Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

Estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos com um grau e meio de liberdade

por

Regivan Santos Souza

Mestrado Acadêmico em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientadora: Profª. Dra. Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias

Fevereiro de 2015

Regivan Santos Souza

Estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos com um grau e meio de liberdade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias

São Cristóvão
2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Souza, Regivan Santos
S725e Estabilidade paramétrica em sistemas hamiltonianos com um grau e meio de liberdade / Regivan Santos Souza; orientador Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias. - São Cristóvão, 2015.
70 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Sistemas lineares - Estabilidade. 3. Espaços vetoriais. l. Dias, Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão, orient. lI. Título.

CDU 517.43

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos de um grau e meio de liberdade

por

Regivan Santos Souza

Aprovada pela banca examinadora:

Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias
Prof. Dra. Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias - UFS
Orientadora

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral - UFS
Primeiro Examinador

Marcelo Pedro dos Santos
Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos - UFRPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 20 de fevereiro de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedicatória

A minha família.

Agradecimentos

- Agradeço, primeiramente a Deus, pelo dom da vida, por ter me dado forças para seguir em frente e me proporcionado mais esta realização.
- Aos meus pais, Maria José e Reginaldo, pelo amor, e por estarem sempre do meu lado nos momentos que mais precisei.
- A minha esposa Mirlane, por todo amor, pela paciência e compreensão, estando sempre ao meu lado e me apoiando em tudo. E ao meu filho Ruan Murilo, simplesmente por existir.
- Aos meus irmãos Rogério, Renan, Raphaela e Raiany pela amizade e companheirismo.
- A todos os meus familiares e amigos que contribíram direta ou indiretamente para esta realização, especialmente tia Neusa e Lupercília (in memoriam).
- A professora Lúcia de Fátima, por sua orientação, seus ensinamentos e amizade. E também ao professor Fábio dos Santos, pelo incentivo e co-orientação.
- Aos colegas de turma, em especial, a Robson, Cléa e Makson, por tudo que vivemos esses dois anos, meus amigos queridos.
- Aos professores Hildeberto Eulálio Cabral e Marcelo Pedro dos Santos por comporem a banca examinadora.
- A todos os professores do PROMAT/UFS e do DMA/UFS, especialmente a Wilberclay e Zaqueu pelos ensinamentos e incentivo.

- Enfim, agradeço a todos que deram alguma contribuição no processo de minha formação.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um pouco da teoria acerca da estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos lineares com um grau e com um grau e meio de liberdade. Para tanto, fornecemos definições e resultados sobre sistemas Hamiltonianos, espaços vetoriais simpléticos e estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos lineares. Esse trabalho é finalizado com a descrição do método de Deprit-Hori com o objetivo de aplicá-lo à Equação de Mathieu e assim construir as curvas de fronteira das regiões de estabilidade e instabilidade.

Palavras Chaves: Sistemas Hamiltonianos, Método de Deprit-Hori, Estabilidade Paramétrica, Equação de Mathieu.

Abstract

In this thesis we present some of the theory of parametric stability in linear Hamiltonian systems with one degree and a degree and a half of freedom. To this end, we provide definitions and results on Hamiltonian systems, symplectic vector spaces and linear stability of Hamiltonian systems balances. This work ends with the description of Deprit-Hori method in order to apply it to the Mathieu equation and thus build the boundary curves of the regions of stability and instability.

Key words: Hamiltonian systems, Deprit-Hori method, Parametric Stability, Mathieu equation.

Sumário

Introdução

O principal objetivo desse trabalho é estudar estabilidade paramétrica de sistemas Hamiltonianos lineares com um grau e um grau e meio de liberdade. Usamos como principal referência o livro Linear Hamiltonian Systems, 2009, de autoria A. P. Markeev [10].

Faremos, no primeiro capítulo, uma exposição de maneira sucinta sobre os conceitos mais relevantes e necessários ao bom entendimento deste trabalho dando ênfase a definições e resultados preliminares, tais como sistemas Hamiltonianos, espaços vetoriais simpléticos, funções geradoras e estabilidade de equilíbrios no sentido de Lyapunov.

No segundo capítulo, descreveremos a teoria da estabilidade e forma normal de sistemas Hamiltonianos lineares constantes e periódicos. Veremos que é necessário que as raízes da equação característica associada ao sistema sejam números imaginários puros para que haja estabilidade. No contexto periódico, estudaremos a teoria de Floquet e também o teorema de Lyapunov-Poincaré e suas consequências.

O terceiro capítulo contém a parte essencial desta dissertação, ele é dedicado ao estudo do método de Deprit-Hori para sistemas Hamiltonianos lineares. Tal método nos permite simplificar o Hamiltoniano e assim ser possível a construção de curvas fronteira das regiões de estabilidade e instabilidade. Além disso, veremos o teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii que nos dará condições necessárias e suficientes para a estabilidade.

No quarto e último capítulo, aplicaremos o método de Deprit-Hori para determinar as regiões de estabilidade paramétrica do sistema Hamiltoniano relacionado a equação de Mathieu.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, forneceremos algumas definições e resultados da teoria básica de Sistemas Hamiltonianos. Realizaremos um estudo sobre a teoria qualitativa de equações diferenciais abordando conceitos de estabilidade e instabilidade. Além disso, veremos os principais resultados da teoria de espaços vetoriais simpléticos e transformações simpléticas, função geradora e falaremos ainda sobre estabilidade paramétrica.

1.1 Sistemas Hamiltonianos

Um sistema Hamiltoniano é um sistema com $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}}, \tag{1.1}$$

onde $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ é uma função definida em um aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ denominada Hamiltoniano do sistema. As variáveis $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_n)$ são chamadas de posição e momento, respectivamente. O número natural n é dito grau de liberdade do sistema. Quando o Hamiltoniano depende do tempo, ou seja, é não autonônomo dizemos que o sistema Hamiltoniano tem n graus e meio de liberdade.

O conjunto onde a variável posição está definida é chamado de espaço das configurações, já o conjunto onde posição versus momento estão definidos é dito espaço de fase do sistema. Façamos

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \nabla_{\mathbf{z}} H = \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

e o sistema (1.1) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z}, t). \tag{1.3}$$

Claramente $J^{-1} = J^T = -J$, $J^2 = -I$ e $\det J = 1$.

Um caso especial é quando a função H não depende de t, o sistema (1.1) é chamado autônomo e o sistema Hamiltoniano é dito conservativo. Daí, qualquer solução, φ, de (1.3) satisfaz $\varphi(t - t_0, 0, \mathbf{z}_0) = \varphi(t, t_0, \mathbf{z}_0)$. Quando $t_0 = 0$ escrevemos $\varphi(t, \mathbf{z}_0)$ para a solução de (1.3) tal que $\varphi(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$.

1.1.1 Sistemas Hamiltonianos Lineares

Um caso particular de sistemas Hamiltonianos são os lineares. Dizemos que o sistema Hamiltoniano (1.3) é linear quando for possível escrevê-lo na forma

$$\dot{\mathbf{z}} = JS(t)\mathbf{z} = A(t)\mathbf{z}, \tag{1.4}$$

onde $A(t) = JS(t)$ e $S(t)$ é uma matriz simétrica para cada t. Nesse caso, o Hamiltoniano é uma forma quadrática dada por

$$H = H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S(t)\mathbf{z}, \tag{1.5}$$

Definição 1.1.1. *Uma matriz $A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ é dita Hamiltoniana se satisfaz $A^T J + JA = 0$.*

É simples verificar que a matriz $A(t)$ do sistema (1.4) é Hamiltoniana. De fato,

$$JA(t) = J^2 S(t) = -S(t) = S(t)J^2 = S(t)^T JJ = -(JS(t))^T J = -A(t)^T J.$$

Vejamos alguns resultados que caracterizam matrizes Hamiltonianas.

Teorema 1.1.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é Hamiltoniana;*

2. *$A = JA^TJ$;*

3. *$A = JR$, com R simétrica;*

4. *JA é simétrica.*

Demonstração:

(1. $\Rightarrow$ 2.) Basta notar que $J^{-1} = -J$. Então, pela definição anterior temos que $A^TJ = J^{-1}A$ e assim segue o desejado.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Tome $R = A^TJ$, assim

$$R^T = J^TA = -J(JA^TJ) = -J^2(A^TJ) = A^TJ = R.$$

(3. $\Rightarrow$ 4.) Suponha $A = JR$, com R simétrica. Então, $JA = J^2R = -R$. Logo, JA é simétrica.

(4. $\Rightarrow$ 1.) JA é simétrica $\Rightarrow JA = (JA)^T = A^TJ^T = -A^TJ$. Assim, $A^TJ + JA = 0$ e pela Definição (1.1.1) A é Hamiltoniana. ∎

Proposição 1.1.3. *A matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$$

é Hamiltoniana se, e somente se, $a^T + d = 0$ e b e c são simétricas.

Demonstração: Escrevendo a matriz A em forma de blocos,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} A^TJ + JA = 0 \quad &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c - c^T & a^T + d \\ -a - d^T & b^T - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow c - c^T = 0 \ , \ b^T - b = 0 \ e \ a^T + d = 0 \\ &\Longleftrightarrow c = c^T \ , \ b = b^T \ e \ a^T + d = 0. \end{aligned}$$

∎

Quando $n = 1$, as condições se reduzem a dizer que o traço é nulo.

1.2 Espaços Vetoriais Simpléticos

1.2.1 Caracterização dos Espaços Simpléticos

Definição 1.2.1. *Um espaço vetorial simplético é um par (V, ω), onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita e $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simplética, isto é, ω é uma função bilinear, que satisfaz as condições:*

- *anti-simétrica: $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$, para todo $u, v \in V$;*
- *não degenerada: se $\omega(u, v) = 0$, para todo $v, \in V$, então $u = 0$.*

Exemplo 1.2.2. *A forma bilinear ω_0 sobre $\mathbb{R}^{2n}$ definida por:*

$$\omega_0(u, v) = u^T Jv = \langle u, Jv \rangle,$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$$

é uma forma simplética denominada forma simplética padrão. Denominamos o par $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ de "Espaço Simplético Padrão".

Definição 1.2.3. *Sejam (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) espaços vetoriais simpléticos. Um isomorfismo linear*

$$T : V_1 \longrightarrow V_2$$

é dito uma transformação linear simplética ou simplectomorfismo se

$$\omega_2(T(u), T(v)) = \omega_1(u, v),$$

para todo $u, v \in V_1$.

Proposição 1.2.4. *Todo espaço simplético (V, ω) de dimensão finita tem dimensão par.*

Demonstração: Sejam $m = dimV$, $B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ uma base de V e $B^* = \{v_1^*, v_2^*, ..., v_m^*\}$ a base dual de B. Uma vez que ω é não-degenerada, a função $\omega^* : V \to V^*$, tal que $\omega^*(v) = \omega(., v)$ é isomorfismo. Como $\omega^*(v_j)v_i = \omega(v_i, v_j)$, temos que $[\omega^*]_B^{B^*} = [\omega]_B := A$; assim, A é invertível e $A^T = -A$. Então, tem-se que

$$\det A = \det(A^T) = det(-A) = (-1)^m \det A \Rightarrow (-1)^m = 1 \Rightarrow m \text{ é par.}$$

$\blacksquare$

Definição 1.2.5. *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e $B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ uma base de V. Dizemos que B é uma base simplética para V se $\omega(v_i, v_j) = J_{ij}$, onde $J = (J_{ij})$ é a matriz simplética padrão definida em (1.2).*

Definição 1.2.6. *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e E um subespaço vetorial de V. O complemento ortogonal simplético de E é definido por*

$$E^\omega = \{u \in V;\ \ \omega(u, v) = 0, \quad \textit{para todo} \quad v \in E\}.$$

Definição 1.2.7. *Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais em relação à forma simplética ω se $\omega(u, v) = 0$*

Proposição 1.2.8. *E^ω é subespaço vetorial de V e $dim(V) = dim(E^\omega) + dim(E)$.*

Demonstração: Considere a aplicação linear $T : V \longrightarrow E^*$ dada por $T(u) = \omega(u, \cdot)|_E$. Como $E^\omega = ker(T)$ temos que E^ω é subespaço vetorial de V; pelo teorema da representação de Riesz temos T sobrejetiva, assim pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $dim(V) = dim(ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(E^\omega) + dim(E^*)$. Mas $dim(E^*) = dim(E)$; logo $dim(V) = dim(E^\omega) + dim(E)$.
$\blacksquare$

Definição 1.2.9. *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e E um subespaço vetorial de V. E é dito um subespaço vetorial simplético de V se $E \cap E^\omega = \{0\}$.*

Proposição 1.2.10. *E um subespaço vetorial simplético de V se, e somente se, $\omega|_E$ é não degenerada.*

Observação 1.2.11. *Se E é subespaço vetorial simplético de V, então $V = E \oplus E^\omega$.*

Teorema 1.2.12. *Todo espaço vetorial simplético admite uma base simplética.*

Demonstração: Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$. Tome $v_1 \in V$, com $v_1 \neq 0$. Como ω é não degenerada, existe $\tilde{v}_{n+1} \in V$, com $\tilde{v}_{n+1} \neq 0$, tal que $\omega(v_1, \tilde{v}_{n+1}) \neq 0$. Tomando

$$v_{n+1} = \frac{1}{\omega(v_1, \tilde{v}_{n+1})} \tilde{v}_{n+1},$$

temos $\omega(v_1, v_{n+1}) = 1$. Seja $E_1 = [v_1, v_{n+1}]$ o espaço gerado por esses vetores. Desde que $\omega|_{E_1}$ é não degenerada, segue que E_1 é simplético. Assim, $E_1 \cap E_1^\omega = \{0\}$. Como $dimE_1 + dimE_1^\omega = dimV$, segue que $V = E_1 \oplus E_1^\omega$. Portanto, $dimE_1^\omega = 2n-2$. É claro que $\omega|_{E_1^\omega}$ é não degenerada; assim, E_1^ω é um espaço vetorial simplético de dimensão $2n-2$. Podemos repetir a construção até obtermos uma decomposição

$$V = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_{2n},$$

onde cada E_i é gerado por v_i, v_{n+i} tal que $\omega(v_i, v_{n+i}) = 1$. Portanto, segue que $v_1, ..., v_{2n}$ é uma base simplética de V. ∎

Teorema 1.2.13. *Todo espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ é simplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, onde ω_0 é a forma simplética padrão.*

Demonstração: Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e $B = \{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$ uma base simplética de V. Dado $v \in V$, existe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ não nulo tal que
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{2n} v_{2n}$. A função

$$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ v & \mapsto & (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}) \end{array}$$

é simplectomorfismo. Com efeito, se $u = \beta_1 v_1 + \beta_1 v_1 + ... + \beta_{2n} v_{2n}$,

$$\begin{aligned} \omega(v, u) &= \omega(\sum \alpha_i v_i, \sum \beta_j v_j) = \sum \alpha_i \beta_j \omega(v_i, v_j) = \sum \alpha_i \beta_j J_{ij} \\ &= \alpha^T J \beta = \omega_0(\alpha, \beta) = \omega_0(T(v), T(u)). \end{aligned}$$

∎

Segue do teorema acima o seguinte resultado:

Corolário 1.2.14. *Dois espaços vetoriais simpléticos de mesma dimensão são simplectomorfos.*

1.2.2 Matrizes Simpléticas

Definição 1.2.15. *Uma matriz $T \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é dita simplética se ela é a matriz de uma transformação linear simplética numa base simplética. O conjunto de todas as matrizes simpléticas em $M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é denotado por $Sp(2n, \mathbb{R})$.*

Proposição 1.2.16. *As seguintes afirmações a respeito de uma matriz* $T \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ *são equivalentes:*

1. T *é uma matriz simplética;*

2. *a transformação linear de* $\mathbb{R}^{2n}$ *em* $\mathbb{R}^{2n}$ *definida pela matriz* T *numa base simplética é uma transformação linear simplética;*

3. $T^T JT = J$.

