrow[dl, "u^{'}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $u^{'}f = u$.

e f é **quase cindido à esquerda minimal** se é minimal e quase cindido à esquerda.

Dizemos que o morfismo g é **minimal à direita** quando para todo morfismo $k : M \to M$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & M \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, então k é um isomorfismo.

Dizemos que o morfismo g é **quase cindido à direita** quando ele satisfaz as seguintes condições:

(a) Não é um epimorfismo que cinde;

(b) Para todo morfismo $v : V \to N$ que não é um epimorfismo que cinde, existe $v^{'} : V \to M$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] & & N \\ & V \arrow[ul, "v^{'}"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $gv^{'} = v$.

e g é **quase cindido à direita minimal** se é minimal e quase cindido à direita.

Um morfismo $f : M \to N$ é dito ser **irredutível** se:

(a) f não é um monomorfismo nem epimorfismo que cinde;

(b) Para toda fatoração $f = f_1 f_2$, com $f_1 : X \to N$ e $f_2 : M \to X$, tem-se que f_1 é um epimorfismo que cinde ou f_2 é um monomorfismo que cinde.

Assim, se f é um morfismo irredutível, então ou f é monomorfismo ou é um epimorfismo.

A seguir enunciaremos um teorema que relaciona os morfismos irredutíveis e os morfismos minimais quase cindidos à esquerda (ou à direita).

Teorema 1.4.1 (ver [2], página 103)**.** (*a*) *Seja L um A-módulo indecomponível. Um morfismo $f : L \to M$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $f' : L \to M'$ tal que $f = \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} : L \to M \oplus M'$ é quase cindido à esquerda minimal.*

(*b*) *Seja N um A-módulo indecomponível. Um morfismo $g : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $g' : M' \to N$ tal que $[g\ g'] : M \oplus M' \to N$ é quase cindido à direita minimal.*

Vejamos agora o conceito de sequência de Auslander-Reiten.

Definição 1.4.2. *Uma sequência exata curta de A-módulos*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é dita ser uma ***sequência de Auslander-Reiten ou sequência quase cindida*** *se f é quase cindido à esquerda minimal e g é quase cindido à direita minimal.*

Segue da definição que toda sequência de Auslander-Reiten não cinde. Além disso, elas são determinadas de forma única, a menos de isomorfismos, por L ou por N, isto é, dadas duas sequências de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow L' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \longrightarrow 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) As duas são isomorfas.
(b) $L \cong L'$.
(c) $N \cong N'$.

Algumas propriedades e caracterizações das sequências de Auslander-Reiten são dadas pelo

Teorema 1.4.3 (ver [2], página 105)**.** *Seja $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta em* mod A. *As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *A sequência é de Auslander-Reiten.*

(b) *L é indecomponível e g é um morfismo quase cindido à direita.*

(c) *N é indecomponível e f é um morfismo quase cindido à esquerda.*

(d) *f é um morfismo minimal quase cindido à esquerda.*

(e) *g é um morfismo minimal quase cindido à direita.*

(f) *L e N são indecomponíveis e f e g são irredutíveis.*

1.4.2 Translações de Auslander-Reiten

Nesta subseção enunciaremos algumas definições e alguns teoremas para garantir a existência de sequências de Auslander-Reiten em $\operatorname{mod} A$, onde A é uma K-álgebra de dimensão finita.

Consideramos o funtor A-dual

$$(-)^t = \operatorname{Hom}_A(-, A) : \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{op}$$

É conhecido que esse funtor induz uma dualidade entre $\operatorname{Proj} A$ e $\operatorname{Proj} A^{op}$, a qual usaremos para construir uma dualidade num quociente apropriado de $\operatorname{mod} A$

Começamos aproximando cada A-módulo M por módulos projetivos.
Seja $P_1 \xrightarrow{p_1} \longrightarrow P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de M. Aplicando $(-)^t$ em $P_1 \xrightarrow{p_1} \longrightarrow P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ obtemos a sequência exata de A^{op}-módulos

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \operatorname{Coker} p_1^t \longrightarrow 0$$

Denotamos $\operatorname{Coker} p_1^t$ por $\operatorname{Tr} M$ e chamamos de **transposta** de M. Sabemos que $\operatorname{Tr} M$ é univocamente determinada, a menos de isomorfismo.

Resumimos agora as principais propriedades da transposição Tr.

Proposição 1.4.4 (ver [2], página 107)**.** *Seja M um A-módulo indecomponível. Então:*

(a) $\operatorname{Tr} M$ *não tem somandos diretos projetivos não nulos.*

(b) *M é projetivo se, e somente se,* $\operatorname{Tr} M = 0$. *Se M é não projetivo, então TrM é indecomponível e vale* $\operatorname{Tr}(\operatorname{Tr} M) \cong M$.

(c) *Se M e N são indecomponíveis não projetivos, então $M \cong N$ se, e somente se,* $\operatorname{Tr} M \cong \operatorname{Tr} N$.

Vimos que a transposição Tr mapeia módulos de $\operatorname{mod} A$ para módulos de $\operatorname{mod} A^{op}$, mas não define uma dualidade $\operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op}$, pois ela anula os projetivos. Para tornar essa correspondência uma dualidade precisamos aniquilar os projetivos de $\operatorname{mod} A$ e $\operatorname{mod} A^{op}$. Isso nos motiva a seguinte construção:

Sejam M e N dois A-módulos. Definiremos dois subgrupos do grupo $\operatorname{Hom}_A(M, N)$. Denotamos por $\mathcal{P}(M, N)$ o subgrupo de $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ consistindo de todos os morfismos de M em N que se fatoram por A-módulos projetivos, ou seja, $f \in P(M, N)$

quando existem um A-módulo projetivo P e morfismos $g : M \to P$ e $h : P \to N$ tal que $f = hg$.

Dualmente, denotamos por $\mathcal{I}(M,N)$ o subgrupo de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ consistindo de todos os morfismos de M em N que se fatoram por A-módulos injetivos, ou seja, $f \in I(M,N)$ quando existem um A-módulo injetivo I e morfismos $g : M \to I$ e $h : I \to N$ tal que $f = hg$.

Sabemos que os subgrupos $\mathcal{P}(M,N)$ e $\mathcal{I}(M,N)$ de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ definem dois ideais $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ de $\mathrm{mod}\, A$ e isto nos permite considerar as seguintes categorias quocientes:

A **categoria projetivamente estável** $\underline{\mathrm{mod}}A = \mathrm{mod}\, A/\mathcal{P}$, cujos objetos coincidem com aqueles da categoria $\mathrm{mod}\, A$, e os morfismos de M a N pertencem a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N).$$

Dualmente, definimos a **categoria injetivamente estável** $\overline{\mathrm{mod}}A = \mathrm{mod}\, A/\mathcal{I}$, cujos objetos coincidem com aqueles da categoria $\mathrm{mod}\, A$, e os morfismos de M a N pertencem a

$$\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{I}(M,N).$$

O funtor $\mathrm{Tr} : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, A^{op}$ induz o funtor

$$\mathrm{Tr} : \overline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}.$$

A dualidade $D = \mathrm{Hom}_K(-,K) : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, A^{op}$ induz a dualidade $D : \overline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$.

Proposição 1.4.5 (ver [2], página 110)**.** *A correspondência* $M \longmapsto \mathrm{Tr}\, M$ *induz uma* K*-dualidade* $\mathrm{Tr} : \overline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$.

Definição 1.4.6. *As* ***translações de Auslander-Reiten*** *são definidas pelas composições de* D *com* Tr*, a saber,* $\tau = D\,\mathrm{Tr}$ *e* $\tau^{-1} = \mathrm{Tr}\, D$*.*

Para cada A-módulo M, τM será chamado de **transladado de Auslander-Reiten** de M e $\tau^{-1}M$ será chamado de **transladado inverso de Auslander-Reiten** de M.

A seguir apresentaremos algumas ferramentas, envolvendo as translações de Auslander-Reiten, que serão utilizadas no capítulo 2. Começamos com um critério fácil e útil para que um módulo tenha dimensão projetiva, ou injetiva, no máximo um.

Lema 1.4.7 (ver [1], página 7). *Seja M um A-módulo.*

(a) $\operatorname{pd} M \leq 1$ *se, e somente se,* $\operatorname{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$.

(b) $\operatorname{id} M \leq 1$ *se, e somente se,* $\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}M, A) = 0$.

Teorema 1.4.8. *(As fórmulas de Auslander-Reiten) Sejam M e N dois A-módulos. Existem isomorfismos*

$$\operatorname{Ext}^1_A(M, N) \cong D\underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\operatorname{Hom}}_A(N, \tau M),$$

funtoriais em ambas as variáveis.

Demonstração. Ver [2], página 117. $\square$

Uma consequência imediata das fórmulas de Auslander-Reiten é o seguinte corolário, o qual será útil para fazermos alguns cálculos no capítulo 2.

Corolário 1.4.9 (ver [1], página 9). *Sejam M e N dois A-módulos. Então:*

(a) *Se* $\operatorname{pd} M \leq 1$, *então* $\operatorname{Ext}^1_A(M, N) \cong D\operatorname{Hom}_A(N, \tau M)$.

(b) *Se* $\operatorname{id} M \leq 1$, *então* $\operatorname{Ext}^1_A(M, N) \cong D\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}N, M)$.

O próximo teorema garante a existência das sequências de Auslander-Reiten.

Teorema 1.4.10 (ver [2], página 120). (a) *Para todo A-módulo indecomponível não projetivo M, existe uma sequência quase cindida*

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0\,.$$

(b) *Para todo A-módulo indecomponível não injetivo N, existe uma sequência quase cindida*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0\,.$$

1.4.3 A aljava de Auslander-Reiten

Nesta subseção apresentaremos a construção da aljava de Auslander-Reiten. Para tanto, necessitamos introduzir a noção de radical da categoria $\operatorname{mod} A$.

O **radical** rad_A da categoria $\mathrm{mod}\,A$ é definida pelas classes de todos os morfismos tal que para cada par de A-módulos M e N, definimos o radical do par (M,N) como o seguinte K-espaço vetorial

$$\mathrm{rad}_A(M,N) = \{\, f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \,|\, 1_N - fg \textit{ tem inverso à direita, para todo } g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)\,\}.$$

Se M e N são dois A-módulos indecomponíveis, então o conjunto acima pode ser reescrito da forma

$$\mathrm{rad}_A(M,N) = \{\, f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \,|\, f \textit{ não é isomorfismo}\,\}.$$

Agora, caracterizaremos morfismos irredutíveis em termos do radical de $\mathrm{mod}\,A$. Para isso, dado $n \in \mathbb{N}$, definimos o n-ésimo radical da seguinte forma

$$\mathrm{rad}_A^n = \left\{ \sum_i g_i f_i \,|\, g_i \in \mathrm{rad}_A^{n-1}(X_i,N),\ f_i \in \mathrm{rad}_A(M,X_i),\ \textit{com } X_i \in \mathrm{ind}\,A \right\}.$$

Observe que pela definição de radical temos $\mathrm{rad}_A^2(M,N) \subseteq \mathrm{rad}_A(M,N)$.

Lema 1.4.11 (ver [2], página 100)**.** *Sejam M e N dois A-módulos indecomponíveis. Então $f : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $f \in \mathrm{rad}_A(M,N) \setminus \mathrm{rad}_A^2(M,N)$.*

Assim, podemos definir o espaço dos **morfismos irredutíveis** de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ como

$$\mathrm{Irr}(M,N) = \mathrm{rad}_A(M,N) \setminus \mathrm{rad}_A^2(M,N).$$

Agora somos capazes de definir a aljava de Auslander-Reiten.

Seja A uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K. Definimos a **aljava de Auslander-Reiten** de A, $\Gamma(\mathrm{mod}\,A)$, da seguinte maneira:

(1) Os vértices de $\Gamma(\mathrm{mod}\,A)$ são as classes de isomorfismos $[X]$ dos A-módulos indecomponíveis X.

$$[X] = \{\, Y \,|\, Y \textit{ é isomorfo a } X\,\}.$$

(2) Se $[M]$ e $[N]$ são vértices em $\Gamma(\mathrm{mod}\,A)$ correspondentes aos A-módulos indecomponíveis M e N. As flechas $[M] \to [N]$ estão em correspondência biunívoca com os vetores da base do K-espaço vetorial $\mathrm{Irr}(M,N)$.

Capítulo 2

Teoria de Inclinação

A teoria de inclinação consiste em comparar as categorias de módulos sobre uma álgebra de Artin dada A e sobre a álgebra de endomorfismos B de um A-módulo T que se diz suficientemente próximo do A-módulo A_A.

Neste capítulo apresentaremos uma introdução a teoria de inclinação para módulos inclinantes de dimensão projetiva finita, onde buscamos uma generalização do teorema de inclinação para um módulo inclinante de dimensão projetiva > 1. Além disso, apresentaremos algumas semelhanças e diferenças dentro desta teoria ao trabalharmos com módulos inclinantes de dimensão projetiva ≤ 1 e de dimensão projetiva > 1.

2.1 Álgebras de Endomorfismos

Seja T um A-módulo à direita e $B = \mathrm{End}(T_A)$. Para cada $a \in A$, $f \in B$ e $t \in T$ consideremos a ação natural de B em T

$$f(ta) = f(t)a = (ft)a.$$

Esta ação fornece a T uma estrutura de B-módulo à direita.

Para todo A-módulo à direita M, o grupo abeliano $\mathrm{Hom}_A(T, M)$ tem uma estrutura de B-módulo à direita dada por

$$(fb)t = f(bt)$$

para $f \in \mathrm{Hom}_A(T, M)$, $b \in B$ e $t \in T$. Da mesma maneira, para todo B-módulo à direita X, o grupo $X \otimes_B T$ tem uma estrutura de A-módulo à direita dada por

$$(x \otimes t)a = x \otimes (ta)$$

para $x \in X$, $t \in T$ e $a \in A$.

Temos assim dois funtores aditivos

$$\mathrm{Hom}_A(T, -) : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, B$$

e

$$- \otimes_B T : \mathrm{mod}\, B \to \mathrm{mod}\, A.$$

Consideremos os seguintes morfismos

$$\varepsilon_M : \mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \to M$$

$$f \otimes t \mapsto f(t)$$

(para $f \in \mathrm{Hom}_A(T, M)$ e $t \in T$) e

$$\delta_X : X \to \mathrm{Hom}_A(T, X \otimes_B T)$$

$$x \mapsto (t \mapsto x \otimes t)$$

(para $x \in X$ e $t \in T$).

Lema 2.1.1. *(a) Se $T_0 \in \mathrm{add}\, T$, então ε_{T_0} é um isomorfismo.*

(b) Se $P \in \mathrm{add}\, B$, então δ_P é um isomorfismo.

Demonstração. (a) É suficiente verificar o enunciado quando $T_0 = T$, pois os funtores $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ são aditivos.

Observe que se $f \in B$ e $t \in T$, então $\varepsilon_T(f \otimes t) = f(t)$ e isto define a estrutura de B-módulo de T, donde ε_T é um isomorfismo.

Analogamente prova-se (b). □

A proposição seguinte nos diz que o funtor $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ aplica os objetos de $\mathrm{add}\, T$ sobre $\mathrm{add}\, B$, isto é, sobre os B-módulos projetivos e o funtor $- \otimes_B T$ aplica os objetos de $\mathrm{add}\, B$ sobre $\mathrm{add}\, T$, ou seja, aplica os B-módulos projetivos sobre $\mathrm{add}\, T$.

Proposição 2.1.2 (Lema da Projetivização). *(a) Sejam $T_0 \in \operatorname{add} T$ e M um A-módulo. A aplicação $f \mapsto \operatorname{Hom}_A(T, f)$ induz um isomorfismo funtorial*

$$\operatorname{Hom}_A(T_0, M) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T, T_0), \operatorname{Hom}_A(T, M)) .$$

(b) Os funtores $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ induzem equivalências quase inversas entre $\operatorname{add} T$ e $\operatorname{add} B$.

Demonstração. (a) É suficiente verificarmos o enunciado quando $T_0 = T$.

Observe que os isomorfismos funtoriais

$$\operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T, T), \operatorname{Hom}_A(T, M)) \cong \operatorname{Hom}_B(B, \operatorname{Hom}_A(T, M)) \cong \operatorname{Hom}_A(T, M)$$

aplicam $\operatorname{Hom}_A(T, f)$ sobre $\operatorname{Hom}_A(T, f)(1_T) = f1_T = f$.

(b) Seja $T_0 \in \operatorname{add} T$. Uma vez que $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ é aditivo segue que $\operatorname{Hom}_A(T, T_0) \in \operatorname{add} \operatorname{Hom}_A(T, T) = \operatorname{add} B$. Logo $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ aplica $\operatorname{add} T$ em $\operatorname{add} B$.

Note que se $T_0 \in \operatorname{add} T$, então, pelo Lema (2.1.1), ε_{T_0} é um isomorfismo, donde $- \otimes_B T$ aplica $\operatorname{add} B$ em $\operatorname{add} T$.

Do Lema (2.1.1) e da letra (a), esses funtores, restritos a $\operatorname{add} T$ e $\operatorname{add} B$ respectivamente, são quase inversos. Logo, tais funtores induzem uma equivalência entre $\operatorname{add} T$ e $\operatorname{add} B$. □

Observação 2.1.3. *A álgebra B é básica se, e somente se, na decomposição $T = \oplus_{i=1}^n T_i$ em somandos diretos indecomponíveis, tem-se que $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$.*

De fato, sabemos do Lema da Projetivização que $T_0 \in \operatorname{add} T$ se, e somente se, $\operatorname{Hom}_A(T, T_0) \in \operatorname{add} B$. Assim, $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$ se, e somente se, $e_i B \ncong e_j B$ para $i \neq j$.

Vimos que os funtores $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ nos deram uma equivalência entre as subcategorias $\operatorname{add} T$ de $\operatorname{mod} A$ e $\operatorname{add} B$ de $\operatorname{mod} B$. Tentaremos agora com hipóteses adicionais sobre T determinar subcategorias $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$ e $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} B$ que serão equivalentes através desses funtores e tais que $\operatorname{add} T \subseteq \mathcal{C}$ e $\operatorname{add} B \subseteq \mathcal{D}$.

Proposição 2.1.4. *Para todo A-módulo M, tem-se que $\operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \in \operatorname{Gen} T$.*

Com efeito, seja $\{f_1, \ldots, f_m\}$ um conjunto de geradores do B-módulo finitamente gerado $\operatorname{Hom}_A(T, M)$. Então consideremos o epimorfismo $h : B^m \to \operatorname{Hom}_A(T, M)$

dado por $h(b_1 + \cdots + b_m) = f_1 b_1 + \cdots + f_m b_m$. Como $- \otimes_B T$ é funtor exato à direita, obtemos um epimorfismo $B^m \otimes_B T \to \mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T$.

Agora observe que $B^m \otimes_B T = (\bigoplus_{i=1}^m B) \otimes_B T = \bigoplus_{i=1}^m (B \otimes_B T) = \bigoplus_{i=1}^m T = T^m$ e, portanto, existe um epimorfismo de A-módulos $T^m \to \mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T$. Logo $\mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \in \mathrm{Gen}\, T$.

Corolário 2.1.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria abeliana plena de* $\mathrm{mod}\, A$ *e $T \in \mathcal{A}$ um objeto projetivo tal que $\mathcal{A} = \mathrm{Gen}\, T$. Seja $B = \mathrm{End}_{\mathrm{A}}\, T$. Então o funtor*

$$\mathrm{Hom}_A(T, -) : \mathcal{A} \to \mathrm{mod}\, B$$

é uma equivalência de categorias.

Observe que as hipóteses do Corolário acima são bastantes restritivas, e é claro que em geral a subcategoria $\mathrm{Gen}\, T$ de $\mathrm{mod}\, A$ não é equivalente a $\mathrm{mod}\, B$. Assim, uma pergunta natural a ser feita é: Qual subcategoria de $\mathrm{mod}\, B$ seria candidata a ser equivalente a $\mathrm{Gen}\, T$?

Como desejamos que os funtores $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ sejam equivalências quase inversas entre essas duas subcategorias, um ponto de partida possível seria tratar de determinar quando o morfismo funtorial ε_M é um isomorfismo. Para isso necessitamos de uma definição.

Definição 2.1.6. *Seja M um A-módulo e $T_0 \in \mathrm{add}\, T$. Se existe um morfismo $f : T_0 \to M$ não-nulo, então dizemos que f é uma $\mathrm{add}\, T$-**aproximação à direita** de M.*

Dualmente define-se $\mathrm{add}\, T$-aproximação à esquerda de um A-módulo M.

Lema 2.1.7. *Seja M um A-módulo e $f : T_0 \to M$ uma $\mathrm{add}\, T$-aproximação à direita de M. Então*

(*a*) *$\mathrm{Hom}_A(T, f) : \mathrm{Hom}_A(T, T_0) \to \mathrm{Hom}_A(T, M)$ é um epimorfismo;*

(*b*) *$f : T_0 \to M$ é um epimorfismo se, e somente se, $M \in \mathrm{Gen}\, T$.*

Demonstração. (*a*) Sendo $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ aditivo, podemos considerar $T_0 = T$ e como $Hom_A(T, M)$ é um B-módulo finitamente gerado segue que $\mathrm{Hom}_A(T, f)$ é um epimorfismo.

(*b*) Seja $f : T_0 \to M$ é um epimorfismo. Então, por definição, $M \in \mathrm{Gen}\, T$.

Reciprocamente, suponhamos $M \in \operatorname{Gen} T$. Então existe um epimorfismo $g : T^m \to M$, com $m > 0$. Pela definição de f, existe $h : T^m \to T_0$ tal que $g = fh$. Como g é epimorfismo, então f também é. $\square$

O seguinte Lema é dual do Lema (2.1.7).

Lema 2.1.8. *Seja M um A-módulo e $f : M \to T_0$ uma $\operatorname{add} T$-aproximação à esquerda de M. Então*

(a) $Hom_A(f, T) : \operatorname{Hom}_A(T_0, T) \to \operatorname{Hom}_A(M, T)$ é um epimorfismo;

(b) $f : M \to T_0$ é um monomorfismo se, e somente se, $M \in \operatorname{Cogen} T$.

A proposição seguinte nos dará uma condição necessária e suficiente para decidirmos se morfismo funtorial ε_M é um epimorfismo.

Proposição 2.1.9. *Seja M um A-módulo. Então $\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \to M$ é um epimorfismo se, e somente se, $M \in \operatorname{Gen} T$. Além disso, se $M \in \operatorname{Gen} T$, $f : T_0 \to M$ é uma $\operatorname{add} T$-aproximação à direita de M e $\operatorname{Ker} f \in \operatorname{add} T$, então ε_M é um isomorfismo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pela Proposição (2.1.4) temos que $\operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \in \operatorname{Gen} T$. Daí existe epimorfismo $f : T_0 \to \operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \in \operatorname{Gen} T$, com $T_0 \in \operatorname{add} T$. Logo, como ε_M é epimorfismo segue que $\varepsilon_M f : T_0 \to M$ é epimorfismo e portanto, $M \in \operatorname{Gen} T$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $M \in \operatorname{Gen} T$ e seja $f : T_0 \to M$ uma $\operatorname{add} T$-aproximação à direita de M, com $T_0 \in \operatorname{add} T$. Pelo Lema (2.1.7)($a$) segue que f é sobrejetivo e portanto, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0 .$$

Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ e usando o Lema (2.1.7)(b) obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,f)} \operatorname{Hom}_A(T, M) \longrightarrow 0 .$$

Agora, aplicando o funtor $- \otimes_B T$ na última sequência obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Hom}_A(T, L) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_0}"] & \operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 . \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & T_0 \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $T_0 \in \operatorname{add} T$ segue que ε_{T_0} é um isomorfismo, em particular, um epimorfismo. Daí e do diagrama resulta que ε_M é um epimorfismo.

Além disso, se tivéssemos $L \in \operatorname{add} T$, então ε_L seria um isomorfismo e portanto, ε_M também seria isomorfismo. $\square$

Assim, para o nosso propósito, procuramos condições mínimas atendidas por T para que $\operatorname{Gen} T$ satisfaça a propriedade do enunciado da proposição.

2.2 Módulos inclinantes parciais

Começamos esta seção com a seguinte observação:

Observação 2.2.1. $\operatorname{Gen} T$ *é fechado por quocientes.*

Com efeito, seja $M \in \operatorname{Gen} T$ e $f : M \to N$ um epimorfismo. Uma vez que $M \in \operatorname{Gen} T$ existe um epimorfismo $g : T_0 \to M$, com $T_0 \in \operatorname{add} T$. Assim, $h = fg : T_0 \to N$ é um epimorfismo, isto é, $N \in \operatorname{Gen} T$.

Nesta seção estamos interessados em saber quando $\operatorname{Gen} T$ é também fechado por extensões. Veremos que neste caso, $\operatorname{Gen} T$ determina um par de torção.

Agora veremos que se T é um A-módulo arbitrário, não há razão para que $\operatorname{Gen} T$ seja fechada por extensões.

Exemplo 2.2.2. *Seja A a álgebra de caminhos da aljava $Q = 1 \to 2$ e consideremos $T = S(1) \oplus S(2)$. Afirmamos que* $\operatorname{Gen} T$ *não é fechada para extensões.*

De fato, consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S(2) \longrightarrow P(1) \longrightarrow S(1) \longrightarrow 0\,.$$

É claro que $S(1), S(2) \in \operatorname{Gen} T$ mas, $P(1) \notin \operatorname{Gen} T$ pois, $\operatorname{Hom}_A(T, P(1)) \cong \operatorname{Hom}_A(S(2), P(1))$ e não existe epimorfismo $f : S(2)^m \to P(1)$ qualquer que seja $m > 0$. Logo, $\operatorname{Gen} T$ não é fechada por extensões.

Antes de darmos uma condição suficiente para que $\operatorname{Gen} T$ seja fechado por extensões, definiremos par de torção.

Definição 2.2.3. *Um par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de subcategorias aditivas plenas de* $\operatorname{mod} A$ *é um* ***par de torção*** *se;*

(a) $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$ *para todo* $M \in \mathcal{T}$ *e* $N \in \mathcal{F}$*;*

(b) *Se* $\mathrm{Hom}_A(M, F) = 0$ *para todo* $F \in \mathcal{F}$*, então* $M \in \mathcal{T}$*;*

(c) *Se* $\mathrm{Hom}_A(T, N) = 0$ *para todo* $T \in \mathcal{T}$*, então* $N \in \mathcal{F}$*;*

Em outras palavras, um par de torção em $\mathrm{mod}\, A$ é um par de subcategorias aditivas tal que não existe nenhum morfismo não-nulo da primeira na segunda, e são maximais com essa propriedade. Calcular um par de torção em $\mathrm{mod}\, A$ nos dá informação sobre a direção dos morfismos em $\mathrm{mod}\, A$.

As subcategorias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$ são chamadas, respectivamente, **classe de torção** e **classe sem torção**.

