UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAM DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Potências Simbólicas de Ideais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Charlene Messias Santos

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2014.

Sumário

Resumo

Nesta dissertação fazemos inicialmente um breve apanhado sobre ferramentas básicas de álgebra comutativa úteis para o entendimento do resto do texto. Em seguida, apresentamos a definição de potências simbólicas e discutimos suas propriedades mais elementares, destacando sobretudo questões como decomposição primária e cálculo de geradores. Finalizamos o trabalho mostrando resultados atuais que relacionam as potências simbólicas com outras noções em álgebra comutativa e geometria algébrica.

Palavras Chave: Potências Simbólicas, Decomposição Primária, Ideais Secantes, Aplicações Birracionais.

Abstract

First in this dissertation we make a brief overview about basic tools of commutative algebra required for understanding the rest of the text. Then, we present the definition of symbolic powers and we discuss their basic properties, mainly emphasizing questions such as primary decomposition and calculation of generators. We conclude this work by showing actual results that relate the symbolic powers with other notions in commutative algebra and algebraic geometry.

Key-Words: Symbolic Power, Primary Decomposition, Secant Ideal and Birational Maps.

Lista de símbolos

Símbolo	**Descrição**
$\mathrm{Ass}_A(M)$	conjunto dos primos associados de um A-módulo M
$Q(P_i)$	componente primária associada ao primo P_i
$\mathrm{Min}_A(M)$	conjunto dos primos mínimos de um A-módulo M
$S^{-1}A$	anel de frações de A com respeito ao conjunto multiplicativo S
A_P	localização de A em P
$I_t(\varphi)$	ideal gerado pelos menores de ordem t da matriz φ
$\mathrm{alt}(I)$	altura de um ideal I
$\dim(A)$	dimensão de Krull de um anel A
$\mathrm{rank}(\varphi)$	posto de uma matriz φ
$\mathcal{R}_A(I)$	álgebra de Rees de um ideal $I \subset A$
$\mathcal{R}_A^s(I)$	álgebra de Rees simbólica de um ideal $I \subset A$
$\mathcal{Z}_A(M)$	conjunto dos divisores de zero de um A-módulo M

Introdução

A noção de potência simbólica de um ideal remonta a W. Krull, que a utilizou na prova do célebre teorema do ideal principal, este um marco crucial na curta história da álgebra comutativa. Mais adiante, O. Zariski, M. Nagata, D. Rees e outros mostraram como esta noção puramente algébrica tem significado importante também em geometria algébrica.

Em diversos momentos da álgebra comutativa esta noção ressurge com interpretações surpreedentes. Por exemplo, no início da década de 70, M. Hochster ([16]) chamou atenção para o fato de que dado um ideal I em um domínio A, propriedades importantes tais como a normalidade da álgebra de Rees de I e a integralidade do anel graduado associado de I são codificadas em termos da igualdade entre as potências simbólicas $I^{(r)}$ e as ordinárias I^r. Uma década depois, Cowsik [8] mostrou uma curiosa relação entre potências simbólicas e interseções completas conjuntistas ("set-theoretically complete intersections"). Em contraste à álgebra de Rees ordinária $\mathcal{R}_A(I) = \sum_{r\geq 0} I^r t^r$ (i.e., a A-álgebra que define o blow-up ao longo do sub-esquema correspondente ao ideal I [11, §5.2], que é finitamente gerada sobre A por construção, uma questão básica da teoria é saber sobre a finitude da geração da álgebra de Rees $\mathcal{R}_A^{(I)}$ oriunda da filtração simbólica. Em geral ela não é finitamente gerada (ver [21], [22] e [23] para exemplos desse fenômeno). O que Cowsik demonstrou é que para um ideal I em um anel Noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$, tal que $\operatorname{alt}(I) = \dim A - 1$, a finitude da geração desta álgebra é condição suficiente para I ser interseção completa conjuntista. Consequentemente, esse resultado acabou desencadeando uma vasta bibliografia referente a exemplos e contra-exemplos da finitude dessa álgebra do contexto das curva monomiais em $\mathbb{A}^3$.

Recentemente, uma vertente da teoria das potências simbólicas que tem recebido considerável atenção refere-se a comparação entre as topologias vindas das filtrações simbólica e I-ádica (ver [10], [17], [18], [32]). De maneira resumida, o problema nesse caso é decidir o quão pequeno podemos escolher quocientes $m/n \geq 1$, com $m, n \in \mathbb{N}$, de modo a termos $I^{(m)} \subset I^n$. Esse problema é tangente a vários outros atuais, entre eles, uma questão nascida no âmbito da teoria dos números sobre a existência de evoluções. A conexão nesse caso se dá através de um resultado de D. Eisenbud e B. Mazur ([12]) em que eles caracterizam e existência de evoluções em termos de inclusões envolvendo o quadrado simbólico de um ideal.

Nesta dissertação temos o objetivo de fornecer um material que possa reunir conhecimentos fundamentais para iniciação à teoria das potências simbólicas, tema este que ocupa posição de destaque na pesquisa em álgebra comutativa.

No primeiro capítulo fazemos uma revisão sucinta sobre resultados e definições básicas de álgebra comutativa. O foco principal nesta parte é o processo de passagem para o anel de frações – e suas propriedades – e o teorema da decomposição primária. Apresentamos ainda um pouco sobre a dimensão de Krull, anéis de Cohen–Macaulay e anéis regulares.

No segundo capítulo iniciamos apresentando o objeto principal desse trabalho, as potências simbólicas. Destacamos que a família das potências simbólicas de um ideal fixado definem uma filtração e que por conseguinte podemos associar a ela sua respectiva álgebra de Rees, a qual nomeia-se *álgebra de Rees simbólica*. Observamos que esta álgebra não é finitamente gerada e apresentamos um critério de finitude. Logo em seguida, discutimos aspectos da decomposição primária das potências ordinárias e simbólicas para ideias que não admitem primos imersos. Encerrando este capítulo apresentamos uma seção que discute dois métodos - um de W. Vasconcelos e outro de A. Simis - para o cálculo efetivo de potências simbólicas em anéis de polinômios com coeficientes sobre um corpo.