Demonstração:

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) é um fato bem conhecido da Álgebra Linear.

(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Decorre de

$$\mathbf{u}^T J\mathbf{v} = \omega_0(T\mathbf{u}, T\mathbf{v}) = (T\mathbf{u})^T J(T\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T(T^T JT)\mathbf{v}.$$

∎

O terceiro item da proposição anterior permite estender a definição de transformação simplética como segue:

Definição 1.2.17. *Uma matriz* $T \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ *é chamada simplética com multiplicador* μ*, ou* μ*-simplética se*

$$T^T JT = \mu J \tag{1.6}$$

onde $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *é uma constante.*

Observação 1.2.18. *As matrizes simpléticas correspondem às matrizes* 1*-simpléticas. Podemos observar que, pela definição, toda matriz simplética,* T*, satisfaz* $\det T = \pm 1$.

Teorema 1.2.19. *Se* T *é simplética com multiplicador* μ*, então* T *é não singular e* $T^{-1} = -\mu^{-1} JT^T J$*. Se* T *e* R *são* μ *e* v *simpléticas, respectivamente, então* T^{-1} *e* TR *são simpléticas com multiplicadores* μ^{-1} *e* μv*, respectivamente.*

Demonstração: Como $T^T JT = \mu J$, então temos

$$\det T^T \det J \det T = \mu^{2n} \det J$$

$$\det T = \pm|\mu|^n,$$

donde segue que T é não singular. Para mostrar que $T^{-1} = -\mu^{-1}JT^TJ$, partimos da igualdade em (1.6). Observe:

$$\begin{aligned} T^TJT = \mu J \ &\Rightarrow T^TJ = \mu JT^{-1} \Rightarrow JT^TJ = \mu J^2T^{-1} \\ &\Rightarrow JT^TJ = -\mu T^{-1} \Rightarrow T^{-1} = -\mu^{-1}JT^TJ. \end{aligned}$$

As outras afirmações seguem-se de forma imediata, conforme segue:

- para T^{-1},

$$\begin{aligned} (T^{-1})^TJT^{-1} &= (T^T)^{-1}JT^{-1} = [(TJ^{-1})T^T]^{-1} \\ &= [-TJT^T]^{-1} = -(\mu J)^{-1} \\ &= -\mu^{-1}J^{-1} = -\mu^{-1}(-J) = \mu^{-1}J. \end{aligned}$$

- para TR

$$(TR)^TJ(TR) = R^TT^TJTR = \mu R^TJR = \mu vJ.$$

∎

Observe, em seguida, as condições para que uma matriz seja μ-simplética.

No caso de uma matriz 2×2, $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, temos que

$$T^TJT = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \\ -\alpha\delta + \beta\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, uma matriz 2×2 é μ-simplética se, e somente se, ela tem determinante μ.

No caso $2n \times 2n$, com a matriz $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ escrita na forma de blocos, temos

$$T^TJT = \begin{pmatrix} a^Tc - c^Ta & a^Td - c^Tb \\ b^Tc - d^Ta & b^Td - d^Tb \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, segue a proposição:

Proposição 1.2.20. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *é simplética com multiplicador μ se, e somente se, $a^Td - c^Tb = \mu I$ e a^Tc e b^Td são simétricas.*

Neste caso também verifica-se que $T^{-1} = \mu^{-1} \begin{pmatrix} d^T & -b^T \\ -c^T & a^T \end{pmatrix}$.

Teorema 1.2.21. *A matriz solução fundamental $Z(t, t_0)$ de um sistema Hamiltoniano linear (1.4) é simplética para todo t, $t_0 \in I$. Reciprocamente, se $Z(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, onde $Z(t_0, t_0) = I$, então Z é uma matriz solução de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Se $U(t) = Z(t, t_0)^T JZ(t, t_0)$, então $U(t_0) = J$ e

$$\dot{U}(t) = \dot{Z}^T JZ + Z^T J\dot{Z} = Z^T(A^T J + JA)Z = 0, \tag{1.7}$$

donde segue que $U(t) = J$ para todo t, e com isso temos que $Z(t, t_0)$ é simplética para todo t. Se $Z^T JZ = J$, para todo t, então $\dot{Z}^T JZ + Z^T J\dot{Z} = 0$, donde $(\dot{Z}Z^{-1})^T J + J(\dot{Z}Z^{-1}) = 0$. Isso mostra que $A = \dot{Z}Z^{-1}$ é Hamiltoniana e $\dot{Z} = AZ$.
∎

Corolário 1.2.22. *Considere o sistema em (1.4) com A constante. Então, A é Hamiltoniana se, e somente se, e^{At} é simplética para todo t.*

No caso de A constante, a solução fundamental é da forma $Z(t) = e^{At}$.

Veremos agora que uma mudança de varáveis simplética preserva a estrutura Hamiltoniana. Para isso, considere $T(t)$ uma matriz de ordem $2n$ invertível para cada t, assim a mudança de coordenadas $\zeta = U(t)z$ transforma o sistema Hamiltoniano linear (1.4) no sistema

$$\dot{\zeta} = (T^{-1}AT - T^{-1}\dot{T})\zeta, \tag{1.8}$$

onde $U(t) = T^{-1}(t)$. Em geral, este sistema de equações não é Hamiltoniano, contudo:

Teorema 1.2.23. *Se $U(t)$ é uma transformação μ-simplética, então o sistema (1.8) é um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Se $U(t)$ é uma matriz μ-simplética, então $T(t)$ é μ^{-1}-simplética. Como $TJT^T = \mu^{-1}J$ para todo t, temos que $\dot{T}JT^T + TJ(\dot{T})^T = 0$, donde segue que $(T^{-1}\dot{T})J + J(T^{-1}\dot{T}) = 0$, e portanto $T^{-1}\dot{T}$ é uma matriz Hamiltoniana. Temos também que $T^{-1}J = \mu JT^T$, donde segue que $T^{-1}AT = T^{-1}JST =$

$\mu JT^TST = J(\mu T^TST)$ é Hamiltoniana também. Logo $T^{-1}AT - T^{-1}\dot{T}$ é Hamiltoniana. ∎

Este teorema nos diz que uma mudança de coordenadas simplética preserva a forma Hamiltoniana de um sistema de equações.

Um resultado importante na caracterização de uma matriz solução fundamental de um sistema Hamiltoniano linear é o seguinte:

Proposição 1.2.24. *Seja T uma matriz simplética. Se λ é um autovalor de T (note que $\lambda \neq 0$ pois $\det(T) = \pm 1$), então $\dfrac{1}{\lambda}$ é também um autovalor de T com a mesma multiplicidade algébrica.*

Demonstração: Desde que T é simplética, temos $T^T = -JT^{-1}J$, donde, para todo $\lambda \neq 0$ autovalor de T, temos:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(T - \lambda I) \\
&= \det(T^T - \lambda I) \\
&= \det(-JT^{-1}J + \lambda JJ) \\
&= \det J . \det(-T^{-1} + \lambda I) . \det J \\
&= \det[\lambda T^{-1}(T - \frac{1}{\lambda} I)] \\
&= \lambda^{2n} \det T^{-1} . \det(T - \frac{1}{\lambda} I) \\
&= \pm \lambda^{2n} p(\frac{1}{\lambda}).
\end{aligned}$$

Seque que a mutiplicidade algébrica de λ é a mesma de $\dfrac{1}{\lambda}$. ∎

Da proposição acima segue que se conhecemos um autovalor λ da matriz real simplética, então conhecemos mais três autovalores, a saber, $\frac{1}{\lambda}$, $-\lambda$ e $-\frac{1}{\lambda}$. Em particular se 1 e -1 são autovalores, então eles possuem multiplicidade par. Além disso, desde que λ é autovalor então $\frac{1}{\lambda}$ também é autovalor com a mesma multiplicidade, então segue que o determinante de uma matriz simplética é igual a um.

1.3 Funções geradoras

Vamos agora obter um processo para construção de transformações simpléticas por meio de uma função chamada função geradora. Nesta seção, veremos ainda um teorema que envolve a derivada de uma função geradora e que relaciona o Hamiltoniano após uma transformação de variáveis simpléticas com o Hamiltoniano nas coordenadas antigas.

Seja

$$\Omega = dq \wedge dp = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j.$$

Considere a mudança de coordenadas $E : (q, p) \mapsto (Q, P)$. Assuma que Q e P estão definidas numa bola U de $\mathbb{R}^{2n}$.

Nas condições acima, a mudança de coordenadas será simplética se, e somente se,

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP \quad \Leftrightarrow \quad d(qdp - QdP) = 0.$$

Sabemos que uma k-forma ω é fechada se $d\omega = 0$. Defina as 1-formas

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= qdp - QdP \\
\sigma_2 &= qdp + PdQ = \sigma_1 + d(QP) \\
\sigma_3 &= pdq - PdQ = \sigma_2 + d(pq) \\
\sigma_4 &= pdq + QdP = \sigma_3 + d(PQ).
\end{aligned}$$

Desde que U é uma bola em $\mathbb{R}^{2n}$, pelo lema de Poincaré tem-se que a mudança de coordenadas é simplética se, e somente se, uma das funções $S_1 = S(p, P)$, $S_2 = S(p, Q)$,$S_3 = S(q, Q)$, $S_4 = S(q, P)$ existe e satisfaz respectivamente $dS_1 = \sigma_1$, $dS_2 = \sigma_2$, $dS_3 = \sigma_3$, $dS_4 = \sigma_4$. Estas informações dão uma forma fácil de construir coordenadas simpléticas. Por exemplo, assumamos que exista uma função $S_1(p, P)$ tal que $dS_1 = \sigma_1$, assim

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P)dp + \frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)dP = \sigma_1$$

se, e somente se,

$$\frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) = q, \quad -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) = Q.$$

Portanto, qualquer mudança de coordenadas que satisfaz estas duas últimas condições é simplética. Assumindo agora que o Hessiano de S_1 é não singular e considerando a função $F(q, p, P) = \frac{\partial S_1}{\partial p} - q = 0$ segue-se do Teorema da Função Implícita que P pode ser escrita como função de q e p. E da equação $Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)$, obtemos $Q = Q(q, p)$. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3.1. *As seguintes mudanças de variáveis definem uma mudança local de coordenadas simpléticas:*

1. $q = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P)$, $Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)$ *quando* $\frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p, P)$ *é não singular;*

2. $q = \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q)$, $P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q)$ *quando* $\frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q)$ *é não singular;*

3. $p = \frac{\partial S_3}{\partial q}(q, Q)$, $P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(q, Q)$ *quando* $\frac{\partial^2 S_3}{\partial q \partial Q}(q, Q)$ *é não singular;*

4. $p = \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P)$, $Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P)$ *quando* $\frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P}(q, P)$ *é não singular.*

Cada uma das funções S_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ *é chamada função geradora ou função geratriz.*

Teorema 1.3.2. *Seja a transformação de coordenadas simplética numa bola aberta de* $\mathbb{R}^{2n}$, $E : z = (q, p) \to \zeta = (\xi = \xi(q, p, t), \eta = \eta(q, p, t))$ *dependente do parâmetro* t, *definida pela função geradora* $S = S_j$, $j = 1, ..., 4$. *Então se* $H = H(q, p, t)$ *representa o Hamiltoniano nas coordenadas antigas, tem-se que o Hamiltoniano nas novas coordenadas* $H^* = H^*(\xi, \eta, t)$ *é dada por*

$$H^*(\xi, \eta, t) = H(q, p, t) + R_j, \tag{1.9}$$

$(j = 1, 2, 3, 4)$ *onde o lado direito da equação acima tem sido avaliada em* $q = q(\xi, \eta, t)$ *e* $p = p(\xi, \eta, t)$ *e* $R_j = -\frac{\partial S_j}{\partial t}$ *para* $j = 1, 2$ *e* $R_j = \frac{\partial S_j}{\partial t}$ *para* $j = 3, 4$.

Demonstração: A demonstração encontra-se na referência [16]. ∎

Exemplo 1.3.3. *Neste exemplo descreveremos alguns passos do processo de obtenção da função geradora da rotação, maiores detalhes veja [5]. Seja* $W(q, X, t)$ *a função geradora da rotação de ângulo* ω

$$\begin{aligned} q &= \cos(\omega t)x + \text{sen}(\omega t)X \\ p &= -\text{sen}(\omega t)x + \cos(\omega t)X, \end{aligned}$$

então a sua derivada é dada por

$$W_t = -\frac{\omega}{2}(x^2 + X^2). \tag{1.10}$$

De fato, considerando que $p = W_q$ *e* $x = W_X$, *então*

$$\begin{aligned} W_q &= -\text{sen}(\omega t)x + \cos(\omega t)X = -\text{sen}(\omega t)\left(\frac{q - X\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right) + \cos(\omega t)X \\ &= \frac{-\text{sen}(\omega t)(q - X\text{sen}(\omega t)) + \cos^2(\omega t)X}{\cos(\omega t)} = \frac{-q\text{sen}(\omega t) + X}{\cos(\omega t)} \end{aligned}$$

integrando com respeito a q, teremos

$$W(q,X,t) = -\frac{1}{2}q^2\frac{\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)} + \frac{Xq}{\cos(\omega t)} + g(X),$$

por outro lado

$$\frac{q - X\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)} = x = W_X = \frac{q}{\cos(\omega t)} + g'(X)$$

o que implica em

$$g'(X) = \frac{-X\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)} \quad e \quad g = -\frac{1}{2}X^2\frac{\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)}$$

e, portanto, a função geradora da rotação é dada por

$$\begin{aligned} W(q,X,t) &= -\frac{1}{2}q^2\frac{\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)} + \frac{Xq}{\cos(\omega t)} - \frac{1}{2}X^2\frac{\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)} \\ W(q,X,t) &= -\frac{1}{2}(q^2+X^2)\frac{\text{sen}(\omega t)}{\cos(\omega t)} + \frac{Xq}{\cos(\omega t)}. \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$W_t = -\frac{\omega}{2}(q^2+X^2)\frac{1}{\cos^2(\omega t)} + \frac{\omega X q\text{sen}(\omega t)}{\cos^2(\omega t)}$$

e substituindo a expressão de q temos o desejado

$$W_t = -\frac{\omega}{2}(x^2+X^2). \tag{1.11}$$

Tendo em vista que usaremos bastante o conceito de estabilidade nos capítulos 2 e 4, na próxima seção definiremos estabilidade no sentido de Lyapunov e enunciaremos condições para a estabilidade e instabilidade de soluções. Além disso, abordaremos o conceito de estabilidade paramétrica tendo em vista que buscaremos, no capítulo 3, construir curvas fronteiras da região de estabilidade e instabilidade paramétrica.

1.4 Estabilidade de soluções

1.4.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

Considere a equação diferencial ordinária autônoma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.12}$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua e localmente Lipschitziana.