Proposição 2.2.4. (a) *Seja* $\mathcal{T}$ *uma subcategoria aditiva plena de* $\mathrm{mod}\, A$*. Existe uma subcategoria* $\mathcal{F}$ *tal que* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *é um par de torção se, e somente se,* $\mathcal{T}$ *é fechada por quocientes e extensões.*

(b) *Seja* $\mathcal{F}$ *uma subcategoria aditiva plena de* $\mathrm{mod}\, A$*. Existe uma subcategoria* $\mathcal{T}$ *tal que* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *é um par de torção se, e somente se,* $\mathcal{F}$ *é fechada por submódulos e extensões.*

(c) *Se* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *é um par de torção de* $\mathrm{mod}\, A$*, então para todo* A*-módulo* M *existe uma sequência exata curta, a qual chamaremos de* ***sequência canônica****,*

$$0 \longrightarrow tM \longrightarrow M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$$

com $tM \in \mathcal{T}$ *e* $M/tM \in \mathcal{F}$*, única no sentido que toda sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

com $L \in \mathcal{T}$ *e* $N \in \mathcal{F}$ *é isomorfa a anterior.*

Demonstração. Ver [1], página 29. $\square$

Observação 2.2.5. *Se* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *é um par de torção em* $\mathrm{mod}\, A$ *e* S *é um* A*- módulo simples, então* $S \in \mathcal{T}$ *ou* $S \in \mathcal{F}$*.*

Com efeito, consideremos a sequência canônica (ver [1], página 29)

$$0 \longrightarrow tS \longrightarrow S \longrightarrow S/tS \longrightarrow 0\,.$$

Uma vez que S é simples e tS é submódulo de S segue que $tS = 0$ ou $tS = S$. Se $tS = 0$, então $S/tS = S \in \mathcal{T}$. Caso contrário, $tS = S \in \mathcal{F}$.

Lema 2.2.6. *Seja T um A-módulo tal que $\mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$ para todo $M \in \mathrm{Gen}\, T$. Então $\mathrm{Gen}\, T$ é uma classe de torção. Além disso, a classe sem torção correspondente é $\{ M \in \mathrm{mod}\, A \mid \mathrm{Hom}_A(T, M) = 0 \}$.*

Demonstração. Observe que para mostrarmos a primeira afirmação é suficiente provarmos que $\mathrm{Gen}\, T$ é fechado por extensões. Seja $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ uma sequência exata em mod A com L, $n \in \mathrm{Gen}\, T$. Como $\mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$ para todo $M \in \mathrm{Gen}\, T$, o funtor $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ induz uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, N) \longrightarrow 0$$

Agora, aplicando o funtor $- \otimes_B T$ na última sequência obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_A(T, L) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & \mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & \mathrm{Hom}_A(T, N) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_N"] & 0 . \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Uma vez que L, $N \in \mathrm{Gen}\, T$ segue que ε_L e ε_L são epimorfismos. Daí e do diagrama resulta que ε_M é um epimorfismo. Logo, pela Proposição (2.1.9), $M \in \mathrm{Gen}\, T$ e, portanto, $\mathrm{Gen}\, T$ é fechado por extensões, ou seja, $\mathrm{Gen}\, T$ é uma classe de torção.

Seja M um A-módulo pertencente a classe sem torção. Como $T \in \mathrm{Gen}\, T$ temos $\mathrm{Hom}_A(T, M) = 0$. Reciprocamente, seja M um A-módulo tal que $\mathrm{Hom}_A(T, M) = 0$ e seja $L \in \mathrm{Gen}\, T$. Então existe um epimorfismo $f : T^m \to L$, com $m > 0$. Logo, $\mathrm{Hom}_A(L, M) = 0$ e, portanto, M pertence a classe sem torção. $\square$

Como já mencionamos anteriormente, procuramos módulos próximos dos geradores. Uma primeira aproximação são os módulos inclinantes parciais definidos por

Definição 2.2.7. Um módulo $T \in \mathrm{mod}\, A$ é chamado um **módulo inclinante parcial** se ele satisfaz as seguintes condições:

(T_1) $\mathrm{pd}_A\, T \leq 1$, e

(T_2) $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$.

Dualmente define-se módulo **coinclinante parcial**.

Se na definição acima tivermos $\delta(T) = n - 1$, onde $\operatorname{rank} K_0(A) = n$, dizemos que T é um **módulo inclinante parcial quase completo**.

Exemplo 2.2.8. *Seja A a álgebra de caminhos dada pela aljava*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dl, "\gamma"'] \\
1 & 2 \arrow[l, "\beta"'] & \\
 & & 3 \arrow[ul, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

com a relação $\alpha\beta = 0$. O módulo $T = {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}} \oplus {\begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}} \oplus 4$ é inclinante parcial.

De fato, para mostrar que $\operatorname{pd} T \leq 1$ consideremos as resoluções projetivas $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow {\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}} \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}} \oplus {\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}} \longrightarrow 0$ e

$0 \longrightarrow {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow 4 \longrightarrow 0$

Para verificar (T_2) notemos que ${\begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}} \oplus 4$ é injetivo e daí:

$$\operatorname{Ext}^1_A(T, T) \cong \operatorname{Ext}^1_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}} \oplus {\begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}} \oplus 4, {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}\right)$$

Como $\operatorname{pd} T \leq 1$, então, pelas fórmulas de Auslander-Reiten, temos:

$$\operatorname{Ext}^1_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}, {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}\right) \cong D\operatorname{Hom}_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}, \tau\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}\right)\right) \cong D\operatorname{Hom}_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}, {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}\right) = 0,$$

$$\operatorname{Ext}^1_A\left({\begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}}, {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}\right) \cong D\operatorname{Hom}_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}, \tau\left({\begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}}\right)\right) \cong D\operatorname{Hom}_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}, 2\right) = 0 \text{ e}$$

$$\operatorname{Ext}^1_A\left(4, {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}\right) \cong D\operatorname{Hom}_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}, \tau(4)\right) \cong D\operatorname{Hom}_A\left({\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}, {\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}\right) = 0$$

Logo, $\operatorname{Ext}^1_A(T, T) = 0$ e portanto, T é inclinante parcial.

Observação 2.2.9. *Todo módulo projetivo é inclinante parcial.*

Lema 2.2.10. *Seja T um A-módulo tal que $\operatorname{pd}_A T \leq 1$. Então T é inclinante parcial se, e somente se, $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0$ para todo $M \in \operatorname{Gen} T$.*

Demonstração. Suponhamos que T seja inclinante parcial e seja $M \in \operatorname{Gen} T$. Então existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T^m \longrightarrow M \longrightarrow 0\,,$$

com $m > 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ obtemos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, T^m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, M) .$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, T^m) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, M)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(T, L)$$

Uma vez que $\mathrm{pd}_A T \leq 1$ segue que $\mathrm{Ext}^2_A(T, L) = 0$ e daí obtemos um epimorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_A(T, T^m) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, M) \longrightarrow 0 .$$

Logo, $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$ implica $\mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$ para qualquer $M \in \mathrm{Gen}\, T$.

Reciprocamente, se $\mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$ para todo $M \in \mathrm{Gen}\, T$, em particular, $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$. Logo T é inclinante parcial. $\square$

Observação 2.2.11. *Todo módulo inclinante parcial T induz um par de torção $(\mathcal{T}_0(T), \mathcal{F}_0(T))$, com $\mathcal{T}_0(T) = \mathrm{Gen}\, T$ e $\mathcal{F}_0(T) = \{ M \in \mathrm{mod}\, A \mid \mathrm{Hom}_A(T, M) = 0 \}$.*

Segue dos Lemas (2.2.6) e (2.2.10).

Definição 2.2.12. *Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria aditiva plena de $\mathrm{mod}\, A$, fechada por extensões. Então um objeto M de $\mathcal{C}$ diz-se:*

(a) Ext-***projetivo em*** $\mathcal{C}$ *se* $\mathrm{Ext}^1_A(M, C) = 0$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$.

(b) Ext-***injetivo em*** $\mathcal{C}$ *se* $\mathrm{Ext}^1_A(C, M) = 0$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$.

O Lema (2.2.10) se reformula dizendo que se T é inclinante parcial, então é Ext-projetivo em $\mathrm{Gen}\, T$.

O lema seguinte nos auxiliará no cálculo dos Ext-projetivos e Ext-injetivos.

Lema 2.2.13 (ver [1], página 31)**.** *Seja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ um par de torção.*

(a) Se $L \in \mathcal{T}$ é indecomponível, então L é Ext-*projetivo em $\mathcal{T}$ se, e somente se, $\tau L \in \mathcal{F}$.*

(b) Se $N \in \mathcal{F}$ é indecomponível, então N é Ext-*injetivo em $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\tau^{-1} N \in \mathcal{T}$.*

Segue daí que se T é inclinante parcial, então $\tau T \in \mathcal{F}_0(T)$.

Na demonstração do Lema (2.2.10) vemos que, se T é inclinante parcial, então $\mathcal{T}_0(T) = \operatorname{Gen} T \subseteq \{ M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0 \}$. Provaremos agora que este último conjunto é uma classe de torção.

Lema 2.2.14. *Seja T um A-módulo inclinante parcial. Então $\mathcal{T}_1(T) = \{ M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0 \}$ é uma classe de torção que contém $\mathcal{T}_0(T)$.*

Demonstração. Observe que pela Proposição (2.2.4) é suficiente provarmos que $\mathcal{T}_1(T)$ é fechada por quocientes e extensões. Para isso, seja $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ nesta sequência e usando $\operatorname{pd}_A T \leq 1$ obtemos a sequência exata

$$\operatorname{Ext}^1_A(T, M') \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T, M'') \longrightarrow 0 .$$

Assim, se $M \in \mathcal{T}_1(T)$, então $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0$ donde $\operatorname{Ext}^1_A(T, M'') = 0$ e daí, $M'' \in \mathcal{T}_1(T)$. De maneira análoga, se M', $M'' \in \mathcal{T}_1(T)$, então $\operatorname{Ext}^1_A(T, M') = \operatorname{Ext}^1_A(T, M'') = 0$ donde $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0$ e daí, $M \in \mathcal{T}_1(T)$.

Logo $\mathcal{T}_1(T)$ é fechada por quocientes e extensões e consequentemente, uma classe de torção. $\square$

Observação 2.2.15. *Se T é fiel, então $\operatorname{Gen} T$ contém todos os A-módulos injetivos. Além disso, se T é inclinante parcial então $\mathcal{T}_0(T)$ contém todos os A-módulos injetivos.*

De fato, sendo T fiel então $DA_A \in \operatorname{Gen} T$, ou seja, $\operatorname{Gen} T$ contém todos os A-módulos injetivos. Se, além disso, T é inclinante parcial então T induz um par de torção $(\mathcal{T}_0(T), \mathcal{T}_0(F))$ com $\mathcal{T}_0(T) = \operatorname{Gen} T$ e $\mathcal{F}_0(T) = \{ M \mid \operatorname{Hom}_A(T, M) = 0 \}$.

Observação 2.2.16. *Se P é um A-módulo projetivo-injetivo e T é inclinante parcial fiel, então $P \in \operatorname{add} T$.*

Com efeito, sendo P injetivo e T fiel temos que $P \in \operatorname{Gen} T$. Assim, existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T^m \longrightarrow P \longrightarrow 0 .$$

Uma vez que P é projetivo segue que tal sequência cinde e daí, $P \in \operatorname{add} T$.

Definição 2.2.17. *Um par de torção* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *diz-se* ***escindido*** *se cada* A*-módulo indecomponível ou pertence a* $\mathcal{T}$ *ou pertence a* $\mathcal{F}$.

Proposição 2.2.18 (ver [1], página 36)**.** *Seja* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *um par de torção de* $\operatorname{mod} A$. *São equivalentes:*

(a) $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *é escindindo.*

(b) *Para todo* A*-módulo* M*, a sequência canônica cinde.*

(c) $\tau^{-1}M \in \mathcal{T}$*, para todo* $M \in \mathcal{T}$.

(d) $\tau N \in \mathcal{F}$*, para todo* $N \in \mathcal{F}$.

2.3 Módulos inclinantes de dimensão projetiva ≤ 1

Definição 2.3.1. *Um* A*-módulo inclinante parcial* T *diz-se* ***inclinante*** *se satisfaz a propriedade adicional*

(T_3) *Existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

com T', $T'' \in \operatorname{add} T$.

Dualmente define-se módulo coinclinante.

Observação 2.3.2. *Todo módulo inclinante* T *é fiel.*

Com efeito, sendo T inclinante então (T_3) é satisfeita. Logo, existe um monomorfismo $A_A \to T_0$, com $T_0 \in \operatorname{add} T$, e daí $A_A \in \operatorname{Cogen} T$. Logo, T é fiel.

Lema 2.3.3. *Sejam* M, $T \in \operatorname{mod} A$. *Então existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

com $T_0 \in \operatorname{add} T$*, tal que o morfismo conexão* $\delta : \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \to \operatorname{Ext}^1_A(T, M)$ *induzido pelo funtor* $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ *é sobrejetivo.*

Demonstração. Se $\mathrm{Ext}_A^1(T,M) = 0$ não há nada a fazer. Suponhamos então que $\mathrm{Ext}_A^1(T,M) \neq 0$ e seja $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_d\}$ um conjunto de geradores do $\mathrm{End}\,T$-módulo $\mathrm{Ext}_A^1(T,M)$.

Representamos cada $\bar{e}_i$ por uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} T \longrightarrow 0\,.$$

Assim, se $f = [f_1,\ldots,f_d] : M^d \to \oplus_{i=1}^d E_i$ e $g = [g_1,\ldots,g_d] : \oplus_{i=1}^d E_i \to T^d$ são as aplicações induzidas na soma direta, então temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i^{'}"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i^{''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^d \arrow[r, "f"] & \oplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas, onde u_i, $u_i^{'}$, $u_i^{''}$ são as respectivas inclusões na i-ésima coordenada.

Agora, considerando o morfismo codiagonal $k = [1_M,\ldots,1_M] : M^d \to M$ e tomando o *push-out* (ver apêndice) obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i^{'}"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i^{''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & \oplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "1_{T^d}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f^{'}"] & E \arrow[r, "g^{'}"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $ku_i^{'} = 1_M$, o diagrama acima induz outro diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "vu_i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se $\bar{e}$ denota o elemento $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{g'} T^d \longrightarrow 0$ de $\mathrm{Ext}_A^1(T^d, M)$, então o último diagrama nos diz que $\bar{e}_i = \mathrm{Ext}_A^1(u_i'', M)\bar{e} = \delta(u_i'')$ para cada $1 \leq i \leq d$.

Logo $\delta : \mathrm{Hom}_A(T, T^d) \to \mathrm{Ext}_A^1(T, M)$ é sobrejetivo e a sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{g'} T^d \longrightarrow 0$$

satisfaz o pedido. $\square$

Uma consequência imediata de (2.3.3) é o seguinte lema, chamado Lema de Bongartz, que nos diz que todo módulo inclinante parcial T pode ser completado a um módulo inclinante.

Lema 2.3.4 (Bongartz)**.** *Seja T um módulo inclinante parcial. Então existe um módulo E tal que $T \oplus E$ é inclinante.*

Demonstração. Pelo Lema (2.3.3), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow E \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

tal que $T_0 \in \operatorname{add} T$ e o morfismo conexão $\delta : \mathrm{Hom}_A(T, T_0) \to \mathrm{Ext}_A^1(T, A)$ induzido por $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ é sobrejetivo.

Aplicando $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ em (2.2) obtemos a sequência exata

$$\ldots \mathrm{Hom}_A(T, T_0) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_A^1(T, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T, T_0) = 0\ .$$

Como δ é sobrejetivo temos $\mathrm{Ext}_A^1(T, E) = 0$.

Agora, aplicando sucessivamente os funtores $\mathrm{Hom}_A(-, T)$ e $\mathrm{Hom}_A(-, E)$ em (2.2) obtemos as sequências exatas

$$0 = \mathrm{Ext}_A^1(T_0, T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(E, T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(A, T) = 0$$

e

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T_0, E) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(E, E) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(A, E) = 0\ .$$

Logo $\operatorname{Ext}_A^1(T, E) = \operatorname{Ext}_A^1(E, T) = \operatorname{Ext}_A^1(E, E) = 0$ e portanto, $\operatorname{Ext}_A^1(T \oplus E, T \oplus E) = 0$. Como $\operatorname{pd}_A T \leq 1$ temos $\operatorname{pd}_A T_0 \leq 1$ e de (2.2) segue que $\operatorname{pd}_A E \leq 1$. Além disso, a sequência (2.2) é a sequência de (T_3) e consequentemente, $T \oplus E$ é um módulo inclinante. $\square$

Observação 2.3.5. *Na demonstração do Lema de Bongartz provamos que para toda sequência exata*

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow E \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0$$

com $T_0 \in \operatorname{add} T$ tal que o morfismo conexão é sobrejetivo, que existe pelo Lema (2.3.3)*, o módulo $T \oplus E$ é inclinante. Tal sequência diz-se **sequência de Bongartz** para T, e o módulo E diz-se **complemento de Bongartz** de T.*

Corolário 2.3.6. *Seja E um complemento de Bongartz do módulo inclinante parcial T. Então $\mathcal{T}_1(T) = \mathcal{T}_1(T \oplus E)$.*

O teorema seguinte dá várias caracterizações equivalentes dos módulos inclinantes.

Teorema 2.3.7. *Seja T um A-módulo inclinante parcial. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é um módulo inclinante.

(b) $\mathcal{T}_0(T) = \mathcal{T}_1(T)$.

(c) Para todo $M \in \mathcal{T}_1(T)$ existe uma sequência exata

$$\cdots \to T_2 \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

com $T_i \in \operatorname{add} T$ para todo i.

(d) L é Ext*-projetivo em $\mathcal{T}_1(T)$ se, e somente se, $L \in \operatorname{add} T$.*

(e) $\delta(T) = n = \operatorname{rank} K_0(A)$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Pelo Lema (2.2.14), sabemos que $\mathcal{T}_0(T) \subseteq \mathcal{T}_1(T)$. Reciprocamente, sejam $M \in \mathcal{T}1(T)$ e

$$0 \longrightarrow tM \longrightarrow M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$$

a sequência canônica de M no par de torção $(\mathcal{T}_0(T), \mathcal{F}_0(T))$. Como $M/tM \in \mathcal{F}_0(T)$, tem-se que $\mathrm{Hom}_A(T, M/tM) = 0$. Por outro lado, aplicando $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ na sequência canônica, obtemos a sequência exata

$$\mathrm{Ext}^1_A(T, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, M/tM) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(T, M) = 0$$

pois $\mathrm{pd}\, T \leq 1$. Logo $\mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$ implica $\mathrm{Ext}^1_A(T, M/tM) = 0$. Agora, aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, M/tM)$ em

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

com $T', T'' \in \mathrm{add}\, T$, obtemos a sequência exata

$$0 = \mathrm{Hom}_A(T', M/tM) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, M/tM) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T'', M/tM) = 0.$$

Uma vez que $M/tM \cong \mathrm{Hom}_A(A, M/tM)$ e $\mathrm{Hom}_A(A, M/tM) = 0$ segue que $M/tM = 0$, ou seja, $M = tM$. Logo $tM \in \mathcal{T}_0(T)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Suponhamos que $\mathcal{T}_0(T) = \mathcal{T}_1(T)$ e seja $M \in \mathcal{T}_1(T)$. Começamos provando a existência de uma sequência exata

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

com $T_0 \in \mathrm{add}\, T$ e $L \in \mathcal{T}_1(T)$.

Com efeito, uma vez que $M \in \mathrm{Gen}\, T$ então pelo Lema (2.1.7) segue que toda $\mathrm{add}\, T$-aproximação à direita $f : T_0 \to M$ de M é sobrejetiva. Ponhamos $L = \mathrm{Ker}\, f$ e apliquemos $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ em

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

para obtermos a sequência exata

$$\ldots \mathrm{Hom}_A(T, T_0) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(T,f)} \mathrm{Hom}_A(T, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, T_0) = 0.$$

Como f é uma $\mathrm{add}\, T$-aproximação, pelo Lema (2.1.7) temos que o morfismo $\mathrm{Hom}_A(T, f)$ é sobrejetivo. Logo $\mathrm{Ext}^1_A(T, L) = 0$ e portanto, $L \in \mathcal{T}_0(T) = \mathcal{T}_1(T)$.

Note que, como $L \in \operatorname{Gen} T$ existe uma sequência exata

$$T_1 \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

com $T_1 \in \operatorname{add} T$. Logo a sequência

$$T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é exata. Repetindo o argumento construímos uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

como queríamos.

$(c) \Rightarrow (d)$ Suponhamos que $L \in \operatorname{add} T$. Então L é Ext-projetivo em $\mathcal{T}_1(T)$.

Reciprocamente, suponhamos que $L \in \mathcal{T}_1(T)$. Por (c), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

com $T_0 \in \operatorname{add} T$ e $L^0 \in \mathcal{T}_1(T)$. Como L é Ext-projetivo em $\mathcal{T}_1(T)$, tem-se que $\operatorname{Ext}^1_A(L, N) = 0$ para todo $N \in \mathcal{T}_1(T)$, em particular, $\operatorname{Ext}^1_A(L, L^0) = 0$.

Logo a sequência exata (2.3) cinde e portanto, $L \in \operatorname{add} T$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Seja $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0$ uma sequência de Bongartz para T. Para provarmos que T é inclinante basta mostrarmos que $E \in \operatorname{add} T$. E por (d), este caso se reduz a provar que E é Ext-projetivo em $\mathcal{T}_1(T)$.

Sabemos que $T \oplus E$ é inclinante e daí, $\operatorname{Ext}^1_A(T, E) = 0$, donde $E \in \mathcal{T}_1(T)$. Agora, seja $M \in \mathcal{T}_1(T)$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-, M)$ na sequência de Bongartz obtemos uma sequência exata

$$0 = \operatorname{Ext}^1_A(T_0, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(E, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(A, M) = 0$$

donde $\operatorname{Ext}^1_A(E, M) = 0$.

Logo E é Ext-projetivo em $\mathcal{T}_1(T)$ e portanto, $E \in \operatorname{add} T$.

$(a) \Rightarrow (e)$ ver [14], página 71. $\square$

Observação 2.3.8. *Vimos no Teorema* (2.3.7) *que as classes de torção* $\mathcal{T}_0(T)$ *e* $\mathcal{T}_1(T)$ *coincidem se* T *é inclinante. A partir daqui notaremos por* $\mathcal{T}(T) = \mathcal{T}_0(T) = \mathcal{T}_1(T)$ *e* $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}_0(T) = \mathcal{F}_1(T)$.

Observação 2.3.9. *Na demonstração do Teorema* (2.3.7) *vimos que* $\operatorname{Gen} T$ *é fechado para kernels de* $\operatorname{add} T$*-aproximações epimórficas à direita.*

Consequências do Teorema (2.3.7).

Corolário 2.3.10 (ver [1], página 41)**.** *Sejam* T *um* A*-módulo inclinante e* $B = \operatorname{End} T_A$*. Então:*

(*a*) *O funtor* $\operatorname{Hom}_A(T,-)_{|\mathcal{T}(T)}$ *preserva sequências exatas curtas.*

(*b*) *O funtor* $\operatorname{Ext}^1_A(T,-)_{|\mathcal{F}(T)}$ *preserva sequências exatas curtas.*

Ao longo da seção procurávamos condições mínimas atendidas por T para que $\operatorname{Gen} T$ satisfizesse as condições do enunciado da Proposição (2.1.9). O próximo corolário nos diz que se T é um A-módulo inclinante então temos o desejado.

Corolário 2.3.11 (ver [1], página 41)**.** *Sejam* T *é um módulo inclinante e* $B = \operatorname{End} T_A$*. Então* $M \in \mathcal{T}(T)$ *se, e somente se,* $\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T, M) \oplus_B T \to M$ *é um isomorfismo.*

Corolário 2.3.12 (ver [1], página 42)**.** *Um módulo inclinante parcial* T *é inclinante se, e somente se, para todo* A*-módulo projetivo indecomponível* P *existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow T_0' \longrightarrow T_0'' \longrightarrow 0$$

com $T_0', T_0'' \in \operatorname{add} T$*.*

Exemplo 2.3.13. *O* A*-módulo* $T = \substack{4\\2} \oplus \substack{34\\2} \oplus 4 \oplus \substack{4\\2\\1}$ *é inclinante.*

Vimos no exemplo (2.2.8) que $M = \substack{4\\2} \oplus \substack{34\\2} \oplus 4$ é inclinante parcial.

Uma vez que $\substack{4\\2\\1}$ é projetivo e $M = \substack{4\\2} \oplus \substack{34\\2} \oplus 4$ é inclinante parcial segue que T é inclinante parcial. Para verificarmos (T_3) consideremos as sequências exatas curtas

$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \substack{4\\2\\1} \longrightarrow \substack{4\\2} \longrightarrow 0$, $\quad 0 \longrightarrow \substack{3\\2} \longrightarrow \substack{34\\2} \longrightarrow 4 \longrightarrow 0$ e

$0 \longrightarrow \substack{2\\1} \longrightarrow \substack{4\\2\\1} \longrightarrow 4 \longrightarrow 0$

Logo, pelo Corolário (2.3.12), T é inclinante.

O próximo Corolário nos diz que um módulo inclinante é um módulo inclinante parcial que tem um número maximal de somandos indecomponíveis não isomorfos.

Corolário 2.3.14 (ver [1], página 42)**.** *Um* A*-módulo* T *é inclinante se, e somente se, é um módulo inclinante parcial tal que, para cada módulo* E *tal que* $T \oplus E$ *é inclinante parcial, temos que* $E \in \operatorname{add} T$*.*

2.4 O teorema de inclinação

Seja A uma álgebra de Artin básica e conexa e T um A-módulo inclinante. O teorema de inclinação, devido a Brenner e Butler, compara as categorias de módulos sobre A e sobre $B = \operatorname{End} T$. Já sabemos que o funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ aplica $\operatorname{add} T$ em $\operatorname{add} B$. O próximo lema nos diz que a restrição deste funtor na subcategoria $\operatorname{Gen} T = \mathcal{T}(T) = \{ M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0 \}$ é um funtor pleno, fiel e preserva extensões. Para maiores detalhes e as demonstrações dos resultados abaixo ver [1].

Lema 2.4.1. *Sejam A uma álgebra, T um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T$. Para M, $N \in \mathcal{T}(T)$ temos os isomorfismos funtoriais.*

(*a*) $\operatorname{Hom}_A(M, N) = \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T, M), \operatorname{Hom}_A(T, N))$.

(*b*) $\operatorname{Ext}^1_A(M, N) = \operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Ext}^1_A(T, M), \operatorname{Ext}^1_A(T, N))$.

Uma observação base da teoria de inclinação é que, se T_A é um módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T_A$, então ${}_BT$ é um B^{op}-módulo inclinante.

Lema 2.4.2. *Sejam A uma álgebra, T um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T_A$. Então ${}_BT$ é um B^{op}-módulo inclinante e a aplicação $a \mapsto (t \mapsto ta)$ é um isomorfismo $A \xrightarrow{\cong} (\operatorname{End}_B T)^{op}$.*

Corolário 2.4.3. *Sejam A uma álgebra, T um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T$. Então T_A induz um par de torção $(\mathcal{X}(T_A), \mathcal{Y}(T_A))$ em $\operatorname{mod} B$, donde $\mathcal{X}(T_A) = D\mathcal{F}({}_BT) = \{ X_B \in \operatorname{mod} B \mid X \otimes_B T = 0 \}$ e $\mathcal{Y}(T_A) = D\mathcal{T}({}_BT) = \{ Y_B \in \operatorname{mod} B \mid \operatorname{Tor}^B_1(Y, T) = 0 \}$.*

Lema 2.4.4. *Sejam A uma álgebra, T um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T$. Então $Y \in \mathcal{Y}(T_A)$ se, e somente se, o morfismo funtorial $\delta_Y : Y \to \operatorname{Hom}_A(T, Y \otimes_B T)$ definido por $y \mapsto (t \mapsto y \otimes t)$ é um isomorfismo.*

Teorema 2.4.5 (Teorema de Inclinação)**.** *Sejam A uma álgebra, T um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T_A$. Então:*

(*a*) *Os funtores $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ induzem equivalências quase inversas entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$.*

(*b*) *Os funtores $\operatorname{Ext}^1_A(T, -)$ e $\operatorname{Tor}^B_1(-, T)$ induzem equivalências quase inversas entre $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$.*

O Teorema de Inclinação é facilmente entendido através da figura a seguir.