No terceiro e último capítulo nos dedicamos a apresentar resultados recentes que relacionam as potências simbólicas com objetos da geometria algébrica. Na primeira parte mostraremos como os geradores dos ideais de definição das variedades secantes de ordem superior contribuem com geradores das potências simbólicas através dos resultados de M. Catalano [5] e S. Sullivant [31]. Na segunda parte, o foco é dado aos ideais base de aplicações birracionais. Através dos resultados recentes de Ramos-Simis [24], mostramos como a composição de uma aplicação birracional e sua inversa dão origem à geradores para potências simbólicas do ideal base.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas ferramentas e resultados, típicos de um curso de introdução à álgebra comutativa, que serão úteis para discussões posteriores sobre o principal objeto desse trabalho, as potências simbólicas. Nesta parte as demonstrações serão omitidas e o leitor interessado pode consultar [1].

Observamos de uma vez por todas que em todo este trabalho consideraremos apenas anéis comutativos, com identidade e Noetherianos.

1.1 Anéis de Frações

Definição 1.1.1. Seja A um anel. Um subconjunto $S \subset A - \{0\}$ que contém a identidade de A é dito *multiplicativo* se satisfaz a seguinte condição: se $a, b \in S$ então $ab \in S$.

São exemplos imediatos de conjuntos multiplicativos em um anel A :

- $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ tal que a não é elemento nilpotente de A.
- $S = A - \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, onde $P_1, \ldots, P_n$ são ideais primos de A.

Dados um subconjunto multiplicativo S de um anel A e elementos (a, s) e (b, t) do produto cartesiano $A \times S$ definimos: $(a, s) \sim (b, t)$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $u(at - bs) = 0$. É óbvio que $\sim$ assim definida é uma relação de equivalência sobre o conjunto $A \times S$. A classe de equivalência de um elemento $(a, s) \in A \times S$ por esta relação será denotada por $\frac{a}{s}$.

Podemos definir operações de adição e multiplicação no espaço quociente de $A \times S$ pela relação $\sim$ da seguinte maneira:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

e

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

quaisquer que sejam $\frac{a}{s}$ e $\frac{b}{t}$. É de fácil verificação que estas operações estão bem definidas e que o espaço quociente de $A \times S$ pela relação $\sim$ com estas operações é um anel. Este anel é chamado o *anel de frações de A com respeito ao conjunto multiplicativo S* e o denotamos por $S^{-1}A$. No caso particular em que $S = A - P$, com P ideal primo de A, usamos a notação A_P em vez de $S^{-1}A$. Nesse caso o anel de frações A_P é chamada *localização* de A em P.

Proposição 1.1.2. *Seja S um conjunto multiplicativo de um anel A. Então:*

(a) *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \iota: & A & \to S^{-1} & A \\ & a & \mapsto & \frac{a}{1} \end{array}$$

é um homomorfismo.

(b) *ι é injetor se, e somente se, S não contém divisores de zero de A.*

Dado um conjunto multiplicativo S de um anel A e I um ideal de A definimos:

$$S^{-1}I := \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in I \text{ e } s \in S \right\}$$

É de imediata verificação que $S^{-1}I$ assim definido é um ideal de I. Quando $S = A - P$, com P ideal primo de A, então escrevemos I_P em vez de $S^{-1}I$.

Proposição 1.1.3. *Seja S um conjunto multiplicativo de um anel A. Então:*

(i) *J é ideal de $S^{-1}A$ se, e somente se, $J = S^{-1}I$ para algum ideal I de A.*

(ii) *J é ideal primo de $S^{-1}A$ se, e somente se, $J = S^{-1}P$ para algum ideal primo P de A tal que $P \cap S = \emptyset$.*

(iii) *Sejam I_1, I_2 ideais de A, então $S^{-1}(I_1 \cap I_2) = S^{-1}I_1 \cap S^{-1}I_2$.*

(iv) *Sejam I_1, I_2 ideais de A, então $S^{-1}(I_1 + I_2) = S^{-1}I_1 + S^{-1}I_2$.*

(v) *Sejam I_1, I_2 ideais de A, então $S^{-1}(I_1 I_2) = (S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$*

Proposição 1.1.4. *Seja P um ideal primo de um anel A. Então:*

(i) *P_P é ideal maximal de A_P.*

(ii) *P_P é o único ideal maximal de A_P (ou seja, A_P é anel local).*

1.2 Decomposição primária

A teoria da decomposição primária remonta inicialmente às pesquisas desenvolvidas para demonstrar o celebrado Último Teorema de Fermat. Em 1847, Lamet anunciou que havia conseguido uma prova para este teorema. Em seu argumento ele admitia implicitamente que os anéis $\mathbb{Z}[\zeta_p]$, com ζ_p uma raiz p-ésima primitiva da unidade, era um domínio de fatoração única. Contudo, Kummer mostrou que esta afirmação era falsa para $p = 23$. Estas observações acabaram culminando com estudos voltados à generalização da noção de fatoração única. Dentre estes estudos destacam-se os de Dedekind - de fatoração única para ideais em termos de ideais primos nos domínios de Dedekind - os de Lasker - de decomposição primária em anéis de polinômios - e o de Emmy Noether - de decomposição primária de ideais em anéis Noetherianos. A generalização da decomposição primária para módulos sobre anéis Noetherianos é creditada a H. Cartan, S. Eilenberg e J. P. Serre nos anos de 1950.

Na sequência faremos um breve apanhado sobre noções e resultados referentes à decomposição primária que serão úteis neste texto.

Definição 1.2.1. Seja I um ideal em um anel A. Dizemos que I é *ideal primário* de A se satisfaz a seguinte condição: dados $a, b \in A$, com $ab \in I$ então $a \in I$ ou $b \in \sqrt{I}$.

Exemplo 1.2.2. Se P é ideal primo de um anel A então P é primário em A.

Exemplo 1.2.3. Seja k um corpo e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre k. Um ideal $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ é dito *monomial* se ele admite um conjunto de geradores formado por monômios (pelo Lema de Dickson, ver [35, Lemma A.6.3], podemos afirmar que um ideal monomial é gerado por um conjunto finito de monômios). Ideais monomiais gerados por potências das variáveis são primários (ver [35, Proposition 3.1.8])

Dado um A-módulo M definimos o seu *anulador* da seguinte maneira

$$0 :_A M = \{a \in A \mid ax = 0 \text{ para cada } x \in M\}.$$

É de fácil verificação que $0 :_A M$ é um ideal de A.

Observação 1.2.4. No caso em que $M = A/I$, com I ideal de A, temos $I = 0 :_A A/I$.