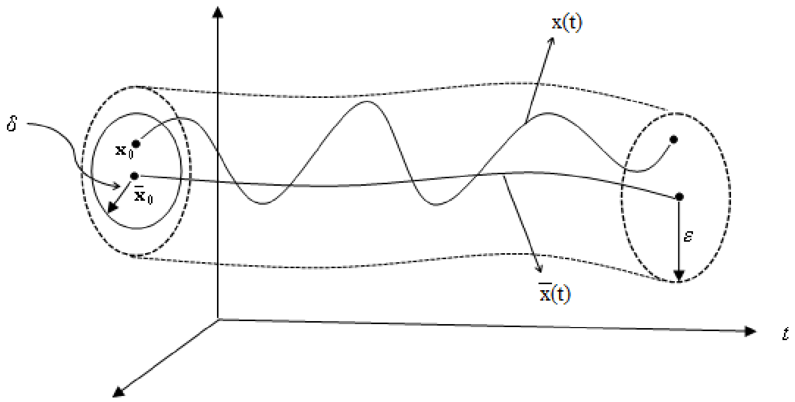
Definição 1.4.1. *$x_0 \in U$ é dito um equilíbrio ou solução de equilíbrio de (1.12) se $f(x_0) = 0$.*

Definição 1.4.2. *Seja $\overline{x}(t)$ uma solução de equilíbrio de (1.12). Dizemos que $\overline{x}(t)$ é:*

1. *estável, segundo Lyapunov, em $t = t_0$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que para qualquer $x \in B_\delta(\overline{x}(t_0))$, a solução $x(t)$ que se inicia em x quando $t = t_0$, está definida para todo $t \geq t_0$ e $x(t) \in B_\varepsilon(\overline{x}(t_0))$, para todo $t \geq t_0$;*

2. *assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se ela é estável e além disso, existe um número positivo $\delta_1 < \delta$ tal que $||x|| < \delta_1$ implica $\lim\limits_{t \to \infty} ||x(t) - \overline{x}(t)|| = 0$;*

3. *instável quando não é estável.*



Observação 1.4.3. *Dizemos que um sistema linear de equações diferenciais ordinárias é estável no sentido de Lyapunov se a solução de equilíbrio nula for estável.*

1.4.2 Sistemas lineares com coeficientes constantes

Consideremos o sistema linear homogêneo

$$\dot{x} = Ax \tag{1.13}$$

onde $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$. Acerca da estabilidade de um sistema linear com coeficientes constantes podemos destacar:

Teorema 1.4.4. *Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores da matriz A e suponha que J_λ é o bloco de Jordan (em $\mathbb{C}$) associado a λ. Tem-se para a solução nula do sistema $\dot{x} = Ax$ as seguintes afirmações:*

1. *Se A é uma matriz não singular:*

   (a) Assintoticamente estável no sentido de Lyapunov se, e somente se, $Re(\lambda_k) < 0$ para todo $k = 1, ..., n$;
   (b) Estável, mas não assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se, e somente se, A tem pelo menos um par de autovalores imaginários puros e sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;
   (c) Instável nos demais casos.

2. *Se A é uma matriz singular:*

   (a) Estável no sentido de Lyapunov se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal;
   (b) Estável no sentido de Lyapunov no caso em que A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros, sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ seja diagonal, o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;
   (c) Instável nos demais casos.

Demonstração: Ver na referência [3]. ∎

1.4.3 Estabilidade de sistemas lineares periódicos

Vamos considerar um sistema linear de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_m), \tag{1.14}$$

onde $A(t)$ é 2π-periódica, real e contínua em t.

A seguir apresentaremos algumas definições e resultados que nos auxiliarão na prova do Teorema de Floquet.

Definição 1.4.5. *Dizemos que uma matriz C de ordem $m \times m$ tem um logaritmo se existe uma matriz de mesma ordem B tal que $C = e^B$. Neste caso, dizemos que B é o logaritmo de C e escrevemos $B = \log C$.*

Lema 1.4.6. *Toda matriz C de ordem $m \times m$, tal que $\det C \neq 0$, possui logaritmo.*

Demonstração: Seja C uma matriz $m \times m$ inversível. Se $C = diag[C_1, ..., C_k]$, onde cada C_j é uma matriz inversível e se existem matrizes $B_1, ..., B_k$ com $e^{B_j} = C_j$, pondo $B = diag[B_1, ..., B_k]$ temos que $e^B = C$. Com isso é suficiente mostrar que uma matriz elementar de Jordan J com autovalor não nulo tem logaritmo. Escrevemos $J = \lambda I + N = \lambda(I + R)$, onde $R = \dfrac{1}{\lambda}N$ e consideramos a matriz $B = (ln\lambda)I + S$, onde

$$S = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{R^j}{j},$$

sendo m a ordem de J e $ln\lambda$ uma das determinações do logaritmo de λ. Observemos que $S = log(I + R)$, pois $R^j = 0$ para $j \geq m$. Assim, $e^S = I + R$. Como $(ln\lambda)I$ e S comutam, temos que $e^B = e^{(ln\lambda)I+S} = e^{(ln\lambda)}Ie^S = \lambda(I + R) = J$. Fica, assim, demonstrado o lema. ∎

Lema 1.4.7. *Se $X(t)$ é uma matriz fundamental do sistema (1.14), com $X(0) = I$, então*

$$X(t + 2\pi) = X(t)X(2\pi),$$

para todo t.

Demonstração: Sejam $U(t) = X(t + 2\pi)$ e $V(t) = X(t)X(2\pi)$, desse modo temos que

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t) \text{ e } \dot{V}(t) = A(t)V(t),$$

e como $U(0) = X(2\pi) = V(0)$, segue do Teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias que $U(t) = V(t)$, para todo t. ∎

Teorema 1.4.8 (Liouville). *Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de (1.14) em $I \subseteq \mathbb{R}$, e se $t_0 \in I$, então*

$$\det X(t) = \det X(t_0).e^{\int_{t_0}^{t} \text{traço} A(t)dt}$$

para todo $t \in I$.

Demonstração: Ver demonstração em [3]. ∎

Teorema 1.4.9 (Floquet). *Seja $X(t)$ uma matriz fundamental do sistema (1.14), com condição inicial $X(0) = I_m$, onde $A(t)$ é 2π-periódica. Então existem B e $Y(t)$, matrizes $m \times m$, sendo B matriz constante e $Y(t)$ 2π-periódica tais que $X(t) = Y(t)e^{tB}$.*

Demonstração: Note que $X(t + 2\pi)$ também é matriz fundamental de (1.14). De fato,

$$\dot{X}(t + 2\pi) = A(t + 2\pi)X(t + 2\pi) = A(t)X(t + 2\pi)$$

e além disso, $\det X(t + 2\pi) \neq 0$ (pelo Teorema (1.4.8) para $t_0 = 0$). Pelo lema anterior, $X(t + 2\pi) = X(t)X(2\pi)$, assim existe constante C invertível tal que $X(t + 2\pi) = X(t)C$. Isso significa que existe B dada por

$$e^{2\pi B} = C = X(2\pi). \tag{1.15}$$

Defina $Y(t) = X(t)e^{-tB}$. Resta mostrar que $Y(t)$ é 2π-periódica. De fato,

$$\begin{aligned} Y(t + 2\pi) &= X(t + 2\pi)e^{-2\pi B - tB} = X(t)X(2\pi)e^{-2\pi B}e^{-tB} \\ &= X(t)X(2\pi)X^{-1}(2\pi)e^{-tB} = X(t)e^{-tB} = Y(t), \end{aligned}$$

pois tB e $2\pi B$ comutam.

Assim, $Y(t + 2\pi) = X(t)Ce^{-2\pi B}e^{-tB} = X(t)e^{-tB} = Y(t)$. ∎

Corolário 1.4.10. *Sejam $X(t), A(t), B$ e $Y(t)$ como no Teorema de Floquet. A mudança de variáveis $x = Y(t)y$ transforma o sistema $\dot{x} = A(t)x$, com $A(t)$ 2π-periódica em $\dot{y} = By$ com coeficientes constantes, pois B é uma matriz constante.*

Demonstração: Substituindo $x = Y(t)y$, onde $Y(t) = X(t)e^{-tB}$, no sistema $\dot{x} = A(t)x$ teremos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{Y}(t)y + Y(t)\dot{y} = (\dot{X}(t)e^{-tB} - X(t)Be^{-tB})y + X(t)e^{-tB}\dot{y} \\ &= A(t)X(t)e^{-tB}y - X(t)e^{-tB}By + X(t)e^{-tB}\dot{y} \\ &= A(t)Y(t)y - X(t)e^{-tB}By + X(t)e^{-tB}\dot{y}, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\dot{x} = A(t)x = A(t)Y(t)y.$$

Segue que

$$-X(t)e^{-tB}By + X(t)e^{-tB}\dot{y} = 0$$

e assim

$$X(t)e^{-tB}\dot{y} = X(t)e^{-tB}By$$
$$\dot{y} = By.$$

∎

Definição 1.4.11. *A matriz $X(2\pi)$ é chamada de matriz de monodromia.*

Definição 1.4.12. *Os autovalores χ_j de B são chamados expoentes característicos do sistema (1.14). Já os autovalores ρ_j de $e^{2\pi B} = X(2\pi)$ são chamados multiplicadores característicos.*

Observação 1.4.13. $\rho_j = e^{2\pi\chi_j}$*, ou ainda,* $\chi_j = \frac{1}{2\pi}\ln\rho_j = \frac{1}{2\pi}[\ln|\rho_j| + iarg(2k\pi)]$*, com* $j = 1, 2, ..., m$*.*

Observação 1.4.14. *Os multiplicadores característicos não dependem da escolha de uma matriz de monodromia, isto é, de uma matriz fundamental.*

De fato, se $X(t)$ e $Y(t)$ são duas matrizes fundamentais, então para cada t, existe uma matriz não singular, $D(t)$, tal que $Y(t) = X(t)D(t)$. Como $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ e $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, temos que

$$\begin{aligned} A(t)X(t)D(t) &= A(t)Y(t) = \dot{Y}(t) = \dot{X}(t)D(t) + X(t)\dot{D}(t) \\ &= A(t)X(t)D(t) + X(t)\dot{D}(t), \end{aligned}$$

o que implica em $X(t)\dot{D}(t) = 0$. Como $X(t)$ é inversível, temos que $\dot{D}(t) = 0$ para todo t, ou seja, D é uma matriz constante. Assim,

$$X(t)X(2\pi)D = X(t+2\pi)D = Y(t+2\pi) = Y(t)Y(2\pi) = X(t)DY(2\pi)$$

de onde segue que as matrizes $X(2\pi)$ e $Y(2\pi)$ são semelhantes, ou seja, $X(2\pi) = DY(2\pi)D^{-1}$. Assim, temos o desejado, pois matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

Com base nos resultados acima podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.4.15. *A solução nula do sistema (1.14) é:*

- *Assintoticamente estável no sentido de Lyapunov se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real negativa.*

- *Estável no sentido de Lyapunov se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real menor ou igual a zero, enquanto os expoentes característicos com parte real nula possuem bloco de Jordan (sobre $\mathbb{C}$) diagonal.*

- *Instável, se e somente se, existe algum expoente característico com parte real positiva ou algum expoente característico não nulo com bloco de Jordan não diagonal.*

Então, segue-se que o sistema (1.14) é estável se, e somente se, todos os seus multiplicadores tiverem módulo menor ou igual a um, no caso de $|\rho| = 1$, a matriz $X(2\pi)$ deve ser redutível a forma diagonal.

1.4.4 Estabilidade paramétrica

É comum, ao modelarmos um problema físico, nos depararmos com uma equação do tipo (1.4) onde os coeficientes da matriz não são totalmente determinados. Nesse caso, buscamos saber como se dará a estabilidade desse sistema sujeito à pequenas mudanças na matriz Hamiltoniana $A(t)$, por exemplo, quando a matriz $A(t)$ depende de um parâmetro. Dessa maneira, surgiu o termo estabilidade paramétrica o qual definiremos melhor abaixo.

Definição 1.4.16. *Dizemos que um sistema Hamiltoniano linear periódico é parametricamente estável ou fortemente estável se ele e todas as perturbações suficientemente pequenas dele por sistemas Hamiltonianos lineares periódicos são estáveis, ou seja, (1.4) é parametricamente estável se existe um $\epsilon > 0$ tal que $\dot{\boldsymbol{z}} = R(t)\boldsymbol{z}$ é estável, onde $R(t)$ é qualquer matriz Hamiltoniana linear com o mesmo período tal que $|A(t) - R(t)| < \epsilon$, para todo t.*

Antes de enunciar o principal resultado sobre estabilidade paramétrica que usamos nesse trabalho é necessário que esclareçamos alguns pontos. Considere um sistema Hamiltoniano linear τ-periódico

$$\dot{x} = JS(t)x \tag{1.16}$$

e seja

$$H(x, t, \epsilon) = H_0 + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \cdots \tag{1.17}$$

sua função Hamiltoniana expandida em função do parâmetro ϵ. Observe que $H_0, H_1, \cdots$ são formas quadráticas na variável x. Suponha que para $\epsilon = 0$ a equação característica de (1.16) tenha raízes imaginárias puras $\pm i\omega_k, \omega_k > 0, k = 1, \cdots, n$ (as quantidades ω_k são ditas as frequências desse sistema Hamiltoniano). Suponha que as quantidades $\omega_k, k = 1, \cdots, n$ são todas distintas. Dessa maneira, através de uma transformação simplética $x = Ny$, para a qual apresentaremos uma construção no próximo capítulo, a função H_0 em (1.17) é transformada em $H_0(y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(y_j^2 + y_{n+j}^2)$ e assim, o Hamiltoniano em (1.17) é levado no Hamiltoninano

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(y_j^2 + y_{n+j}^2) + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \cdots, \tag{1.18}$$

onde $H_1, H_2, \cdots$ são formas quadráticas na variável y com coeficientes contínuos e τ-periódicos em t. Os σ_j são dados por $\sigma_j = \delta_j\omega_j$, $\omega_j > 0$ e os $\delta_j = \pm 1$ são completamente determinados no processo de construção da matriz N.

Definição 1.4.17. *Dizemos que as frequências $\omega_1, \cdots, \omega_n$ de um sistema Hamiltoniano linear possuem ressonância de ordem k quando existem inteiros $k_1, \cdots, k_n$ onde $|k_1| + \cdots + |k_n| = k$ tais que*

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0,$$

no caso autônomo ou

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = N, N = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

no caso periódico.