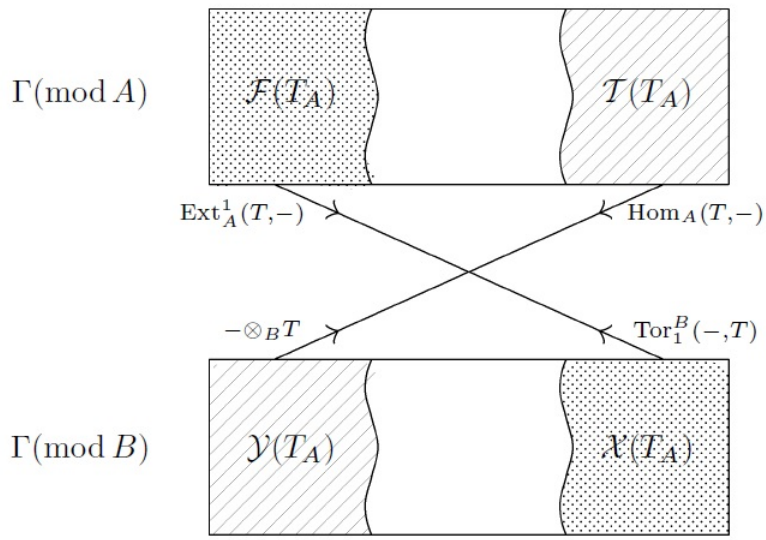

Figura 2.1: Ilustração do Teorema de Inclinação.

Observação 2.4.6. *A classe sem torção $\mathcal{Y}(T)$ contém todos os projetivos.*

De fato, segue do Lema da Projetivização e do Teorema de Inclinação.

Exemplo 2.4.7. *Seja A a álgebra de caminhos dada pela aljava*

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[dl, "\gamma"] \\ 1 & 2 \arrow[l, "\beta"'] & \\ & & 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

com a relação $\alpha\beta = 0$. Conseideremos o A-módulo $U = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix} \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$. Calculemos os pares de torção $(\mathcal{T}(U), \mathcal{F}(U))$ e $(\mathcal{X}(U), \mathcal{Y}(U))$.

Vimos no Examplo (2.3.13) que o A-módulo $U = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix} \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ é inclinante. Agora, calculemos a aljava de Auslander-Reiten de A:

Sabemos que os projetivos indecomponíveis são: $P(1) = 1$, $P(2) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$, $P(3) = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$

e $P(4) = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$. Utilizando o algoritmo *Knitinng* (ver [13], página 84), obtemos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & 4 \\
1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 3 \\
 & & \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Cálculo do par de torção $(\mathcal{T}(U), \mathcal{F}(U))$. Sabemos que $\mathcal{T}(U) = \operatorname{Gen} U$ e $\mathcal{F}(U) = \{\, M \mid \operatorname{Hom}_A(U, M) = 0 \,\}$. Assim, pela aljava de Auslander-Reiten concluímos que $\mathcal{T}(U) = \operatorname{add}\{\, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}, 4, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, 3 \,\}$ e $\mathcal{F}(U) = \operatorname{add}\{\, 1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \,\}$. Logo, o par de torção $(\mathcal{T}(U), \mathcal{F}(U))$ é escindido e está é dado por

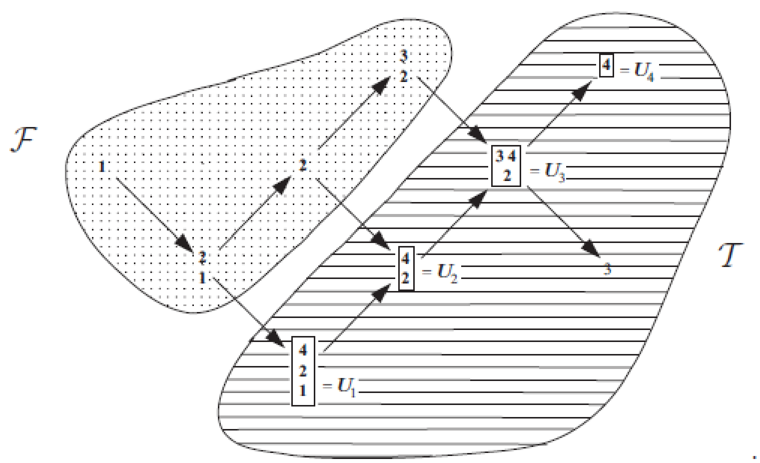

Figura 2.2: Ilustração do par de torção.

Seja $B = \operatorname{End} U$. Calculemos a aljava de B.

Como U tem quatro somandos não isomorfos, então a aljava de B tem exatamente quatro vértices. Além disso, sabemos que existe uma flecha $i \to j$ na aljava de B se:

(1) $i \neq j$

(2) existe um morfismo não-nulo de A-módulos $f : T_j \to T_i$

(3) f não é fator não trivial de nenhum dos T_l.

Pela aljava de Auslander-Reiten de A, vemos os seguintes morfismos não-nulos: $f_1 : U_1 \to U_2$, $f_2 : U_2 \to U_3$ e $f_3 : U_3 \to U_4$. Como $f_3 f_2 \neq 0$, $f_2 f_1 \neq 0$, então a aljava de B não possui relações e é dada por:

$$1' \longleftarrow 2' \longleftarrow 3' \longleftarrow 4' \,.$$

Calculemos a ação dos funtores $\operatorname{Hom}_A(U, -)$ e $\operatorname{Ext}^1_A(U, -)$ sobre os A módulos indecomponíveis
$\mathcal{T}(U) = \operatorname{add}\{ \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}, 4, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, 3 \}$ e $\mathcal{F}(U) = \operatorname{add}\{ 1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \}$.

Sabemos que $\underline{\dim} \operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) = (\dim \operatorname{Hom}_A(U_1, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}), \ldots, \dim \operatorname{Hom}_A(U_4, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix})) = (1, 0, 0, 0)$, donde $\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) = 1'$. De maneira análoga encontramos $\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}$,
$\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix})$, $\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}$, $\operatorname{Hom}_A(U, 4) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}$ e $\operatorname{Hom}_A(U, 3) = 3'$

Por outro lado, como U é inclinante temos $\operatorname{pd} U \leq 1$. Assim, pelas fórmulas de Auslander-Reiten, $\underline{\dim} \operatorname{Ext}^1_A(U, 1) = \underline{\dim} \operatorname{Hom}_A(1, \tau U) = (0, 1, 0, 0)$, donde $\operatorname{Ext}^1_A(U, 1) = 2'$. De maneira análoga obtemos $\operatorname{Ext}^1_A(U, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\end{smallmatrix}$, $\operatorname{Ext}^1_A(U, 2) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix}$ e $\operatorname{Ext}^1_A(U, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 4'$.

Logo, pelo Teorema de Inclinação, $\mathcal{X}(U) = \operatorname{add}\{ 2', \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix}, 4', 3 \}$ e $\mathcal{Y}(U) = \operatorname{add}\{ 1', \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}, 3' \}$. O par de troção $(\mathcal{X}(U), \mathcal{Y}(U))$ não é escindido, pois $\begin{smallmatrix}3'\\2'\end{smallmatrix} \notin \mathcal{X}(U)$ e $\begin{smallmatrix}3'\\2'\end{smallmatrix} \notin \mathcal{Y}(U)$.

$\Gamma(\operatorname{mod} B)$ está dado por:

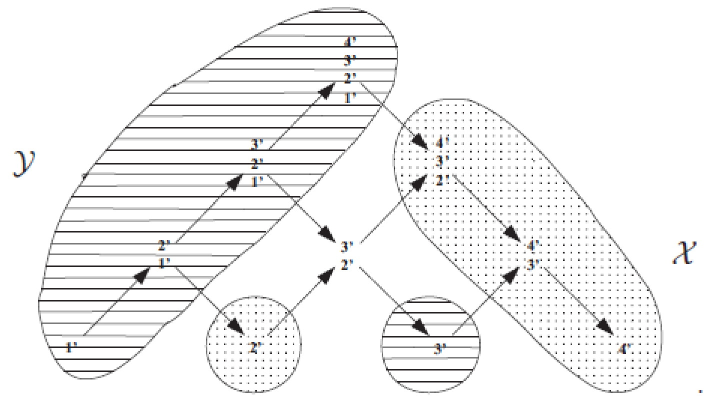

Figura 2.3: Ilustração de $\Gamma(\operatorname{mod} B)$.

2.5 Consequências do teorema de inclinação

Uma primeira consequência importante do Teorema de Inclinação é a relação entre as dimensões globais da álgebra de partida e da álgebra de endomorfismos de um módulo inclinante.

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de uma categoria de módulos. Denotamos por $\operatorname{pd} \mathcal{C}$ o supremo das dimensões projetivas dos módulos de $\mathcal{C}$.

Lema 2.5.1. *Sejam A uma álgebra e $\mathcal{C}$ uma classe sem torção de* $\operatorname{mod} A$ *que contém os projetivos. Então* $\operatorname{dim.gl.} A \leq 1 + \operatorname{pd} \mathcal{C}$.

Demonstração. Sabemos que para todo A-módulo M existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

com P projetivo. Uma vez que $P \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada por submódulos segue que $L \in \mathcal{C}$.

Logo $\operatorname{pd} M \leq 1 + \operatorname{pd} L \leq 1 + \operatorname{pd} \mathcal{C}$ e portanto, $\operatorname{dim.gl.} A \leq 1 + \operatorname{pd} \mathcal{C}$. □

Lema 2.5.2. *Seja A uma álgebra e T um A-módulo inclinante. Para todo $M \in \mathcal{T}(T)$ tem-se* $\operatorname{pd} \operatorname{Hom}_A(T, M) \leq \operatorname{pd} M$.

Demonstração. Faremos a prova usando indução sobre $n = \operatorname{pd} M$. Se $n = 0$, então M é projetivo. Como $M \in \mathcal{T}(T)$ tem-se que $M \in \operatorname{add} T$. Logo, pelo Lema da Projetivização, $\operatorname{Hom}_A(T, M)$ é projetivo e portanto, $\operatorname{pd} \operatorname{Hom}_A(T, M) \leq \operatorname{pd} M$.

Agora, suponhamos que $n \geq 1$. Uma vez que T é inclinante e $M \in \mathcal{T}(T)$, pelo

Teorema (2.3.7), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

com $T_0 \in \operatorname{add} T$ e $L \in \mathcal{T}(T)$. Como $\operatorname{Hom}_A(T,-)_{|\mathcal{T}(T)}$ é exato, então deduzimos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow 0\,.$$

Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-,N)$ em (2.4) e usando $n = \operatorname{pd} M$ obtemos a sequência exata

$$\operatorname{Ext}_A^n(T_0,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(L,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M,N) = 0\,.$$

Consideramos agora dois casos. Se $n = 1$, consideremos $N \in \mathcal{T}(T)$. Então $\operatorname{Ext}_A^1(T_0,N) = 0$ e portanto, $\operatorname{Ext}_A^1(L,N) = 0$. Logo L é Ext-projetivo em $\mathcal{T}(T)$. Pelo Teorema (2.3.7), $L \in \operatorname{add} T$ e consequentemente, $\operatorname{Hom}_A(T,L)$ é um B-módulo projetivo. Daí $\operatorname{pd}\operatorname{Hom}_A(T,M) \leq \operatorname{Hom}_A(T,L) + \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \leq 1$.

Se $n > 1$, então $\operatorname{pd} T_0 \leq 1$ implica que $\operatorname{Ext}_A^n(T_0,N) = 0$. Logo $\operatorname{Ext}_A^n(L,N) = 0$ para todo A-módulo N e daí, $\operatorname{pd} L \leq n-1$. Da hipótese de indução temos que $\operatorname{pd}\operatorname{Hom}_A(T,L) \leq n-1$ e da segunda sequência exata acima obtemos

$$\operatorname{pd}\operatorname{Hom}_A(T,M) \leq 1 + \operatorname{pd}\operatorname{Hom}_A(T,L) \leq n.$$

□

Teorema 2.5.3. *Seja A uma álgebra e T um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T_A$. Então*

$$|\operatorname{dim.gl.} A - \operatorname{dim.gl.} B| \leq 1.$$

Demonstração. Sabemos que a classe sem torção $\mathcal{Y}(T)$ em $\operatorname{mod} B$ que contém os B-módulos projetivos. Seja $Y \mathcal{Y}(T)$. Pelo Teorema de inclinação, existe $M \in \mathcal{T}(T)$ tal que $Y \cong \operatorname{Hom}_A(T,M)$. Pelo Lema (2.5.2), $\operatorname{pd} Y \leq \operatorname{pd} M \leq \operatorname{dim.gl.} A$. Portanto, $\operatorname{pd} \mathcal{Y}(T) \leq \operatorname{dim.gl.} A$. Pelo Lema (2.5.1), $\operatorname{dim.gl.} B \leq 1 + \operatorname{pd}\mathcal{Y}(T) \leq 1 + \operatorname{dim.gl.} A$ e daí, $\operatorname{dim.gl.} B \leq 1 + \operatorname{dim.gl.} A$.

Por outro lado, considerando T um B^{op}-módulo inclinado, obtemos de maneira análoga que $\operatorname{dim.gl.} \tilde{B} \leq 1 + \operatorname{dim.gl.} B$, onde $\tilde{B} = (\operatorname{End}_B T)^{op}$. Pelo Lama (2.4.2), $\tilde{B} \cong A$ e portanto, $\operatorname{dim.gl.} A \leq 1 + \operatorname{dim.gl.} B$. □

Teorema 2.5.4 (ver [1], página 62). *Seja A uma álgebra e T um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T_A$. A aplicação $f : K_0(A) \to K_0(B)$ definida por $M \mapsto \underline{\dim} \operatorname{Hom}_A(T, M) - \underline{\dim} \operatorname{Ext}^1_A(T, M)$ é um isomorfismo de grupos.*

Exemplo 2.5.5. *Sejam A e B as álgebras dadas no exemplo* (2.4.7). *Calculemos* $\dim.\operatorname{gl.} A$ *e* $\dim.\operatorname{gl.} B$.

Sabemos que, para uma álgebra A vale

$$\dim.\operatorname{gl.} A = \sup\{\, S \mid S \textit{ é um } A-\textit{módulo simples}\,\}.$$

Assim, calculemos as dimensões projetivas dos A-módulos simples. Temos as seguintes resoluções projetivas:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}} \longrightarrow 3 \longrightarrow 0 \ \ e$$

$$0 \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0\ .$$

Portanto, $\operatorname{pd} 1 = 0$, $\operatorname{pd} 2 = 1 = \operatorname{pd} 4$, enquanto que $\operatorname{pd} 3 = 2$. Logo, $\dim.\operatorname{gl.} A = 2$.

Para a álgebra B, consideremos a seguinte resolução projetiva:

$$0 \longrightarrow 1' \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}} \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}} \longrightarrow 4' \longrightarrow 0$$

Logo, $\operatorname{pd} 4' = 3$. Como $|\dim.\operatorname{gl.} A - \dim.\operatorname{gl.} B| \leq 1$ e $\dim.\operatorname{gl.} A = 2$ temos $\dim.\operatorname{gl.} B = 3$.

Terminamos esta seção com um critério que nos permitirá dizer se os pares de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ e $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ são escindidos.

Teorema 2.5.6 (ver [1], página 65). *Seja A uma álgebra e T um A-módulo inclinante. Então*

(*a*) $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ *é escindido se, e somente se,* $\operatorname{id} \mathcal{F}(T) \leq 1$.

(*b*) $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ *é escindido se, e somente se,* $\operatorname{pd} \mathcal{X}(T) \leq 1$.

2.6 Módulos r-inclinantes

Ao longo deste capítulo estávamos interessados em comparar as categorias de módulos sobre uma álgebra de Artin A e sobre a álgebra de endomorfismos $B = \operatorname{End} T$, onde $T \in \operatorname{mod} A$. Vimos que se T é um módulo inclinante, então o Teorema de Inclinação nos diz que essas categorias são equivalentes. Além disso, vimos que se A e B são álgebras artinianas, então o grupo de Grothendieck de A e o grupo de Grothendieck de B são isomorfos e, além disso, vimos também que existe uma relação entre as dimensões globais de A e B. Nesta seção apresentaremos generalizações desses resultados, fundamentais na teoria de inclinação, utilizando o conceito de módulos r-inclinantes.

Começamos com a seguinte definição:

Definição 2.6.1. *Seja T um A-módulo. Dizemos que T é um **módulo r-inclinante** se ele satisfaz as seguintes condições:*

(T_1') $\operatorname{pd} T \leq r$.

(T_2') $\operatorname{Ext}_A^i(T,T) = 0$ *para todo* $1 \leq i \leq r$.

(T_3') *Existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_r \longrightarrow 0$$

com $T_i \in \operatorname{add} T$ *para todo* $1 \leq i \leq r$.

Observação 2.6.2. *Se $r = 1$ na definição acima, então a definição de T coincide com a definição anterior de módulo inclinante, o qual continuaremos chamando de módulo inclinante.*

Seja $r \in \mathbb{Z}$ um inteiro não-negativo fixo. Para cada $T \in \operatorname{mod} A$ e cada inteiro $e \geq 0$, $KE_e(T)$ é definido como

$$KE_e(T) = \{\, M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}_A^i(T,M) = 0, \text{ se } 0 \leq i \leq r+e \text{ e } i \neq e \,\},$$

e $KT_e(T)$ é definido como

$$KT_e(T) = \{\, {}_AM \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Tor}_i^A(M,T) = 0, \text{ se } 0 \leq i \leq r+e \text{ e } i \neq e \,\}.$$

Observação 2.6.3. *Seja T um A-módulo r-inclinante, com $\operatorname{pd}_A T = r$. Então:*

(*i*) *Se $e = 0$, então*

$$\begin{aligned} KE_0(T) &= \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Ext}^i_A(T, M) = 0, \ \textit{se } 1 \leq i \leq r \,\} \\ &= \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Ext}^i_A(T, M) = 0, \ \textit{se } i > 0 \,\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} KT_0(T) &= \{\, {}_A M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Tor}^A_i(M, T) = 0, \ \textit{se } 1 \leq i \leq r \,\} \\ &= \{\, {}_A M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Tor}^A_i(M, T) = 0, \ \textit{se } i > 0 \,\} \end{aligned}$$

(*ii*) *Se $e = 1$, então*

$$\begin{aligned} KE_1(T) &= \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Ext}^i_A(T, M) = 0, \ \textit{se } 0 \leq i \leq r+1 \,\textit{e}\, i \neq 1 \,\} \\ &= \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Ext}^0_A(T, M) = 0 \,\textit{e}\, \operatorname{Ext}^i_A(T, M) = 0, \ \textit{se } i > 1 \,\} \\ &= \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Hom}_A(T, M) = 0 \,\} \cap \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Ext}^i_A(T, M) = 0, \ \textit{se } i > 1 \,\} \\ &= \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Hom}_A(T, M) = 0 \,\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} KT_1(T) &= \{\, {}_A M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Tor}^A_i(M, T) = 0, \ \textit{se } 0 \leq i \leq r+1 \,\textit{e}\, i \neq 1 \,\} \\ &= \{\, {}_A M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Tor}^A_0(M, T) = 0 \,\textit{e}\, \operatorname{Tor}^A_i(M, T) = 0, \ \textit{se } i > 1 \,\} \\ &= \{\, {}_A M \in \operatorname{mod} A \,|\, M \otimes_A T = 0 \,\} \cap \{\, M \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Tor}^A_i(T, M) = 0, \ \textit{se } i > 1 \,\} \\ &= \{\, {}_A M \in \operatorname{mod} A \,|\, M \otimes_A T = 0 \,\} \end{aligned}$$

Teorema 2.6.4. *Seja T um A-módulo r-inclinante. Então:*

(*a*) *$T^\perp \subseteq \operatorname{Gen} T$. Além disso, esta inclusão pode ser própria.*

(*b*) *Para todo $M \in T^\perp$ existe uma sequência exata*

$$\cdots \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

com $T_i \in \operatorname{add} T$ para todo i.

(*c*) *L é* Ext*-projetivo em* $T^{\perp}$ *se, e somente se,* $L \in \operatorname{add} T$.

Demonstração. (a) Ver [11], página 265.

(b) Seja $M \in T^{\perp}$. Pelo item (a), $M \in \operatorname{Gen} T$ e daí existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

com $L = \ker f_0$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ na sequência exata acima obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T, L) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T, T_0) & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{Hom}_A(T, M) & \\ \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(T, L) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(T, T_0) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(T, M) & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots \longrightarrow & \operatorname{Ext}^m_A(T, L) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^m_A(T, T_0) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^m_A(T, M) & \cdots \end{array}$$

Como $f_0 : T_0 \to M$ é uma $\operatorname{add} T$-aproximação à direita de M temos que $\delta = \operatorname{Hom}_A(T, f_0)$ é um epimorfismo, donde $\operatorname{Ext}^1_A(T, L) = 0$. Por outro lado, como $T_0\, , M \in T^{\perp}$ segue que $\operatorname{Ext}^i_A(T, T_0) = \operatorname{Ext}^i_A(T, M) = 0$ para todo $i > 0$. Assim, $\operatorname{Ext}^i_A(T, L) = 0$ para todo $i > 0$ e daí $L \in T^{\perp} \subseteq \operatorname{Gen} T$. Assim, existe epimorfismo $f_1 : T_1 \to L$ com $T_1 \in \operatorname{add} T$. Donde a sequência

$$T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

é exata. Repetindo o argumento obtemos o desejado.

(c) Se $L \in \operatorname{add} T$, então $\operatorname{Ext}^i_A(T, L) = 0$ para todo $i > 0$, donde $L \in T^{\perp}$.

Reciprocamente, suponhamos que L seja Ext-projetivo em $T^{\perp}$. Por (b), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0$$

com $L' = \ker f \in T^{\perp}$. Como L é Ext-projetivo em $T^{\perp}$ e $L' = \operatorname{Coker} f \in T^{\perp}$ segue que $\operatorname{Ext}^1_A(L, L') = 0$, ou seja, a sequência exata acima cinde. Logo, L é somando direto de T_0 e portanto, $L \in \operatorname{add} T$. $\square$

Observação 2.6.5. *Foi demonstrado no item (b) que se $f : T_o \to M$ é um epimorfismo, onde $T_0 \in \operatorname{add} T$, então $\ker f \in T^{\perp}$.*

Sabemos que todo módulo inclinante parcial T pode ser completado para um módulo inclinante, mas este não é o caso para módulos r-inclinantes. Assim, um módulo T qualquer satisfazendo $(T_1^{'})$ e $(T_2^{'})$ da definição de módulos r-inclinantes, para $r \geq 2$, não necessariamente pode ser completado para um módulo r-inclinante. A seguir exibiremos um exemplo onde tal situação acontece.

Lema 2.6.6. *Seja A a álgebra de caminhos sobre um corpo K dada pela aljava*

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, shift right, "\delta"'] \arrow[ll, shift left, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

com relações $\alpha\beta = \beta\gamma = \delta\alpha = 0$. Então $\operatorname{dim.gl.} A = 4$ e o A-módulo simples $S(2)$ satisfaz $(T_1^{'})$ e $(T_2^{'})$ da definição de módulos r-inclinantes mas não é somando direto de nenhum módulo r-inclinante.

Demonstração. Ver [11], página 264. $\square$

Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 2.6.7. *Seja $X \in \operatorname{mod} A$. Dizemos que X é* ***auto-ortogonal*** *se $\operatorname{Ext}_A^i(X, X) = 0$ para todo $i > 0$, e dizemos que X é* ***excepcional*** *se X é auto-ortogonal e $\operatorname{pd}_A X \leq r$. Quando X é somando direto de um módulo r-inclinante dizemos que X é um módulo* ***r-inclinante parcial****. Se, além disso, $\delta(X) = n - 1$ dizemos que X é um módulo* ***r-inclinante parcial quase completo****.*

Observação 2.6.8. *Todo A-módulo T satisfazendo $(T_1^{'})$ e $(T_2^{'})$ da definição de módulos r-inclinantes é excepcional, em particular, todo módulo inclinante parcial é excepcional.*

De fato, seja T um A-módulo satisfazendo $(T_1^{'})$ e $(T_2^{'})$. Então $\operatorname{pd}_A T \leq r$ e $\operatorname{Ext}(T, T) = 0$ para todo $1 \leq i \leq r$. Uma vez que $\operatorname{pd}_A T \leq r$ segue que $\operatorname{Ext}_A^i(T, M) = 0$ para todo $M \in \operatorname{mod} A$ e todo $i > r$. Logo $\operatorname{Ext}_A^i(T, T) = 0$ para todo $i > 0$.

Agora enunciaremos alguns resultados encontrados em [15].

Lema 2.6.9. *Seja $T \in \operatorname{mod} A$ um módulo r-inclinante e seja*

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $\operatorname{mod} A$*, com* $Y \in KE_0(T)$*. Então temos o seguinte isomorfismo*

$$\operatorname{Ext}^i_A(T, Y'') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{i+1}_A(T, Y')$$

para todo $i \geq 1$*. Em particular,* $\operatorname{Ext}^r_A(T, Y'') = 0$*.*

Uma consequência imediata desse lema é que $T^{\perp}$ é fechado para cokernel de monomorfismo.

Corolário 2.6.10. *Seja $T \in \operatorname{mod} A$ um módulo r-inclinante e seja*

$$X_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow Y_0 \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $\operatorname{mod} A$ *tal que cada* $X_j \in KE_0(T)$*. Então* $Y_0 \in KE_0(T)$*.*

Corolário 2.6.11. *Seja $T \in \operatorname{mod} A$ um módulo excepcional, com* $\operatorname{pd}_A T \leq r$*, e seja*

$$0 \longrightarrow Y_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_r$$

uma sequência exata em $\operatorname{mod} A$ *tal que cada* $X_j \in KT_0(T)$*. Então* $Y_0 \in KT_0(T)$*.*

Vimos no Lema (2.4.2) que se T_A é um A-módulo inclinante e $B = \operatorname{End} T_A$, então ${}_BT$ é um B^{op}-módulo inclinante e a aplicação $a \mapsto (t \mapsto ta)$ é um isomorfismo $A \xrightarrow{\sim} (\operatorname{End}_B T)^{op}$. O próximo teorema nos dá uma generalização desse lema para um módulo inclinante generalizado T.