Mediante a definição de anulador, a noção de ideais primários generaliza-se para módulos da seguinte maneira:

Definição 1.2.5. Seja M um A-módulo. Um submódulo N de M é dito *primário* de M se o ideal $0:_A M/N$ é primário.

Proposição 1.2.6. *Seja A um anel e M um A-módulo. Se N é um submódulo primário de M então $\sqrt{0:_A M/N}$ é ideal primo.*

Se N é um submódulo primário de uma A-módulo M então também dizemos que N é *submódulo P-primário* de M, onde $P = \sqrt{0:_A M/N}$.

Proposição 1.2.7. *Seja A um anel (Noetheriano) e M um A-módulo finitamente gerado. Se $N_1, \ldots, N_r$ são submódulos P-primários então $N_1 \cap \ldots \cap N_r$ é submódulo P-primário.*

Outra noção que se faz importante para a teoria da decomposição primária são dadas pela seguinte definição:

Definição 1.2.8. Seja M um A-módulo. Um ideal primo P de A é dito *primo associado* de M se $P = 0:_A (\mathbf{x})$ para algum $\mathbf{x} \in M$.

Usaremos a notação $\mathrm{Ass}_A(M)$ para representar a coleção de todos os primos associados de M. Desde que o anel A esteja claro pelo contexto escreveremos simplesmente $\mathrm{Ass}(M)$.

Abaixo listamos algumas propriedades do conjunto $\mathrm{Ass}(M)$.

Proposição 1.2.9. *Seja A um anel (Noetheriano) e M um A-módulo finitamente gerado. Então:*

(a) $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$ *se, e somente se,* $M = (0)$.

(b) $\mathrm{Ass}(M)$ *é um conjunto finito.*

(c) *Seja* $\mathcal{Z}_A(M) = \{a \in A \mid a\mathbf{x} = 0$ *para algum* $\mathbf{x} \in M - \{0\}\}$ (*i.e., o conjunto dos divisores de zero de* M). *Então,* $\mathcal{Z}(M) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}(M)} P$.

(d) *Se* N *é um submódulo de* M *então* $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M/N) \cup \mathrm{Ass}(N)$.

(e) *Se* N *é um submódulo de* M *e* P *é um ideal primo de* A *então* N *é* P*-primário se, e somente se,* $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$.

No conjunto $\mathrm{Ass}(M)$ destacamos dois subconjuntos

- $\mathrm{Min}(M) := \{P \in \mathrm{Ass}(M) \mid P$ é mínimo em $\mathrm{Ass}(M)$ pela relação de inclusão$\}$.

- $\mathrm{Ass}(M) - \mathrm{Min}(M)$.

Os elementos de $\mathrm{Min}(M)$ e $\mathrm{Ass}(M) - \mathrm{Min}(M)$ são chamados, respectivamente, de *primos mínimos* e *primos imersos* de M.

Proposição 1.2.10. *Seja* A *um anel* (*Noetheriano*) *e* M *um* A*-módulo finitamente gerado. Então:*

(a) *Cada primo imerso contém um primo mínimo.*

(b) $\mathrm{Min}(M)$ = *coleção dos ideais primos de* A *que são mínimos* (*com respeito a ordem de inclusão*) *entre os ideais primos que contém* $0 :_A M$.

Mediante as definições acima podemos finalmente enunciar o teorema da decomposição primária.

Teorema 1.2.11 (Decomposição primária para módulos). *Sejam* A *um anel Noetheriano,* M *um* A*-módulo finitamente gerado e* N *um submódulo de* M. *Então existem submódulos* $Q_1, \ldots, Q_m$ *primários de* M *tais que* $N = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$. *Além disso, velem os seguintes resultados de unicidade:*

(i) $\mathrm{Ass}(M/N) = \left\{\sqrt{0 : M/Q_1}, \ldots, \sqrt{0 : M/Q_m}\right\}$. *Consequentemente, os radicais dos submódulos primários Q_i em uma decomposição primária de N em M são unicamente determinados pelo quociente M/N.*

(ii) *Para decomposições primárias irredudantes (i.e, aquelas em que foram eliminados as componentes supéfluas e coletadas, por interseção, aquela que admitem mesmo radical em M), os submódulos primários Q_i tais que $\sqrt{0 : M/Q_i} \in$* $\mathrm{Min}(M/N)$ *são unicamente determinados pelo quociente M/N.*

Corolário 1.2.12 (Decomposição primária para ideais). *Seja A um anel Noetheriano e I um ideal de A. Então:*

(i) *Existem ideais primários $Q_1, \ldots, Q_n$ de A tais que $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$.*

(ii) $\mathrm{Ass}(A/I) = \{\sqrt{Q_1}, \ldots \sqrt{Q_n}\}$

Corolário 1.2.13. *Seja A um anel Noetheriano e I um ideal radical. Então existem ideais primos $P_1, \ldots, P_n$ tais que $I = P_1 \cap \ldots \cap P_n$ e* $\mathrm{Ass}(A/I) = \{P_1, \ldots, P_n\} = \mathrm{Min}(A/I)$.

Exemplo 1.2.14. Consideremos o ideal $I = (XY, XZ, YZ) \subset k[X, Y, Z]$. Afirmamos que $I = (X, Y) \cap (X, Z) \cap (Y, Z)$. A inclusão $I \subset (X, Y) \cap (X, Z) \cap (Y, Z)$ é imediata. Para mostrar a inclusão contrária, suponhamos $f \in (X, Y) \cap (X, Z) \cap (Y, Z)$. Em particular, devem existir $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \zeta \in k[X, Y, Z]$ tais que

$$f = \alpha X + \beta Y = \gamma X + \delta Z = \theta Y + \zeta Z$$

Destas igualdades temos $\alpha X = (\theta - \beta)Y + \zeta Z$ e $\beta Y = (\gamma - \alpha)X + \delta Z$. Assim, $\alpha X \in (Y, Z)$ e $\beta Y \in (X, Z)$. Como (Y, Z) e (X, Z) são ideais primos e $X \notin (Y, Z)$ e $Y \notin (X, Z)$ segue que $\alpha = aY + bZ$ e $\beta = cX + dZ$ para certos $a, b, c, d \in k[X, Y, Z]$.

Desse modo,

$$f = \alpha X + \beta Y = (aY + bZ)X + (cX + dZ)Y = (a + c)XY + bXZ + dYZ$$

o que nos mostra que $f \in I$.