Agora estamos prontos para enunciar o seguinte teorema

Teorema 1.4.18. *(Krein-Gel'fand-Lidskii) Para ϵ suficientemente pequeno o sistema linear com Hamiltoniano (1.18) é estável se, e somente se, as quantidades $\sigma_j = \delta_j\,\omega_j$, onde $\delta_j = \pm 1$, não estão relacionadas pelas igualdades*

$$\sigma_l + \sigma_k = N,\ \ k, l = 1, 2, \cdots, n;\ \ N = \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{1.19}$$

Observação 1.4.19. *Chamamos de ressonância de Krein aquelas para as quais vale $\sigma_l + \sigma_k = N$, $k, l = 1, 2, \cdots, n$; $N = \pm 1, \pm 2, \cdots$.*

Capítulo 2

Estabilidade e forma normal de sistemas Hamiltonianos lineares com coeficientes constantes e periódicos

Dado um sistema Hamiltoniano

$$\dot{z} = J\,\nabla H(z) \tag{2.1}$$

e um equilíbrio z_0 desse sistema, na busca de responder perguntas acerca da dinâmica desse sistema é bastante comum, primeiramente, tentarmos entender como o sistema se comporta próximo do equilíbrio. Dessa maneira, linearizamos o sistema em torno do equilibrio e, assim, obtemos

$$\dot{z} = J\,D^2H(z_0)(z - z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^2). \tag{2.2}$$

O sistema em (2.2) é dito sistema perturbado ou sistema não linear, em geral, e o sistema linear associado a este

$$\dot{z} = J\,D^2H(z_0)(z - z_0) \tag{2.3}$$

é denominado sistema não perturbado. Observe que o sistema em (2.3) é um sistema Hamiltoniano linear e, como dissemos antes, com o objetivo de entender a dinâmica do sistema perturbado analisamos primeiramente este. Mais detalhamente falando, escrevendo o desenvolvimento em série de Taylor do Hamiltoniano do sistema (2.1) em torno do equilíbrio z_0 temos

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \cdots\ , \tag{2.4}$$

onde H_j é um polinômio homogêneo de grau j em $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $H_2 = \frac{1}{2} z^T D^2 H(z_0)\, z$. Se H_2 for uma forma quadrática positiva ou negativa definida, a estabilidade desse sistema está resolvida. O sistema será estável uma vez que H será uma integral primeira definida positiva ou negativa. Se H_2 for uma forma quadrática indefinida, o Teorema da estabilidade de Arnold [1] para sistemas com dois graus de liberdade nos dá um caminho para a estabilidade do sistema perturbado ou sistema não linear.

O estudo da dinâmica na vizinhança do equilíbrio é convenientemente feito através da forma normal do Hamiltoniano. Nesse capítulo e no seguinte nos preocupamos em descrever o processo de normalização linear com o intuito de decidirmos sobre a estabilidade linear de um sistema Hamiltoniano, mais precisamente sobre a estabilidade paramétrica desse sistema.

2.1 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares autônomos.

2.1.1 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares com coeficientes constantes.

Considere o seguinte sistema Hamiltoniano linear

$$\dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x}, \tag{2.5}$$

onde $\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n})$ e a matriz S aqui é real simétrica, com entradas constantes e de ordem $2n$.

A equação característica de (2.5) é dada por

$$p(\lambda) = \det(JS - \lambda I_{2n}) = 0. \tag{2.6}$$

Para sistemas Hamiltonianos lineares vale o seguinte resultado

[1] Teorema de Arnold: Seja H um Hamiltoniano com dois graus de liberdade, parte quadrática indefinida e frequências ω_1 e ω_2 sem ressonância até quarta ordem. A origem é estável para o sistema cujo o Hamiltoniano é (2.4), desde que há algum k, $1 \leq k \leq N$, $D_{2k} = H_{2k}(\omega_2, \omega_1) \neq 0$ ou, de forma equivalente, desde que H_2 não divide H_{2k}. Em particular, o equilíbrio é estável se

$$D_4 = \frac{1}{2}(A\omega_2^2 + 2B\omega_1\omega_2 + C\omega_1^2) \neq 0,$$

onde A, B, C são constantes.

Afirmação 2.1.1. *O polinômio característico $p(\lambda)$ é par.*

De fato,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(JS - \lambda I_{2n}) = \det(JS - \lambda I_{2n})^T \\ &= \det(S^T J^T - \lambda I_{2n}) = \det(-SJ - \lambda I_{2n}) \\ &= \det(J^2 SJ - \lambda I_{2n}) = \det(J^2 SJ + \lambda(-I_{2n})) \\ &= \det(J^2 SJ + \lambda J^2) = \det(J^2 SJ + \lambda J I_{2n} J) \\ &= \det J(JS + \lambda I_{2n})J = \det J. \det(JS + \lambda I_{2n}). \det J \\ &= 1. \det(JS + \lambda I_{2n}).1 = \det(JS - (-\lambda) I_{2n}) \\ &= p(-\lambda). \end{aligned}$$

Portanto, se $\lambda = u + iv$ é raiz de (2.6) com parte real negativa, então $-\lambda = -u - iv$ também é, e com parte real positiva. Assim, concluímos a partir do teorema (1.4.4) que o sistema (2.5) é instável.

Dessa forma, concluímos que para o sistema (2.5) ser estável é necessário que as raízes da equação característica sejam números imaginários puros. A condição suficiente é garantida quando a matriz JS é redutível a uma forma diagonal.

Observação 2.1.2. *Quando a função Hamiltoniana H do sistema (2.5) é definida positiva, temos a garantia das condições necessárias e suficientes para a estabilidade do sistema (2.5). Para isso, basta tomar H como a sua função de Lyapunov e considerando que H=constante, obtemos assim as conclusões sobre estabilidade do sistema (2.5).*

Exemplo 2.1.3. *Considere o sistema linear*

$$\frac{dx_k}{dt} = (-1)^{k+1}\omega_k x_{2+k}, \quad \frac{dx_{2+k}}{dt} = (-1)^k \omega_k x_k, \quad (\omega_k > 0, \;\; k = 1, 2). \tag{2.7}$$

Equivalentemente, temos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{JS} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

donde

$$S = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}.$$

A equação característica do sistema (2.7) tem dois pares de raízes imaginárias puras. De fato,

$$p(\lambda) = \det(JS - \lambda I) = 0 \implies \lambda^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0,$$

cujas raízes são $\pm i\omega_1$ *e* $\pm i\omega_2$*. Apesar delas serem imaginárias puras temos que a função Hamiltoniana*

$$H = \frac{1}{2}x^T S x = \frac{1}{2}\omega_1(x_1^2 + x_3^2) - \frac{1}{2}\omega_2(x_2^2 + x_4^2)$$

não é definida positiva.

2.1.2 Normalização de um sistema Hamiltoniano linear com coeficientes constantes

Suponha que as raízes da equação característica $\det(JS - \lambda I) = 0$ do sistema $\dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x}$ são simples e imaginárias puras

$$\lambda_k = i\omega_k \quad , \quad \lambda_{n+k} = -i\omega_k \quad (\omega_k > 0, k = 1, ..., n).$$

Vamos achar uma transformação canônica real, linear, $x_j \mapsto y_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ que leve o sistema (2.5) na forma normal. Neste caso, por forma normal do sistema de equações (2.5) designamos o sistema de equações diferenciais cuja função Hamiltoniana H é igual a soma algébrica dos Hamiltonianos de n osciladores lineares desacoplados

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \delta_k\omega_k(y_k^2 + y_{n+k}^2) \tag{2.8}$$

com $\delta_k = \pm 1$. Ou seja, mostraremos a existência de uma matriz de normalização N que transforma o Hamiltoniano do sistema (2.5), através da transformação $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$, no Hamiltoniano (2.8). Para isso, utilizaremos o algoritmo descrito no livro do Markeev [10]. Tal algoritmo, quando aplicado a um problema concreto, depende apenas da obtenção dos autovalores da matriz JS.

Vamos introduzir a notação $\mathbf{y}^T = (y_1, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_{2n})$. Então, levando-se em consideração (2.8), encontramos que a forma normal do sistema linear se escreve na forma do seguinte sistema Hamiltoniano de equações:

$$\dot{\mathbf{y}} = JS^*\mathbf{y}, \tag{2.9}$$

onde S^* é uma matriz diagonal real, cujos elementos da diagonal são determinados pelas igualdades

$$h^*_{k,k} = h^*_{n+k,n+k} = \delta_k \omega_k \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

A mudança das variáveis $\mathbf{x}$ para as variáveis $\mathbf{y}$ é dada por meio da matriz N. Note que

$$NJS^*\mathbf{y} = N\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x} = JSN\mathbf{y}$$

assim, a matriz N satisfaz a seguinte equação matricial

$$NJS^* = JSN. \tag{2.10}$$

Além disso, para que a transformação $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$ seja canônica, a matriz N deve ser simplética, isto é, ela deve satisfazer mais uma equação matricial:

$$N^TJN = J. \tag{2.11}$$

A solução da equação matricial (2.10) não é única. A fim de achar a transformação normalizadora é necessário escolher, dentro do conjunto infinito de soluções da equação (2.10) uma que seja real e satisfaça a condição de ser simplética. Ou seja, desejamos encontrar N que seja solução do sistema

$$\begin{cases} NJS^* = JSN \\ N^TJN = J \end{cases}$$

A solução N da equação (2.10) será procurada na forma do produto de duas matrizes $N = N_1N_2$, onde a matriz N_2 é definida pela igualdade:

$$N_2 = \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}$$

Substituindo $N = N_1N_2$ na equação (2.10), temos

$$N_1N_2JS^* = JSN_1N_2$$

$$N_1N_2JS^*N_2^{-1} = JSN_1$$

$$N_1G = JSN_1, \tag{2.12}$$

onde $G = N_2JS^*N_2^{-1}$ é a forma diagonal da matriz JS, suas entradas satisfazem as igualdades $g_{kk} = -g_{n+k,n+k} = i\delta_k\omega_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Deste modo, é necessário encontrar uma matriz N_1 que leve a matriz JS à forma diagonal.

A matriz N_1 será tal que suas colunas serão os autovetores da matriz JS,

$$N_1 = col\left(\ e_1, ..., e_m, ..., e_{n+1}, ..., e_{n+m}, ...\ \right)_{2n},$$

onde o autovetor e_m é correspondente ao autovalor $\lambda_m = i\delta_m\omega_m$ e o autovetor e_{n+m} é correspondente ao autovalor $\lambda_m = -i\delta_m\omega_m$, $(m = 1, 2, ...)$. Denotaremos $e_k^* = r_k^* + is_k^*$ um autovetor qualquer da matriz JS correspondente ao autovalor $i\omega_k$, ou seja, $JS(r_k^* + is_k^*) = i\omega_k(r_k^* + is_k^*)$. Deste fato segue que

$$JSr_k^* = -\omega_k s_k^* \quad , \quad JSs_k^* = \omega_k r_k^* \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{2.13}$$

Os autovetores e_m e e_{n+m} são tomados da seguinte forma

$$e_m = c_m(\delta_m r_m^* + is_m^*) \quad , \quad e_{n+m} = c_m(\delta_m r_m^* - is_m^*), \tag{2.14}$$

onde $c_m \in \mathbb{R}$. As constantes c_m serão escolhidas com a finalidade de garantir que a matriz N seja real, e elas serão obtidas com a condição $N^T JN = J$.

Substituindo $N = N_1N_2$ na condição acima, temos:

$$N_2^T N_1^T JN_1N_2 = J$$

$$N_2^T FN_2 = J, \tag{2.15}$$

onde $F = N_1^T JN_1$. O elemento f_{kl} desta matriz é dado pelo produto interno

$$f_{kl} = \langle e_k, Je_l\rangle. \tag{2.16}$$

Mas, como temos $\langle a, Jb\rangle = -\langle Ja, b\rangle$, para todo vetor a e b, segue que F é anti-simétrica.

Vamos provar ainda que se $|k-l| \neq n$, então $f_{kl} = 0$. De fato, como $J^2 = -I_{2n}$ temos a seguinte igualdade

$$\langle e_k, J^2He_l\rangle = \langle e_k, HJ^2e_l\rangle.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}
\langle e_k, J^2He_l\rangle &= \langle e_k, HJ^2e_l\rangle \\
\langle e_k, JJHe_l\rangle &= \langle J^T H^T e_k, Je_l\rangle \\
\langle e_k, J\lambda_l e_l\rangle &= -\langle JHe_k, Je_l\rangle \\
\langle e_k, J\lambda_l e_l\rangle &= -\langle \lambda_k e_k, Je_l\rangle,
\end{aligned}$$

então

$$(\lambda_k + \lambda_l)\langle e_k, Je_l\rangle = 0$$
$$(\lambda_k + \lambda_l)f_{kl} = 0 \tag{2.17}$$

temos $\lambda_k + \lambda_l = 0$ somente se $|l-k| = n$, por causa do ordenamento dos autovalores tomados da definição da matriz N_1 portanto $f_{kl} = 0$, se $|l-k| \neq n$. Assim, a matriz F terá a seguinte estrutura

$$F = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

onde D onde é uma matriz diagonal de ordem n com elementos $d_{kk} = \langle e_k, Je_{n+k}\rangle$. Nenhum dos elementos d_{kk} é igual a zero, caso contrário, o determinante da matriz F seria nulo. Porém,

$$\det F = \det N_1^T . \det J . \det N_1 = (\det N_1)^2 \neq 0,$$

pois N_1 é composta de autovetores correspondentes aos autovalores da matriz JS, que são distintos.

Levando em consideração as expressões de e_k e e_{n+k} em (2.14), então

$$d_{kk} = -2ic_k^2\delta_k\langle r_k^*, Js_k^*\rangle \quad , \quad (k = 1, ..., n). \tag{2.18}$$

Agora, de $N_2^T F N_2 = J$, obtemos a seguinte condição que garante a simpleticidade da matriz N, como segue

$$N_2^T F N_2 = J$$
$$\begin{pmatrix} iI_n & -iI_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -2iD \\ 2iD & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

usando a definição de igualdade de matrizes, temos

$$2id_{kk} = 1.$$

E finalmente,

$$4c_k^2\delta_k\langle r_k^*, Js_k^*\rangle = 1. \tag{2.19}$$

A partir desta última equação obtemos também a condição para escolha do sinal das quantidades δ_k, e para que a quantidade c_k seja real tomaremos

$$\delta_k = sign\langle r_k^*, Js_k^*\rangle \quad , \quad (k = 1, ..., n). \tag{2.20}$$

Então $c_k = \frac{\kappa_k}{2}$, onde

$$\kappa_k = \frac{1}{\sqrt{|\langle r_k^*, Js_k^* \rangle|}} \quad , \quad (k = 1, ..., n). \tag{2.21}$$

Temos que a matriz N da transformação normalizadora não-singular é real, sua k-ésima coluna sendo os vetores $-\kappa_k s_k^*$ e sua $(n+k)$-ésima coluna, o vetor $\delta_k \kappa_k r_k^*$

$$N = col\left(\ -\kappa_1 s_1^*, \ \cdots, -\kappa_n s_n^*, \ \delta_1 \kappa_1 r_1^*, \ \cdots \ , \ \delta_n \kappa_n r_n^* \ \right).$$

Vejamos agora como normalizar um sistema Hamiltoniano linear com um grau de liberdade através do processo descrito acima.