Teorema 2.6.12. *Seja A uma álgebra, T um A-módulo r-inclinante e* $B = \operatorname{End} T_A$*. Então ${}_BT$ é um B^{op}-módulo inclinante generalizado e a aplicação $a \mapsto (t \mapsto ta)$ é um isomorfismo* $A \xrightarrow{\sim} (\operatorname{End}_B T)^{op}$*.*

Lema 2.6.13. *Sejam T um A-módulo excepcional, com* $\operatorname{pd}_A T = r$*, e* $\operatorname{End} T = B$*. Então, para cada ${}_BY \in KE_0({}_BT)$ existem* $\operatorname{Hom}_B(T, Y) \in KT_0(T)$ *e um isomorfismo* $\operatorname{Hom}_B(T, Y) \otimes_A T \xrightarrow{\sim} Y$ *dado por $f \otimes t \mapsto f(t)$.*

Lema 2.6.14. *Sejam T um A-módulo excepcional, com* $\operatorname{pd}_A T = r$*, e* $\operatorname{End} T = B$*. Então, para cada $Y_B \in KT_0({}_BT)$ existem $T \otimes_B Y \in KE_0(T)$ e um isomorfismo* $Y_B \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(T, T \otimes_B Y)$ *dado por $y \mapsto (t \mapsto t \otimes y)$.*

Teorema 2.6.15. *Sejam T um A-módulo excepcional, com* $\mathrm{pd}_A T = r$, *e* $\mathrm{End}\, T = B$. *Seja $e \geq 0$ um inteiro, e seja ${}_BY \in KE_e({}_BT)$. Então $\mathrm{Ext}^e_B(T, Y) \in KT_e(T)$ e existe um isomorfismo*

$$\mathrm{Tor}^A_e(\mathrm{Ext}^e_B(T, Y), {}_B T) \xrightarrow{\sim} {}_B Y.$$

Teorema 2.6.16. *Sejam T um A-módulo excepcional, com* $\mathrm{pd}_A T = r$, *e* $\mathrm{End}\, T = B$. *Seja $e \geq 0$ um inteiro, e seja $Y_B \in KT_e(T_B)$. Então $\mathrm{Tor}^B_e(T, Y) \in KE_e(T)$ e existe um isomorfismo*

$$Y_B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^e_A({}_BT, \mathrm{Tor}^B_e(T, Y)).$$

Teorema 2.6.17. *Seja T um módulo r-inclinante generalizado e seja $e \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq e \leq r$. Então as categorias $KE_e(T)$ e $KT_e({}_BT)$ são equivalentes sob os funtores $\mathrm{Ext}^e_A(T, -)$ e $\mathrm{Tor}^A_e(T, -)$, que são multuamente inversos entre si.*

Este teorema é considerado como uma generalização do Teorema de Inclinação.

Teorema 2.6.18. *Sejam T um A-módulo r-inclinante e* $\mathrm{End}\, T = B$. *Se A e B são álgebras artinianas, então a aplicação*

$$\mathrm{Ext} : K_0(A) \to K_0B, \;\; [X] \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\mathrm{Ext}^i_A({}_BT, X)]$$

é um isomorfismo de grupos. Além disso, sua inversa é dada por

$$\mathrm{Tor} : K_0(B) \to K_0(A), \;\; [y] \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\mathrm{Tor}^B_i(T, Y)].$$

Corolário 2.6.19. *Sejam T um A-módulo r-inclinante e* $\mathrm{End}\, T = B$. *Se A e B são álgebras artinianas, então o número de classes de isomorfismos de A-módulos simples é igual ao número de classes de isomorfismos de B-módulos simples. Em particular, se* $\mathrm{rank}\, K_0(A) = n$ *e $\delta(T) = m$, então $m = n$.*

Observação 2.6.20. *Seja T um módulo r-inclinante. Se X é um somando direto indecomponível de T, então $X \in \mathrm{add}\, T_i$ para algum T_i em (T_3').*

De fato, suponhamos que exista um somando direto indecomponível X de T tal que $X \notin \mathrm{add}\, T_i$ para todo T_i em (T_3'). Então, se $T = M \oplus X$ temos que M é um módulo r-inclinante com $\delta(M) = n - 1$ o que é uma contradição.

Observação 2.6.21 (ver [8], página 150). *Se T é um módulo r-inclinante, $X \in T^{\perp}$ e $\operatorname{pd}_A X < \infty$, então X admite uma $\operatorname{add} T$-resolução finita*

$$0 \to T_r \to T_{r-1} \to \cdots \to T_0 \to X \to 0.$$

Capítulo 3

A aljava de módulos r-inclinantes

Ao longo deste capítulo, consideremos r um inteiro não-negativo.

Seja A um álgebra de Artin e $\operatorname{mod} A$ a categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados. Denotaremos por Ω_A o conjunto de todos os A-módulos r-inclinantes, a menos de isomorfismos. O objetivo deste capítulo é definirmos a aljava de módulos r-inclinantes $\vec{\mathcal{K}}_A$. Quando $r \leq 1$, denotaremos especialmente por Ω_A^1 e $\vec{\mathcal{K}}_A^1$ ao invés de Ω_A e $\vec{\mathcal{K}}_A$, respectivamente.

3.1 O complemento Bongartz

Ao longo desta seção trabalharemos com módulos inclinantes, ou seja, módulos r-inclinantes com $r \leq 1$.

Vimos no capítulo anterior que todo módulo inclinante parcial $T = \bigoplus_{i=1}^{r} T_i$ pode ser completado para um módulo inclinante $T \oplus X$, onde X era escolhido da seguinte maneira: Tomamos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} T_i^{\mu_i} \longrightarrow 0$$

com a propriedade que, para qualquer $k = 1, \ldots, r$, o morfismo induzido

$$\operatorname{Hom}_A(T_k, \bigoplus_{i=1}^{r} T_i^{\mu_i}) \to \operatorname{Ext}_A^1(T_k, A),$$

é sobrejetivo. Observe que tal escolha para X não necessariamente é única, mas outras possíveis escolhas para X diferem apenas por somandos diretos em $\operatorname{add} T \oplus X$, a menos de isomorfismos. Logo $T \oplus X$ determina um módulo 1-inclinante livre de multiplicidade $\tilde{T} = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$, que é único a menos de isomorfismos.

A seguinte proposição é uma ferramenta muito útil para decidirmos quando um complemento $\bigoplus_{i=r+1}^{n} T_i$ do módulo inclinante parcial $\bigoplus_{i=1}^{r} T_i$ é um complemento Bongartz, onde $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$.

Proposição 3.1.1. *Seja $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ um módulo inclinante. São equivalentes:*

(a) *$\bigoplus_{i=r+1}^{n} T_i$ é um complemento Bongartz de $\bigoplus_{i=1}^{r} T_i$.*

(b) *Para cada $j = r+1, \ldots, n$, temos $T_j \notin \operatorname{Gen} T[j]$.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $\bigoplus_{i=r+1}^{n} T_i$ um complemento Bongartz de $\bigoplus_{i=1}^{r} T_i$ e suponha que existe $T_j \in \operatorname{Gen} T[j]$ para algum $j > r$. Assim, existe um epimorfismo $f : \bigoplus_{i \neq j} T_i^{\nu_i} \to T_j$.

Uma vez que $\bigoplus_{i=r+1}^{n} T_i$ é um complemento Bongartz para $\bigoplus_{i=1}^{r} T_i$, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow \bigoplus_{i=r+1}^{n} T_i^{\rho_i} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} T_i^{\upsilon_i} \longrightarrow 0$$

Podemos escrever essa sequência da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow A_A \xrightarrow{\varphi} T_j^{\rho_j} \oplus \bigoplus_{i \neq j} T_i^{\rho_i} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} T_i^{\mu_i} \longrightarrow 0$$

Como f é epimorfismo, existe um epimorfismo $\bar{f} : (\bigoplus_{i \neq j} T_i^{\nu_i})^{\rho_j} \to T_j^{\rho_j}$ induzido por f e portanto, existe epimorfismo $h : M \to M'$, onde $M = (\bigoplus_{i \neq j} T_i^{\nu_i})^{\rho_j} \oplus \bigoplus_{i \neq j} T_i^{\rho_i}$ e $M' = T_j^{\rho_j} \oplus \bigoplus_{i \neq j} T_i^{\rho_i}$. Daí e da projetividade de A_A existe morfismo $g : A_A \to M$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & A_A \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "h"] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $hg = \varphi$. Como φ é monomorfismo segue que g é monomorfismo.

Logo, construímos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_A \arrow[r] & M' \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{r} T_i^{\mu_i} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_A \arrow[r] \arrow[u, equal] & M \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

O último quadrado da direita nos fornece uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \oplus X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} T_i^{\mu_i} \longrightarrow 0$$

a qual cinde. Mas como T_j é somando de M', então é isomorfo a algum T_i para $i \neq j$, o que é uma contradição.

Logo $T_j \notin \operatorname{Gen} T[j]$ para todo $j > r$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Suponhamos que $T_j \notin \operatorname{Gen} T[j]$ para todo $j > r$ e seja

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} T_i^{\alpha_i} \xrightarrow{h} \bigoplus_{i=1}^{n} T_i^{\beta_i} \longrightarrow 0$$

uma sequência exata.

Se $\pi_{\beta_j} : \bigoplus_{i=1}^{n} T_i^{\beta_i} \to T_j^{\beta_j}$ é a projeção canônica, então para todo $j > r$, com $\beta_j > 0$, a composição $\pi_{\beta_j} h : \bigoplus_{i=1}^{n} T_i^{\alpha_i} \to T_j^{\beta_j}$ é um epimorfismo e como $T_j \notin \operatorname{Gen} T[j]$ para todo $j > r$ temos que $\pi_{\beta_j} h$ deve ser uma retração. Assim, podemos escolher uma sequência de tal maneira que $\beta_j = 0$ para todo $j > r$.

Agora, observe que como todo somando direto de T deve aparecer na sequência exata acima (observação (2.6.20)) e podemos assumir $\beta_j = 0$ para todo $j > r$ temos que $\bigoplus_{i=r+1}^{n} T_i$ é um complemento Bongartz de $\bigoplus_{i=1}^{r} T_i$. □

Seja $M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i$ um módulo inclinante parcial.

Sabemos que existe complemento Bongartz T_n de M tal que $M \oplus T_n$ é inclinante. Agora estamos interessados em saber se existem complementos T_n' de M que não são Bongartz, e se existem, qual a relação entre eles. O próximo resultado nos diz que T admite, no máximo, um complemento T_n' não isomorfo a T_n além de fornecer uma relação entre esses complementos, a qual será utilizada para generalizarmos a definição da aljava $\vec{\mathcal{K}}_A$ dos módulos inclinantes.

Proposição 3.1.2. *Se M é módulo inclinante parcial quase completo, então existe no máximo um complemento $T_n^{'}$ não isomorfo a T_n tal que $M \oplus T_n^{'}$ é um módulo inclinante e M tem um único complemento indecomponível (a menos de isomorfismos) se, e somente se, M é não fiel. Além disso, se um tal $T_n^{'}$ existe, então existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow T_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i^{\lambda_i} \longrightarrow T_n^{'} \longrightarrow 0\,.$$

Demonstração. Seja $T_n^{'}$ um indecomponível não isomorfo a T_n tal que $M \oplus T_n^{'}$ é um módulo inclinante. Pela Proposição (3.1.1), $T_n^{'} \in \operatorname{Gen} M$. Assim, existe um epimorfismo $g : \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i^{\lambda_i} \to T_n^{'}$. Consideremos tal epimorfismo um morfismo poço de $\operatorname{add} T$ para $T_n^{'}$.

Agora, consideremos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i^{\lambda_i} \xrightarrow{g} T_n^{'} \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

$Z = \ker g$.

Uma vez que g é um morfismo poço segue que f está no radical de $\operatorname{mod} A$, isto é, a restrição de f a algum somando direto indecomponível de Z nunca é uma seção. Além disso, qualquer morfismo de Z para T_j se fatora através de f, uma vez que temos que $\operatorname{Ext}_A^1(T_n^{'}, T_j) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Logo Z não tem somandos diretos pertencentes a $\operatorname{add} T$. Como g está no radical de $\operatorname{mod} A$ segue que f é um morfismo fonte de Z para $\operatorname{add} T$.

Observe que da sequência exata acima e de $\operatorname{pd} T_i \leq 1$, para $i = 1, \ldots, n$, segue que $\operatorname{pd} Z \leq 1$ e além disso, $\operatorname{Ext}_A^1(T_j, Z) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$, pois $T_j \in \operatorname{add} T$ e $Z \in \mathcal{T}(T)$. Agora, aplicando $\operatorname{Hom}_A(-, Z)$ em (3.1) e usando que $\operatorname{Ext}_A^2(T_n^{'}, Z) = 0$, pois $\operatorname{pd} T_n^{'} \leq 1$, obtemos $\operatorname{Ext}_A^1(Z, Z) = 0$. Logo, $T \oplus Z$ é um A módulo inclinante.

Suponhamos que exista epimorfismo $h : T^{'} \to Z$, com $T^{'} \in \operatorname{add} T$, então temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow T^{'} \xrightarrow{h} Z \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

com $Y = \ker h$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T_n^{'}, -)$ em (3.2) e usando $\operatorname{pd} T_n^{'} \leq 1$ obtemos um epimorfismo $\operatorname{Ext}_A^1(T_n^{'}, T^{'}) \to \operatorname{Ext}_A^1(T_n^{'}, Z)$. Mas isto é impossível, pois $\operatorname{Ext}_A^1(T_n^{'}, T^{'}) =$

0 e (3.1) não cinde, ou seja, $\mathrm{Ext}_A^1(T_n', Z) \neq 0$. Logo, pela Proposição (3.1.1), Z é um complemento Bongartz para T e, portanto, $Z \cong T_n^\lambda$ para algum $\lambda > 0$.

Agora, para mostrarmos que $\lambda = 1$, consideremos $\psi : T_n \to T'$ um morfismo fonte de T_n em $\mathrm{add}\, T$. Assim, o morfismo

$$\begin{bmatrix} \psi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \psi \end{bmatrix} : T_n^\lambda \to T'^\lambda,$$

satisfaz a primeira condição da definição de morfismo fonte, e ele é, portanto, isomorfo a

$$\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} : T_n^\lambda \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i^{\lambda_i} \oplus T'',$$

para algum $T'' \in \mathrm{add}\, T$. Comparando os cokernels, concluímos que $(\mathrm{Coker}\, h)^\lambda \cong T'' \oplus T_n'$ e como $T_n' \notin \mathrm{add}\, T''$ temos, pelo teorema de Krull-Schimidt, $\lambda = 1$.

Finalmente, como $f : T_n \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i^{\lambda_i}$ é um morfismo fonte, seu cokernel T_n' é univocamente determinando, a menos de isomorfismos, por T_n. □

3.2 Definindo a aljava de módulos r-inclinantes

Começamos definindo a aljava de módulos inclinantes.

Definição 3.2.1. *Os vértices de $\vec{\mathcal{K}}_A^1$ são os elementos de Ω_A^1 e para cada módulo inclinante parcial quase completo $M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i$, existe uma flecha $M \oplus T_n \to M \oplus T_n'$ em $\vec{\mathcal{K}}_A^1$ se o indecomponível T_n é o complemento Bongartz de M e T_n' é um complemento indecomponível para M não isomorfo a T_n.*

Observação 3.2.2. *Se $M \oplus T_n \to M \oplus T_n'$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A^1$, então $\mathcal{T}(M \oplus T_n') \subsetneq \mathcal{T}(M \oplus T_n)$.*

Com efeito, pela Proposição (3.1.2) existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow T_n \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow T_n' \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \mathrm{add}\, M$. Além disso, $T_n \notin \mathcal{T}(M \oplus T_n')$. De fato, caso contrário teríamos que $\mathrm{Ext}_A^1(M \oplus T_n', T_n) = 0$ o que implicaria $\mathrm{Ext}_A^1(T_n', T_n) = 0$ e daí, a sequência exata acima cindiria, ou seja, $T_n \in \operatorname{add} M$. Contradição. Agora, seja $N \in \mathcal{T}(M \oplus T_n^{'})$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ na sequência exata acima obtemos a sequência exata

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(T_n, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^2(T_n^{'}, N) = 0$$

donde $\operatorname{Ext}_A^1(T_n, N) = 0$. Uma vez que $\operatorname{Ext}_A^1(M, N) = 0$ segue que $\operatorname{Ext}_A^1(M \oplus T_n, N) = 0$, ou seja, $N \in \mathcal{T}(M \oplus T_n)$. Logo $\mathcal{T}(M \oplus T_n^{'}) \subsetneq \mathcal{T}(M \oplus T_n)$.

Antes de enunciarmos o próximo resultado, definiremos os seguintes conjuntos: Para cada módulo r-inclinante parcial M de multiplicidade livre, denotamos por $\vec{\operatorname{lk}}(M)$ a seguinte subaljava de $\vec{\mathcal{K}}_A^1$

$$\vec{\operatorname{lk}}(M) = \{T \in \vec{\mathcal{K}}_A^1 \,|\, M \textit{ é somando direto de } T\}$$

E por $\operatorname{lk}(M)$ o seguinte subconjunto de Ω_A

$$\operatorname{lk}(M) = \{T \in \Omega_A^1 \,|\, M \textit{ é somando direto de } T\}$$

Lema 3.2.3. *Seja M um módulo inclinante parcial de multiplicidade livre. Se existe um caminho $T^1 \to T^2 \to \cdots \to T^s$ em $\vec{\mathcal{K}}_A^1$ com T^1, $T^s \in \vec{\operatorname{lk}}(M)$, então todo o caminho está em $\vec{\operatorname{lk}}(M)$.*

Demonstração. Suponhamos que $M = \oplus_{i=1}^r T_i$.

Suponhamos $s > 0$ e seja $\mathcal{T}(T^1)$ uma classe de torção com $T^1 = M \oplus L$. Mostraremos que $T^2 \in \vec{\operatorname{lk}}(M)$. Por definição, $T^1 = N \oplus X$ e $T^2 = N \oplus Y$ com X e Y indecomponíveis não isomorfos, X complemento Bongartz para N e além disso, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{N} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{N} \in \operatorname{add} N$. Pela Observação (3.2.2) obtemos a seguinte cadeia

$$\mathcal{T}(T^s) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{T}(T^2) \subsetneq \mathcal{T}(T^1)$$

Como $T^s \in \vec{\operatorname{lk}}(M)$ segue que $M \in \mathcal{T}(T^s)$ o que implica $M \in \mathcal{T}(T^2)$. Uma vez que $X \notin \mathcal{T}(T^2)$ temos $M \in \operatorname{add} N$, ou seja, M é somando de T^2 e daí $T^2 \in \vec{\operatorname{lk}}(M)$. De maneira análoga, obtemos $T^j \in \vec{\operatorname{lk}}(M)$ para todo $2 \leq j \leq s - 1$.

Logo $T^1 \to T^2 \to \cdots \to T^s$ está em $\vec{\operatorname{lk}}(M)$. □

Em outras palavras, o Lema acima nos diz que se $T^1 \to T^2 \to \cdots \to T^s$ é um caminho em $\vec{\mathcal{K}}_A$ e M é somando direto de T^1 e T^s, então M é também somando direto de T^i para todo $i = 2, \dots, s-1$.

Antes de darmos uma generalização para $\vec{\mathcal{K}}_A^1$ faremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.2.4. *Seja A a álgebra de caminhos da aljava $Q = 1 \to 2 \to 3 \leftarrow 4$, e denotemos por $\bar{i}\bar{j} = (M_t, \varphi_\alpha)_{t\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ a representação dos indecomponíveis tal que $M_t = K$ se $i \le t \le j$ e $M_t = 0$, caso contrário.*

Cálculo da aljava de Auslander-Reiten:

Os projetivos indecomponíveis são

$$P(1) = \bar{1}\bar{3},\ P(2) = \bar{2}\bar{3},\ P(3) = \bar{3}\bar{3},\ P(4) = \bar{3}\bar{4}$$

e os injetivos indecomponíveis são

$$I(1) = \bar{1}\bar{1},\ I(2) = \bar{1}\bar{2},\ I(3) = \bar{1}\bar{4},\ I(4) = \bar{4}\bar{4}.$$

Usando o algoritmo *Knitting* (ver [13], página 70) obtemos

$$\begin{tikzcd}
 & & \bar{1}\bar{3} \arrow[dr] & & \bar{4}\bar{4} & \\
 & \bar{2}\bar{3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bar{1}\bar{4} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\bar{3}\bar{3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bar{2}\bar{4} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bar{1}\bar{2} \arrow[dr] & \\
 & \bar{3}\bar{4} \arrow[ur] & & \bar{2}\bar{2} \arrow[ur] & & \bar{1}\bar{1}
\end{tikzcd}$$

Uma vez que A é hereditária temos que $\operatorname{pd}_A \bar{i}\bar{j} \le 1$ para todo $1 \le i \le j \le 4$. Além disso, para cada representação indecomponível $\bar{i}\bar{j}$ temos $\dim_K \operatorname{Hom}_A(\bar{i}\bar{j}, \tau(\bar{i}\bar{j})) = 0$, pois $\tau(\bar{i}\bar{j})$ não pertence ao caminho seccional começando em $\bar{i}\bar{j}$ (ver [13], página 78) para todo $1 \le i \le j \le 4$. Assim, pelas fórmulas de Auslander-Reiten temos $\operatorname{Ext}_A^1(\bar{i}\bar{j}, \bar{i}\bar{j}) = D\operatorname{Hom}_A(\bar{i}\bar{j}, \tau(\bar{i}\bar{j})) = 0$ para todo $1 \le i \le j \le 4$.

Logo, $\mathcal{E} = \{\bar{1}\bar{1},\ \bar{1}\bar{2},\ \bar{1}\bar{3},\ \bar{1}\bar{4},\ \bar{2}\bar{2},\ \bar{2}\bar{3},\ \bar{2}\bar{4},\ \bar{3}\bar{3},\ \bar{3}\bar{4},\ \bar{4}\bar{4}\}$ é o conjunto dos inclinantes parciais.

Cálculo dos módulos inclinantes:

Como a aljava Q é do tipo $\mathbb{A}_4$ temos que Ω_A^1 contém 14 módulos inclinantes (ver [10], página 650). Utilizando o fato que $\mathrm{Ext}_A^1(M,N) = D\,\mathrm{Hom}_A(N,\tau(M))$ encontramos os seguintes módulos inclinantes:

$$T_1 = (\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4}) \qquad T_2 = (\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{4}, \bar{4}\bar{4}) \qquad T_3 = (\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4}, \bar{3}\bar{4})$$

$$T_4 = (\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{3}, \bar{3}\bar{3}, \bar{3}\bar{4}) \qquad T_5 = (\bar{1}\bar{3}, \bar{2}\bar{3}, \bar{3}\bar{3}, \bar{3}\bar{4}) \qquad T_6 = (\bar{1}\bar{3}, \bar{2}\bar{3}, \bar{2}\bar{4}, \bar{3}\bar{4})$$

$$T_7 = (\bar{1}\bar{3}, \bar{2}\bar{2}, \bar{2}\bar{3}, \bar{2}\bar{4}) \qquad T_8 = (\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4}, \bar{2}\bar{2}) \qquad T_9 = (\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{4}, \bar{2}\bar{2}, \bar{4}\bar{4})$$

$$T_{10} = (\bar{1}\bar{4}, \bar{2}\bar{2}, \bar{2}\bar{4}, \bar{4}\bar{4}) \qquad T_{11} = (\bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4}, \bar{2}\bar{2}, \bar{2}\bar{4}) \qquad T_{12} = (\bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4}, \bar{2}\bar{4}, \bar{3}\bar{4})$$

$$T_{13} = (\bar{1}\bar{4}, \bar{2}\bar{4}, \bar{3}\bar{4}, \bar{4}\bar{4}) \qquad T_{14} = (\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{4}, \bar{3}\bar{4}, \bar{4}\bar{4})$$

Cálculo da aljava de módulos inclinantes $\vec{\mathcal{K}}_A^1$:
Existe uma flecha $T_1 \to T_2$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$, pois pela aljava de Auslander-Reiten temos que $0 \to \bar{1}\bar{3} \to \bar{1}\bar{4} \to \bar{4}\bar{4} \to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten com $\bar{1}\bar{4} \in \mathrm{Gen}(\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{4})$ e existe uma flecha $T_3 \to T_1$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$, pois $\bar{1}\bar{4} \to \bar{1}\bar{2} \to 0$ é uma sequência exata com $\bar{1}\bar{2} \in \mathrm{Gen}(\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4})$. Logo, $\bar{1}\bar{2}$ não é um complemento Bongartz para $(\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4})$ e daí, $\bar{3}\bar{4}$ é um complemento Bongartz para $(\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{3}, \bar{1}\bar{4})$.
Utilizando os mesmos argumentos concluímos que $\vec{\mathcal{K}}_A^1$ é dado por

$$
\begin{tikzcd}
 & & (1\bar{}1, 1\bar{}2, 1\bar{}4, 4\bar{}4) & \\
 & (1\bar{}2, 1\bar{}4, 2\bar{}2, 4\bar{}4) \arrow[ur] & (1\bar{}1, 1\bar{}4, 3\bar{}4, 4\bar{}4) \arrow[u] & (1\bar{}1, 1\bar{}2, 1\bar{}3, 1\bar{}4) \arrow[ul] \\
(1\bar{}2, 1\bar{}3, 1\bar{}4, 2\bar{}2) \arrow[ur] \arrow[urrr, bend left] & (1\bar{}4, 2\bar{}2, 2\bar{}4, 4\bar{}4) \arrow[u] & (1\bar{}4, 2\bar{}4, 3\bar{}4, 4\bar{}4) \arrow[u] \arrow[l] & (1\bar{}1, 1\bar{}3, 1\bar{}4, 3\bar{}4) \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & (1\bar{}3, 1\bar{}4, 2\bar{}2, 2\bar{}4) \arrow[ul] \arrow[u] & (1\bar{}3, 1\bar{}4, 2\bar{}4, 3\bar{}4) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[l] & (1\bar{}1, 1\bar{}3, 3\bar{}3, 3\bar{}4) \arrow[u] \\
 & (1\bar{}3, 2\bar{}2, 2\bar{}3, 2\bar{}4) \arrow[u] & (1\bar{}3, 2\bar{}3, 2\bar{}4, 3\bar{}4) \arrow[u] \arrow[l] & \\
 & & (1\bar{}3, 2\bar{}3, 3\bar{}3, 3\bar{}4) \arrow[u] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
$$

Definimos anteriormente a aljava de módulos inclinantes $\vec{\mathcal{K}}_A^1$ usando o complemento Bongartz. Agora nosso objetivo é darmos uma generalização desta definição para módulos r-inclinantes. Começamos generalizando o conceito de complemento Bongartz.

Definição 3.2.5. *Seja M um módulo r-inclinante parcial e seja C um complemento para M. Dizemos que C é um **complemento fonte** se $(M \oplus C)^{\perp} = M^{\perp}$.*

Observe que se $r \leq 1$ então C é o complemento Bongartz para M. Em particular, todo complemento Bongartz é um complemento fonte.

Sabemos que não é fácil decidirmos se um complemento C de M é um complemento fonte através da definição. Uma ferramenta que nos auxiliará nessa decisão é a

Proposição 3.2.6. *Seja M um módulo r-inclinante parcial quase completo e C um complemento para M. Então C é um complemento fonte para M se, e somente se, $C \notin \operatorname{Gen} M$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $C \in \operatorname{Gen} M$. Pela Proposição (3.2.7) existe uma sequência exata não cindida

$$
0 \longrightarrow C' \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow C \longrightarrow 0
$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$ e $M \oplus C'$ um módulo inclinante. Assim, $C' \in M^{\perp}$ mas $C' \notin (M \oplus C)^{\perp}$ pois $\operatorname{Ext}_A^1(C, C') \neq 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que C não é um complemento fonte para M, isto é, existe $X \in M^{\perp}$ tal que $\operatorname{Ext}_A^i(C, X) \neq 0$ para algum $1 \leq i < \infty$. Uma vez que $M^{\perp}$ é corresolvente e $\operatorname{pd}_A(M \oplus C) < \infty$, existe $Y \in M^{\perp}$ com $\operatorname{Ext}_A^1(C, Y) \neq 0$ e $\operatorname{Ext}_A^i(C, Y) = 0$ para $i \geq 2$. Assim, podemos considerar uma sequência exata não cindida

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \xrightarrow{f} C^s \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

tal que $C^s \in \operatorname{add} C$, para algum $s > 0$, e o morfismo conexão $\delta : \operatorname{Hom}_A(C, C^s) \to \operatorname{Ext}_A^1(C, Y)$ é sobrejetivo. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(C, -)$ em (3.3) obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(C, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(C, E) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(C, C^s) & \\
\xrightarrow{\delta} & \operatorname{Ext}_A^1(C, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^1(C, E) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^1(C, C^s) & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^n(C, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^n(C, E) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^n(C, C^s) & \cdots
\end{array}$$

Uma vez que δ é sobrejetivo, $\operatorname{Ext}_A^i(C, Y) = 0$ para $i \geq 2$ e $C^s \in \operatorname{add} C$ segue que $\operatorname{Ext}_A^i(C, E) = 0$ para todo $i > 0$. Por outro lado, aplicando $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ em (3.3) obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M, E) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M, C^s) & \\
\xrightarrow{\delta} & \operatorname{Ext}_A^1(M, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^1(M, E) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^1(M, C^s) & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^n(M, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^n(M, E) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^n(M, C^s) & \cdots
\end{array}$$

Como $Y \in M^{\perp}$ e $C^s \in \operatorname{add} C$ temos $\operatorname{Ext}_A^i(M, Y) = \operatorname{Ext}_A^i(M, C^s) = 0$ para todo $i > 0$

e daí, $\mathrm{Ext}^i_A(M,E)=0$ para todo $i>0$.