Pelo teorema da decomposição primária temos que $(X, Y) \cap (X, Z) \cap (Y, Z)$ é a decomposição primária de I e que $\mathrm{Ass}(A/I) = \{(X, Y), (X, Z), (Y, Z)\}$.

1.3 Generalidades sobre dimensão de Krull

Na geometria do século XIX, a ideia de dimensão foi utilizada de forma intuitiva. Com o passar dos anos, a noção de dimensão teve várias definições. Entretanto, como construções cada vez mais complexas foram feitas em álgebra comutativa, tais definições tornaram-se insatisfatórias. Em 1937, Wolfgang Krull prôpos um definição em termos do comprimento de cadeias de ideais primos como veremos. Esta definição de Krull unificou várias outras existentes e tornou-se um dos invariantes mais básicos associados a um anel (ou módulo).

Seja A um anel e $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ uma cadeia de ideais primos de A. Dizemos que n é o *comprimento* de tal cadeia.

Definição 1.3.1. Seja P um ideal primo de um anel A. A *altura* de P, denotada $\mathrm{alt}(P)$ é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos terminadas em P

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n = P$$

de A.

A noção de altura é generalizada para ideais quaisquer da seguinte maneira

$$\text{alt}(I) := \min\{\text{alt}(P) \mid P \in \text{Min}(A/I)\}.$$

Definição 1.3.2. Seja A um anel. A *dimensão de Krull* de A, denotada $\dim(A)$, é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ de A.

A altura e a dimensão estão relacionadas através da seguinte proposição:

Proposição 1.3.3. *Seja I um ideal de um anel A. Então*

$$\dim(A) \geq \text{alt}(I) + \dim(A/I).$$

Dado um ideal I em um anel A, dizemos que um subconjunto $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de I é um *conjunto mínimo de geradores* de I se:

(a) $\{f_1, \ldots, f_m\}$ é um conjunto gerador de I.

(b) Se $S \subsetneq \{f_1, \ldots, f_m\}$, então $I \neq (S)$.

Em geral, dois conjuntos mínimos de geradores de um ideal I podem ter cardinalidades distintas. Por exemplo, se $A = R[X]$ é um anel de polinômios em um variável com entradas em um anel R e $I = A$, então $\{X, X+1\}$ e $\{1\}$ são conjuntos mínimos de geradores de I com cardinalidades distintas. Contudo, se $(A, \mathfrak{m})$ é anel local a situação é bem mais comportada como nos mostra o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local e I um ideal de A finitamente gerado. Então:*

(a) *Quaisquer conjuntos mínimos de geradores de I tem a mesma cardinalidade.*

(b) *A cardinalidade de qualquer conjunto mínimo de geradores de I é dada pela dimensão do $A/\mathfrak{m}$-espaço vetorial $I/\mathfrak{m}I$.*

A cardinalidade de um conjunto de geradores de um ideal está relacionada com sua altura através do célebre teorema do ideal principal de Krull

Teorema 1.3.5 (Versão geral do Teorema do Ideal Principal de Krull)**.** *Seja I um ideal de um anel A gerado por n elementos. Então* $\operatorname{alt}(I) \leq n$.

Observação 1.3.6. O teorema do ideal principal de Krull original é quando n no enunciado acima é igual a 1. O enunciado acima é uma consequência deste. É na demonstração deste resultado que figura pela primeira vez as potências simbólicas.

1.4 Cohen–Macaulaycidade e Regularidade

Definição 1.4.1. Seja A um anel. Uma *sequência regular* de A é uma sequência de elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que:

(a) $(a_1, \ldots, a_n) \neq A$.

(b) $a_i \notin \mathcal{Z}_A(A/(a_1, \ldots, a_{i-1}))$ para $i = 1, \ldots, n$.

O número de elementos de uma sequência regular de A é chamado o seu *comprimento*. Diremos que uma sequência regular é *máxima* se ela não admite prolongamento próprio.

Teorema 1.4.2. *Seja I um ideal em um anel A tal que $I \neq A$. Então duas sequências regulares máximas em I tem o mesmo comprimento. Em particular, o supremo de tais comprimentos é finito e é atingido por qualquer sequência regular máxima em I.*

Prova. Ver [3, Theorem 1.2.5]. □

Graças a este teorema, podemos definir o seguinte invariante.

Definição 1.4.3. Seja I um ideal em um anel A tal que $I \neq A$. A *profundidade* de A em I, denotada $\operatorname{prof}_I(A)$, o comprimento de uma (portanto todas) sequência regular máxima em I.

Quando $(A, \mathfrak{m})$ é um ideal local escreveremos $\operatorname{prof}(A)$ em vez de $\operatorname{prof}_{\mathfrak{m}}(A)$ e chamamos simplesmente de profundidade de A.

Em um anel local $(A, \mathfrak{m})$, a profundidade de A e sua dimensão estão relacionadas pela seguinte desigualdade

$$\operatorname{prof}(A) \leq \dim A \tag{1.1}$$

A situação extremal nessa igualdade nos leva a seguinte definição

Definição 1.4.4. Um anel local $(A, \mathfrak{m})$ é dito *anel de Cohen–Macaulay* se a desigualdade (1.1) é uma igualdade.

A definição é generalizada por localização, ou seja, um anel A é Cohen-Macaulay se A_P é Cohen–Macaulay para todo ideal primo P de A.

Dado um anel local $(A, \mathfrak{m})$, temos pelo teorema do ideal principal de Krull e a Proposição 1.3.4 a seguinte relação:

$$\dim(A) \leq \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \tag{1.2}$$

onde o lado esquerdo da desigualdade temos a dimensão de Krull e do lado direito a dimensão vetorial.

Definição 1.4.5. Um anel local $(A, \mathfrak{m})$ é dito *regular* se (1.2) é uma igualdade.

Assim como acontece com os anéis de Cohen–Macaulay, a definição de anel regular se generaliza para um anel qualquer por localização.

Proposição 1.4.6. *Todo anel regular é Cohen-Macaulay.*

Proposição 1.4.7. *Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local regular então $\mathfrak{m}$ é gerado por uma sequência regular.*

Capítulo 2

Generalidades sobre as potências simbólicas

Neste capítitulo apresentamos a definição de potências simbólicas e discutimos suas propriedades mais básicas. Damos ênfase às questões referentes a decomposição primária e de cálculo de geradores.

2.1 Definição e propriedades básicas

Sejam I um ideal em um anel, S o complementar em A da união de todos os primos associados do A-módulo A/I e r um inteiro positivo.