Exemplo 2.1.4. *Considere um sistema Hamiltoniano linear* $\dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x}$ *com um grau de liberdade, cuja função Hamiltoniana é escrita como*

$$H = h_{20}x_1^2 + h_{11}x_1x_2 + h_{02}x_2^2. \tag{2.22}$$

Então

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2h_{20} & h_{11} \\ h_{11} & 2h_{02} \end{pmatrix}, \quad JS = \begin{pmatrix} h_{11} & 2h_{02} \\ -2h_{20} & -h_{11} \end{pmatrix}.$$

Vimos que para o processo de normalização, precisamos apenas dos autovalores da matriz JS *e dos autovetores correspondentes. De posse desses dados podemos construir a matriz normalizante* N*. Calculando os autovalores através da equação*

$$\det \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda & 2h_{02} \\ -2h_{20} & -h_{11} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

temos

$$\lambda = \pm i\sqrt{4h_{02}h_{20} - h_{11}^2} = \pm i\sqrt{\triangle} = \pm i\omega,$$

onde $\triangle = 4h_{02}h_{20} - h_{11}^2 > 0$ *(supondo que as raízes sejam imaginárias puras) e* $\omega = \sqrt{\triangle}$ *é a frequência das oscilações.*

Usando as equações $JSr^* = -\omega s^*$ *e* $JSs^* = \omega r^*$ *para encontrar a parte real e imaginária do autovetor* e^* *correspondente ao autovalor* $i\omega$ *da matriz* JS *obtemos, respectivmente, que*

$$r^* = \begin{pmatrix} -2h_{02} \\ h_{11} \end{pmatrix} \quad e \quad s^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \end{pmatrix}.$$

Temos ainda, através das equações (2.20) e (2.21), que:

$$\begin{aligned}\delta &= sign\langle r^*, Js^*\rangle = sign(2\omega h_{02}) = sign(h_{02})\\ \kappa &= \frac{1}{\sqrt{|\langle r^*, Js^*\rangle|}} = \frac{1}{\sqrt{|2\omega h_{02}|}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}}\end{aligned}$$

e assim, a matriz N da transformação normalizante é dada por

$$N = \begin{pmatrix} -\kappa s^* & \delta\kappa r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\delta h_{02}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}} \\ \frac{\omega}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}} & \frac{\delta h_{11}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{2|h_{02}|}{\omega}} \\ \sqrt{\frac{\omega}{2|h_{02}|}} & \frac{h_{11}}{h_{02}}\sqrt{\frac{|h_{02}|}{2\omega}} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a transformação $\boldsymbol{x} = N\boldsymbol{y}$, é dada por,

$$x_1 = \frac{-2\delta h_{02}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}}y_2 \quad , \quad x_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}}y_1 + \frac{\delta h_{11}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}}y_2$$

e, dessa forma, obtemos o Hamiltoniano normalizado

$$H = \frac{1}{2}\delta\omega(y_1^2 + y_2^2). \tag{2.23}$$

2.2 Estabilidade de um sistema Hamiltoniano linear não autônomo

Nesta seção, estudaremos a teoria dos sistemas Hamiltonianos lineares periódicos, por meio do teorema de Floquet e forneceremos, alguns resultados a respeito da estabilidade desse tipo de sistema. Começaremos por listar alguns dos principais resultados relacionados a representação de Floquet.

2.2.1 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares periódicos

Considere o sistema Hamiltoniano linear

$$\dot{\mathbf{x}} = JS(t)\,\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

$\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n})$, onde $S(t)$ é contínua, real, simétrica e 2π-periódica em t.

Antes de vermos o problema de estabilidade para sistemas lineares com coeficientes periódicos, faremos algumas considerações:

Definição 2.2.1. *A equação*

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_{m-1} z + a_m = 0 \ (a_0 \neq 0) \tag{2.25}$$

é chamada recíproca se os seus coeficientes que são equidistantes dos extremos são iguais, isto é, $a_k = a_{m-k}$.

Observação 2.2.2. *É verdadeira a identidade*

$$f(z) = z^m f(\frac{1}{z}) \ , \ (z \neq 0). \tag{2.26}$$

para equações recíprocas. De fato,

$$\begin{aligned} z^m f(\frac{1}{z}) &= z^m(a_0(\frac{1}{z})^m + a_1(\frac{1}{z})^{m-1} + ... + a_{m-1}(\frac{1}{z}) + a_m) \\ &= a_0 + a_1 z + ... + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m \\ &= a_m + a_{m-1} z + ... + a_1 z^{m-1} + a_0 z^m \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se esta identidade é verdadeira segue que a equação (2.25) é recíproca.

$$\begin{aligned} z^m f(\frac{1}{z}) &= f(z) \\ a_0 + a_1 z + ... + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m &= a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_{m-1} z + a_m, \end{aligned}$$

donde $a_k = a_{m-k}$. *Observe ainda que por (2.26) temos que se z é raiz, então $\frac{1}{z}$ também o é.*

Teorema 2.2.3 (Teorema de Lyapunov-Poincaré)**.** *Considere o sistema Hamiltoniano linear* $\dot{\boldsymbol{x}} = JS(t)\boldsymbol{x}$. *Se a matriz $S(t)$ é 2π-periódica em t, então a equação característica*

$$f(\rho) = \det(X(2\pi) - \rho I_{2n}) = 0 \tag{2.27}$$

é recíproca.

Demonstração: Primeiramente mostraremos que a $X(t)$ é simplética. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X^T J X) &= \left(\frac{d}{dt}X^T\right) JX + X^T J \left(\frac{d}{dt}X\right) = X^T S^T J^T J X + X^T J J S X \\ &= X^T S(-J^2) X + X^T J^2 S X = X^T S X - X^T S X = 0 \end{aligned}$$

que implica em $X^T J X = D$, onde D é uma matriz constante. Como $X^T(0) J X(0) = J$, temos que $D = J$ para todo t. Portanto, a matriz fundamental $X(t)$ é simplética, pois satisfaz a identidade $X^T J X = J$.

Em segundo lugar, observa-se do teorema (1.4.8) que $\det X(2\pi) = 1$.

Por fim, mostraremos que a equação (2.27) é recíproca

$$\begin{aligned}
f(\rho) &= \det(X - \rho I_{2n}) = \det X(I_{2n} - \rho X^{-1}) = \det X(I_{2n} - \rho J^{-1} X^T J) \\
&= \det(I_{2n} - \rho J^{-1} X^T J) = \det J^{-1}(I_{2n} - \rho X^T) J = \det(I_{2n} - \rho X^T) \\
&= \det(I_{2n} - \rho X^T)^T = \det(I_{2n} - \rho X) = \det(\rho(\frac{1}{\rho} I_{2n} - X)) \\
&= \det \rho I_{2n}. \det(\frac{1}{\rho} I_{2n} - X) = \rho^{2n} f(\frac{1}{\rho}).
\end{aligned}$$

∎

Como consequências deste teorema, temos:

- O sistema Hamiltoniano linear (1.14) é estável se, e somente se, todos os seus multiplicadores estiverem no círculo unitário, ou seja, $|\rho| = 1$ e a matriz $X(2\pi)$ é redutível a forma diagonal;
- Os multiplicadores ρ_j e $\frac{1}{\rho_j}$ tem a mesma multiplicidade;
- Se a equação característica (2.27) tem a raiz $\rho = 1$ ou $\rho = -1$, então essas raízes tem multiplicidade par.

2.3 Normalização de um Sistema Hamiltoniano linear periódico

Considere o sistema Hamiltoniano linear periódico $\dot{\mathbf{x}} = JS(t)\mathbf{x}$ com n graus de liberdade. Vamos descrever o algoritmo que constrói a matriz normalizante, ou seja, o algoritmo que leva o sistema em sua forma normal

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \delta_k \lambda_k (y_k^2 + y_{n+k}^2), \tag{2.28}$$

onde $\delta_k = \pm 1$. Tal transformação deverá ser real, canônica univalente, 2π-periódica em t . Assumiremos ainda que os expoentes característicos do sistema acima são imaginários puros, $\chi_k = \pm i\lambda_k$, e que os multiplicadores $\rho_k = e^{i2\pi\lambda_k}$ e $\rho_{n+k} = e^{-i2\pi\lambda_k}$ são todos distintos $(k = 1, 2, ..., n)$.

Como no caso constante, tomaremos a transformação normalizante como sendo

$$x = Ny. \tag{2.29}$$

Aqui ela será como o produto de duas mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} x &= N_1 z \ , \ com \ N_1 = X(t)Ae^{-Bt} && (2.30) \\ z &= N_2 y, && (2.31) \end{aligned}$$

onde
A é uma matriz constante;
B é uma matriz diagonal cujas diagonais são definidas pelas igualdades $b_{kk} = -b_{n+k,n+k} = i\delta_k\lambda_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$;
N_2 a matriz dada anteriormente, a saber

$$N_2 = \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}$$

Conforme visto na seção do teorema de Floquet, a substituição (2.30) leva o sistema (2.24) para a forma diagonal

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}. \tag{2.32}$$

Logo após a substituição (2.31) o sistema (2.32) assume a forma normal. A matriz A pode ser escolhida afim de que a transformação (2.29) seja real, canônica univalente e 2π-periódica em t.

Temos que a transformação $z = N_2 y$ é canônica com valência $2i$. De fato,

$$\begin{pmatrix} iI_n & -iI_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

$$N_2^T J N_2 = 2iJ.$$

Note que é necessário e suficiente que a matriz A seja simplética com valência $\frac{1}{2i}$ para que a transformação (2.29) seja simplética univalente, uma vez que $X(t)$ é simplética, N_2 simplética com valência $2i$ e por (1.1.3) B é Hamiltoniana e assim pelo corolário (1.2.22) temos que e^{-Bt} também é simplética. Ou seja, a matriz A deve satisfazer a equação

$$A^T J A = \frac{1}{2i} J \tag{2.33}$$

Além disso, como estamos procurando uma transformação 2π- periódica, temos

$$X(2\pi)Ae^{-2\pi B}N_2 = X(0)AI_{2n}N_2$$

donde segue que

$$A^{-1}X(2\pi)A = e^{2\pi B},\ com\ e^{2\pi B} = diag(\rho_1, ..., \rho_n, \rho_{n+1}, ..., \rho_{2n}). \qquad (2.34)$$

Nota-se que a matriz A leva a matriz $X(2\pi)$ à forma diagonal, a m-ésima coluna é o autovetor e_m correspondente ao multiplicador $\rho_m = e^{i2\pi\delta_m\lambda_m}$ e na (n+m)-ésima coluna e_{n+m} correspondendo ao multiplicador $\rho_{n+m} = e^{-i2\pi\delta_m\lambda_m}$ (m=1, 2, ..., n).

Seja $e_k^* = \overline{r}_k^* + i\overline{s}_k^*$ um autovetor da matriz $X(2\pi)$ relacionado ao multiplicador $e^{i\pi\delta_k\lambda_k}$, então podemos determinar os vetores e_m e e_{n+m} da mesma maneira como foi calculado no caso constante

$$e_m = c_m(\delta_m\overline{r}_m^* + i\overline{s}_m^*),\ e_{n+m} = c_m(\delta_m\overline{r}_m^* - i\overline{s}_m^*),$$

esta escolha da matriz A que garante que a transformação seja real.

Temos ainda que as quantidades $c_k = \frac{\kappa_k}{2}$, δ_k e κ_k são dadas pelas fórmulas mencionadas no processo de normalização descrito anteriormente, pois substituindo a matriz A a ser construída no modo acima na equação matricial (2.33), vemos que é equivalente às igualdades n escalares $4c_k^2\delta_k\langle r_k^*, Js_k^*\rangle = 1$ da seção 2.1.2 deste capítulo.

Assim, encontramos a matriz A e δ_k da forma normal da função Hamiltoniana procurada. Sendo a matriz N da forma

$$N = N_1N_2 = X(t)Ae^{-Bt}N_2,$$

e após algumas transformações esta pode ser representada como o produto de três matrizes

$$N = X(t)PQ(t). \qquad (2.35)$$

A matriz P denota uma matriz constante na qual a k-ésima coluna é o vetor $-\kappa_k s_k^*$ e a (n+k)-ésima coluna é o vetor $\delta_k\kappa_k r_k^*$. A matriz $Q(t)$ tem a forma

$$Q(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) & -D_2(t) \\ D_2(t) & D_1(t) \end{pmatrix},$$

onde

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} \cos\lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \cos\lambda_n t \end{pmatrix} \text{ e } D_2(t) = \begin{pmatrix} \delta_1 \text{sen}\lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \text{sen}\lambda_n t \end{pmatrix}.$$

2.4 Sistema Hamiltoniano linear periódico com um grau de liberdade

Nesta seção, consideraremos as questões da estabilidade e da normalização do sistema (2.24) no caso de um grau de liberdade.

2.4.1 Equação característica e condições de estabilidade

Seja $X(t)$ a matriz fundamental do sistema (2.24), satisfazendo a condição inicial $X(0) = I_2$,

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \ x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0. \tag{2.36}$$

Como a matriz $X(t)$ é simplética, então $\det X(t) = 1$ para todo t. Sendo assim, para $t = 2\pi$ temos

$$x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) = 1 \tag{2.37}$$

A equação característica da matriz $X(2\pi)$ é dada por

$$f(\rho) = \det(X(2\pi) - \rho I_2) = 0$$

que é o mesmo que

$$\rho^2 - (x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi))\rho + (x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)) = 0$$

Dessa forma, a equação característica de $X(2\pi)$ se reduz a

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0, \tag{2.38}$$

onde

$$2a = x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi). \tag{2.39}$$

Observe que as raízes da equação (2.38) são dadas por

$$\rho_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \tag{2.40}$$

Consideraremos os quatro casos possíveis:

Caso $|a| > 1$. Neste caso, as raízes (2.40) são reais e o módulo de uma delas é maior do que 1. Assim, o sistema (2.24) é instável.

Caso $|a| < 1$. Aqui o sistema será estável uma vez que as raízes da equação (2.38) são números complexos conjugados distintos e $|\rho| = 1$,

$$\begin{aligned}\rho_1 &= e^{i2\pi\lambda} = \cos(2\pi\lambda) + i\mathrm{sen}(2\pi\lambda),\\ \rho_2 &= e^{-i2\pi\lambda} = \cos(2\pi\lambda) - i\mathrm{sen}(2\pi\lambda),\end{aligned}$$

onde $\pm i\lambda$ é a parte imaginária do expoente característico. Nota-se que o coeficiente a e λ são ligados pela relação

$$\cos(2\pi\lambda) = a. \tag{2.41}$$

Neste caso temos ainda que como as raízes $\rho_{1,2}$ são distintas, então 2λ não é um inteiro, pois caso contrário, teríamos $\rho_{1,2} = \cos(2\pi\lambda)$. Logo, não há ressonância de primeira e segunda ordem no sistema

$$2\lambda \neq N, \quad \lambda \neq N, \quad \text{onde } N \text{ é um inteiro.}$$

A condição $|a| = 1$ nos dá os limites das regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros do problema mecânico considerado. Os expoentes característicos $\pm i\lambda$ também satisfaz a relação $\cos(2\pi\lambda) = a$.

Caso $a = 1$. Usando a equação $\cos(2\pi\lambda) = a = 1$ deduzimos que $\lambda = N$, onde N é um inteiro, ou seja, temos ressonância de primeira ordem. Aqui $\rho_1 = \rho_2 = 1$. E a questão de estabilidade, neste caso, está relacionada com o fato da matriz $X(2\pi)$ ser redutível a forma diagonal ou não. A saber, se o os divisores elementares para essas raízes são simples, então o sistema linear é estável. Se os divisores elementares não são simples, então o sistema linear (2.24) é instável.

Caso $a = -1$. Neste caso, $\cos(2\pi\lambda) = a = -1$, λ será um semi-inteiro ($2\lambda = 2N + 1$), no sistema aparece ressonância de segunda ordem. A equação característica possui raiz dupla $\rho_1 = \rho_2 = -1$. E novamente, o sistema (2.24) é estável se $X(2\pi)$ é redutível a forma diagonal e instável no caso contrário.