Logo, $\mathrm{Ext}^i_A(M\oplus C,E)=0$ para todo $i>0$ e, portanto, $E\in(M\oplus C)^\perp$, em particular, $E\in\mathrm{Gen}(M\oplus C)$. Assim, existe um epimorfismo $g:(M\oplus C)^r\to E$ para algum $r>0$. Daí a sequência

$$(M\oplus C)^r \xrightarrow{f\circ g} C^s \longrightarrow 0$$

é exata e $f\circ g$ é não cindido, pois f não cinde. Logo, $C\in\mathrm{Gen}\,M$. □

Dualmente definimos e caracterizamos **complemento poço** de um módulo r-inclinante parcial quase completo. Uma generalização da Proposição (3.1.2) é a

Proposição 3.2.7. *Seja M um módulo r-inclinante quase completo. Suponhamos que exista um indecomponível $Y\in\mathrm{Gen}\,M$ tal que $M\oplus Y$ seja r-inclinante. Então:*

(1) *M é fiel;*

(2) *existe um complemento indecomponível X não isomorfo a Y;*

(3) *existe uma sequência exata*

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{\mu} E\xrightarrow{\pi} Y\longrightarrow 0$$

com $E\in\mathrm{add}\,M$;

(4) $\mathrm{Ext}^i_A(X,Y)=0$ *para* $i>0$ *e* $\mathrm{Ext}^i_A(Y,X)=0$ *para* $i>1$, *e*

(5) *X está univocamente determinado pela propriedade* (3).

Demonstração. (1) Seja $M\oplus Y$ um módulo inclinante. Então, pela propriedade (T_3), $M\oplus Y$ é fiel. Seja $g:A\to F$ um morfismo injetivo com $F\in\mathrm{add}(M\oplus Y)$. Como Y é gerado por M, existe um morfismo sobrejetivo $h:E\to F$ com $E\in\mathrm{add}\,M$. Desde que A é projetivo, existe um morfismo $f:A\to E$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "g"] & \\ E \arrow[r, "h"] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $hf=g$. Daí f é injetivo e portanto $A\in\mathrm{Cogen}\,M$.

Logo M é fiel.

(2), (3) Seja $f_1, \dots f_r$ uma k-base de $\mathrm{Hom}_A(M, Y)$ e seja

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} : M^r \to Y$$

a aplicação correspondente. Seja $K = \mathrm{Ker}\, f$. Assim obtemos a sequência exata

$$0 \to K \to M^r \to Y \to 0. \tag{3.4}$$

Afirmamos que $K \oplus M$ é um módulo inclinante.

De fato, como $\mathrm{pd}_A\, M < \infty$ e $\mathrm{pd}_A\, Y < \infty$, pois $M \oplus Y$ é inclinante, segue que $\mathrm{pd}_A\, K < \infty$. Logo (T_1) é satisfeita.

Para verificar (T_2) observe que $M \oplus Y$ é inclinante e M^r, $Y \in \mathrm{add}(M \oplus Y)$. Donde $K \in (M \oplus Y)^{\perp}$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, K)$ em $0 \to K \to M^r \to Y \to 0$ concluimos que $\mathrm{Ext}^i_A(K, K) = 0$ para todo $i > 0$. Logo, $\mathrm{Ext}^i_A(K \oplus M, K \oplus M) = 0$ para todo $i > 0$ e, portanto, $K \oplus M$ é um módulo r-inclinante parcial.

Para mostrarmos que $K \oplus M$ é um módulo r-inclinante observe que, por construção, (3.4) não cinde, donde $K \notin \mathrm{add}\, M$. Logo, usando 1.2 em [5], temos o desejado.

Agora, consideremos um indecomponível X tal que $K \cong X^s \oplus M'$ para algum $s \geq 1$ e algum $M' \in \mathrm{add}\, M$. Seja $T = M \oplus Y$ e $B = \mathrm{End_A}\, T$. Afirmamos que $s = 1$. Com efeito, aplicando $\mathrm{Hom}_A(T, -0$ em (3.4) obtemos a seguinte sequência exata em $\mathrm{mod}\, B$:

$$\dots \mathrm{Hom}_A(T, M^r) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T, X^s) \longrightarrow 0$$

Mas, como $\mathrm{Hom}_A(T, Y)$ é um B-módulo projetivo indecomponível e tem um top simples concluímos que $s = 1$.

Considerando a projeção $\pi : X \oplus M' \to X$, obtemos o diagrama *push-out* (ver apêndice)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & M' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \oplus M' \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & M^r \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ em $0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, M)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(E, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X, M)$$

Como $M \oplus K$ e $M \oplus Y$ são módulos r-inclinantes temos que $\mathrm{Ext}^1_A(Y, M) = \mathrm{Ext}^1_A(X, M) = 0$ e daí $\mathrm{Ext}^1_A(E, M) = 0$. Logo a sequência exata

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M^r \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

cinde, ou seja, $E \in \mathrm{add}\, M$.

(4) Observe que a sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

não cinde pois, $E \in \mathrm{add}\, M$ e $X \notin \mathrm{add}\, M$. Assim, aplicando $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ e $\mathrm{Hom}_A(Y, -)$

em (3.5 obtemos as seguintes sequências exatas longas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,Y)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,Y)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(X,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(X,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(X,Y) \cdots$$

e

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,Y)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,Y)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(Y,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(Y,Y) \cdots$$

Uma vez que $\mathrm{Ext}^i_A(X,X) = \mathrm{Ext}^i_A(X,E) = \mathrm{Ext}^i_A(Y,E) = \mathrm{Ext}^i_A(Y,Y) = 0$ para todo $i > 0$ segue que $\mathrm{Ext}^i_A(X,Y)$ para todo $i > 0$ e $\mathrm{Ext}^i_A(Y,X) = 0$ para todo $i > 1$.

(5) Suponhamos que exista um complemento indecomponível $X^{'}$ e uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X^{'} \xrightarrow{\mu^{'}} E^{'} \xrightarrow{\pi^{'}} Y \longrightarrow 0$$

com $E^{'} \in \operatorname{add} M$. Logo, existe $f : E \to E^{'}$ com $f\pi^{'} = \pi$ e $g : X \to X^{'}$ com $g\mu^{'} = \mu f$. Também existe $f^{'} : E^{'} \to E$ com $f^{'}\pi = \pi^{'}$ e $g^{'} : X^{'} \to X$ com $g^{'}\mu = \mu^{'}f^{'}$. Se X não é isomorfo a $X^{'}$, então $gg^{'}$ é um isomorfismo nilpotente pois X é indecomponível. Logo existe $m > 0$ tal que $(gg^{'})^m = 0$. Daí, $0 = (gg^{'})^m\mu = \mu(ff^{'})^m$ mostra que existe $h : Y \to E$ com $\pi h = (ff^{'})^m$. Desde que $\pi h\pi = (ff^{'})^m\pi = \pi$ e π é um epimorfismo, temos que $h\pi = 1_Y$ e, consequentemente a sequência cinde, o que uma contradição. Logo X é unicamente determinado pela propriedade (3). $\square$

Salientamos também que Y é unicamente determinado pela propriedade (3). Além disso, em (3) temos que $\tilde{M}$ é uma add M-aproximação minimal à direita de Y, como também uma add M-aproximação minimal à esquerda de X. Chamaremos a sequência exata em (3) de **sequência de conexão.**

Observação 3.2.8. *Segue da Proposição* (3.2.7) *que para cada somando indecomponível T_i de T existe um único complemento $X_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$ ($Y_i \in \operatorname{Gen} T[i]$) de $T[i]$ se $T_i \in \operatorname{Gen} T[i]$ ($T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$).*

Sabemos todo módulo inclinante parcial admite um complemento Bongartz, agora veremos que todo módulo r-inclinante parcial quase completo admite um complemento fonte.

Corolário 3.2.9. *Seja M um módulo r-inclinante parcial quase completo. Então M admite um complemento fonte. Mais precisamente, para cada complemento Y de M com $Y \in \operatorname{Gen} M$ existe uma sequência exata longa*

$$0 \longrightarrow X_s \longrightarrow M^s \xrightarrow{f_s} M^{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^0 \xrightarrow{f_0} X_0 = Y \longrightarrow 0$$

com $\operatorname{Ker} f_{i-1} = X_i$ para $1 \leq i \leq s$, $M^i \in \operatorname{add} M$ para $1 \leq i \leq s$ e $X_0, \ldots, X_s$ complementos para M onde $s \leq \operatorname{pd}_A Y$.

Demonstração. Seja $Y \in \operatorname{Gen} M$ um complemento para M. Pela proposição (3.2.7), existe uma sequência exata não cindida

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

com $M^0 \in \operatorname{add} M$, $X_0 \ncong Y$ e $M \oplus X_0$ um módulo inclinante.

Se $X_0 \notin \operatorname{Gen} M$, então ele é um complemento fonte. Caso contrário, pela Proposição (3.2.7), existe uma sequência exata não cindida

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow M^1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

com $M^1 \in \operatorname{add} M$, $X_1 \ncong X_0$ e $M \oplus X_1$ um módulo r-inclinante.

De (3.6) e (3.7) obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_0} M^0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\operatorname{Ker} f_0 = X_1$.

Se $X_1 \notin \operatorname{Gen} M$, então ele é um complemento fonte. Caso contrário, repetimos o argumento e afirmamos que tal processo é finito.

De fato, suponhamos que tal processo seja infinito. Se $\operatorname{pd}_A Y = m$, considere $T = M \oplus X_r$ tal que $m < r+1$. Assim,

$$0 \longrightarrow X_r \longrightarrow M^r \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

é uma $\operatorname{add} T$-resolução minimal de Y e portanto,

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, X_r) \longrightarrow P^r \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, Y) \longrightarrow 0$$

com $P^i = \operatorname{Hom}_A(T, M^i)$, é uma resolução projetiva minimal de $\operatorname{Hom}_A(T, Y)$.

Logo, $r + 1 = \operatorname{pd}_B \operatorname{Hom}_A(T, Y) \leq \operatorname{pd}_A Y = m$ o que é uma contradição. Donde tal processo é finito e portanto existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X_s \longrightarrow M^s \xrightarrow{f_s} M^{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^0 \xrightarrow{f_0} Y \longrightarrow 0$$

com $\operatorname{Ker} f_{i-1} = X_i$, $s \leq \operatorname{pd}_A Y$, $X_0, \ldots, X_s$ complementos para M e além disso, X_s é um complemento fonte. □

Vimos anteriormente que se M é um módulo r-inclinante parcial quase completo, então M admite, no máximo, dois complementos não isomorfos para $r \leq 1$. No entanto, para $r > 1$ nem sempre conseguimos somente uma quantidade finita de complementos não isomorfos para M. A seguir apresentaremos uma condição suficiente para que M tenha somente uma quantidade finita de complementos não isomorfos, além disso, estabeleceremos uma relação entre eles, a qual será usada no último capítulo.

Teorema 3.2.10. *Seja A uma álgebra de Artin. Seja M um módulo r-inclinante parcial quase completo. Então M tem no máximo uma quantidade finita de complementos não isomorfos se, e somente se, M admite um complemento poço. Se existem $s+1$ complementos não isomorfos para algum $s \geq 1$, então $s \leq \operatorname{fd}(A)$ e existe uma sequência exata longa*

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{s-1} \xrightarrow{f_{s-1}} M^s \xrightarrow{f_s} X_s = Y \longrightarrow 0$$

com $\operatorname{Ker} f_i = X_{i-1}$ para $1 \leq i \leq s$, $M^i \in \operatorname{add} M$ para $1 \leq i \leq s$ e $X_0, \ldots, X_s$ complementos para M. Em particular, se $\operatorname{fd}(A) < \infty$, então M tem uma quantidade *finita de complementos.*

Demonstração. Sejam $X_0, \ldots, X_s$ os complementos para M tal que $X_i \cong X_j \Leftrightarrow i = j$.

Consideremos X_0 um complemento fonte para M. Uma vez que $X_0 \in \operatorname{Cogen} M$, pela Proposição (3.2.7), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

com $M^1 \in \operatorname{add} M$ e $M \oplus X_1$ um módulo inclinante.

Se $X_1 \notin \operatorname{Cogen} M$, então ele é um complemento poço. Caso contrário, pela Proposição (3.2.7) existe uma seqência exata

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow M^2 \longrightarrow X_2 \longrightarrow 0 \tag{3.9}$$

com $M^2 \in \operatorname{add} M$ e $M \oplus X_2$ um módulo r-inclinante.

De (3.8) e (3.9) obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \longrightarrow X_2 \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

com $\operatorname{Ker} f_1 = X_1$.

Se $X_2 \notin \operatorname{Cogen} M$, ele é um complemento poço. Caso contrário repetimos o argumento e afirmamos que existe X_i tal que $X_i \notin \operatorname{Cogen} M$. Suponhamos, por contradição, que $X_i \in \operatorname{Cogen} M$ para todo $0 \leq i \leq s$. Então existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^n \xrightarrow{f_n} X_n \longrightarrow 0 \tag{3.11}$$

com $\operatorname{Ker} f_i = X_i$ e $n > s$.

Assim, existem $1 \leq i < j \leq n$ tal que $X_i = X_j$ e daí se $T = M \oplus X_0$, então

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^j \xrightarrow{f_j} X_j \longrightarrow 0$$

não é uma $\operatorname{add} T$-resolução minimal de X_j. O que é uma contradição. Logo $X_i \notin \operatorname{Cogen} M$ para algum $1 \leq i \leq n$ e portanto, M admite um complemento poço.

Denotemos por X_0 o complemento fonte , X_s o complemento poço e seja $T =$

$M \oplus X_0$. Suponhamos que exista uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Y_0 = X_0 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^n \xrightarrow{f_n} Y_n = X_s \longrightarrow 0 \qquad (3.12)$$

com $\operatorname{Ker} f_i = Y_i$, $n < s$ e $Y_i \in \{X_0, \ldots, X_s\}$ para $0 \leq i \leq n$.

Assim, escolha $\tilde{Y}_t \in \{X_0, \ldots, X_s\} - \{Y_0, \ldots, Y_n\}$. Pela unicidade de X_0 temos que $\tilde{Y}$ não é um complemento fonte e, pontanto, $\tilde{Y} \in \operatorname{Gen} M$. Pelo Corolário (3.2.9), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Y_0 = X_0 \longrightarrow \tilde{M}^1 \xrightarrow{\tilde{f}_1} \tilde{M}^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tilde{M}^t \xrightarrow{\tilde{f}_t} \tilde{Y}_t \longrightarrow 0$$

com $\operatorname{Ker} \tilde{f}_i = \tilde{Y}_{i-1}$ para $1 \leq i \leq t$, $\tilde{M}^i \operatorname{add} M$ para $1 \leq i \leq t$ e $Y_0, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_t$ complementos para M.

Pela Proposição (3.2.7), temos $\tilde{Y}_i \cong Y_i$ para todo $1 \leq i \leq t$. Contradição. Logo $n = s$ e existe uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{s-1} \xrightarrow{f_{s-1}} M^s \xrightarrow{f_s} X_s = Y \longrightarrow 0$$

com $\operatorname{Ker} f_i = X_{i-1}$ para $1 \leq i \leq s$, $M^i \in \operatorname{add} M$ para $1 \leq i \leq s$ e $X_0, \ldots, X_s$ complementos para M. Além disso, $s = \operatorname{pd}_A \operatorname{Hom}_A(T, X_s) \leq \operatorname{pd}_A X_s \leq \operatorname{fd}(A)$.

Para mostrarmos a última afirmação do teorema suponhamos que existam infinitos complementos, X_i com $i \in \mathbb{N}$, para M dois a dois não isomorfos. Então M não admite complemento poço e consequentemente, $X_i \in \operatorname{Cogen} M$ para todo $i \geq 1$. Assim, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M^i \xrightarrow{f_i} X_i \longrightarrow 0$$

com $\operatorname{Ker} f_j = X_{j-1}$ para $1 \leq j \leq i$, $M^j \in \operatorname{add} M$ para $1 \leq j \leq i$ e $X_0, \ldots, X_i$ complementos para M.

Daí, se $T = M \oplus X_0$ então $i = \operatorname{pd}_B \operatorname{Hom}_A(T, X_i) \leq \operatorname{pd}_A X_i$. E como para cada $i \in \mathbb{N}$ temos $X_i \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$, segue que $\operatorname{fd}(A) = \infty$. $\square$

Agora daremos uma generalização da aljava $\vec{\mathcal{K}}_A^1$.

Definição 3.2.11. *Os vértices de $\vec{\mathcal{K}}_A$ são os elementos de Ω_A e existe uma flecha $T' \to T$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ se $T' = M \oplus X$, $T = M \oplus Y$ com X e Y indecomponíveis e não* *isomorfos, M livre de multiplicidade e existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$.

Capítulo 4

Uma ordem parcial de módulos r-inclinantes

Ao longo deste capítulo consideremos A uma álgebra de Artin e r um inteiro positivo. O objetivo principal deste capítulo é definirmos uma ordem parcial $\leq$ em Ω_A e mostrarmos que se $\mathcal{K}_A$ é o grafo subjacente de $\vec{\mathcal{K}}_A$ então $\mathcal{K}_A$ é o diagrama de Hasse para $(\Omega_A, \leq)$.

4.1 Uma ordem parcial $\leq$ em Ω_A

Começamos esta seção definindo uma ordem em Ω_A.

Definição 4.1.1. *Sejam T, $T' \in \Omega_A$. Dizemos que $T \leq T'$ quando $T^{\perp} \subset T'^{\perp}$.*

Agora veremos que Ω_A com a ordem definida acima é um conjunto parcialmente ordenado.

Proposição 4.1.2. $(\Omega_A, \leq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado.*

Demonstração. (i) Para cada $T \in \Omega_A$, temos $T^{\perp} = T^{\perp}$, donde $T \leq T$.

(ii) Sejam T, $T' \in \Omega_A$ tais que $T \leq T'$ e $T' \leq T$. Então, pela definição de $\leq$, temos $T^{\perp} \subset T'^{\perp}$ e $T'^{\perp} \subset T^{\perp}$. Daí, $T^{\perp} = T'^{\perp}$ o que implica em $T = T'$ (ver [3], Teorema 5.5)

(iii) Sejam T, T' e T'' pertencentes a Ω_A tais que $T \leq T'$ e $T' \leq T''$. Então $T^{\perp} \subset T'^{\perp}$ e $T'^{\perp} \subset T''^{\perp}$, donde $T^{\perp} \subset T''^{\perp}$. Logo, $T \leq T''$.

□

Antes de enunciarmos o principal teorema do capítulo faremos algumas consequências da ordem parcial definida acima, as quais serão utilizadas ao longo do texto. Começamos com a seguinte proposição:

Proposição 4.1.3. *Se $T^{'} \to T$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$, então $T^{\perp} \subset T^{'\perp}$ e, portanto, $T \leq T^{'}$ em Ω_A.*

Demonstração. De fato, se $T^{'} \to T$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$, então $T^{'} = M \oplus X$ e $T = M \oplus Y$ com X, Y indecomponíveis e existe uma sequência exata

$$0 \to X \to \tilde{M} \to Y \to 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$.

Seja $N \in T^{\perp}$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ na sequência exata acima obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(Y,N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(\tilde{M},N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(X,N) & \\
\longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(Y,N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(\tilde{M},N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(X,N) & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(Y,N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(\tilde{M},N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(X,N) & \cdots
\end{array}$$

Uma vez que $N \in T^{\perp}$ temos $\operatorname{Ext}^i_A(Y,N) = \operatorname{Ext}^i_A(\tilde{M},N) = 0$ para todo $i > 0$ e da sequência segue que $\operatorname{Ext}^i_A(X,N) = 0$ para todo $i > 0$. Daí, $\operatorname{Ext}^i_A(T^{'},N) = 0$ para todo $i > 0$. Logo, $N \in T^{'\perp}$ e, portanto, $T^{\perp} \subset T^{'\perp}$, ou seja, $T \leq T^{'}$. □

Vimos que se $T^{'} \to T$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}^1_A$ então $T \leq T^{'}$, mas em geral não é verdade que se $T \leq T^{'}$ então existe uma flecha $T^{'} \to T$ em $\vec{\mathcal{K}}^1_A$. De fato, tomando $T = (1\bar{3}, 2\bar{2}, 2\bar{3}, 2\bar{4})$ e $T^{'} = (1\bar{3}, 2\bar{3}, 3\bar{3}, 3\bar{4})$ no Exemplo (3.2.4) temos $T \leq T^{'}$ mas não existe uma flecha $T^{'} \to T$ em $\vec{\mathcal{K}}^1_A$.

Lema 4.1.4. *Sejam T, $T^{'} \in \Omega_A$.*

(*a*) *$T \leq T^{'}$ em Ω_A se, e somente se, $T \in T^{'\perp}$.*

(b) *Se* $T \leq T'$ *em* Ω_A*, então* $\operatorname{pd}_A T \geq \operatorname{pd}_A T'$.

Demonstração. (a) Se $T \leq T'$, então $T^\perp \subset T'^\perp$, em particular, $T \in T'^\perp$.

Suponhamos $T \in T'^\perp$, queremos mostrar que $T^\perp \subset T'^\perp$. Para isso, seja $Z \in T^\perp \subset \operatorname{Gen} T$. Assim, Z admite uma $\operatorname{add} T$-resolução minimal

$$\dots T_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T', -)$ nesta $\operatorname{add} T$-resolução e usando que $\operatorname{pd} T' < \infty$ e $T \in T'^\perp$ concluímos que $T^\perp \subset T'^\perp$.

(b) Seja $r = \operatorname{pd}_A T$. Então, da defininição de módulo r-inclinante (T_3'), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A_A \xrightarrow{f} T_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_r \longrightarrow 0$$

com $T_i \in \operatorname{add} T$ para todo $0 \leq i \leq r$. Donde obtemos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A_A \xrightarrow{f} T_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

onde $L = \operatorname{Coker} f$.

Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T', -)$ em (4.1) obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T', A) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T', T_0) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T', L) \\
\longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(T', A) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(T', T_0) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(T', L) \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(T', A) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(T', T_0) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(T', L) \cdots
\end{array}$$

Uma vez que $T \in T'^\perp$ segue que $\operatorname{Ext}^{i+1}_A(T', A) = 0$ para todo $i \geq r$. Como $\operatorname{pd} T' < \infty$, temos $\operatorname{pd} T' \leq r$. □

Duas observações que seguem do Lema (4.1.4) são

Observação 4.1.5. *Segue do Lema* (4.1.4) *que para quaisquer* T, $T' \in \Omega_A$ *com* $T \in T'^\perp$ *e* $T' \in T^\perp$ *temos* $T = T'$.

De fato, como $T \in T'^{\perp}$ e $T' \in T^{\perp}$ temos $T \leq T'$ e $T' \leq T$. Uma vez que Ω_A é parcialmente ordenado segue que $T = T'$.

Observação 4.1.6. *Se $T' \to T$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$, então*

$$\operatorname{pd}_A T' \leq \operatorname{pd}_A T \leq 1 + \operatorname{pd}_A T'.$$

Com efeito, pela definição de flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$ temos $T' = M \oplus X$, $T = M \oplus Y$ e existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$.

Sabemos que $\operatorname{pd}_A \tilde{M} \leq \max\{\operatorname{pd}_A X, \operatorname{pd}_A Y\}$ e $\operatorname{pd}_A \tilde{M} \leq \operatorname{pd}_A M$, pois $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$, daí, $\operatorname{pd}_A M < \max\{\operatorname{pd}_A X, \operatorname{pd}_A Y\}$ ou $\operatorname{pd}_A M \geq \max\{\operatorname{pd}_A X, \operatorname{pd}_A Y\}$.

Se $\operatorname{pd}_A M < \max\{\operatorname{pd}_A X, \operatorname{pd}_A Y\}$, então $\operatorname{pd}_A Y = 1 + \operatorname{pd}_A X$. Daí, $\operatorname{pd}_A T = \operatorname{pd}_A Y = 1 + \operatorname{pd}_A X = 1 + \operatorname{pd}_A T'$.

Se $\operatorname{pd}_A M \geq \max\{\operatorname{pd}_A X, \operatorname{pd}_A Y\}$, então $\operatorname{pd}_A T = \operatorname{pd}_A M = \operatorname{pd}_A T'$.

Logo, $\operatorname{pd}_A T' \leq \operatorname{pd}_A T \leq 1 + \operatorname{pd}_A T'$.

Uma consequência do Lema (4.1.4) é o seguinte lema, o qual será utilizado na demonstração do principal resultado do capítulo.

Lema 4.1.7. *Sejam T um módulo r-inclinante e M um módulo r-inclinante parcial tais que $\operatorname{Ext}_A^i(T, M) = \operatorname{Ext}_A^i(M, T) = 0$ para todo $i > 0$. Então existe um complemento Z para M tal que $T = M \oplus Z$.*

Demonstração. Pelo Lema (2.3.3) sabemos que existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow E \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

com $M_0 \in \operatorname{add} M$ tal que o morfismo conexão $\delta : \operatorname{Hom}_A(M, M_0) \to \operatorname{Ext}_A^1(M, A)$ é sobrejetivo. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ em (4.2) obtemos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_0,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A,T) \quad .$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M_0,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(E,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A,T)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(M_0,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(E,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(A,T) \cdots$$

Uma vez que A_A é projetivo, $M_0 \in \mathrm{add}\, M$ e $\mathrm{Ext}^i_A(M,T) = 0$ para todo $i > 0$, segue que $\mathrm{Ext}^i_A(A,T) = \mathrm{Ext}^i_A(M_0,T) = 0$ para todo $i > 0$. Daí, $\mathrm{Ext}^i_A(E,T) = 0$ para todo $i > 0$ e portanto, $\mathrm{Ext}^i_A(M \oplus E,T) = 0$ para todo $i > 0$.

Agora mostraremos que $\mathrm{Ext}^i_A(T, M \oplus E) = 0$ para todo $i > 0$. Para isso, apliquemos $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ em (4.2) para obtermos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,M_0) \quad .$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,M_0)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(T,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(T,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(T,M_0) \cdots$$

Como $M_0 \in \mathrm{add}\, M$ e $\mathrm{Ext}^i_A(T,M) = 0$ para todo $i > 0$ segue que $\mathrm{Ext}^i_A(T,M_0) = 0$ para todo $i > 0$.