Definição 2.1.1. A r-ésima potência simbólica de I, detonada por $I^{(r)}$, é o ideal

$$I^{(r)} = S^{-1}I^r \cap A = \{a \in A \mid ra \in I^r \text{ para algum } r \in S\}$$

Observação 2.1.2. Existem definições para potências simbólicas mais gerais segundo as quais a apresentada na Definição 2.1.1 é um caso particular (ver [14])

É imediato da definição as seguintes propriedades referentes às potências simbólicas:

(i) Para cada inteiro positivo r, $I^r \subset I^{(r)}$

(ii) Para cada inteiro positivo r, $(I^{(r)} \cap I^{r-1})/I^r$ é a A/I-torção do módulo conormal I^{r-1}/I^r de ordem r.

Observação 2.1.3. Uma questão crucial no estudo das potências simbólicas é decidir quando a inclusão $I^r \subset I^{(r)}$ é uma igualdade. De fato, existem ideais em que tal inclusão é estrita. Por exemplo, consideremos $I = (XY, XZ, YZ) \subset k[X, Y, Z]$. Temos que $X + Y + Z$ não pertence a união dos primos associados de A/I (ver Exemplo 1.2.14). Por outro lado, o elemento XYZ não pertence a I^2 (por motivo de grau), mas $(X + Y + Z)XYZ \in I^2$. Assim, $XYZ \in I^{(2)} \setminus I^2$.

Existem várias classes de ideais em que temos a igualdade, por exemplo:

(a) Se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de um anel A então $\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^{(r)}$ para cada $r \in \mathbb{N}$.

(b) Seja I um ideal em um anel Cohen-Macaulay A. Se I é gerado por uma sequência regular então $I^r = I^{(r)}$ para cada $r \in \mathbb{N}$ (ver [16]).

(c) Seja A um anel de polinômios com coeficientes em um corpo k em n variáveis. Seja $I \subset A$ o ideal de arestas de um grafo G. Então $I^r = I^{(r)}$ para cada $r \in \mathbb{N}$ se, e somente se, G é um grafo bipartido (ver [29, Theorem 5.9]).

2.2 A filtração simbólica

Definição 2.2.1. Dado um anel A, dizemos que uma família de ideais $\mathfrak{F} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma A-*filtração* se as seguintes condições são satisfeitas.

(i) $I_0 = A$.

(ii) $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$.

(iii) $I_i \cdot I_j \subset I_{i+j}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.2. Fazendo a convenção de que $I^0 = A$, temos trivialmente que a família das potências ordinárias $\{I^r\}_{r\geq 0}$ é uma A-filtração. Uma tal filtração é chamada de *I-ádica*.

Exemplo 2.2.3. Fazendo a convenção de que $I^{(0)} = A$, temos trivialmente que a família das potências simbólicas $\{I^{(r)}\}_{r\geq 0}$ é uma A-filtração. Uma tal filtração é chamada de *simbólica*.

2.2.1 A álgebra de Rees simbólica

Definição 2.2.4. Sejam A um anel e $\mathfrak{F} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma A-filtração. A *álgebra de Rees* da filtração $\mathfrak{F}$, denotada $\mathcal{R}_A(\mathfrak{F})$, é a seguinte A-subálgebra da A-álgebra $A[t]$

$$\mathcal{R}_A(\mathfrak{F}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n t^n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \mid n \in \mathbb{N};\ a_i \in I_i \right\}.$$

Dado um ideal I em um anel A temos:

- A álgebra de Rees associada a filtração I-ádica $\{I^r\}_{r\geq 0}$ é simbolizada por

$$\mathcal{R}_A(I) = \bigoplus_{i\geq 0} I^i t^i.$$

  e a chamamos simplesmente de *álgebra de Rees* de I.

- a álgebra de Rees associada a filtração simbólica $\{I^{(r)}\}_{r\geq 0}$ é simbolizada por

$$\mathcal{R}_A^s(I) = \bigoplus_{i\geq 0} I^{(i)} t^i.$$

  e a chamamos de *álgebra de Rees simbólica* de I.

Um primeira pergunta a ser lançada sobre $\mathcal{R}_A^s(I)$ é com respeito a finitude de sua geração como A-álgebra, já que existem exemplos em que $\mathcal{R}_A^s(I)$ não é A-álgebra finitamente gerada (ver por exemplo [13] e [21] sobre a ocorrência desse fenômeno). Em geral, responder esta pergunta é bastante difícil, porém, existem classes razoáveis de ideais em que a resposta é conhecida. Por exemplo, se I é um ideal monomial então $\mathcal{R}_A^s(I)$ é finitamente gerada (ver [14, Theorem 3.2]). Outra classe cuja a álgebra de Rees simbólica é finitamente gerada é a dos ideais gerados pelos menores de uma matriz genérica (ver [7]).

Temos o seguinte critério de finitude para a geração da Rees simbólica

Proposição 2.2.5. *Seja I um ideal de um anel A. São equivalentes:*

(a) $\mathcal{R}_A^s(I)$ *é A-álgebra finitamente gerada.*

(b) $I^{(s)} = \sum_{i=1}^{s-1} I^{(s-i)}I^{(i)}$ *para cada s suficientemente grande.*

Prova. (a)$\Rightarrow$(b) Como $\mathcal{R}_A^s(I)$ é finitamente gerada e $\mathbb{N}$-graduada, então existem elementos homogêneos $F_1, \ldots, F_n$ de graus $d_1, \ldots, d_n$, respectivamente, que geram o ideal homogêneo

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i \geq 1} I^{(i)}t^i.$$

Em particular,

$$I^{(r)}t^r = F_1 I^{(r-d_1)}t^{r-d_1} + \ldots + F_n I^{(r-d_n)}t^{r-d_n}$$

para cada $r \geq 1$. Assim, fazendo $s \geq \max\{d_1, \ldots, d_n\}$ temos

$$I^{(s)} = \sum_{i=1}^{s-1} I^{(s-i)}I^{(i)}$$

.