Observação 2.4.1. *Na região $|a| < 1$ de estabilidade do sistema linear, o produto $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)$ é sempre diferente de zero, este fato se dá pois a condição $|a| < 1$ e a equação (2.37) são incompatíveis.*

Se $x_{12}(2\pi) = x_{21}(2\pi) = 0$, então a matriz $X(2\pi)$ tem as formas diagonais: Para $a = 1$

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $a = -1$

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se para $|a| = 1$, *a* $X(2\pi)$ *não tem a forma diagonal, nem é redutível a uma, então* $x_{12}(2\pi)$ *e* $x_{21}(2\pi)$ *não podem ser ambas zero. Temos três casos aqui:*
a) $x_{12}(2\pi) \neq 0$, $x_{21}(2\pi) = 0$;
b) $x_{12}(2\pi) = 0$, $x_{21}(2\pi) \neq 0$;
c) $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) < 0$.
Os dois primeiros casos seguem do fato da matriz $X(2\pi)$ *não ser redutível à forma diagonal. O terceiro caso, podemos verificar através da equação característica*

$$\rho^2 - (x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi))\rho + (x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)) = 0$$

$$\triangle = (x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi))^2 - 4.1.(x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)) = 0,$$

donde segue que

$$(x_{11}(2\pi) - x_{22}(2\pi))^2 = -4x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi),$$

temos o desejado. Outra maneira de verificar seria através do exemplo de sistema com Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4\pi}[(2\cos(t) + \text{sen}(t))x_1 + (\cos(t) - 2\text{sen}(t))x_2]^2$$

com

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{t}{\pi}(\cos(t) - 2\text{sen}(t)) & \text{sen}(t) + \frac{t}{2\pi}(\cos(t) - 2\text{sen}(t)) \\ -\text{sen}(t) - \frac{t}{\pi}(2\cos(t) + \text{sen}(t)) & \cos(t) - \frac{t}{2\pi}(2\cos(t) + \text{sen}(t)) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\rho_1 = \rho_2 = 1$. *Como o posto da matriz* $X(2\pi) - I$ *é igual a um, a matriz* $X(2\pi)$ *não pode ser diagonalizável. Portanto, verificamos assim o caso c).*

2.4.2 Normalização

Vejamos a construção da transformação normalizadora do sistema (2.24) para um grau de liberdade ($n = 1$). Consideraremos os três casos descritos no livro do Markeev [10]:

Caso $|a| < 1$. Calculando o autovetor v da matriz $X(2\pi)$ relacionado ao multiplicador $\rho_1 = e^{i2\pi\lambda}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_{11}(2\pi) - \rho_1 & x_{12}(2\pi) \\ x_{21}(2\pi) & x_{22}(2\pi) - \rho_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) - i\text{sen}(2\pi\lambda))v_1 + x_{12}(2\pi)v_2 = 0 \\ x_{21}(2\pi)v_1 + (x_{22}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) - i\text{sen}(2\pi\lambda))v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{12}(2\pi) \\ x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) - i\text{sen}(2\pi\lambda) \end{pmatrix} = r + is,$$

onde

$$r = \begin{pmatrix} -x_{12}(2\pi) \\ x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\text{sen}(2\pi\lambda) \end{pmatrix}.$$

Usando o algoritmo descrito anteriormente temos dentro da região de estabilidade do sistema que

$$\nu = \langle r, Js \rangle = x_{12}(2\pi)\text{sen}(2\pi\lambda), \quad \delta = sign\nu, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{|\nu|}}. \tag{2.42}$$

A matriz da transformação normalizadora, real, simplética e 2π-periódica em t pode ser escrita da forma $N = X(t)PQ(t)$, em que

$$P = \begin{pmatrix} -\kappa s & \delta\kappa r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\kappa x_{12}(2\pi) \\ \kappa\text{sen}(2\pi\lambda) & \delta\kappa(x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda)) \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\delta\text{sen}(\lambda t) \\ \delta\text{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

O sistema normalizado terá o Hamiltoniano da forma

$$H = \frac{1}{2}\delta\lambda(y_1^2 + y_2^2). \tag{2.45}$$

Para a normalização no limite da região de estabilidade $|a| = 1$ consideraremos que a matriz fundamental $X(t)$ avaliada em 2π não é diagonalizável.

Caso $a = 1$. Ocorre ressonância de primeira ordem. Como no caso anterior a matriz N pode ser escrita como o produto de três matrizes

$$N = X(t)PQ(t),$$

onde

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O número δ e a matriz P são definidos por:
Se $x_{12}(2\pi) \neq 0$, então

$$\delta = sign(x_{12}(2\pi)), \quad P = \begin{pmatrix} \kappa_{12} & 0 \\ \delta \frac{x_{11}(2\pi)-1}{\sqrt{2\pi|x_{12}(2\pi)|}} & \frac{1}{\kappa_{12}} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

e se $x_{21}(2\pi) \neq 0$, então

$$\delta = -sign(x_{21}(2\pi)), \quad P = \begin{pmatrix} \delta \frac{x_{11}(2\pi)-1}{\sqrt{2\pi|x_{12}(2\pi)|}} & \frac{1}{\kappa_{12}} \\ -\kappa_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

onde $\kappa_{ij} = \sqrt{\frac{|x_{ij}(2\pi)|}{2\pi}}$. Logo, o sistema (2.24) normalizado corresponde ao Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\delta y_2^2, \quad \text{onde } \delta = \pm 1. \tag{2.48}$$

Caso $a = -1$. Ocorre ressonância de segunda ordem, aqui o período da matriz de normalização não será 2π como nos casos anteriores, ela terá período igual a 4π. A matriz novamente é dada por $N = X(t)PQ(t)$, sendo necessário na definição do δ e da matriz P para mudar as fórmulas a quantidade 2π para 4π, notando que $x(4\pi) = X^2(2\pi)$. O número δ e a matriz P são definidos por:
Se $x_{12}(2\pi) \neq 0$, então

$$\delta = -sign x_{12}(2\pi), \quad P = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{|x_{12}(2\pi)|}{2\pi}} & 0 \\ -\delta \frac{x_{22}(2\pi)+1}{\sqrt{2\pi|x_{12}(2\pi)|}} & \sqrt{\frac{2\pi}{|x_{12}(2\pi)|}} \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

e se $x_{21}(2\pi) \neq 0$, então

$$\delta = sign x_{21}(2\pi), \quad P = \begin{pmatrix} -\delta \frac{x_{11}(2\pi)+1}{\sqrt{2\pi|x_{21}(2\pi)|}} & \sqrt{\frac{2\pi}{|x_{21}(2\pi)|}} \\ -\sqrt{\frac{|x_{21}(2\pi)|}{2\pi}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

e assim, o sistema (2.24) normalizado corresponde ao Hamiltoniano (2.48).

Capítulo 3

Método de Deprit-Hori

Neste capítulo estudaremos o método de Deprit-Hori para sistemas Hamiltonianos lineares perturbados, com o objetivo de descrever a construção das curvas que limitam as regiões de estabilidade e instabilidade.

3.1 Algoritmo do Método de Depri-Hori

Vamos considerar o seguinte sistema Hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \qquad \dot{\mathbf{X}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{3.1}$$

com Hamiltoniano analítico em ϵ de modo que

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{X}^T = (X_1, ..., X_n)$ e ϵ é um parâmetro pequeno ($0 < \epsilon << 1$).

Vamos agora construir a tranformação canônica $\mathbf{x}, \mathbf{X} \xrightarrow{D} \mathbf{y}, \mathbf{Y}$ que leva o Hamiltoniano (3.2) no Hamiltoniano normalizado

$$K(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} K_m(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \tag{3.3}$$

O método é baseado no uso da série de Lie e da transformação de Lie. A transformação (D) será a solução, ϕ, do sistema de equações diferenciais abaixo,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\eta} = \frac{\partial W(\mathbf{x},\mathbf{X},t;\eta)}{\partial \mathbf{X}} \quad &, \quad \frac{d\mathbf{X}}{d\eta} = -\frac{\partial W(\mathbf{x},\mathbf{X},t;\eta)}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{dt}{d\eta} = 0 \quad &, \quad \frac{dR}{d\eta} = \frac{\partial W(\mathbf{x},\mathbf{X},t;\eta)}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.4}$$

sujeito às condições iniciais $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, $t = t$ e $R = 0$. Aqui $R = K(\mathbf{y},\mathbf{Y},t;\epsilon) - H(\mathbf{x},\mathbf{X},t;\epsilon)$ é a função resto, η é uma variável parâmetro pequena $(0 \leq \eta \leq \epsilon)$ e W é a função geradora da transformação ϕ dada por

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{m!} W_{m+1}(\mathbf{x},\mathbf{X},t). \tag{3.5}$$

A transformação ϕ obtida por esse processo é uma transformação simplética próxima da identidade. O novo Hamiltoniano K as vezes é dito transformada de Lie de H.

Para obter a função geradora W e consequentemente o Hamiltoniano transformado (3.3) usaremos as seguintes relações de recorrência encontradas no livro do Markeev [10]

$$K_0 = H_0, \tag{3.6}$$

$$K_m = H_m + \sum_{j=1}^{m-1} (C_{m-1}^{j-1} L_j H_{m-j} + C_{m-1}^{j} K_{j,m-j}) - \frac{DW_m}{Dt}, \tag{3.7}$$

onde

$$\frac{DW_m}{Dt} = \frac{\partial W_m}{\partial t} - L_m H_0, \tag{3.8}$$

$$K_{j,i} = L_j K_i - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1} L_s K_{j-s,i}, \tag{3.9}$$

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}. \tag{3.10}$$

Ao se resolver as equações em (3.7) para encontrar, recursivamente, K_m e W_m, $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ supõem-se que K_m é autônoma e W_m τ-periódica em t.

A notação $L_i f$ usada acima é para o colchete de Poisson de f e W_i e definimos por

$$L_i f = \{f, W_i\} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}_i}\frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{Y}_i} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}_i}\frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{y}_i}) \tag{3.11}$$

A partir das relações acima, teremos as seguintes equações de aproximação:

Para $m = 0$,
$$K_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = H_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \tag{3.12}$$

Para $m = 1$,
$$\begin{aligned}
K_1 &= H_1 + \sum_{j=1}^{1-1} (C_{1-1}^{j-1} L_j H_{1-j} + C_{1-1}^{j} K_{j,1-j}) - \frac{DW_1}{Dt} \\
K_1 &= H_1 + \sum_{j=1}^{0} (C_{0}^{j-1} L_j H_{1-j} + C_{0}^{j} K_{j,1-j}) - \frac{DW_1}{Dt} \\
K_1 &= H_1 - \frac{DW_1}{Dt} && (3.13)
\end{aligned}$$

Para $m = 2$,
$$\begin{aligned}
K_2 &= H_2 + \sum_{j=1}^{2-1} (C_{2-1}^{j-1} L_j H_{2-j} + C_{2-1}^{j} K_{j,2-j}) - \frac{DW_2}{Dt} \\
K_2 &= H_2 + \sum_{j=1}^{1} (C_{1}^{j-1} L_j H_{2-j} + C_{1}^{j} K_{j,2-j}) - \frac{DW_2}{Dt} \\
K_2 &= H_2 + C_1^0 L_1 H_1 + C_1^1 K_{1,1} - \frac{DW_2}{Dt} \\
K_2 &= H_2 + L_1 H_1 + K_{1,1} - \frac{DW_2}{Dt}, && (3.14)
\end{aligned}$$

onde
$K_{1,1} = L_1 K_1$.

Para $m = 3$,
$$\begin{aligned}
K_3 &= H_3 + \sum_{j=1}^{2} (C_{2}^{j-1} L_j H_{3-j} + C_{2}^{j} K_{j,3-j}) - \frac{DW_3}{Dt} \\
K_3 &= H_3 + C_2^0 L_1 H_2 + C_2^1 K_{1,2} + C_2^1 L_2 H_1 + C_2^2 K_{2,1} - \frac{DW_3}{Dt} \\
K_3 &= H_3 + L_1 H_2 + 2K_{1,2} + 2L_2 H_1 + K_{2,1} - \frac{DW_3}{Dt}, && (3.15)
\end{aligned}$$

onde
$K_{1,2} = L_1 K_2$,
$K_{2,1} = L_2 K_1 - L_1 K_{1,1}$.

Para $m = 4$,
$$K_4 = H_4 + L_1 H_3 + 3K_{1,3} + 3L_2 H_2 + 3K_{2,2} + 3L_3 H_1 + K_{3,1} - \frac{DW_4}{Dt}, \tag{3.16}$$

onde
$K_{1,3} = L_1K_3,$
$K_{2,2} = L_2K_2 - L_1K_{1,2}$
$K_{3,1} = L_3K_1 - L_1K_{2,1} - 2L_2K_{1,1}.$

Para $m = 5$,

$$\begin{aligned} K_5 &= H_5 + L_1H_4 + 4K_{1,4} + 4L_2H_3 + 6K_{2,3} + 6L_3H_2 + 4K_{3,2} \\ &+ 4L_4H_1 + K_{4,1} - \frac{DW_5}{Dt}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde
$K_{1,4} = L_1K_4,$
$K_{2,3} = L_2K_3 - L_1K_{1,3},$
$K_{3,2} = L_3K_2 - L_1K_{2,2} - 2L_2K_{1,2},$
$K_{4,1} = L_4K_1 - L_1K_{3,1} - 3L_2K_{2,1} - 3L_3K_{1,1}.$

Seguindo com esse processo construtivo e recorrente podemos escrever relações para $m \geq 6$.

3.2 Aplicação do método de Deprit-Hori em sistemas com um grau de liberdade.

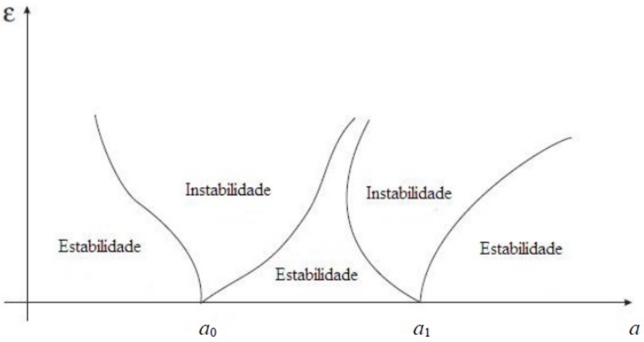
Considere um sistema com um grau de liberdade cuja função Hamiltoniana é contínua, τ-periódica em t e tem a seguinte forma

$$H = \frac{1}{2}\omega(q^2 + p^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m, \quad H_m = \sum_{\nu+\mu=2} h_{\nu\mu}^{(m)}(t,a) q^\nu p^\mu, \tag{3.18}$$

onde $\omega = \omega(a)$ e os $H_m = H_m(q,p,t,a)$ dependem de um parâmetro a. Suponha que a frequência do sistema não perburbado ($\epsilon = 0$) satisfaça a relação de ressonância $2\omega = N \neq 0$, onde N é um inteiro. A fim de construir a equação da curva fronteira da região de estabilidade/instabilidade no plano das variáveis $a\,\epsilon$, escreveremos o parâmetro a como uma série de potência em ϵ

$$a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \epsilon^3 a_3 + ... \tag{3.19}$$

Tais curvas emanarão do ponto $a = a_0$ no eixo $\epsilon = 0$, como mostra a figura abaixo. O valor a_0, como falamos acima, é tal que $2\omega(a_0) = N$.



Substituindo a expressão (3.19) no Hamiltoniano (3.18) e em seguida aplicando a rotação de um ângulo ω (se necessário for)

$$q = \cos(\omega t)x + \mathrm{sen}(\omega t)X \quad , \quad p = -\mathrm{sen}(\omega t)x + \cos(\omega t)X, \tag{3.20}$$

estamos prontos para iniciar o processo de Deprit-Hori. Ressaltamos ainda que essa rotação pode mudar o fato do Hamiltoniano ser periódico. Nesse caso o Hamiltoniano somente será periódico se a frequência $\omega(\alpha_0)$ satisfizer a relação de ressonância, por exemplo, $2\omega(\alpha_0) = N$.