Como T é r-inclinante existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A_A \xrightarrow{f} T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_r \longrightarrow 0$$

com $T_i \in \mathrm{add}\, T$ para todo $0 \leq i \leq r$. Donde obtemos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A_A \xrightarrow{f} T_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

onde $L = \operatorname{Coker} f$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ em (4.3) obtemos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,f)} \operatorname{Hom}_A(T,L)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,T_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,L)$$

Pelo Lema (2.1.7) segue que $\operatorname{Hom}_A(T,f)$ é um epimorfismo, pois f uma $\operatorname{add} T$-aproximação à direita de L e, consequentemente, $\operatorname{Ext}^1_A(T,A) = 0$.

Logo, $\operatorname{Ext}^i_A(T,E) = 0$ para todo $i > 0$ e, portanto, $\operatorname{Ext}^i_A(T, M \oplus E) = 0$ para todo $i > 0$. Assim, se $T' = M \oplus E$, então $T \in T'^{\perp}$ e $T' \in T^{\perp}$. Pelo Lema (4.1.4) temos $T = T'$. □

4.2 O diagrama de Hasse de $(\Omega_A, \leq)$

Começamos estabelecendo as seguintes notações:

Seja $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dados x, $y \in S$, escrevemos $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. Dizemos que y **cobre** x se, e somente se, $x < y$ e não há $z \in S$ tal que $x < z < y$.

Um **diagrama de Hasse** do conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ é uma representação gráfica onde os vértices representam os elementos de S e dois elementos x e y são ligados por uma aresta sempre que y cobre x.

Agora faremos alguns preparativos para a demonstração do principal resultado da seção. Começamos apresentando dois lemas elementares sobre sequências exatas não cindidas, morfismos e coberturas projetivas os quais serão utilizados nas demonstrações de dois resultados posteriores.

Lema 4.2.1. *Seja $X \in \operatorname{mod} A$ e seja $s \in \mathbb{N}$. Se $0 \longrightarrow X^s \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z \longrightarrow 0$ é uma sequência exata que não cinde de A-módulos com $Z \notin \operatorname{add} Y$. Então existe um monomorfismo não cindido $X \to Y'$ com $Y' \in \operatorname{add} Y$.*

Demonstração. Faremos a prova usando indução sobre s. Se $s = 1$, consideremos o monomorfismo não cindido $f : X \to Y$.

Suponhamos $s > 1$. Seja $i : X \to X^s$ a inclusão canônica sobre o primeiro somando e consideremos o monomorfismo $g = f \circ i_1$. Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "i_1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^s \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "h"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas. Considerando um epimorfismo $i_2 : X^s \to X^{s-1}$, onde $\ker i_2 = \operatorname{Im} i_1$ temos o seguinte diagrama *push-out* (ver apêndice)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_1"] & X \arrow[d, "g"] & & \\
0 \arrow[r] & X^s \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_2"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^{s-1} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & Y_1 \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Denotando η : $0 \longrightarrow X^{S-1} \xrightarrow{f_1} Y_1 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$. Se g é não cindido, segue o resultado. Caso contrário, obtemos que $Y \cong X \oplus Y_1$, em particular, $Y_1 \in \operatorname{add} Y$. Uma vez que $Z \notin \operatorname{add} Y$ e $Y_1 \in \operatorname{add} Y$ segue que $Z \notin \operatorname{add} Y_1$, donde η não cinde. Pela hipótese de indução, existe um monomorfismo não cindido $X \to Y'$, com $Y' \in \operatorname{add} Y_1$ e portanto, $Y' \in \operatorname{add} Y$. $\square$

Lema 4.2.2. *Sejam $f : P_0 \to N$ cobertura projetiva de N, $g : P(S) \to S$ cobertura projetiva do módulo simples S e $P(S)$ é um indecomponível somando de P_0. Então existe um epimorfismo $N \to S$.*

Demonstração. Seja $f : P_0 \to N$ uma cobertura projetiva. Então $\operatorname{top} f : \operatorname{top} P_0 \to \operatorname{top} N$ é um epimorfismo, onde $\operatorname{top} M$ é o módulo semissimples quociente de M pelo seu radical. Uma vez que $P_0 = P(S) \oplus L$ temos $\operatorname{top} P_0 = S \oplus Q$.

Afirmamos que $\operatorname{top} f_{|_S} : S \to \operatorname{top} N$ é não nulo.

Com efeito, se $\operatorname{top} f_{|_S}$ fosse um morfismo nulo, então $\operatorname{top} f_{|_Q} : Q \to \operatorname{top} N$ seria um epimorfismo e daí $f_{|_L} : L \to N$ seria um epimorfismo, com L projetivo contido propriamente em P_0. Contradição.

Logo, $\operatorname{top} f_{|S} : S \to \operatorname{top} N$ é não nulo e como S é simples temos $S \leqslant \operatorname{top} N$. Além disso, S é um somando direto de $\operatorname{top} N$, que é semisimples.

Assim, existe um epimorfismo $\operatorname{top} N \to S$ e portanto, existe um epimorfismo $N \to S$ dado pela composição $N \to \operatorname{top} N \to S$. $\square$

Os dois próximos lemas envolvendo sequências exatas que não cindem, $\operatorname{add} T$-resoluções minimais e subcategorias importantes de $\operatorname{mod} A$ serão utilizados na demonstração do principal teorema da seção como também em alguns resultados elementares.

Lema 4.2.3. *Seja T um A-módulo r-inclinante e seja* $0 \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ *uma sequência exata que não cinde com $T^{'}$, $T^{''} \in \operatorname{add} T$. Então existe um somando direto indecomponível T_i de $T^{'}$ tal que $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$.*

Demonstração. Afirmamos que $Q \notin \operatorname{add} T$.

De fato, se $Q \in \operatorname{add} T \subset T^{\perp}$, então a sequência

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, T^{'}) \to \operatorname{Hom}_A(T, T^{''}) \to \operatorname{Hom}_A(T, Q) \to 0$$

seria exata, pois $\operatorname{Hom}_A(T, -)_{|_{T^\perp}}$ é exato. Além disso, tal sequência cindiria, pois $\operatorname{Hom}_A(T, Q)$ seria um B-módulo projetivo, onde $B = \operatorname{End} T$. Como $Q \notin \operatorname{add} T$ temos $Q \notin \operatorname{add} T^{''}$.

Desse modo teríamos $\operatorname{Hom}_A(T, T^{''}) \cong \operatorname{Hom}_A(T, T^{'} \oplus Q)$ o que implicaria $T^{''} \cong T^{'} \oplus Q$. Mas isso contradiz o fato de que a sequência $0 \to T^{'} \to T^{''} \to Q \to 0$ não cinde.

Faremos a prova por indução sobre $\delta(T^{'})$. Se $\delta(T^{'}) = 1$, então $T^{'} = T_i^r$ com T_i indecomponível. Pelo Lema (4.2.1), existe um monomorfismo não cindido $T_i \to \tilde{T}^{''}$ com $\tilde{T}^{''} \in \operatorname{add} T^{''}$. Assim, T_i não é isomorfo a nenhum somando de $\tilde{T}^{''}$, ou seja, $\tilde{T}^{''} \in \operatorname{add} T[i]$.

Logo $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$.

Agora, assumimos que $\delta(T^{'}) > 1$ e seja $T^{'} = T_i^r \oplus Y$ com Y indecomponível e $\operatorname{add} T_i \cap \operatorname{add} Y = 0$. Consideremos o seguinte diagrama *push-out*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T^{'} \arrow[r] \arrow[d] & T^{''} \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_i^r \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Se a sequência $0 \to Y \to T^{''} \to E \to 0$ não cinde, então, como $Y, T^{''} \in \operatorname{add} T$ e $\delta(Y) < \delta(T^{'})$, segue da hipótese indutiva que existe um somando direto indecomponível Y_i de Y e portanto, de T tal que $Y_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$.

Se $0 \to Y \to T^{''} \to E \to 0$ cinde, então $E \in \operatorname{add} T$. Note também que pelo que vimos na afirmação a sequência exata $0 \to T_i^r \to E \to Q \to 0$ não cinde, pois $Q \notin \operatorname{add} T$ e $E \in \operatorname{add} T$.

Pelo Lema (4.2.1) existe um monomorfismo $T_i \to E^{'}$ não cindido com $E^{'} \in \operatorname{add} E \subset \operatorname{add} T$. Logo T_i não é isomorfo a nenhum somando de $E^{'}$ e portanto, $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$. $\square$

Lema 4.2.4. *Seja T um A-módulo inclinante, e seja $X \in T^{\perp}$ um módulo excepcional com $X \notin \operatorname{add} T$. Se $0 \to T_r \to \cdots \to T_0 \to X \to 0$ é uma $\operatorname{add} T$-resolução minimal de X, então $\operatorname{add} T_r \cap \operatorname{add} T_0 = 0$.*

Demonstração. Se $X \notin \operatorname{add} T$ e $0 \to T_r \to \cdots \to T_0 \to X \to 0$ é uma $\operatorname{add} T$-resolução minimal de X, então $r > 0$. Seja $B = \operatorname{End}_{\mathrm{A}} T$. Então $N = \operatorname{Hom}_A(T, X)$ é um B-módulo excepcional.

De fato, aplicando $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ na $\operatorname{add} T$-resolução minimal de X obtemos uma resolução projetiva minimal de N em $\operatorname{mod} B$

$$0 \to P_r \to \cdots P_0 \to N \to 0$$

onde $P_i = \operatorname{Hom}_A(T, T^i)$. Logo $\operatorname{pd}_B N = r < \infty$.

Para mostrarmos que $\operatorname{Ext}_B^i(N, N) = 0$ para todo $i > 1$ basta aplicarmos $\operatorname{Hom}_B(-, N)$ na resolução projetiva de N e notar que $\operatorname{Ext}_B^i(P_j, N) = 0$ para todo $i > 0$ e para todo $0 \leqslant j \leqslant r$, uma vez que P_j é um B-módulo projetivo. Por outro lado, como T é um módulo r-inclinante e X é um módulo excepcional temos $\operatorname{Ext}^1_B(N,N) \cong \operatorname{Ext}^1_A(X,X) = 0$. Donde N é um B-módulo excepcional.

Agora observe que, para mostrarmos $\operatorname{add} T_r \cap \operatorname{add} T_0 = 0$ é suficiente mostrarmos que $\operatorname{add} P_r \cap \operatorname{add} P_0 = 0$.

Seja S um B-módulo simples com cobertura projetiva $P(S)$. Se $P(S)$ é um somando direto de P_0, pelo Lema (4.2.2) existe uma sequência exata $0 \to K \to N \to S \to 0$. Daí, aplicando $\operatorname{Hom}_B(N,-)$ nessa sequência exata curta obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(N,K) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(N,N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(N,S) & \\
\longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_B(N,K) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_B(N,N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_B(N,S) & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_B(N,K) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_B(N,N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_B(N,S) & \cdots
\end{array}$$

Como $\operatorname{pd}_B N \leqslant r$ e N é excepcional temos $\operatorname{Ext}^r_B(N,S) = 0$. Logo $P(S)$ não é somando direto de P_r, como queríamos. $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar o principal resultado do capítulo.

Teorema 4.2.5. *$\mathcal{K}_A$ é o diagrama de Hasse de $(\Omega_A, \leq)$.*

Demonstração. Seja $T' \to T$ uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$. Mostraremos que a inclusão $T^{\perp} \subset T'^{\perp}$ é minimal, ou equivalentemente, T cobre T'.

Com efeito, como anteriormente, seja $T' = M \oplus X$ e $T = M \oplus Y$ com X, Y indecomponíveis e

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

uma sequência exata com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$.

Seja T'' um módulo inclinante tal que $T^{\perp} \subset T''^{\perp} \subset T'^{\perp}$. Então $\operatorname{Ext}^i_A(T'',T) = 0$ e $\operatorname{Ext}^i_A(T',T'') = 0$ para todo $i > 0$. E como M é somando direto de T e de T' segue que $\operatorname{Ext}^i_A(T'',M) = 0$ e $\operatorname{Ext}^i_A(M,T'') = 0$ para todo $i > 0$. Assim, pelo Lema (4.1.7) existe um complemento Z para M tal que $T'' = M \oplus Z$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-,Z)$ em

(4.4) obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\tilde{M},Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,Z) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(\tilde{M},Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,Z) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(\tilde{M},Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(X,Z) \cdots \end{array}$$

Sabemos que $\mathrm{Ext}^i_A(X,Z) = 0$ e $\mathrm{Ext}^i_A(\tilde{M},Z) = 0$ para todo $i > 0$. Assim $\mathrm{Ext}^i_A(Y,Z) = 0$ para todo $i > 1$. Por outro lado, temos que $\mathrm{Ext}^i_A(Z,Y) = 0$ para todo $i > 0$. Pela Proposição (3.2.7), existe uma sequência exata $0 \to Z \to E \to Y \to 0$, com $E \in \mathrm{add}\, M$ e além disso, Z é unicamente determinado por essa sequência, donde $X \cong Z$ e daí $T^{''} \cong T^{'}$.

Reciprocamente, suponhamos que T cobre $T^{'}$. Então a inclusão $T^{\perp} \subset T^{'\perp}$é minimal. Mostraremos que existe uma flecha $T^{'} \to T$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$.

Uma vez que $T^{'}$ é um módulo r-inclinante, $T \in T^{'\perp}$ e $\mathrm{pd}_A T < \infty$, pela observação (2.6.21) existe uma $\mathrm{add}\, T^{'}$-resolução minimal

$$0 \longrightarrow T^{'}_r \xrightarrow{f} T^{'}_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^{'}_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0. \tag{4.5}$$

Observe que $T \notin \mathrm{add}\, T^{'}$, pois do contrário todo somando direto de T seria somando direto de $T^{'}$ e daí $T^{'\perp} \subset T^{\perp}$. Contradizendo o fato da inclusão $T^{\perp} \subset T^{'\perp}$ ser própria. Assim, pelo Lema (4.2.4), temos $\mathrm{add}\, T^{'}_r \cap \mathrm{add}\, T^{'}_0 = 0$. Além disso, como a sequência exata

$$0 \longrightarrow T^{'}_r \xrightarrow{f} T^{'}_{r-1} \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

com $L = \mathrm{Coker}\, f$, não cinde, pois do contrário $L \in \mathrm{add}\, T^{'}$ e daí (4.5) não seria minimal, segue do Lema (4.2.3) que existe um somando direto indecomponível X de $T^{'}_r$ tal que $T^{'} = M \oplus X$ e $X \in \mathrm{Cogen}\, M$. Daí $X \notin \mathrm{add}\, T^{'}_0$ pois, $\mathrm{add}\, T^{'}_r \cap \mathrm{add}\, T^{'}_0 = 0$. Assim, existe uma sequência exata quase cindida

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$ e $T'' = M \oplus Y \in \Omega_A$. Daí, $T' \to T''$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$ e portanto, $T''^{\perp} \subset T'^{\perp}$. Nosso objetivo é mostrar que $T \cong T''$. Para tanto, mostraremos que $T \in T''^{\perp}$. Sabemos que $\operatorname{Ext}^i_A(M,T) = 0$ para todo $i > 0$, pois $T \in T'^{\perp}$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-,T)$ em

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

obtemos a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Y,T) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(\tilde{M},T) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(X,T) \\
\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(Y,T) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(\tilde{M},T) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(X,T) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(Y,T) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(\tilde{M},T) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n_A(X,T) \cdots
\end{array}$$

e como $\operatorname{Ext}^i_A(\tilde{M},T) = \operatorname{Ext}^i_A(X,T) = 0$ para todo $i > 0$ temos $\operatorname{Ext}^i_A(Y,T) = 0$ para todo $i > 1$.

Por outro lado, aplicando $\operatorname{Hom}_A(Y,-)$ em $0 \longrightarrow K_0' \longrightarrow T_0' \longrightarrow T \longrightarrow 0$ obtemos a sequência exata

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Y,K_0') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(Y,T_0') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(Y,T) \\
\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(Y,K_0') & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(Y,T) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^1_A(Y,T) \\
\longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(Y,K_0') & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^2_A(Y,T_0') & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^2_A(Y,T) = 0
\end{array}$$

Como $X \notin \operatorname{add} T_0'$ e $T' = M \oplus X$ temos $T_0' \in \operatorname{add} M$. Donde $\operatorname{Ext}^i_A(Y,T_0') = 0$ para todo $i > 0$ e consequentemente, $\operatorname{Ext}^1_A(Y,T) \cong \operatorname{Ext}^2_A(Y,K_0')$.

Por fim, aplicando $\operatorname{Hom}_A(-,K_0')$ em $0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ obtemos a sequência exata longa

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(Y, K_0') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(\tilde{M}, K_0') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X, K_0') \\
\arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(Y, K_0') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(\tilde{M}, K_0') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(X, K_0') \\
\arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(Y, K_0') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(\tilde{M}, K_0') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(X, K_0') = 0
\end{tikzcd}
$$

e como $\mathrm{Ext}^1_A(X, K_0') = \mathrm{Ext}^2_A(\tilde{M}, K_0')$ temos $\mathrm{Ext}^2_A(Y, K_0') = 0$, donde $\mathrm{Ext}^1_A(Y, T) = 0$.

Logo, $\mathrm{Ext}^i_A(Y, T) = 0$ para todo $i > 0$ e portanto, $T \in T''^{\perp}$. Pelo Lema (4.1.4)(a), temos $T \leq T''$ o que implica em $T \cong T''$. □

Sabemos que se T é um poço em $\vec{\mathcal{K}}_A$, então não existe T' em Ω_A tal que T' cobre T. Assim, T é um elemento minimal em $(\Omega_A, \leq)$. Dualmente, se T é uma fonte em $\vec{\mathcal{K}}_A$, então T é um elemento maximal em $(\Omega_A, \leq)$. Logo, estudar os elementos minimais (maximais) em $(\Omega_A, \leq)$ se reduz a determinarmos vértices poço (fonte) em $\vec{\mathcal{K}}_A$.

Vimos que $\vec{\mathcal{K}}_A$ não contém ciclos orientados. Assumindo que A é básica, temos que A_A é um A-módulo r-inclinante tal que $\mathrm{Ext}^i_A(A, T) = 0$ para todo $i > 0$ e para todo $T \in \mathrm{mod}\, A$, em particular, $A_A^{\perp} = \mathrm{mod}\, A$. Assim, se $T \in \Omega_A$ então $T \leq A_A$. Logo, A_A é uma fonte em $\vec{\mathcal{K}}_A$. Na próxima seção discutiremos a existência de poços em $\vec{\mathcal{K}}_A$.

Terminamos a seção com algumas consequências do Teorema (4.2.5).

Corolário 4.2.6. *Se $\vec{\mathcal{K}}_A$ tem uma componente finita $\mathcal{C}$, então $\vec{\mathcal{K}}_A = \mathcal{C}$.*

Demonstração. Uma vez que $\vec{\mathcal{K}}_A$ não contém ciclos orientados segue que $\mathcal{C}$ também não contém. De sua finitude temos que $\mathcal{C}$ tem uma fonte, a saber, $A_A \in \mathcal{C}$.

Suponhamos que exista um vértice T de $\vec{\mathcal{K}}_A$ que não está em $\mathcal{C}$. Então $T^{\perp} \subset A^{\perp}$. Como $T \notin \mathcal{C}$ esta inclusão não é minimal. Logo, existe $T_1 \in \mathcal{C}$ vizinho de ${}_AA$ tal que $T^{\perp} \subset T_1^{\perp} \subset A^{\perp}$. Pelo mesmo motivo temos que a inclusão $T^{\perp} \subset T_1^{\perp}$ não é minimal e daí existe $T_2 \in \mathcal{C}$ vizinho de T_1 tal que a inclusão $T^{\perp} \subset T_2^{\perp}$ não é minimal. Prosseguindo com esse argumento construímos um caminho infinito em $\mathcal{C}$. Desde que $\mathcal{C}$ não contém ciclos orientados, isto contradiz a finitude de $\mathcal{C}$. □

Corolário 4.2.7. *Sejam $\mathcal{C}$ uma componente finita de $\vec{\mathcal{K}}_A$ e T um elemento minimal em $\mathcal{C}$. Se $\operatorname{pd}_A T = d$, então para cada $0 \leq i \leq d$ existe um módulo r-inclinante T_i com $\operatorname{pd}_A T_i = i$.*

Demonstração. Se $\mathcal{C}$ é uma componente finita de $\vec{\mathcal{K}}_A$, então $\vec{\mathcal{K}}_A$ tem uma componente conexa finita $\mathcal{C}'$. Pelo Corolário (4.2.6) temos $\vec{\mathcal{K}}_A = \mathcal{C}' = \mathcal{C}$.

Seja $T' \to T''$ uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$. Então, da Observasção (4.1.6) temos

$$\operatorname{pd}_A T' \leq \operatorname{pd}_A T'' \leq 1 + \operatorname{pd}_A T' \tag{4.6}$$

Uma vez que $\vec{\mathcal{K}}_A$ é finita e conexa existe um caminho em $\vec{\mathcal{K}}_A$ da forma

$$A_A \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_s \to T. \tag{4.7}$$

onde A_A e T são os únicos elementos maximal e minimal, respectivamente, em $(\Omega_A, \leq)$.

Faremos a prova usando indução sobre d.

Se $d = 1$, segue o resultado, pois $\operatorname{pd}_A A = 0$ e $\operatorname{pd}_A T = 1$.

Suponha que para cada $1 \leq j < d$, exista um módulo inclinante T_j tal que $\operatorname{pd}_A T_j = j$.

De (4.6) e (4.7) temos $\operatorname{pd}_A T_s = d$ ou $\operatorname{pd}_A T_s = d - 1$.

Se $\operatorname{pd}_A T_s = d-1$, então o resultado segue da hipótese de indução. Se $\operatorname{pd}_A T_s = d$, escolha $k = \max\{1, \ldots, s-2\}$ tal que $\operatorname{pd}_A T_k = d-1$ e o resultado segue por indução. □

Uma consequência imediata do Corolário (4.2.7) é o seguinte

Corolário 4.2.8. *Seja A uma álgebra de Artin de representação de tipo finito e dimenção finitística d. Então para cada $0 \leq i \leq d$ existe um módulo excepcional indecomponível E_i com $\operatorname{pd}_A E_i = i$.*

Demonstração. Sabemos que se $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ é um módulo inclinante, então para cada $0 \leq i \leq s$ tem-se que T_i é excepcional. Sabemos também que $\operatorname{pd}_A T = \max\{\operatorname{pd}_A T_i \,:\, 0 \leq i \leq d\}$.

Uma vez que A é de representação de tipo finita temos que $(\Omega_A, \leq)$ é finito e portanto, $\vec{\mathcal{K}}_A$ tem uma componente conexa finita $\mathcal{C}$. Pelo Corolário (4.2.6), $\vec{\mathcal{K}}_A = \mathcal{C}$. Logo, $\vec{\mathcal{K}}_A$ tem um poço e consequentemente, $(\Omega_A, \leq)$ tem um elemento minimal T.

Pelo Teorema (4.3.4), T é uma cocobertura minimal de $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$. Daí, para cada $M \in \operatorname{mod} A$, com $\operatorname{pd}_A X < \infty$, temos $M \in \operatorname{Cogen} T$.

Como $\operatorname{fd}(A) = d$ existem $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$ com $\operatorname{pd}_A X = d$ e uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow T^{'} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $T^{'} \in \operatorname{add} T$.

Sabendo que $\operatorname{pd}_A X \leq \max\{\operatorname{pd}_A T^{'}, -1 + \operatorname{pd}_A Y\}$, $\operatorname{pd}_A Y \leq d$ e $\operatorname{pd}_A X = d$ temos $-1 + \operatorname{pd}_A Y < \operatorname{pd}_A X$ donde $\operatorname{pd}_A X \leq \operatorname{pd}_A T^{'} \leq d$ o que implica em $\operatorname{pd}_A T^{'} = d$.

Por outro lado, $\operatorname{pd}_A T^{'} \leq \operatorname{pd}_A T \leq d$ implica $\operatorname{pd}_A T = d$.

Pelo Corolário (4.2.7) temos que para cada $0 \leq i \leq d$ existe um módulo inclinante T_i tal que $\operatorname{pd}_A T_i = i$. Assim, para cada $0 \leq i \leq d$ existe um somando indecomponível E_i de T_i tal que $\operatorname{pd}_A E_i = i$. $\square$

4.3 Elementos minimais em $\mathcal{K}_A$

Nesta seção vamos investigar os elementos minimais em $(\Omega_A, \leq)$ ou equivalentemente os poços em $\vec{\mathcal{K}}_A$. Começamos com uma simples observação.

Lema 4.3.1. *Seja $T = \oplus_{j=1}^{n} T_j$ um elemento em $(\Omega_A, \leq)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *T é um elemento minimal.*

(2) *Para todo $1 \leq i \leq n$ temos que $T_i \notin \operatorname{Cogen} T[i]$.*

(3) *Não existe monomorfismo não cindido em $\operatorname{add} T$.*

Demonstração. (2) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que T não seja minimal. Então existe uma flecha $T \to T^{'}$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$.

Por definição, $T = T[i] \oplus T_i$, $T^{'} = T[i] \oplus T_i^{'}$, e existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow T_i \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow T_i^{'} \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} T[i]$ para algum $1 \leq i \leq n$. Daí, $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que para algum $1 \leq i \leq n$ tenhamos $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$. Então existe um indecomponível $T_i^{'}$ e uma sequência exata

$$0 \longrightarrow T_i \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow T_i^{'} \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} T[i]$ e $T^{'} = T[i] \oplus T_i^{'} \in \Omega_A$. Assim, existe uma flecha $T \to T^{'}$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$, donde $T^{'} \leq T$ e portanto, T não é minimal.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $f : T_0 \to T_1$ um monomorfismo não cindido com T_0, $T_1 \in \operatorname{add} T$. Então a sequência exata

$$0 \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f} T_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

não cinde.

Uma vez T é r-inclinante, T_0, $T_1 \in \operatorname{add} T$ e tal sequência não cinde, então, pelo Lema (4.2.3), existe um somando indecomponível T_i de T_0 tal que $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que todo monomorfismo em $\operatorname{add} T$ cinde e que existe $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$ para algum $1 \leq i \leq n$.

Como $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$, existe um monomorfismo $f : T_i \to T^{'}$ com $T^{'} \in \operatorname{add} T[i]$. Assim, como f é um monomorfismo cindido temos T_i somando de $T^{'}$, e daí $T_i \in \operatorname{add} T[i]$. $\square$

Esse Lema nos diz quando um elemento $T \in \Omega_A$ é minimal em termos dos morfismos em $\operatorname{add} T$. A seguir apresentaremos dois critérios envolvendo a importante subcategoria $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ de $\operatorname{mod} A$, definida por:

Para uma álgebra de Artin A, denotaremos por $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ a seguinte subcategoria de $\operatorname{mod} A$

$$\mathcal{P}^{<\infty}(A) = \{\, X \in \operatorname{mod} A \,:\, \operatorname{pd}_A X < \infty \,\}.$$

Em particular, se $\operatorname{dim. gl.} A < \infty$, então $\mathcal{P}^{<\infty}(A) = \operatorname{mod} A$.

Proposição 4.3.2. *Seja T um módulo r-inclinante. Então T é um elemento minimal em $(\Omega_A, \leq)$ se, e somente se, $T^{\perp} \cap \mathcal{P}^{<\infty}(A) = \operatorname{add} T$.*

Demonstração. Sabemos que $\operatorname{add} T \subset T^{\perp} \cap \mathcal{P}^{<\infty}(A)$. Seja $Z \in T^{\perp} \cap \mathcal{P}^{<\infty}(A)$.

Uma vez que $\operatorname{pd}_A Z < \infty$ e $Z \in T^{\perp} \subset \operatorname{Gen} T$ existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow T_s \xrightarrow{f_s} T_{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \tag{4.8}$$

com $T_i \in \operatorname{add} T$ para todo $1 \leq i \leq s$.