(a)$\Leftarrow$(b) Consideremos $q = \max\left\{s \mid I^{(s)} \neq \sum_{i=1}^{s-1} I^{(s-i)}I^{(i)}\right\}$. Neste caso é imediato que

$$\mathcal{R}_A^s(I) = A[It, \ldots, I^{(q)}t^q]$$

o que nos mostra que $\mathcal{R}_A^s(I)$ é A-álgebra finitamente gerada. $\square$

2.3 Potências simbólicas e Ass(A/I^r)

A proposição a seguir diz respeito a informações sobre a natureza da decomposição primária das potências ordinárias e simbólicas

Proposição 2.3.1. *Seja A um anel e I um ideal de A. Então:*

(a) $\mathrm{Min}(A/I) = \mathrm{Min}(A/I^r)$

(b) *Suponhamos que* $\mathrm{Ass}(A/I) = \mathrm{Min}(A/I)$. *Para um dado inteiro positivo r, digamos que*

$$I^r = Q(P_1) \cap \ldots \cap Q(P_r) \cap Q(P_{r+1}) \cap \ldots \cap Q(P_\ell)$$

é uma decomposição primária irredudante de I^r onde $\mathrm{Min}(A/I^r) = \{P_1, \ldots, P_r\}$. *Então,*

$$I^{(r)} = Q(P_1) \cap \ldots \cap Q(P_r).$$

Prova. (a) Isto é consequência imediata da caracterização para o conjunto dos primos mínimos enunciada na Proposição 1.2.10(b) e o fato de que um ideal primo P de A contém I se, e somente, se P contém I^r.

(b) Dado um primo imerso P_j de A/I^r temos pelo lema da esquiva que $Q(P_j) \not\subset P_1 \cup \ldots \cup P_r$. Como $\mathrm{Ass}(A/I) = \mathrm{Min}(A/I)$ e $\mathrm{Min}(A/I) = \mathrm{Min}(A/I^r)$, segue que para cada primo imerso P_j de A/I^r temos $P_j \cap S \neq \emptyset$ onde $S = A - P_1 \cup \ldots \cup P_r$. Assim, $S^{-1}P_j = S^{-1}A$ para cada primo imerso P_j de A/I^r. Desse modo,

$$S^{-1}I^r = S^{-1}Q(P_1) \cap \ldots \cap S^{-1}Q(P_r).$$

Portanto,

$$I^{(r)} = S^{-1}I^r \cap A = (S^{-1}Q(P_1) \cap A) \cap \ldots \cap (S^{-1}Q(P_r) \cap A) = Q(P_1) \cap \ldots \cap Q(P_r)$$

como queríamos mostrar. □

Uma consequência imediata da proposição acima é:

Corolário 2.3.2. *Seja A um anel e I um ideal radical de A. Então $I^{(r)}$ coincide com a parte correspondente a interseção das componentes primárias de I^r, associadas aos primos mínimos.*

Prova. Decorre da proposição anterior juntamente com o fato de que a hipótese de I ser radical implica na igualdade $\mathrm{Ass}(A/I) = \mathrm{Min}(A/I)$. □

Corolário 2.3.3. *Seja I um ideal radical de um anel A. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\mathrm{Ass}(A/I^r) = \mathrm{Min}(A/I^r)$.

(b) $I^r = I^{(r)}$

Prova. Conseqência imediata do corolário anterior. □

Observação 2.3.4. O conjunto $\mathrm{Ass}(A/I^n)$ tem sido assunto de diversos estudos. Em [2] é demonstrado que se I é um ideal em um anel Notheriano A então para valores de n suficientemente grandes o conjunto $\mathrm{Ass}(A/I^n)$ estabiliza, ou seja, existe um inteiro positivo N tal que $\mathrm{Ass}(A/I^n) = \mathrm{Ass}(A/I^N)$ para todo $n \geq N$. Contudo, pouco é conhecido sobre onde a estabilidade ocorre ou sobre quais são os primos que pertencem ao conjunto estável. Em [6] essas questões são tratadas no âmbito dos ideais de arestas em um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo. Uma leitura com bastante material sobre o comportamento assintótico do conjunto $\mathrm{Ass}(A/I^n)$ é [20].

Proposição 2.3.5. *Seja A um anel e I um ideal radical de A. Então*

$$I^{(r)} = P_1^{(r)} \cap \ldots \cap P_s^{(r)},$$

onde $P_1, \ldots, P_s$ são os primos mínimos de I.

Prova. Seja

$$I^r = Q(P_1) \cap Q(P_2) \cap \cdots \cap Q(P_s) \cap Q(P_{s+1}) \cap \cdots Q(P_n)$$

uma decomposição primária irredundante de I^r, onde os $Q(P_i)$ são as componentes P_i primárias associadas aos primos mínimos de A/I^r para $i \leq s$ e os $Q(P_i)$ são as componentes primárias imersas para todo $i > s$. Localizando em P_i, com $1 \leq i \leq s$, obtemos obtemos

$$I^r A_{P_i} = Q(P_i) A_{P_i}.$$

De $I = P_1 \cap \ldots \cap P_s$, obtemos

$$I^r A_{P_i} = (I A_{P_i})^r = (P_i A_{P_i})^r = P_i^r A_{P_i}.$$

Assim, $P_i^r A_{P_i} = Q_i(P_i) A_{P_i}$. Fazendo a contração ao anel A obtemos $P_i^{(r)} = Q(P_i)$ como queríamos demosntrar. $\square$

2.4 Sobre o cálculo das potências simbólicas

Seja I um ideal em um anel A tal que $\mathrm{Ass}(A/I) = \mathrm{Min}(A/I)$. Vimos na seção anterior que $\mathrm{Ass}(A/I^{(r)})$ é automaticamente conhecido desde que conheçamos $\mathrm{Ass}(A/I)$. Por outro lado, determinar $\mathrm{Ass}(A/I^r)$ é, em geral, tarefa bastante árdua. Assim, do ponto de vista dos primos associados as potências simbólicas são mais tratáveis que as potências ordinárias. Contudo, quando tratamos da questão de geradores do ideal a situação inverte-se completamente. A determinação de um conjunto de geradores para as potências ordinárias é tarefa barata desde que se conheça um conjunto de geradores de I, mas para as potências simbólicas o processo é demasiadamente duro. Na literatura existem poucos métodos efetivos para o cálculo de potências simbólicas. Nas subseções seguintes apresentamos dois desses métodos.

2.4.1 O cálculo via saturação

Sejam A um anel e I um ideal de A. Dado um elemento $f \in A$, definimos

$$(I : f^\infty) = \{a \in A \mid af^n \in I \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$$

É de fácil verificação que $(I : f^\infty)$ é também um ideal de A. Chamamos este ideal de *saturação* de I pelo elemento f.