Observação 3.2.1. *Aplica-se a rotação antes de iniciar o processo de Deprit-Hori com o intuito de simplificar ainda mais o Hamiltoniano H_0.*

Aplicando a rotação (3.20), usando o Teorema 1.3.2 e o Exemplo 1.3.3, o novo Hamiltoniano terá $H_0 = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} H(x,X,t,a,\epsilon) &= H(q,p,t,a,\epsilon) + \frac{\partial W}{\partial t} \\ &= \frac{\omega}{2}(q^2+p^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(x,X,t,a) - \frac{\omega}{2}(x^2+X^2) \\ &= \frac{\omega}{2}((\cos(\omega t)x + \mathrm{sen}(\omega t)X)^2 + (-\mathrm{sen}(\omega t)x + \cos(\omega t)X)^2) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(x,X,t,a) - \frac{\omega}{2}(x^2+X^2) \end{aligned}$$

de onde obtemos,

$$H(x,X,t,a,\epsilon) = \epsilon H_1(x,X,t,a) + \frac{\epsilon^2}{2!} H_2(x,X,t,a) + \frac{\epsilon^3}{3!} H_3(x,X,t,a)....$$

Note que para $H_0 = 0$, a expressão (3.8) torna-se mais simples

$$\frac{DW_m}{Dt} = \frac{\partial W_m}{\partial t}.$$

Utilizando as equações de aproximação descritas acima, obtemos

$$K_0 \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} K_1 &= H_1 - \frac{DW_1}{Dt} \\ &= H_1 - \frac{\partial W_1}{\partial t} + L_1 H_0 \\ &= H_1 - \frac{\partial W_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dividindo por τ ambos os lados da última equação e integrando de 0 à τ, temos

$$K_1 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} H_1(y,Y,t)dt \quad , \quad W_1 = \int (H_1 - K_1)dt. \tag{3.21}$$

Na aproximação de segunda ordem, teremos

$$K_2 = H_2 + L_1 H_1 + K_{1,1} - \frac{DW_2}{Dt}, \quad K_{1,1} = L_1 K_1,$$

e novamente de acordo com as hipóteses sobre as funções K e W (K autônoma e W τ-periódica), lembrando ainda que as funções H_m também são τ-periódicas em t $(m = 1, 2, ...)$, obtemos

$$K_2 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} (H_2 + L_1 H_1 + L_1 K_1)dt, \quad W_2 = \int (H_2 + L_1 H_1 + L_1 K_1 - K_2)dt,$$

Seguindo com esse processo para $m \to \infty$ obtemos o Hamiltoniano transformado da forma

$$K = K_0 + \epsilon\, K_1 + \cdots = k_{20} y^2 + k_{11} yY + k_{02} Y^2, \tag{3.22}$$

onde $k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} k_{ij}^{(m)}$, $k_{ij}^{(m)}$ é constante e depende dos coeficientes a_1, a_2, ..., a_m.

Do Hamiltoniano (3.22) segue que

$$JK = \begin{pmatrix} k_{11} & 2k_{02} \\ -2k_{20} & -k_{11} \end{pmatrix},$$

e a equação caracteristica é dada por

$$\det(JK - \lambda I) = 0$$

$$\lambda^2 - (k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02}) = 0$$

$$\lambda^2 = k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02}.$$

A partir daí, temos que a região de estabilidade é definida pela inequação

$$k_{11}^2 \leq 4k_{20}k_{02},$$

e assim, concluímos que a fronteira da região de estabilidade/instabilidade é dada pela equação

$$k_{11}^2 = 4k_{20}k_{02}. \tag{3.23}$$

Como

$$k_{ij} = \epsilon k_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2!}\epsilon^2 k_{ij}^{(2)} + \frac{1}{3!}\epsilon^3 k_{ij}^{(3)} + ...,$$

teremos a partir da equação (3.23) que

$$\epsilon^2 k_{11}^{(1)2} + \frac{1}{2!}\epsilon^3 k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} + \frac{1}{3!}\epsilon^4 k_{11}^{(1)} k_{11}^{(3)} + ... + \frac{1}{2!}\epsilon^3 k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} + \frac{1}{2!2!}\epsilon^4 k_{11}^{(2)2} + ... = 4\epsilon^2 k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)} + \frac{4}{2!}\epsilon^3 k_{20}^{(1)} k_{02}^{(2)} + \frac{4}{3!}\epsilon^4 k_{20}^{(1)} k_{02}^{(3)} + ... + \frac{4}{2!}\epsilon^3 k_{02}^{(1)} k_{20}^{(2)} + \frac{4}{2!2!}\epsilon^4 k_{20}^{(2)} k_{02}^{(2)} + ...$$

Igualando os coeficientes de mesmo grau em ϵ obtemos

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)2} &= 4k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)}, \\ k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} &= 2(k_{20}^{(1)} k_{02}^{(2)} + k_{20}^{(2)} k_{02}^{(1)}), \\ ... &= ... \end{aligned}$$

e é através dessas sucessivas igualdades que calculamos os coeficientes a_1, a_2, ... da expansão (3.19) das curvas de fronteira da região de estabilidade/instabilidade.

De (3.21) obtemos

$$K_1 = k_{20}^{(1)} y^2 + k_{11}^{(1)} yY + k_{02}^{(1)} Y^2,$$

onde os coeficientes k_{ij} são da forma $u_{ij}a_1 + v_{ij}$. Sendo assim, deduzimos da primeira equação da sequência acima que existem dois valores para a_1, ou seja, a equação para a_1 é quadrática. De fato,

$$k_{11}^{(1)2} = 4k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)}$$

$$(u_{11}a_1 + v_{11})^2 = 4(u_{20}a_1 + v_{20}).(u_{02}a_1 + v_{02})$$

$$(u_{11}^2 - 4u_{20}u_{02})a_1^2 + (2u_{11}v_{11} - 4u_{20}v_{02} - 4v_{20}u_{02})a_1 + (v_{11}^2 - 4v_{02}v_{20}) = 0$$

$$Aa_1^2 + Ba_1 + C = 0,$$

onde $A = u_{11}^2 - 4u_{20}u_{02}$, $B = 2u_{11}v_{11} - 4u_{20}v_{02} - 4v_{20}u_{02}$ e $C = v_{11}^2 - 4v_{02}v_{20}$.

Portanto, como cada H_k depende linearmente de a_k, para cada valor encontrado de a_1 podemos determinar os coeficientes a_2, a_3, ... de forma única. Logo, concluímos que existem duas curvas que limitam as regiões de estabilidade/instabilidade que emanam do ponto $(a_0, 0)$ no plano a, ϵ.

Veremos agora um caso particular, quando a frequência de oscilação do sistema não perturbado ($\epsilon = 0$) para alguns valores do parâmetro a se torna zero ($\omega = 0$). Assumiremos sem perda de generalidade que o Hamiltoniano do sistema não perturbado tem H_0 da forma

$$H_0 = \frac{1}{2}(X^2 + \omega^2(a)x^2),$$

e além disso, $\omega(a_0) = 0$ e $\frac{d\omega^2}{da} \neq 0$ para $a = a_0$.

O limite da região de instabilidade, que emanam de um ponto $a = a_0$ o eixo $\epsilon = 0$ será da forma (3.19). Em seguida, para o limite ser determinado temos a seguinte expressão

$$\omega^2 = \epsilon \frac{d\omega^2}{da} a_1 + \epsilon^2 \left(\frac{d\omega^2}{da} a_2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega^2}{da^2} a_1^2 \right) + ... \tag{3.24}$$

Substituindo as expressões (3.19), (3.24) no Hamiltoniano do problema e o expandindo como uma série de potência em ϵ, obtemos

$$H = \frac{1}{2}X^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(x, X, t), \tag{3.25}$$

onde H_m é uma forma quadrática com coeficientes 2π-periódicos em t e depende de a_i $(i \leq m)$, por outro lado, em relação ao a_m esta dependência de H_m é linear. Procuraremos a função geradora W de período igual a 2π tal que o Hamiltoniano transformado (3.3) não dependa do tempo t.

Para $\epsilon = 0$ temos

$$K_0 = \frac{1}{2}Y^2. \tag{3.26}$$

Para a primeira aproximação temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} K_1 &= H_1 - \frac{DW_1}{Dt} \\ &= H_1 - Y\frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{\partial W_1}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Considerando a notação para H_1

$$H_1 = h_{20}^{(1)} y^2 + h_{11}^{(1)} yY + h_{02}^{(1)}$$

e análogas notações para K_1 e W_1. Então, comparando os coeficientes de (3.27) usando igualdade de polinômios, obtemos as relações

$$k_{20}^{(1)} = h_{20}^{(1)} - \frac{dw_{20}^{(1)}}{dt}, \tag{3.28}$$

$$k_{11}^{(1)} = h_{11}^{(1)} - 2w_{20}^{(1)} - \frac{dw_{11}^{(1)}}{dt}, \tag{3.29}$$

$$k_{02}^{(1)} = h_{20}^{(1)} - w_{11}^{(1)} - \frac{dw_{02}^{(1)}}{dt}. \tag{3.30}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}
k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_{20}^{(1)} dt, \quad w_{20}^{(1)} = \int (h_{20}^{(1)} - k_{20}^{(1)}) dt \\
k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (h_{11}^{(1)} - 2w_{20}^{(1)}) dt, \quad w_{11}^{(1)} = \int (h_{11}^{(1)} - 2w_{20}^{(1)} - k_{11}^{(1)}) dt \\
k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (h_{20}^{(1)} - w_{11}^{(1)}) dt, \quad w_{20}^{(1)} = \int (h_{20}^{(1)} - w_{11}^{(1)} - k_{02}^{(1)}) dt.
\end{aligned}$$

Analogamente obtemos as demais aproximações e no infinito o Hamiltoniano transformado tem a forma

$$K = k_{20} y^2 + k_{11} yY + \frac{1}{2}(1 + 2k_{02}) Y^2, \tag{3.31}$$

onde $k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} k_{ij}^{(m)}$, com $k_{ij}^{(m)}$ constante. O limite da região de estabilidade/instabilidade neste caso é definido pela condição

$$k_{11}^2 = 2k_{20}(1 + 2k_{02}). \tag{3.32}$$

Observação 3.2.2. *Se H_0 não depende do tempo, os números $\pm i\omega_k$ são os autovalores de JD^2H_0. Caso H_0 depender do tempo, então os $\pm i\omega_k$ são os expoentes característicos do sistema em questão.*

Em geral, considere $\epsilon > 0$, os autovalores $\pm i\omega_k$ não necessariamente distintos, ou seja, multiplicadores com módulo 1 e que não há multiplicadores múltiplos

$$\omega_k \pm \omega_l \neq N. \tag{3.33}$$

Logo, pela continuidade dos multiplicadores em relação a ϵ, segue que (3.33) também valerá para ϵ suficientemente pequeno. E para $0 < \epsilon << 1$ esses multiplicadores, $\rho_j = e^{2\pi i \omega_j}$, não podem ter módulo maior que 1.

Se para $\epsilon = 0$ existe ressonância, $\omega_k \pm \omega_l = N$, então para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno pode ocorrer dos multiplicadores terem módulo maior do que 1 ou não, ou seja, pode ocorrer estabilidade ou instabilidade.

O teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii 1.4.18 vem nos dá condições necessárias e suficientes para a estabilidade.

Em outras palavras, se pelo menos uma das relações (1.19) é satisfeita, então sempre é possível selecionar $H_1, H_2, ...$ do Hamiltoniano de tal maneira que o sistema linear correspondente é instável para ϵ suficientemente pequeno. Caso a soma das quantidades σ_k e σ_l distintas não é um inteiro, então para ϵ suficientemente pequeno o sistema linear é estável para qualquer escolha de H_m $(m = 1, 2, ...)$.

Capítulo 4

Equação de Mathieu

Neste capítulo, aplicaremos o método de Deprit-Hori com o objetivo de construir as curvas fronteira das regiões de estabilidade e instabilidade relacionadas à equação de Mathieu.

4.1 Regiões de estabilidade e instabilidade

Em 1868, estudando oscilações livres em uma membrana elíptica, o matemático francês Émile Léonard Mathieu obteve a equação diferencial que hoje leva seu nome. A equação de Mathieu é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes periódicos da forma

$$\frac{d^2q}{dt^2} + (\alpha + \beta\cos(t))q = 0, \tag{4.1}$$

onde α e β são constantes.

Note que a equação diferencial (4.1) pode ser escrita como um sistema de duas equações de primeira ordem. De fato, considere

$$\begin{aligned} q' &= p \\ p' &= q'' = -(\alpha + \beta\cos(t))q, \end{aligned}$$

e assim, obtemos o seguinte sistema Hamiltoniano linear

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta\cos(t)) & 0 \end{pmatrix}}_{JS} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} \alpha + \beta\cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e com função Hamiltoniana da forma

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha + \beta\cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta\cos(t))q^2. \tag{4.3}$$

Considere

$$\alpha = \alpha_0 + \beta\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + \beta^3\alpha_3 + O(\beta^4), \tag{4.4}$$

substituindo esta série no Hamiltoniano (4.3), temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + \beta^3\alpha_3 + O(\beta^4) + \beta\cos t)q^2 \qquad (4.5) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\alpha_0 q^2}_{H_0} + \frac{\beta}{1!}\underbrace{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \cos t)q^2}_{H_1} + \frac{\beta^2}{2!}\underbrace{\alpha_2 q^2}_{H_2} + \frac{\beta^3}{3!}\underbrace{3\alpha_3 q^2}_{H_3} \\ &+ O(\beta^4). \end{aligned}$$

Faremos agora a normalização do H_0, usando o algoritmo descrito na seção (2.2) do capítulo 2. Para isso, precisaremos dos autovetores da matriz $J\widehat{S}$ associados ao H_0 e da matriz de normalização N. Sendo assim, temos

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\alpha_0 q^2,$$

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J\widehat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 \end{pmatrix},$$

com equação característica $\det(J\widehat{S} - \lambda I) = 0$ igual a

$$\lambda^2 + \alpha_0 = 0.$$

Logo, temos $\lambda = \pm im$, onde $m = \sqrt{\alpha_0} > 0$. Calculando o autovetor associado ao autovalor $\lambda = im$, teremos

$$J\widehat{S}v = imv$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ im \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix},$$

ou ainda, podemos usar o exemplo (2.1.4) e assim o autovetor será dado por

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -m \end{pmatrix}.$$

Ambos satisfazem $JSr^* = -ms^*$ e $JSs^* = mr^*$, onde r^* e s^* são a parte real e imaginária, respectivamente, do autovetor acima. Ainda embasado no exemplo citado, temos as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}
\delta &= sign\langle r^*, Js^*\rangle = sign\sqrt{\alpha_0} = 1; \\
\kappa &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\alpha_0}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}; \\
-\kappa s^* &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\sqrt{\alpha_0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{m} \end{pmatrix}; \\
\delta\kappa r^* &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\alpha_0}}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{m}} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, temos a matriz N de normalização

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{m}} \\ \sqrt{m} & 0 \end{pmatrix}$$

e a transformação canônica será dada pela seguinte mudança de variáveis

$$q = -\frac{1}{\sqrt{m}}p_*, \quad p = \sqrt{m}q_*.$$

Aplicando esta mudança no Hamiltoniano (4.5), teremos

$$\begin{aligned}
H(q_*, p_*, t, \beta) &= \underbrace{\frac{1}{2}m(q_*^2 + p_*^2)}_{H_0^*} + \frac{\beta}{1!}\underbrace{\frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos t)p_*^2}_{H_1^*} + \frac{\beta^2}{2!}\underbrace{\frac{1}{m}\alpha_2 p_*^2}_{H_2^*} \\
&+ \frac{\beta^3}{3!}\underbrace{\frac{3}{m}\alpha_3 p_*^2}_{H_3^*} + O(\beta^4)
\end{aligned}$$

Como $m = \sqrt{\alpha_0}$, então consideraremos o seguinte caso:

$$2m(\alpha_0) = 2\sqrt{\alpha_0} = \mathrm{n}, \quad \mathrm{n} = 1, 2, ...$$

$$\alpha_0 = \frac{\mathrm{n}^2}{4}$$

Portanto, se n é um número par, segue que a transformação a seguir terá período igual a 2π. Caso contrário, n ímpar, a transformação abaixo será 4π-periódica em t.