Suponhamos T minimal. Então, pelo Lema (4.3.1), não existe monomorfismo não cindido em $\operatorname{add} T$.

Usando indução sobre s, mostraremos que $Z \in \operatorname{add} T$.

Se $s = 1$, então (4.8) tem a forma

$$0 \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

e daí, como f_1 é um monomorfismo cindido temos $T_0 = Z \oplus T_1$, ou seja, $Z \in \operatorname{add} T$.

Suponhamos $s > 1$ e que para toda sequência da forma

$$0 \longrightarrow T_m \longrightarrow T_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

tenhamos $Z \in \operatorname{add} T$ para todo $1 \leq m < s$.

Uma vez que f_s é um monomorfismo em $\operatorname{add} T$ temos $\operatorname{Im} f_s = T' \in \operatorname{add} T$ e daí a sequência

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T_{s-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

é exata e tem comprimento menor que (4.8). Então da hipótese indutiva segue que $Z \in \operatorname{add} T$.

Logo $T^{\perp} \cap \mathcal{P}^{<\infty}(A) = \operatorname{add} T$.

Reciprocamente, suponhamos que T não seja minimal. Então existem uma flecha $T \to T'$ em $\vec{\mathcal{K}}^r_A$ com $T' = M \oplus Y$, $T = M \oplus X$ e uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

tais que X e Y são indecomponíveis e $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$.

Além disso, $Y \in T'^{\perp} \subset T^{\perp}$ o que implica $Y \in T^{\perp} \cap \mathcal{P}^{<\infty}(A)$, mas $Y \notin \operatorname{add} T$. □

Observação 4.3.3. *Se A é uma álgebra hereditária, então T é minimal em $(\Omega_A, \leq)$ se, e somente se, $T^{\perp} = \operatorname{add} T$.*

Teorema 4.3.4. *Seja A uma álgebra de Artin. Existe um elemento minimal em $(\Omega_A, \leq)$ se, e somente se, $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ é contravariante finita.*

Demonstração. Suponhamos $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ contravariante finita. Por [7], existe $T \in \Omega_A$ tal que para todo $M \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$, tem-se $\operatorname{Ext}^1_A(M, T) = 0$. Assim, dado um monomorfismo $f : T_1 \to T_0$ com T_0, $T_1 \operatorname{add} T$, temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f} T_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0\,.$$

Uma vez que $\operatorname{pd} T_i \leq r$ para $i = 0, 1$ segue que $\operatorname{pd} \operatorname{Coker} f < \infty$ e daí, $\operatorname{Coker} f \in$

$\mathcal{P}^{<\infty}(A)$. Assim, $\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}\, f, T_1) = 0$ pois $T_1 \in \mathrm{add}\, T$, donde tal sequência cinde e portanto, f é cindido.

Logo, não existe monomorfismo não cindido em $\mathrm{add}\, T$. Pelo Lema (4.3.1), T é minimal.

Reciprocamente, seja $T \in \Omega_A$ um elemento minimal. Então, pela Proposição (4.3.2) temos $T^{\perp} \cap \mathcal{P}^{<\infty}(A) = \mathrm{add}\, T$.

Mostraremos que T é uma cocobertura para $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$. Para isso, seja $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$. Uma vez que $T^{\perp}$ é covariantemente finita e corresolvente existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow F_X \longrightarrow Q_X \longrightarrow 0$$

com $F_X \in T^{\perp}$. Pelo Lema de Wakamatsu's $Q_X \in^{\perp} (T^{\perp})$ (ver [3], Lema 1.3). Afirmamos que $\mathrm{pd}\, Q_X < \infty$. De fato, sejam $r = \mathrm{pd}\, T$ e $Y \in \mathrm{mod}\, A$. Consideremos o começo de uma resolução injetiva de Y

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^r \longrightarrow \Omega^{-r} Y \longrightarrow 0$$

com I^j um A-módulo injetivo pata $0 \leq j \leq r$. Então $\Omega^{-r}Y \in T^{\perp}$. Uma vez que $Q_X \in^{\perp} (T^{\perp})$ segue que $\mathrm{Ext}_A^1(Q_X, \Omega^{-r}Y) = 0$. Logo, $\mathrm{Ext}_A^{r+1}(Q_X, Y) = 0$ e, portanto, $\mathrm{pd}\, Q_X \leq r$. Assim, $\mathrm{pd}\, F_X < \infty$ e daí, $F_X \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$, ou seja, $F_X \in \mathrm{add}\, T$ donde T é uma cocobertura de $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$.

Como T é minimal, pelo Lema (4.3.1)(2), nenhum somando direto de T pode ser uma cocobertura de $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$, pois todo somando direto T_i de T pertence a $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$. Logo, T é uma cocobertura minimal de $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ e, portanto, é Ext-injetivo em $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ por [4]. Logo, $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ é contravariantemente finita por [7]. $\square$

Observação 4.3.5. *Foi mostrado no Teorema* (4.3.4) *que se* $T \in \Omega_A$ *é um elemento minimal, então* T *é uma cocobertura minimal de* $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$.

Salientamos que existem álgebras de Artin A tal que $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ não é contravariantemente finita. Assim, são álgebras de Artin A tal que $(\Omega_A, \leq)$ não tem elemento minimal. Vejamos um exemplo onde tal fato ocorre.

Proposição 4.3.6. *Seja* $\mathcal{K}$ *um corpo algebricamente fechado e seja* A *a álgebra de caminhos dada pela aljava*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left=2, "\gamma"] & 2 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[l, shift left=2, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

com as relações $\alpha\gamma = \gamma\alpha = \gamma\beta = 0$. Então $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ não é contravariantemente finita.

Demonstração. Ver [12], Proposição 2.3 $\square$

Algumas consequências imediatas do Teorema (4.3.4) são

Corolário 4.3.7. $(\Omega_A, \leq)$ *contém, no máximo,um elemento minimal.*

Demonstração. Sejam T e T' dois elementos minimais de $(\Omega_A, \leq)$. Pelo Teorema (4.3.4), T e T' são cocoberturas minimais de $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ e portanto, se $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$ temos $\operatorname{Ext}_A^1(X, T) = \operatorname{Ext}_A^1(X, T') = 0$. Logo, existem monomorfismos $f : T \to T_0'$ e $g : T_0 \to T'$ tais que $T_0 \in \operatorname{add} T$ e $T_0' \in \operatorname{add} T'$.

Assim as seguintes sequências exatas

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{f} T_0' \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow T' \xrightarrow{g} T_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} g \longrightarrow 0$$

cindem. Donde $T' \in \operatorname{add} T$, $T \in \operatorname{add} T'$ e portanto, $T \cong T'$. $\square$

Corolário 4.3.8. *Se $\vec{\mathcal{K}}_A$ é finita então $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ é contravariantemente finita.*

Demonstração. Sendo $\vec{\mathcal{K}}_A$ finita, então ela tem uma componente conexa finita $\mathcal{C}$. Pelo Corolário (4.2.6), $\vec{\mathcal{K}}_A = \mathcal{C}$. Logo, $\vec{\mathcal{K}}_A$ tem um poço e portanto, $(\Omega_A, \leq)$ tem um elemento minimal.

Pelo Teorema (4.3.4), $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ é contravariantemente finita. $\square$

Antes de enunciarmos a próxima consequência observemos o

Lema 4.3.9. *Se $T \to T_1 \to \cdots \to T_r$ é um caminho em $\vec{\mathcal{K}}_A$ e $B = \operatorname{End}_A T$, então $B_B \to \operatorname{Hom}_A(T, T_1) \to \cdots \to \operatorname{Hom}_A(T, T_r)$ um caminho em $\vec{\mathcal{K}}_B$.*

Demonstração. Pela definição de flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$ segue que $T_i^{\perp} \subset T^{\perp}$ para todo $1 \leq i \leq r$.

Primeiro mostraremos que $\operatorname{Hom}_A(T, T_i)$ é um B-módulo r-inclinante.

(T_1) Uma vez que $T_i \in T^{\perp}$ temos $\operatorname{pd}_B \operatorname{Hom}_A(T, T_i) \leq \operatorname{pd}_A T_i < \infty$;

(T_2) Uma vez que $T_i \in T^\perp$ e $\mathrm{pd}_A T_i < \infty$ existe uma $\mathrm{add}\, T$-resolução minimal

$$0 \longrightarrow T^s \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^0 \longrightarrow T_i \longrightarrow 0$$

com $T^j \in \mathrm{add}\, T$ para todo $0 \leq j \leq s$.

Aplicando $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ obtemos uma resolução projetiva minimal

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, T^s) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, T^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, T_i) \longrightarrow 0 \tag{4.9}$$

para $N_i = \mathrm{Hom}_A(T, T_i)$. Assim, aplicando $\mathrm{Hom}_B(N_i, -)$ em (4.9) obtemos $\mathrm{Ext}^j_B(N_i, N_i) = 0$ para todo $j > 0$.

(T_3) ...

Agora mostraremos que se $T_1 \to T_2$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$ com $T_i \subset T^\perp$, $i = 1, 2$, então $\mathrm{Hom}_B(T, T_1) \to \mathrm{Hom}_B(T, T_2)$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_B$.

Pela definição de flecha temos que $T_2 = M \oplus X$, $T_1 = M \oplus Y$ e existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \mathrm{add}\, M$.

Aplicando $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, \tilde{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, Y) \longrightarrow 0$$

tais que $\mathrm{Hom}_A(T, \tilde{M}) \in \mathrm{add}\, \mathrm{Hom}_A(T, M)$, $\mathrm{Hom}_A(T, T_1) = \mathrm{Hom}_A(T, M) \oplus \mathrm{Hom}_A(T, Y)$ e $\mathrm{Hom}_A(T, T_2) = \mathrm{Hom}_A(T, M) \oplus \mathrm{Hom}_A(T, X)$.

Logo $\mathrm{Hom}_B(T, T_1) \to \mathrm{Hom}_B(T, T_2)$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}^r_B$ e portanto,

$$B_B \to \mathrm{Hom}_A(T, T_1) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_A(T, T_r)$$

é um caminho em $\vec{\mathcal{K}}^r_B$. $\square$

Corolário 4.3.10. *Seja T um módulo r-inclinante tal que $B = \mathrm{End}_A T$ é de representação de tipo finita. Então $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ é contravariantemente finita.*

Demonstração. Seja $T \to T_1 \to \cdots \to T_r$ um caminho em $\vec{\mathcal{K}}_A$. Pelo Lema (4.3.9), $B_B \to \mathrm{Hom}_A(T, T_1) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_A(T, T_r)$ é um caminho em $\vec{\mathcal{K}}_B$.

Como B é de representação de tipo finito segue que $\vec{\mathcal{K}}_B$ é finito. Assim, existe um caminho de comprimento finito em $\vec{\mathcal{K}}_A$ começando em T. Logo, a componente de $\vec{\mathcal{K}}_A$ contendo T tem um poço, digamos $T^{'}$.

Portanto, $T^{'}$ é um elemento minimal em $(\Omega_A, \leq)$ e o resultado segue do Teorema (4.3.4). $\square$

Capítulo 5

Estrutura local da aljava $\vec{\mathcal{K}}_A$

No capítulo anterior definimos a aljava $\vec{\mathcal{K}}_A$ e mostramos que $\mathcal{K}_A$ é o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado $(\Omega_A, \leq)$ além de estudamos os elementos minimais em $\vec{\mathcal{K}}_A$. Neste capítulo investigaremos a estrutura local de $\vec{\mathcal{K}}_A$, a saber, vamos estabelecer uma relação precisa entre o número de vizinhos de um dado vértice T e a $\operatorname{add} T$-corresolução de A_A na definição de módulo r-inclinante como também discutiremos o número e comprimento dos caminhos começando ou terminando nesse vértice.

5.1 Estrutura local de $\vec{\mathcal{K}}_A$ para álgebras hereditárias

Começamos investigando a estrutura local de $\vec{\mathcal{K}}_A$ para álgebras de Artin hereditárias. Assim, ao longo desta seção consideramos A uma álgebra de Artin hereditária, em particular, $r \leq 1$.

Dado um vértice $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ denotaremos por $s(T)$ (respectivamente $e(T)$) o número de flechas começando (repectivamente terminando) em T em $\vec{\mathcal{K}}_A$. Veja figura abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\circ^{1} \arrow[dr] & \cdots\cdots & \circ^{e(T)} \arrow[dl] \\
& \circ\, T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\circ_{1} & \cdots\cdots & \circ_{s(T)}
\end{tikzcd}$$

O resultado seguinte nos diz que o número de vizinhos de um dado vértice T em $\vec{\mathcal{K}}_A$ não pode ser superior ao posto de $K_0(A)$.

Lema 5.1.1. $s(T) + e(T) \leq n = \operatorname{rank} K_0(A)$.

Demonstração. Seja $T = \oplus_{i=1}^{n} T_i \in \vec{\mathcal{K}}_A$. Para cada $1 \leq i \leq n$, considere o módulo inclinante parcial quase completo $T[i]$. Para $T[i]$, temos um complemento indecomponível T_i.

Se $T_i \in \operatorname{Gen} T[i]$, então pela Observação (2.6.21), existe um único complemento $X_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$ de $T[i]$, e portanto, existe uma flecha $T[i] \oplus X_i \to T$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$.

Se $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$, então pela Observação (2.6.21), existe um único complemento $Y_i \in \operatorname{Gen} T[i]$ de $T[i]$, e portanto, existe uma flecha $T \to T[i] \oplus Y_i$.

Observe que $T_i \notin \operatorname{Gen} T[i] \cap \operatorname{Cogen} T[i]$, pois caso contrário pela Proposição (3.2.7) teríamos que $T[i]$ admitiria pelo menos três complementos não isomorfos X_i, Y_i e T_i. Mas, como A é uma álgebra hereditária isto contradiz a Proposição (3.1.2).

Logo, $s(T) + e(T) \leq n = \operatorname{rank} K_0(A)$. □

Uma consequência imediata desse lema é que se A é a álgebra de caminhos de uma aljava acíclica com n vértices, então o número de vizinhos de um dado vértice T de $\vec{\mathcal{K}}_A$ é menor ou igual a n.

Quando $s(T) + e(T) = \operatorname{rank} K_0(A)$ dizemos que T é **saturado**. Lembramos que um A-módulo M é dito **sincero** se, para todo A-módulo injetivo não nulo I, tem-se que $\operatorname{Hom}_A(M, I) \neq 0$. Claramente, todo módulo fiel é sincero.

Observação 5.1.2. *Observe que $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ é saturado se, e somente se, para cada somando indecomponível T_i de T temos $T_i \in \operatorname{Cogen} T[i]$ ou $T_i \in \operatorname{Gen} T[i]$.*

Observação 5.1.3. *$T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ é saturado se, e somente se, $T[i]$ é fiel, ou equivalentemente, sincero para cada $1 \leq i \leq n$.*

A seguir caracterizaremos vértices saturados através do seu vetor dimensão.

Proposição 5.1.4. *$T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ é saturado se, e somente se, $(\underline{\dim} T)_i \geq 2$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $1 \leq i \leq n$ com $(\underline{\dim} T)_i = 1$, escolha um somando direto indecomponível X de T com $(\underline{\dim} X)_i = 1$. Seja $T = M \oplus X$. Então $(\underline{\dim} M)_i = 0$ o que implica em $\operatorname{Hom}_A(e_i A, M) \cong M e_i = 0$, ou seja, M não é fiel.

Reciprocamente, suponhamos que T é não saturado. Então existe um somando direto indecomponível X de $T = M \oplus X$ tal que M não é sincero. Assim, existe um injetivo indecomponível I tal que $\operatorname{Hom}_A(M, I) = 0$.

Seja $B = \operatorname{End}_A T$. Então $\operatorname{Hom}_A(T, I)$ é um B-módulo indecomponível. Seja $P_X = \operatorname{Hom}_A(T, X)$ e $S_X = \operatorname{top} P_X$. Agora

$$\operatorname{Hom}_A(T, I) \cong S_X^{\dim \operatorname{Hom}_A(T,I)} \cong S_X^{\dim \operatorname{Hom}_A(X,I)}.$$

Uma vez que $\operatorname{Hom}_A(T, I)$ é indecomponível segue que $\dim \operatorname{Hom}_A(T, I) = 1$. Logo, existe $1 \leq i \leq n$ com $(\underline{\dim} T)_i = 1$. $\square$

Para o próximo resultado consideremos $T \in \Omega_A$, $B = \operatorname{End}_A T$, $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ um par de torção em $\operatorname{mod} B$ induzido por T, $T = M \oplus X$, $P_X = \operatorname{Hom}_A(T, X)$ e $S_X = \operatorname{top} P_X$.

Proposição 5.1.5. *Com as notações acima o seguinte ocorre.*

(1) $S_X \in \mathcal{X}(T)$ *se, e somente se,* $X \in \operatorname{Gen} M$.

(2) $X \in \operatorname{Cogen} M$ *se, e somente se,* $S_X \in \mathcal{Y}(T)$ *e* $T \otimes_B S_X$ *é não injetivo.*

Demonstração. (1) Suponhamos que $X \in \operatorname{Gen} M$. Então, pela Prposição (3.2.7) existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

com $M \oplus Y$ inclinante e $\tilde{M} \to X$ uma $\operatorname{add} M$-aproximação minimal à direita de X. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ em (5.1) obtemos a sequência exata de B-módulos

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, Y) \to \operatorname{Hom}_A(T, \tilde{M}) \to P_X \to \operatorname{Ext}^1_A(T, Y) \to 0.$$

Uma vez que A é hereditária segue que $1 \leq \operatorname{pd}_B \operatorname{Ext}^1_A(T, Y) \leq 2$. Se $\operatorname{pd}_B \operatorname{Ext}^1_A(T, Y) = 1$, então $\operatorname{Hom}_A(T, Y) = 0$ e daí $Y \in \mathcal{F}(T)$. Se $\operatorname{pd}_B \operatorname{Ext}^1_A(T, Y) = 2$, então $\operatorname{Hom}_A(T, Y)$ é um B-módulo projetivo o que implica em $Y \in \operatorname{add} T$, mas isto contradiz o fato de X não ser isomorfo a Y. Logo $Y \in \mathcal{F}(T)$ e, portanto, $\operatorname{Ext}^1_A(T, Y) \in \mathcal{X}(T)$. E como $\operatorname{Ext}^1_A(T, Y) \cong S_X$ temos $S_X \in \mathcal{X}(T)$.

Reciprocamente, seja $S_X \in \mathcal{Y}(T)$. Consideremos a sequência exta de B-módulos

$$0 \longrightarrow K_X \longrightarrow P_X \longrightarrow S_X \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

Como $P_X \in \mathcal{Y}(T)$, que é fechado para kernels, e (5.2) é exata temos $K_X \in \mathcal{Y}(T)$.

Agora $\operatorname{End} X$ é um anel com divisão, pois X é um somando direto indecomponível de um módulo inclinante. Pela teoria de inclinação, inferimos que o mesmo ocorre com $\operatorname{End} P_X$. Consequentemente, S_X não é um fator de composição de K_X e daí, $K_X \in \operatorname{Gen} \operatorname{Hom}_A(T, M)$. Mas isto implica que $X \in \operatorname{Gen} M$.

(2) Suponhamos que $X \operatorname{Cogen} M$. Pela Proposição (3.2.7) existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \tag{5.3}$$

com $M \oplus Y$ um módulo inclinante e $X \to \tilde{M}$ uma $\operatorname{add} M$-aproximação minimal à esquerda de X. Aplicando o funtor exato $\operatorname{Hom}_A(T, -)_{|\operatorname{Gen} T}$ em (5.3) obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow P_X \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, \tilde{M}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, Y) \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

Aplicando $\operatorname{Hom}_B(-, S_X)$ em (5.4) obtemos a sequência exata

$$\ldots \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T, \tilde{M}), S_X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(P_X, S_X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T, Y), S_X) \longrightarrow 0$$

Como $\operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T, \tilde{M}), S_X) = 0$ temos $\operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T, Y), S_X) \cong \operatorname{Hom}_B(P_X, S_X) \neq 0$ o que implica $\operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T, Y), S_X) \neq 0$. Como $Y \in \operatorname{Gen} T = \mathcal{T}(T)$ temos $\operatorname{Hom}_A(T, Y) \in \mathcal{Y}(T)$.

Agora, observe que A hereditária implica $\operatorname{dim.gl.} A \leq 1$, donde $\operatorname{id} \mathcal{F}(T) \leq 1$. Logo, pelo Teorema (2.5.6), $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ é escindido e daí $S_X \in \mathcal{Y}(T)$. Como $X \in \operatorname{Cogen} M$, temos que M é sincero. Suponhamos que $T \otimes_B S_X = I$ é um A-módulo injetivo. Então $\operatorname{Hom}_A(M, I) = S_X$. Note que, $\operatorname{Hom}_A(X, I) \cong \operatorname{Hom}_A(P_X, S_X) \neq 0$ implica $\operatorname{Hom}_A(M, I) = 0$. Logo, M não é sincero, o que é uma contradição. Portanto, $T \otimes_B S_X = I$ é um A-módulo não injetivo.

Reciprocamente, sejam $S_X \in \mathcal{Y}(T)$ e $T \otimes_B S_X$ um A-módulo não injetivo. Suponhamos, por contradição, que $X \notin \operatorname{Cogen} M$. Como $S_X \in \mathcal{Y}(T)$ temos, por (1), que $X \notin \operatorname{Gen} M$. Logo M não é sincero e, portanto, M não é fiel. Assim, existe um A-módulo injetivo indecomponível I com $\operatorname{Hom}_A(M, I) = 0$ e $\operatorname{Hom}_A(T, I) = S_X$. Pelo Teorema de Inclinação temos que $T \otimes_B S_X = I$, contradizendo o fato que $T \otimes_B S_X$ é um A-módulo não injetivo. $\square$

Uma caracterização teórica de vértices saturados é

Corolário 5.1.6. *Seja $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ e $B = \operatorname{End} T$. Então T é saturado se, e somente se, para todo B-módulo simples $S \in \mathcal{Y}(T)$ o A-módulo $T \otimes_B S$ é não injetivo.*

Demonstração. Suponhamos $T = M \oplus X$ saturado e seja $S = S_X \in \mathcal{Y}(T)$ um B-módulo simples. Uma vez que $S_X \in \mathcal{Y}(T)$ temos $S_X \notin \mathcal{X}(T)$ e pela Proposição (5.1.5)(1) segue que $X \notin \operatorname{Gen} M$.

Como T é saturado temos $X \in \operatorname{Cogen} M$. Logo, pela Proposição (5.1.5)(2), $T \otimes_B S_X$ é não injetivo.

Reciprocamente, seja $T = M \oplus X$ com X indecomponível. Se $S_X \in \mathcal{X}(T)$, então, pela Proposição (5.1.5)(1), $X \in \operatorname{Gen} M$. Se $S_X \in \mathcal{Y}(T)$, então, pela Proposição (5.1.5)(2), $X \in \operatorname{Cogen} M$ pois $T \otimes_B S_X$ é não injetivo.

Logo, para todo somando direto indecomponível X de T temos $X \in \operatorname{Cogen} M$ ou $X \in \operatorname{Gen} M$ e, portanto, T é saturado. $\square$

Seja $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$. Consideremos as seguintes $\operatorname{add} T$-resoluções minimais:

$$0 \longrightarrow {}_AA \longrightarrow T^0 \longrightarrow T^1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow DA_A \longrightarrow 0$$

O próximo resultado nos dará uma relação entre o número de flechas começando/terminando num dado vértice $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ e as $\operatorname{add} T$-resoluções minimais acima.

Proposição 5.1.7. *$s(T) = n - \delta(T_0) = \delta(T_1)$ e $e(T) = n - \delta(T^0) = \delta(T^1)$.*

Demonstração. Sabemos que $DA_A \in T^{\perp}$ e $DA_A \notin \operatorname{add} T$. Então, pelo Lema (4.2.4) temos $\operatorname{add} T_0 \cap \operatorname{add} T_1 = 0$. Daí e da Observação (2.6.20) segue que $\operatorname{add} T$ pode ser escrito como a seguinte união disjunta $\operatorname{add} T = \operatorname{add} T_0 \cup \operatorname{add} T_1$. Logo $\delta(T) = \delta(T_0) + \delta(T_1)$ e, portanto, $n - \delta(T_0) = \delta(T_1)$.

Dualmente prova-se que $n - \delta(T^0) = \delta(T^1)$. $\square$

Uma consequência imediata dessa proposição é

Corolário 5.1.8. *$T \in \vec{\mathcal{K}}_A$ é saturado se, e somente se, $n = \delta(T^0) + \delta(T_0)$. Em particular, A_A é não saturado.*

Demonstração. Temos as seguintes equivalências: T é saturado $\Leftrightarrow s(T) + e(T) = n \Leftrightarrow n = n - \delta(T_0) + n - \delta(T^0) \Leftrightarrow n = \delta(T_0) + \delta(T^0)$.

Uma vez que A_A é uma fonte em $\vec{\mathcal{K}}_A$ temos $e(A) = 0$, donde $\delta(A^0) = n$. E como $\delta(A_0) \neq 0$ segue que $\delta(A^0) + \delta(A_0) \neq n$ e consequentemente, T é não saturado. $\square$

5.2 Estrutura local de $\vec{\mathcal{K}}_A$ para álgebras arbitrárias

Nesta seção, seja A uma álgebra de Artin arbitrária. Nosso objetivo aqui é investigar certos caminhos começando ou terminando num dado vértice $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$. Para provarmos o principal resultado do capítulo, começamos fazendo algumas preparações.

Lema 5.2.1. *Sejam A uma álgebra de Artin, M um A-módulo r-inclinante parcial quase completo, $T = M \oplus X$ um A-módulo r-inclinante e*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow V \xrightarrow{f} D(A_A) \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

uma $\operatorname{add} T$*-aproximação minimal à direita de $D(A_A)$. Então $V \in \operatorname{add} M$ se, e somente se, $X \in \operatorname{Cogen} M$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $V \in \operatorname{add} M$. Seja $X \in \operatorname{mod} A$ e $\mu : X \to D(A_A)^s$ um monomorfismo para algum $s > 0$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ em (5.5) obtemos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, V) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Hom}_A(T, D(A_A))$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T, K) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T, V) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T, D(A_A))$$

Uma vez que f é uma $\operatorname{add} T$-aproximação minimal à direita de $D(A_A)$ temos que δ é sobrejetor, donde $\operatorname{Ext}^1_A(T, K) = 0$, em particular, $\operatorname{Ext}^1_A(X, K) = 0$. Mas isto implica que μ se fatora sobre $V^s \to (D(A_A))^s \to 0$, ou seja, $X \in \operatorname{Cogen} V$ e portanto, $X \in \operatorname{Cogen} M$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $X \in \operatorname{Cogen} M$. Pela Proposição (3.2.7), M é fiel e existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

com $\tilde{M} \in \operatorname{add} M$ e $M \oplus Y$ r-inclinante. Além disso, seja

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow M' \longrightarrow D(A_A) \longrightarrow 0 \tag{5.6}$$

uma $\operatorname{add} M$-aproximação minimal à direita de $D(A_A)$.

Aplicando $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ em (5.6) obtemos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,K^{'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,M^{'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,D(A_A))$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,K^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,M^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,D(A_A))$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(T,K^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(T,M^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(T,D(A_A)) \cdots$$

Como $K^{'} \in T^{\perp}$ segue que $\mathrm{Ext}^i_A(T,K^{'}) = 0$ para todo $i > 0$, em particular, $\mathrm{Ext}^i_A(X,K^{'}) = 0$ para todo $i > 0$.