Proposição 2.4.1. *Seja I um ideal primo em um anel A. Se $f \in A \setminus I$ e $I_f^{(n)} = I_f^n$ para algum $n \geq 1$, então*

$$I^{(n)} = (I^n : f^\infty).$$

Prova. Se $z \in (I^n : f^\infty)$, então $z \cdot f^k \in I^n$ para algum k. Pela definição de potência simbólica, $z \in I^{(n)}$. Por outro lado, seja $z \in I^{(n)}$. Então $s \cdot z \in I^n$ para algum $s \notin I$. Assim, $\frac{s}{1} \notin I_f$ e $\frac{s}{1}.\frac{z}{1} \in I_f^n$, logo $\frac{z}{1}$ está na n-ésima potência simbólica de I_f e por hipótese segue que $\frac{z}{1} \in I_f^n$ e portanto $z \in (I^n : f^\infty)$. $\square$

Definição 2.4.2. Seja $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo k e $I = (f_1, \ldots, f_m)$ um ideal. A *matriz jacobiana* de I é a matriz

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)$$

Denotaremos a matriz Jacobiana de I tomada módulo um ideal P por

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)(P)$$

Teorema 2.4.3 (Critério Jacobiano)**.** *Seja $B = A/I$ um anel quociente, onde $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ é um anel de polinômios em n variáveis sobre um corpo k e $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset A$ é um ideal. Se $P \subset A$ é um ideal primo contendo I e $\mathfrak{p} = P/I$, temos:*

(i) $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)(P) \leq \operatorname{alt}(I_P)$

(ii) *Se* $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)(P) = \operatorname{alt}(I_P)$ *então $B_\mathfrak{p}$ é anel regular.*

(iii) *Se k é corpo perfeito e $B_\mathfrak{p}$ é regular, então* $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)(P) = \operatorname{alt}(I_P)$

Prova. Ver [19, p. 213]. $\square$

Definição 2.4.4. Seja $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo k e $I \subset A$ um ideal de altura h. O *ideal Jacobiano* de I é o ideal gerado por todos o $h \times h$ menores da matriz jacobiana de I.

Neste texto estaremos mais interessados na seguinte consequência do Critério Jacobiano

Definição 2.4.5. *Seja A um anel e I um ideal no anel A. Nós dizemos que I é um ideal unmixed se todo ideal primo associado de I é isolado, ou seja, um ideal é dito unmixed se não tem ideais primos imersos.*

Corolário 2.4.6. *Seja $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo perfeito k e $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset A$ um ideal unmixed. Se P é um ideal primo de A contendo I e $\mathfrak{p} = P/I$ então $(A/I)_{\mathfrak{p}}$ é regular se, e somente se, $J/I \not\subset \mathfrak{p}$, onde J é o ideal Jacobiano de I.*

Temos agora o principal resultado desta subseção

Teorema 2.4.7. *Sejam A um anel de polinômios sobre um corpo k, I um ideal primo e J o ideal jacobiano de I. Se $f \in J \setminus I$, então*

$$I^{(n)} = (I^n : f^\infty) \ \textit{para cada} \ n \geq 1.$$

Prova. Como a localização A_f é Cohen-Macaulay, pela Observação 2.1.3(b) e Proposição 2.4.1 é suficiente provar que I_f é localmente gerado por uma sequência regular. Para isso, suponha P um ideal primo tal que $I \subset P$ e $f \notin P$. Considere $\mathfrak{p} = P/I$. Temos

$$(A_f/I_f)_{P_f} \simeq (A_f)_{P_f}/(I_f)_{P_f} \simeq A_P/I_P \simeq (A/I)_{\mathfrak{p}}.$$

Como $J/I \not\subset \mathfrak{p}$, usando o Corollary 2.4.6 podemos concluir que R_P/I_P é um anel local regular e consequentemente $(I_f)_{P_f}$ é gerado por uma sequência regular. □

2.4.2 O cálculo via matrizes Jacobianas

Antes de enunciarmos o principal resultado desta subsecção faz-se necessário a introdução de alguns resultados bem como a fixação de notações e definições.

Consideremos $A = k[X_1, \dots, X_n]$ um anel de polinômios com coeficientes em um corpo k. Dados um polinômio $f \in A$ e uma n-upla $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}$, escreveremos $|\mathbf{v}|$ para denotar o somatório das coordenadas de $\mathbf{v}$ e $\dfrac{\partial^{\mathbf{v}} f}{\partial \mathbf{X}^{\mathbf{v}}}$ para representar a $|\mathbf{v}|$-ésima derivada parcial $\dfrac{\partial^{|\mathbf{v}|} f}{\partial X_1^{v_1} \cdots \partial X_n^{v_n}}$.

Definição 2.4.8. Seja $A = k[X_1, \cdots, X_n]$. Dado $r \geq 0$, e um ideal $I \subset A$, a *r-ésima potência infinitesimal do ideal I* é o ideal

$$I^{\langle r \rangle} = \left\{ f \in A \mid \frac{\partial^{\mathbf{v}} f}{\partial \mathbf{X}^{\mathbf{v}}} \in I, \forall \mathbf{v}, |\mathbf{v}| \leq r - 1 \right\}.$$

Uma característica importante das potências infinitesimais é sua natureza recursiva tal como podemos perceber diante da seguinte proposição

Proposição 2.4.9. *Seja $A = k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ e $I \subset A$ um ideal de A. Então:*

$$I^{\langle r \rangle} = \left\{ f \in A \mid \frac{\partial f}{\partial X_i} \in I^{\langle r-1 \rangle}, \forall 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Prova. Basta observar que todo operador $\frac{\partial^{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{X}^{\mathbf{v}}}$ é composto de derivações ordinárias.

□

As noções de potencias infinitesimal e simbólica estão relacionadas pelo célebre teorema de Zariski-Nagata

Teorema 2.4.10 (Zariski, Nagata)**.** *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero e A um anel de polinômios sobre k. Se I é um ideal radical de A então $I^{(r)} = I^{\langle r \rangle}$*

Prova. Verificar [11, Theorem 3.14] e as referências nela citadas. □

Dado um conjunto de polinômios $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_m\} \subset A = k[X_1, \dots, X_n]$, denotamos por $\Theta(\mathbf{f})$ a transposta da matriz jacobiana de f, i.e,

$$\Theta(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

Dados um inteiro positivo r, um ideal $I \subset A$ e um conjunto de gereadores $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_m\}$ de $I^{(r)}$, denotaremos a matriz de relações de $\Theta(\mathbf{f})$ sobre $A/I^{(r)}$ levantada à A por $\Psi^{(r)}(\mathbf{f})$. O ideal gerado pelas entradas do produto matricial $(f_1 \dots f_m)\Psi^{(r)}(\mathbf{f})$ será denotado $((\mathbf{f})\Psi^{(r)}(\mathbf{f}))A$.