Introduzindo mais uma mudança da forma

$$\begin{aligned} q_* &= \cos(mt)x + \operatorname{sen}(mt)X \\ p_* &= -\operatorname{sen}(mt)x + \cos(mt)X, \end{aligned}$$

iremos, através do teorema (1.3.2) e considerando (1.3.3) para $\omega = m$, obter um novo Hamiltoniano, agora nas variáveis x, X

$$\begin{aligned} H(x, X, t, \beta) &= \beta\frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))(\operatorname{sen}^2(mt)x^2 \\ &- 2\operatorname{sen}(mt)\cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}\frac{k!\alpha_k}{2m}(\operatorname{sen}^2(mt)x^2 - 2\operatorname{sen}(mt)\cos(mt)xX \\ &+ \cos^2(mt)X^2), \end{aligned} \tag{4.6}$$

com

$$H_0^{'} = 0$$

$$H_1^{'} = \frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))(\operatorname{sen}^2(mt)x^2 - 2\operatorname{sen}(mt)\cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2)$$

$$H_2^{'} = \frac{\alpha_2}{m}(\operatorname{sen}^2(mt)x^2 - 2\operatorname{sen}(mt)\cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2)$$

$$H_3^{'} = \frac{3\alpha_3}{m}(\operatorname{sen}^2(mt)x^2 - 2\operatorname{sen}(mt)\cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2)$$

$$\vdots$$

Dando continuidade, aplicaremos o método de Deprit-Hori com objetivo de encontrar o Hamiltoniano (3.3) e assim construir as curvas que limitam as regiões de estabilidade paramétrica. É importante ressaltar que neste capítulo fizemos o uso do software Maple para a realização dos cálculos aqui apresentados, foi feito até a quinta aproximação, ou seja, encontramos K_j para $j = 1, ..., 5$.

Considere

$$\alpha = \frac{\mathrm{n}^2}{4} + \alpha_1\beta + \alpha_2\beta^2 + \alpha_3\beta^3 + \alpha_4\beta^4 + \alpha_5\beta^5 + O(\beta^6), \tag{4.7}$$

e que K não depende do tempo. A função W será procurada de modo a ser 2π-periódica em t no caso de n ser par e 4π-periódica para n ímpar.

Para n = 1 ($m = \frac{1}{2}$), construiremos as curvas que emanam do ponto $(\frac{1}{4}, 0)$ no plano α, β, como segue:

$$\begin{aligned} K_0 &= 0 \\ K_1 &= \frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))(\mathrm{sen}^2(mt)y^2 - 2\mathrm{sen}(mt)\cos(mt)yY + \cos^2(mt)Y^2) - \frac{\partial W_1}{\partial t} \end{aligned}$$

Considerando $K_1 = k_{20}^{(1)}y^2 + k_{11}^{(1)}yY + k_{02}^{(1)}Y^2$, temos

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))\mathrm{sen}^2(mt) - \frac{dw_{20}^{(1)}}{dt} \\ k_{11}^{(1)} &= -\frac{1}{m}(\alpha_1 + \cos(t))\mathrm{sen}(mt)\cos(mt) - \frac{dw_{11}^{(1)}}{dt} \\ k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))\cos^2(mt) - \frac{dw_{02}^{(1)}}{dt} \end{aligned}$$

dividindo por 4π e integrando ambos os lados de 0 à 4π, temos

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))\mathrm{sen}^2(mt)dt = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{4} \\ k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} -\frac{1}{m}(\alpha_1 + \cos(t))\mathrm{sen}(mt)\cos(mt)dt = 0 \\ k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))\cos^2(mt)dt = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

temos ainda que

$$\begin{aligned} w_{20}^{(1)} &= \int (\frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))\mathrm{sen}^2(mt) - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{4})dt \\ w_{11}^{(1)} &= \int -\frac{1}{m}(\alpha_1 + \cos(t))\mathrm{sen}(mt)\cos(mt)dt \\ w_{02}^{(1)} &= \int (\frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos(t))\cos^2(mt) - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{4})dt \end{aligned}$$

e assim por diante até determinar o K_5.

Após encontrarmos as aproximações, escrevemos

$$K = K_0 + \frac{\beta}{1!}K_1 + \frac{\beta^2}{2!}K_2 + \frac{\beta^3}{3!}K_3 + \frac{\beta^4}{4!}K_4 + \frac{\beta^5}{5!}K_5 \tag{4.8}$$

e em seguida o reescrevemos da forma

$$K = k_{20}y^2 + k_{11}yY + k_{02}Y^2.$$

Usando a condição de fronteira (3.23) e igualando os coeficientes até a sexta potência de β, obtemos as seguintes equações

$\alpha_1^2 - \dfrac{1}{4} = 0$
$2\alpha_1\alpha_2 + \dfrac{3}{4}\alpha_1 - 2\alpha_1^3 = 0$
$5\alpha_1^4 + 2\alpha_3\alpha_1 - \dfrac{5}{2}\alpha_1^2 + \dfrac{15}{64} - 6\alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dfrac{3}{4}\alpha_2 = 0$
$-5\alpha_1\alpha_2 - 14\alpha_1^5 - \dfrac{245}{192}\alpha_1 + 2\alpha_2\alpha_3 + \dfrac{3}{4}\alpha_3 + \dfrac{35}{4}\alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_4 + 20\alpha_2\alpha_1^3 - 6\alpha_1\alpha_2^2 - 6\alpha_1^2\alpha_3 = 0$
$\dfrac{3871}{576}\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_5 + 20\alpha_1^3\alpha_3 - 70\alpha_1^4\alpha_2 - 6\alpha_1^2\alpha_4 - \dfrac{63}{2}\alpha_1^4 + 2\alpha_2\alpha_4 - \dfrac{5}{2}\alpha_2^2 -$
$\dfrac{245}{192}\alpha_2 + \alpha_3^2 + 42\alpha_1^6 + 30\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\alpha_2^3 - \dfrac{2933}{9216} + \dfrac{3}{4}\alpha_4 + \dfrac{105}{4}\alpha_2\alpha_1^2 - 5\alpha_3\alpha_1 = 0.$

Resolvendo essas equações de maneira recursiva começando da primeira, teremos os coeficientes

$$\alpha_1 = \pm\frac{1}{2},\ \alpha_2 = -\frac{1}{8},\ \alpha_3 = \mp\frac{1}{32},\ \alpha_4 = -\frac{1}{384},\ \alpha_5 = \pm\frac{11}{4608},$$

e consequentemente

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 + \frac{11}{4608}\beta^5,$$

$$\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 - \frac{11}{4608}\beta^5.$$

Para n = 2 ($m = 1$), construiremos as curvas que emanam do ponto $(1, 0)$. De maneira análoga ao que fizemos, lembrando apenas que neste caso W é 2π-periódica em t, chegamos as seguintes equações:

$\dfrac{1}{4}\alpha_1^2 = 0$
$-\dfrac{1}{12}\alpha_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 - \dfrac{1}{8}\alpha_1^3 = 0$
$-\dfrac{3}{8}\alpha_2\alpha_1^2 + \dfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_3 + \dfrac{25}{144}\alpha_1^2 + \dfrac{5}{64}\alpha_1^4 - \dfrac{5}{576} - \dfrac{1}{12}\alpha_2 + \dfrac{1}{4}\alpha_2^2 = 0$
$-\dfrac{7}{128}\alpha_1^5 + \dfrac{25}{72}\alpha_1\alpha_2 + \dfrac{35}{2304}\alpha_1 - \dfrac{245}{864}\alpha_1^3 + \dfrac{5}{16}\alpha_1^3\alpha_2 - \dfrac{1}{12}\alpha_3 - \dfrac{3}{8}\alpha_1\alpha_2^2 - \dfrac{3}{8}\alpha_3\alpha_1^2 + \dfrac{1}{2}\alpha_3\alpha_2 +$
$\dfrac{1}{2}\alpha_4\alpha_1 = 0$
$\dfrac{35}{2304}\alpha_2 - \dfrac{3}{4}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \dfrac{1}{12}\alpha_4 + \dfrac{25}{72}\alpha_1\alpha_3 - \dfrac{245}{288}\alpha_2\alpha_1^2 - \dfrac{35}{13824}\alpha_1^2 + \dfrac{1}{2}\alpha_2\alpha_4 - \dfrac{3}{8}\alpha_1^2\alpha_4 +$
$\dfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_5 + \dfrac{5}{16}\alpha_1^3\alpha_3 - \dfrac{32}{128}\alpha_1^4\alpha_2 + \dfrac{15}{32}\alpha_1^2\alpha_2^2 + \dfrac{8785}{20736}\alpha_1^4 + \dfrac{7}{41472} + \dfrac{25}{144}\alpha_2^2 + \dfrac{21}{512}\alpha_1^6 +$
$\dfrac{1}{4}\alpha_3^2 - \dfrac{1}{8}\alpha_2^3 = 0$

de onde segue que

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -\frac{1}{12} \text{ ou } \frac{5}{12},\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = \frac{5}{3456} \text{ ou } -\frac{763}{3456}.$$

Portanto, temos as curvas

$$\alpha = 1 - \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{5}{3456}\beta^4,$$

$$\alpha = 1 + \frac{5}{12}\beta^2 - \frac{763}{3456}\beta^4.$$

Em resumo, é possível construir as curvas das regiões de estabilidade e instabilidade da equação (4.1) para $-\infty < \alpha < \infty$ e $\beta \geq 0$. As primeiras onze delas, até onde foi possível determinar, são as seguintes

$$\begin{aligned}
\gamma_c^{(0)} : \alpha &= -\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{7}{32}\beta^4,\\
\gamma_c^{(1)} : \alpha &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 - \frac{11}{4608}\beta^5,\\
\gamma_s^{(1)} : \alpha &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 + \frac{11}{4608}\beta^5,\\
\gamma_s^{(2)} : \alpha &= 1 - \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{5}{3456}\beta^4,\\
\gamma_c^{(2)} : \alpha &= 1 + \frac{5}{12}\beta^2 - \frac{763}{3456}\beta^4,\\
\gamma_c^{(3)} : \alpha &= \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{32}\beta^3,\\
\gamma_s^{(3)} : \alpha &= \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\beta^2 + \frac{1}{32}\beta^3,\\
\gamma_s^{(4)} : \alpha &= 4 + \frac{1}{30}\beta^2,\\
\gamma_c^{(4)} : \alpha &= 4 + \frac{1}{30}\beta^2,\\
\gamma_c^{(5)} : \alpha &= \frac{25}{4} + \frac{1}{48}\beta^2,\\
\gamma_s^{(5)} : \alpha &= \frac{25}{4} + \frac{1}{48}\beta^2.
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento encontramos os coeficientes das demais ordens. Na referência [10] encontramos os coeficientes até a ordem 7, sendo que durante a construção deste trabalho observamos que na curva dada no livro do Markeev

[10], o coeficiente de β^2 da equação $\gamma_s^{(2)}$ diverge do que encontramos, no entanto em outras bibliografias [13] o valor encontrado por nós é o mesmo.

A região de estabilidade será denotada por g_n, $n = 1, 2, ...$ As fronteiras da região curvilíneas g_{2m-1} $(m = 1, 2, ...)$ são denotadas por γ_c^{2m-2} e γ_c^{2m-1}, e as fronteiras da região g_{2m} $(m = 1, 2, ...)$ são dadas por γ_s^{2m-1} e γ_s^{2m}. As curvas γ_c^k e γ_s^k intercepta o eixo $\beta = 0$ no ponto $\alpha = \frac{k^2}{4}$ $(k = 1, 2, ...)$, a partir do qual para β pequeno originam uma região de ressonância paramétrica. Nas curvas γ_c^{2k}, γ_s^{2k} $(k = 1, 2, ...)$ ocorre ressonância de primeira ordem e nas curvas γ_c^{2k-1}, γ_s^{2k-1} $(k = 1, 2, ...)$ ocorre ressonância de segunda ordem.

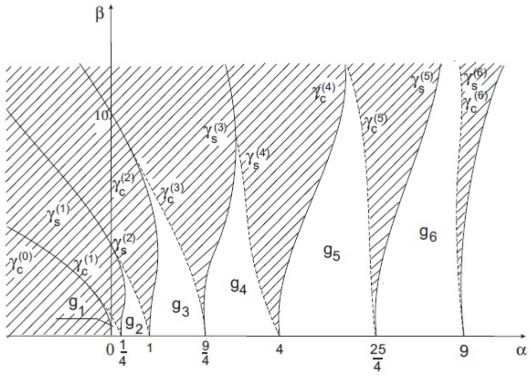


Figura 4.1: Curvas fronteiras das regiões de estabilidade/instabilidade. Figura retirada da referência [10]

Referências Bibliográficas

[1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechamics.* New York: Springer-Verlag, 1978.

[2] ARNOLD, V. I. Characteristic class appearing in the quantization condition. *Funkts. Anal. Primen.*, 1, n. 1, p.1-14, 1967.

[3] BRAUER, Fred. *The qualitative theory of ordinary diferential equations: an introduction.* New York: W. A. Benjamin, 1969.

[4] BREZIS, H., *Analyse Foncteonelle - Theorie at Aplications*, Paris, 1987.

[5] CABRAL, H. E., *Notas de aula: complementos ao livro do Markeev.*

[6] CANNAS, A. *Lectures on Sympletic Geometry*, Lect. Notes in Math. 1764, Springer Verlag, 2001.

[7] COSTA, S. da S. *Estabilidade de Sistemas Hamiltonianos via Índice de Morse.* Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Sergipe, 2013.

[8] DOS SANTOS, F. *Formas normais e estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos.* Dissertação (Mestrado em Matematica), Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

[9] DOS SANTOS, F. *Introdução à Álgebra Linear Simplética* IV Semana de Matemática. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia- Campos de Jequié.

[10] MARKEEV, A.P. *Linear Hamiltonian Systems and some applications to the problem of stability of motion of satellites relative to the center of mass*, Moscou, 2009 (Tradução para o inglês Cabral, H.E.).

[11] MEYER, Kenneth R., Glen R. Hall, Daniel Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* Springer, 2009.

[12] OLIVEIRA, Elisânia Santana de. *Formas Normais de Matrizes Hamiltonianas Degeneradas*. 2009.

[13] RAND, Richard H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*. Ithaca NY, 2005. (Notas de aula).

[14] SOTOMAYOR, Jorge. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo:Editora Livraria da Física, 2011.

[15] VIDAL, C. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*, 2004. (Notas de curso).

[16] VIDAL, C. *Sistemas dinâmicos Hamiltonianos e Aplicações a Mecânica Celeste*, Chile, 2009. (Notas de curso).

[17] VIDAL, C. *Transformações simpléticas, formas normais e sistemas Hamiltonianos*. Recife, 2001. (Notas de curso).