Por outro lado, aplicando $\mathrm{Hom}_A(Y,-)$ em (5.6) obtemos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,K^{'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,M^{'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,D(A_A))$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,K^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,M^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,D(A_A))$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(Y,K^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(Y,M^{'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(Y,D(A_A)) \cdots$$

Uma vez que $M \oplus Y$ é r-inclinante e $D(A_A)$ é injetivo temos $\mathrm{Ext}^i_A(Y,K^{'}) = \mathrm{Ext}^i_A(Y,M^{'}) = 0$ para todo $i > 1$.

Logo (5.6) é uma $\mathrm{add}\, T$-aproximação minimal à direita de $D(A_A)$ e, portanto, $V \in \mathrm{add}\, M$. $\square$

Nós também usaremos o dual do Lema (5.2.1) que é o

Lema 5.2.2. *Seja A uma álgebra de Artin e M um módulo r-inclinante parcial quase completo. Seja $T = M \oplus X$ um módulo r-inclinante. Seja*

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow W \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

uma add T*-aproximação minimal à esquerda de* A_A. *Então* $W \in \operatorname{add} M$ *se, e somente se,* $X \in \operatorname{Gen} M$.

Para o próximo resultado necessitamos das seguintes notações:

No Teorema (3.2.10) estabelecemos uma relação entre complementos não isomorfos para um módulo r-inclinante parcial quase completo M. A partir dessa relação, consideremos X um complemento para M, digamos $X = X_n$ para algum n. Dizemos que o número de complementos para M precedendo X é $n+1$. Se existem somente $s+1$ complementos para M, dizemos que o número número de complementos para M sucedendo X é $s+1-n$. Caso contrário, dizemos que existem infinitos complementos para M sucedendo X. Em seguida daremos outra importante notação.

Para $T \in \vec{\mathcal{K}}_A$, consideremos as duas add T-resoluções minimais seguintes:

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^r \longrightarrow 0 \tag{5.7}$$

$$\cdots \longrightarrow T_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_0 \longrightarrow DA_A \longrightarrow 0 \tag{5.8}$$

Seja X um somando direto indecomponível de T. Escolhemos $i(X)$ como sendo o menor inteiro tal que X é um somando direto de $T^{i(X)}$. Segue da Observação (2.6.20) que cada somando direto indecomponível X de T tem que ocorrer em (5.7), assim $i(X)$ está bem definida. Se X ocorre em (5.8), escolhemos $j(X)$ como sendo o menor inteiro tal que X é um somando direto de $T_{j(X)}$. Caso contrário, dizemos $j(X) = \infty$.

Lema 5.2.3. *Seja* T *um módulo* r*-inclinante e seja* X *um somando direto indecomponível de* $T = M \oplus X$. *Então o número de complementos para* M *precedendo* X *é* $i(X)+1$.

Demonstração. Seja

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^s \longrightarrow 0$$

uma add T-resolução minimal de A_A. Faremos a prova usando indução sobre $i(X)$.

Se $i(X) = 0$, então X é um somando direto de T^0, isto é, $X \in \operatorname{add} T^0$, em particular, $T^0 \notin \operatorname{add} M$. Pelo Lema (5.2.2), temos $X \notin \operatorname{Gen} M$ e, consequentemente, X é um complemento fonte para M. Logo, existe um único complemento para M precedendo X_r.

Se $i(X) > 0$, seja $X = X_r$. Consideremos a sequência exata longa de complementos para M precedendo X

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{r-1} \longrightarrow X_r \longrightarrow 0$$

com $M^i \in \operatorname{add} M$ para $1 \leq i \leq r-1$. Além disso, seja $0 \to X_{r-1} \to M^{r-1} \to X_r \to 0$ a sequência conexão. Seja $T^{'} = M \oplus X_{r-1}$. Logo a quantidade de complementos para M precedendo X_{r-1} é r. Por indução, temos $r = i(X_{r-1}) + 1$.

Consideremos o começo da $\operatorname{add} T^{'}$-resolução minimal de A_A:

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T^{'0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^{'r} \longrightarrow 0 \tag{5.9}$$

Por construção, temos que $X_{r-1} \in \operatorname{add} T^{'r-1}$ e $T^{'i} \in \operatorname{add} M$ para $0 \leq i < r-1$. A partir de (5.9), considere a sequência exata $0 \to Q^{r-2} \to T^{'r-1} \to Q^{r-1} \to 0$.

Uma vez que $T^{'r-1} = \bar{M} \oplus X^t$, com $\bar{M} \in \operatorname{add} M$, e $X_{r-1} \in \operatorname{Cogen} M$ temos que $T^{'r-1} \in \operatorname{Cogen} M$ e, portanto, $Q^{r-2} \in \operatorname{Cogen} M$. Agora, seja

$$0 \longrightarrow Q^{r-2} \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow Q^{'r-1} \longrightarrow 0 \tag{5.10}$$

uma $\operatorname{add} M$-aproximação minimal à esquerda de Q^{r-2}. Agora temos $\operatorname{Ext}^i_A(Q^{'r-1}, X_r) = \operatorname{Ext}^{i+1}_A(Q^{'r-1}, X_{r-1}) = \operatorname{Ext}^i_A(Q^{r-2}, X_{r-1}) = 0$. Logo, (5.10) é também uma $\operatorname{add} T$-aproximação minimal à esquerda de Q^{r-2}. Por isso, temos que $r \leq i(X_r)$. Então $Q^{'r-1} \operatorname{Gen} M$ e a $\operatorname{add} M$-aproximação minimal à esquerda $0 \longrightarrow Q^{'r-1} \longrightarrow M^{'} \longrightarrow Q^r \longrightarrow 0$ de $Q^{'r-1}$ é também uma $\operatorname{add} T$-aproximação minimal à esquerda de $Q^{'r-1}$. Logo, $\operatorname{Ext}^i_A(Q^r, X_r) = 0$. Mas, $0 = \operatorname{Ext}^i_A(Q^r, X_r) = \operatorname{Ext}^{i+1}_A(Q^r, X_{r-1}) = \operatorname{Ext}^i_A(Q^{'r-1}, X_{1-1})$ mostra que (5.10) é também uma $\operatorname{add} T^{'}$-aproximação minimal à esquerda, contradizendo $i(X_{r-1}) = r-1$.

□

Usaremos também o dual do Lema (5.2.3)

Lema 5.2.4. *Seja T um módulo inclinante e seja X um somando direto indecomponível de $T = M \oplus X$. Então o número de complementos para M sucedendo X é $j(X) + 1$.*

Agora estamos prontos para demonstrarmos o principal teorema da seção

Teorema 5.2.5. *Para cada somando direto indecomponível X de T, existem um caminho $w(X)$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ de comprimento $i(X)$ terminando em T e um caminho $u(X)$*

em $\vec{\mathcal{K}}_A$ de comprimento $j(X)$ começando em T. Estes caminhos são dois a dois disjuntos.

Demonstração. Seja X um somando direto indecomponível de $T = M \oplus X$. Pelo Lema (5.2.3), o número de complementos para M precedendo X é $i(X) + 1$, digamos que $i(X) = t$. Consideremos a sequência exata longa de complementos para M precedendo $X = X_t$

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{t-1} \longrightarrow X_t \longrightarrow 0$$

com $M^i \in \operatorname{add} M$ para $1 \leq i \leq t-1$ e X_0 complemento fonte para M. Para cada $0 \leq i \leq t$, considere o módulo inclinante $T_i = M \oplus X_i$.

Agora, observe que para cada $1 \leq j \leq t$ temos a sequência conexão

$$0 \longrightarrow X_{j-1} \longrightarrow M^{j-1} \longrightarrow X_j \longrightarrow 0$$

com $M^{j-1} \in \operatorname{add} M$, e portanto, $T_{j-1} \to T_j$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$ para cada $1 \leq j \leq t$.

Logo

$$T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_{t-1} \to T_t$$

é um caminho de comprimento $i(X) + 1$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ terminando em T.

Pelo Lema (5.2.4), o número de complementos para M sucedendo X é $j(X) + 1$, digamos que $j(X) = k$. Consideremos a sequência exata longa de complementos para M sucedendo $X = X_t$

$$0 \longrightarrow X_t \longrightarrow M^t \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X_k \longrightarrow 0$$

com $M^i \in \operatorname{add} M$ para $t \leq i \leq k$ e X_0 complemento fonte para M. Para cada $t \leq i \leq k$, considere o módulo inclinante $T_i = M \oplus X_i$.

Agora, observe que para cada $t \leq j < k$ temos a sequência conexão

$$0 \longrightarrow X_j \longrightarrow M^j \longrightarrow X_k \longrightarrow 0$$

com $M^j \in \operatorname{add} M$, e portanto, $T_j \to T_{j+1}$ é uma flecha em $\vec{\mathcal{K}}_A$ para cada $t \leq j \leq k$.

Logo

$$T_t \to T_{t+1} \to \cdots \to T_{k-1} \to T_k$$

é um caminho de comprimento $j(X) + 1$ em $\vec{\mathcal{K}}_A$ começando em T

Agora mostraremos que os caminhos são dois a dois disjuntos. Para isso, seja $T = M \oplus X = N \oplus Y \in \vec{\mathcal{K}}_A$ com X e Y indecomponíveis e não isomorfos. Assim, X é um somando direto de N e Y é um somando direto de M.

Sejam

$$T_{i(X)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow M \oplus X \longrightarrow T^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^{j(X)}$$

e

$$\bar{T}_{i(Y)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bar{T}_1 \longrightarrow N \oplus Y \longrightarrow \bar{T}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bar{T}^{j(Y)}$$

caminhos em $\vec{\mathcal{K}}_A$ obtidos como anteriormente. Suponhamos, por contradição, que esses caminhos não são disjuntos. Uma vez que $\vec{\mathcal{K}}_A$ não contém ciclos orientados existem i e j tal que $T_i = \bar{T}_j$ ou $T^i = \bar{T}^j$. Assumimos que $T_i = \bar{T}_j$. Por construção, temos que $T_i = M \oplus X_i$ para algum complemento X_i para M e $\bar{T}_j = N \oplus Y_j$ para algum complemento Y_j para N.

Como X não é isomorfo a Y segue que M não é isomorfo a N e daí, X_i não é isomorfo a Y_j. Assim, X_i é um somando direto de N. Uma vez que $\mathrm{Ext}_A^r(N, N) = 0$ para todo $r > 0$ e X, X_i são somandos direto de N temos que $\mathrm{Ext}_A^r(X, X_i) = 0$ para todo $r > 0$. Mas pelo Teorema (3.2.10), temos que $\mathrm{Ext}_A^i(X, X_i) \neq 0$, uma contradição.

O caso em que $T^i = \bar{T}^j$ é análogo. $\square$

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Categoria

Aqui apresentaremos os conceitos básicos de categoria que necessitaremos.

Definição 6.1.1. *Uma categoria é uma tripla* $\mathcal{C} = (\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_0), \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_0), \circ)$, *onde:*

(1) $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *é chamada* ***classe de objetos*** *cujos elementos são chamados* ***objetos*** *de* $\mathcal{C}$*;*

(2) $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_0)$ *é chamada* ***classe de morfismos*** *onde para cada par* (x, y) *de objetos, define-se um conjunto de morfismos, denotado por* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$*, cujos elementos são chamados* ***morfismos*** *(de* $\mathcal{C}$*) de* x *para* y*, tal que se* $(x, y) \neq (x^{'}, y^{'})$*, então* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x^{'}, y^{'}) = \emptyset$*;*

(3) $\circ$ *é uma operação binária parcial sobre os morfismos em* $\mathcal{C}$*, onde para cada tripla* (x, y, z) *de objetos de* $\mathcal{C}$*, a aplicação*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$$

é chamada ***composição de morfismos*** *e satisfaz as condições:*

(*a*) *Se* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$*,* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ *e* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)$*, então* $h \circ (f \circ g) = (h \circ g) \circ f$*;*

(*b*) *Para todo objeto* x *de* $\mathcal{C}$*, existe um morfismo*

$$1_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$$

chamado ***morfismo identidade*** *em x e tal que se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$, então $f \circ 1_x = f$ e $1_x \circ g = g$.*

Denotaremos de agora em diante a composição $f \circ g$ por fg.

Sejam $x, y \in \mathcal{C}_0$. Um morfismo $h : x \to x$ é chamado **endomorfismo** de x. Um morfismo $\mu : x \to y$ é chamado **monomorfismo** se para cada objeto $z \in \mathcal{C}_0$ e cada par de morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, x)$ tal que $\mu f = \mu g$, temos $f = g$. Um morfismo $\nu : x \to y$ é chamado **epimorfismo** se para cada objeto $z \in \mathcal{C}_0$ e cada par de morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$ tal que $f\nu = g\nu$, temos $f = g$. Um morfismo $\eta : x \to y$ é chamado **isomorfismo** se existe um morfismo $\nu : y \to x$ tal que $\eta\nu = 1_y$ e $\nu\eta = 1_x$. Neste caso, x e y são ditos isomorfos, e representamos com a notação $x \cong y$.

Definição 6.1.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma* ***categoria aditiva*** *quando são satisfeita as seguintes condições:*

(*a*) *Para cada conjunto finito de objetos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existe a soma direta $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ em $\mathcal{C}$.*

(*b*) *Para todo x e y objetos em $\mathcal{C}$ o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ tem estrutura de grupo abeliano.*

(*c*) *A composição de morfismos em $\mathcal{C}$ é bilinear.*

(*d*) *Existe um objeto $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, chamado objeto zero de $\mathcal{C}$, tal que o morfismo identidade 1_0 é o elemento zero do grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$.*

Definição 6.1.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma* ***subcategoria*** *de $\mathcal{C}$ quando são satisfeita as seguintes condições:*

(*a*) $\mathrm{Obj}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

(*b*) *Para todo $x, y \in \mathcal{C}$, tem-se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x, y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$.*

(*c*) *A composição de morfismos em $\mathcal{B}$ é igual a composição em $\mathcal{C}$.*

(*d*) *Para cada objeto $x \in \mathcal{B}$, o morfismo identidade 1_x em $\mathcal{B}$ é o mesmo que em $\mathcal{C}$.*

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{B}$ uma subcategoria de $\mathcal{C}$.

Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{B}$ da categoria $\mathcal{C}$ é uma **subcategoria plena** quando, para todo x e y objetos em $\mathcal{B}$ tem-se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$. Dizemos que

$\mathcal{C}$ é uma **categoria abeliana** quando é uma categoria aditiva, cada morfismo em $\mathcal{C}$ tem kernel, cokernel em $\mathcal{C}$ e vale o primeiro teorema do isomorfismo. Dizemos que $\mathcal{B}$ é **fechada para soma direta** quando para todo x e y objetos de $\mathcal{B}$ temos que $x \oplus y$ é um objeto de $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é **fechado por somandos diretos** quando para todo x objeto de $\mathcal{B}$, com $x = y \oplus z$, tem-se que y e z são objetos de $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é **fechada para isomorfismos** quando para todo objeto y de $\mathcal{C}$ tal que existe x objeto de $\mathcal{B}$ isomorfo a y temos que y é um objeto de $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é **fechada por extensões** se para toda sequência exata curta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ em $\mathcal{C}$ com L, $N \in \mathcal{B}$ tem-se $M \in \mathcal{B}$.

Para mais informações sobre a teoria básica de categorias ver [2].

6.2 Funtores

A seguir apresentaremos algumas noções básicas de funtores utilizadas no texto.

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias.

Um **funtor covariante** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma aplicação que associa:

- a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ um objeto $F(X) \in \mathcal{D}$ e
- a cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em $\mathcal{D}$, tal que $F(1_X) = 1_{F(X)}$ e $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, para todos os objetos X e Y em $\mathcal{C}$ e todos os morfismos f e g em $\mathcal{C}$.

Um **funtor contravariante** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma aplicação que associa:

- a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ um objeto $F(X) \in \mathcal{D}$ e
- a cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ um morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$ em $\mathcal{D}$, tal que $F(1_X) = 1_{F(X)}$ e $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, para todos os objetos X e Y em $\mathcal{C}$ e todos os morfismos f e g em $\mathcal{C}$.

Definição 6.2.1. *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores. Um **morfismo funtorial** $\Psi : F \to G$ é uma família $\Psi = \{ \Psi_X \}_{X \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{C}}$ de morfismos $\Psi_X : F(X) \to G(X)$ tal* *que, para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\Psi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

*é comutativo. Chamamos Ψ de **isomorfismo funtorial** se, para cada $X \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}$, o morfismo $\Psi_X : F(X) \to G(X)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$.*

Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é chamado uma **equivalência de categorias** se existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos funtoriais $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to GF$ e $\Phi : 1_{\mathcal{D}} \to FG$, onde $1_{\mathcal{C}}$ e $1_{\mathcal{D}}$ são os funtores identidade de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Neste caso, o funtor G é chamado **quase-inverso** de F.

Um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias se o funtor covariante induzido $F : \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{C}$ é uma equivalência de categorias. Neste caso, F é chamado uma **dualidade.**

Seja K um corpo, A uma K-álgebra de dimensão finita e A^{op} sua álgebra oposta definida em [2], pg. 4. Um examplo importante de dualidade utilizado no texto é a **dualidade canônica** $D = \operatorname{Hom}_K(-, K) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op}$ (ver [2], pg. 12), entre a categoria $\operatorname{mod} A$ dos A-módulos à direita finitamente gerados e a categoria $\operatorname{mod} A^{op}$ dos A-módulos à esquerda finitamente gerados.

Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é chamado denso se, para cada objeto B de $\mathcal{D}$, existe um objeto A de $\mathcal{C}$ tal que $F(A) \cong B$. Dizemos que F é **pleno** se a aplicação

$$F_{XY} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

dada por $f \longmapsto F(f)$, é sobrejetora para todos objetos X e Y de $\mathcal{C}$. Se F_{XY} é injetor para todos objetos X e Y de $\mathcal{C}$, dizemos que F é **fiel**.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor covariante entre categorias aditivas. Dizemos que F **preserva somas diretas** se, para quaisquer objetos X e Y de $\mathcal{C}$, os morfismos $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(X \oplus Y) \xleftarrow{F(g)} F(Y)$ induzido pelas inclusões canônicas nos somandos diretos $X \xrightarrow{f} X \oplus Y \xleftarrow{g} Y$ nos dá um isomorfismo $F(X) \oplus F(Y) \cong F(X \oplus Y)$. Dizemos que F é **aditivo** se F preserva somas diretas, e, para quaisquer objetos X e Y de $\mathcal{C}$, a aplicação $F_{XY} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, dada por $f \longmapsto F(f)$, satisfaz $F(f+g) = F(f) + F(g)$ para quaisquer f e g em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor covariante aditivo entre categorias abelianas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Dizemos que F é **exato à esquerda** (ou **exato à direita**) se, para qualquer sequência exata $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ (ou a sequência exata $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$) em $\mathcal{C}$, a sequência exata induzida $F(X) \xrightarrow{T(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$ (ou a sequência exata $0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$) é exata em $\mathcal{D}$. Dizemos que F é **exato** quando é exato à direita e à esquerda. Analogamente definimos quando um funtor contravariante aditivo entre categorias abelianas é exato à esquerda, exato à direita e exato.

Teorema 6.2.2. *Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, F é denso, pleno e fiel.*

Demonstração. Ver [2], pg. 412. □

A seguir apresentaremos dois funtores utilizados no texto. Para maiores detalhes dos resultados e definições abaixo ver [2].

Seja A uma K-álgebra. Para cada $n \geq 0$, o n-ésimo bifuntor extensão

$$\mathrm{Ext}_A^n : (\mathrm{mod}\, A)^{op} \times \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, K$$

é definido da seguinte maneira:

Dados dois A-módulos M e N, começamos com uma resolução projetiva de M

$$\cdots \longrightarrow P_{m+1} \xrightarrow{h_{m+1}} P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e aplicamos $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ para obtermos o complexo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(h_1,N)} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_m,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(h_{m+1},N)} \mathrm{Hom}_A(P_{m+1},N) \longrightarrow \cdots$$

de K-espaços vetoriais. Definimos

$$\mathrm{Ext}_A^n(M,N) = \ker\, \mathrm{Hom}_A(h_{n+1},N) / \operatorname{Im} \mathrm{Hom}_A(h_n,N).$$

Assim, temos os seguintes funtores:

O funtor covariante aditivo $\operatorname{Ext}_A^n(M,-) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} K$ e o funtor contravariante aditivo $\operatorname{Ext}_A^n(-,N) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} K$.

Teorema 6.2.3. *(a) Para quaisquer A-módulos M e N existe um isomorfismo funtorial* $\operatorname{Ext}_A^0(M,N) \cong \operatorname{Hom}_A(M,N)$.

(b) Sejam M e N A-módulos. Então toda sequência exata curta $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *em* $\operatorname{mod} A$ *induz duas sequências exatas longas*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,Z)$$

$$\xrightarrow{\delta_0} \operatorname{Ext}_A^1(M,X) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(M,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(M,Z)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \operatorname{Ext}_A^n(M,X) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M,Z)$$

$$\xrightarrow{\delta_n} \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M,X) \ldots$$

e

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Z,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Y,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X,N)$$

$$\xrightarrow{\delta_0} \operatorname{Ext}_A^1(Z,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(Y,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(X,N)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \operatorname{Ext}_A^n(Z,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(Y,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(X,N)$$

$$\xrightarrow{\delta_n} \operatorname{Ext}_A^{n+1}(Z,N) \ldots$$

Para cada $n \geq 0$, definimos o n-ésimo**bifuntor torção**

$$\operatorname{Tor}_n^A : \operatorname{mod} A \times \operatorname{mod} A^{op} \to \operatorname{mod} K$$

como o seguinte. Dado um A-módulo à direita M e um A^{op}-módulo à direita N, começamos com uma resolução projetiva $P_\bullet$ de M e aplicando $-\otimes_A N$ em $P_\bullet$ obtemos o complexo

$$\cdots \longrightarrow P_m \otimes_A N \xrightarrow{h_m\otimes 1} P_{m-1} \otimes_A N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A N \xrightarrow{h_1\otimes 1} P_0 \otimes_A N \longrightarrow 0$$

de K-espaços vetoriais. Definimos

$$\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = \ker(h_m \otimes 1)/\operatorname{Im}(h_{m+1} \otimes 1)$$

Assim, temos dois funtores covariantes aditivos, a saber, $\mathrm{Tor}_n^A(M,-) : \operatorname{mod} A^{op} \to \operatorname{mod} K$ e $\mathrm{Tor}_n^A(-,N) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} K$.

Teorema 6.2.4. *Seja A uma K-álgebra e M um A-módulo à direita. Então para todo A^{op}-módulo à direita N, existe um isomorfismo funtorial de K-espaços vetoriais $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) = M \otimes_A N$.*

6.3 Construindo o diagrama *push-out*

A seguir apresentaremos a contrução do diagrama *push-out*. Para maiores detalhes dos resultados e definições abaixo ver [13].

Definição 6.3.1. *Sejam M, M' e N A-módulos e sejam $f : M \to N$, $g : M' \to N$ morfismos. Definimos o **pull-back** de f e g como*

$$X = \{\,(a,b) \in M \oplus M' \mid f(a) = g(b)\,\}.$$

Observação 6.3.2. *Na definição acima, X é submódulo de $M \oplus M'$.*

Com as notações acima, temos:

Lema 6.3.3. *Sejam π_1, $\pi_2 : X \to M \oplus M'$ são as projeções das por $\pi_1(a,b) = a$ e $\pi_2(a,b) = b$. Então:*

(a) *Existe um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_2} & M' \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

(b) *Se f é monomorfismo, então π_2 é monomorfismo.*

(c) *Se f é epimorfismo, então π_2 é epimorfismo.*

(d) *Suponhamos que* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ *seja uma sequência exata curta em* $\operatorname{mod} A$, *e seja* $h^{'} : L \to X$ *dado por* $h^{'}(n) = (h(n), 0)$. *Então o seguinte diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h^{'}} & X & \xrightarrow{\pi_2} & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \Vert & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é comutativo com filas exatas.

Definição 6.3.4. *Sejam L, M e $M^{'}$ A-módulos e sejam $f : L \to M$, $g : L \to M^{'}$ morfismos. Definimos o* ***push-out*** *de f e g como*

$$Y = (M \oplus M^{'})/\{(f(l), -g(l)) \,|\, l \in L\}.$$

Lema 6.3.5. *Sejam $u_1 : M \to Y$ $u_2 : M^{'} \to Y$ morfismos de A-módulos dados por $u_1(m) = \overline{(m, 0)}$ e $u_2(m^{'}) = \overline{(0, m^{'})}$, onde $\overline{(a, a^{'})}$ denota a classe de $(a, a^{'}) \in M \oplus M^{'}$ em Y. Então:*

(a) Existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "u_1"] \\ M' \arrow[r, "u_2"] & Y \end{tikzcd}$$

(b) Se $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$ *é uma sequência exata em* $\operatorname{mod} A$ *e* $h' : Y \to N$ *é um morfismo dado por* $h'\overline{(m, m')} = h(m)$*, então o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u_1"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u_2"] & Y \arrow[r, "h'"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo com filas exatas.

Os lemas acima nos diz que se $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma sequência exata em $\operatorname{mod} A$, $f : L \to L'$ e $g : N' \to N$ são morfismos em $\operatorname{mod} A$, então existem diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & Y \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

com filas exatas. Além disso, temos o diagrama ***push-out***

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

onde $X = \ker f$.

Referências Bibliográficas

[1] Assem, I., Cappa, A. J., Platzeck I. M., and Verdecchia M., *Módulos Inclinantes y Álgebras Inclinadas,* volume 21 of *Notas de Álgebra y Análisis.* Universidad Nacional del Sur. Instituto de Matemática, 2008.

[2] Assem, I., Simson, D., and Skowronki, A., *Elements of the representation dimension theory of Associative Algebras.* vol. 1, London Mathematical Socciety Student Texts, vol. 65, Cambredge University Press, 2006, Techniques os representation theory. MR 2197389 (2006j:16020)

[3] Auslander, M. and Reiten, I.: *Applications of contravariatly finite subcategories*, Adv. Math. **86** (1991), 111-152.

[4] Auslander, M. and Smalo, S.: *Preprojective modules over Artin algebras*, Journal of Algebra, **66** (1980), 61-122.

[5] Coelho, F., Happel, D. and Unger, L.: *Complements to partial tilting modules*, Journal of Algebra, **170** (1994), 184-205.

[6] Happel, D. and Unger, L.: *Partial tilting modules and covariantly finite subcategories*, Communications in Algebra, **22** (1994), 1723-1727.

[7] Happel, D. and Unger, L.: *Modules of finite projective and cocovers*, Math. Ann. **306** (1996), 445-457.

[8] Happel, D. and Unger, L.: *On a Partial of Tilting Modules*, Algebras and Representation Theory, **8** (2005), 147-156.

[9] Happel, D. and Unger, L.: *On The Quiver of Tilting Modules*, Journal of Algebra, **284** (2005), 857-868.

[10] Happel, D. and Unger, L.: *Links of Faithful Partial Tilting Modules*, Algebr Represent Theor, **13** (2010), 637-652.

[11] Happel, D.: *Selforthogonal modules*, In: Abelian Groups ans Modules, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 257-276.

[12] K. Igusa, S. O. Smalo, and G. Todorov: *Finite projectivity and contravariant finiteness*, Proc. Amer. Math. Soc.

[13] R. Schiffler, *Quiver Representations*, CMS Books in Mathematics, Springer International Publishing, 2014.

[14] Riedtmann, C. and Schofield, A.: *On a simplicial complex associated with tilting modules*, Comment. Math. Helvtici **66** (1991), 70-78.

[15] Miyashita, Y., *Tilting Modules of Finite Projective Dimension*, Math. Z. **193** (1986), 113-146.