Finalmente, podemos enunciar o principal resultado desta subseção

Teorema 2.4.11. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero e $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ um ideal radical. Se $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ é um conjunto gerador do ideal $I^{(r)}$ então*

$$I^{(r+1)} = ((\mathbf{f}).\Psi^{(r)}(\mathbf{f}))A + II^{(r)}$$

Prova. Pelo Teorema 2.4.10, podemos usar as igualdades $I^{(r)} = I^{\langle r\rangle}$ e $I^{(r+1)} = I^{\langle r+1\rangle}$. Seja $g = \sum_j \psi_{jl} f_j \in ((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A$. Então, para cada $1 \leq i \leq n$ temos

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \sum_j \psi_{jl} \frac{\partial f_j}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial \psi_{jl}}{\partial X_i} f_j.$$

Como $\sum_j \psi_{jl} \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \in I^{\langle r\rangle}$, pela definição de $\Psi^{(r)}(f)$, e $\sum_j \frac{\partial \psi_{jl}}{\partial X_i} f_j \in I^{\langle r\rangle}$, pois os $f_j \in I^{\langle r\rangle}$, segue que $\frac{\partial g}{\partial X_i} \in I^{\langle r\rangle}$. Isto significa que

$$\frac{\partial^\beta}{\partial \mathbf{X}^\beta}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right) \in I, \forall \beta, |\beta| \leq r-1, \forall i$$

Como o operador $\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{X}^\alpha}$, com $|\alpha| \leq r$, é a combinação das formas acima isto significa que $g \in I^{\langle r+1\rangle}$.

Reciprocamente, seja $g \in I^{\langle r+1 \rangle}$. Como $I^{\langle r+1 \rangle} \subset I^{\langle r \rangle}$, então $g = \sum_j h_j \cdot f_j$ para certos $h_j \in A$. Aplicando a transposta da matriz Jacobiana ao vetor $\mathbf{v} = \sum_j h_j \cdot e_j \in A^m$ produzimos o vetor de $\sum_i AdX_i$ cuja a i-ésima coordenada é $\sum_j h_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right)$. Como,

$$\sum_j h_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial g}{\partial X_i} - \sum_j \frac{\partial h_j}{\partial X_i}$$

e $\frac{\partial g}{\partial X_i} \in I^{\langle r \rangle}$, uma vez que $g \in I^{\langle r+1 \rangle}$, segue que $\sum_j h_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right) \in I^{\langle r \rangle}$.

Assim, temos que $\overline{v} = \Sigma_j \overline{h_j} e_j \in \ker(\overline{\Theta})$, onde $-$ denota a classe residual módulo $I^{\langle r \rangle}$. Por um produto de matrizes obtemos

$$h_j = \sum_l b_l \cdot \psi_{jl} + d_j,$$

para certos $b_l \in A, d_j \in I^{\langle r \rangle}$. Substituindo a expressão em g temos o resultado desejado. $\square$

Para melhor entendimento do teorema acima, consideremos o seguinte exemplo

Exemplo 2.4.12. Usaremos o resultado acima para calcular o quadrado simbólico do ideal $I = (XY, XZ, YZ) \subset k[X, Y, Z]$. Fazendo $f_1 = XY$, $f_2 = XZ$ e $f_3 = YZ$ temos:

$$\Theta(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} Y & Z & 0 \\ X & 0 & Z \\ 0 & X & Y \end{pmatrix}$$

Notemos que os elementos $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{Y} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{X} \end{pmatrix}$, onde

$-$ significa a classe do elemento em A/I, são relações de $\Theta(\mathbf{f})$ sobre A/I, ou seja, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \ker(\Theta(\mathbf{f}))$. Mostraremos agora que

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{f}) = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3).$$

Para isso, devemos mostrar que qualquer relação de $\Theta(\mathbf{f})$ em A/I é combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Assim, suponhamos $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \\ \overline{c} \end{pmatrix} \in \ker(\Theta)$. Então

$$\Theta(\mathbf{f})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \overline{Y} & \overline{Z} & 0 \\ \overline{X} & 0 & \overline{Z} \\ 0 & \overline{X} & \overline{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \\ \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $aY + bZ,\ aX + cZ, bX + cY \in I = (X, Y) \cap (X, Z) \cap (Y, Z)$. Fazendo a divisão euclidiana de a por Z obtemos:

$$a = q_1 Z + r_1(X, Y)$$

onde $r(X, Y)$ é um polinômios que depende apenas de X e Y. Notemos que $aY + bZ \in (X, Z)$, logo

$$r_1(X, Y)Y + (q_1 + b)Z \in (X, Z);$$

logo, $r_1(X, Y)Y \in (X, Z)$. Como (X, Z) é ideal primo e $Y \notin (X, Z)$ segue que $r_1(X, Y) \in (X, Z)$. Disso segue que X divide $r_1(X, Y)$. Raciocinando de forma semelhante com $aX + cZ \in (Y, Z)$ concluimos que Y também divide $r_1(X, Y)$. Assim, XY divide $r(X, Y)$. Desse modo, $\overline{a} = \overline{q_1} \cdot \overline{Z}$. De maneira análoga também temos $\overline{b} = \overline{q_2} \cdot \overline{Y}$ e $\overline{c} = \overline{q_3} \cdot \overline{X}$. Portanto,

$$\mathbf{v} = \overline{q_1}\mathbf{v}_1 + \overline{q_2}\mathbf{v}_2 + \overline{q_3}\mathbf{v}_3$$

e daí que $\Psi^{(1)}(\mathbf{f}) = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$.

Com estes dados temos

$$((\mathbf{f}) \cdot \Psi^{(1)}(\mathbf{f}))A = (XYZ).$$

Usando a proposição anterior obtemos

$$I^{(2)} = I^2 + (XYZ).$$

Capítulo 3

Potências simbólicas e outras construções

O objetivo desse capítulo é apontar como a teoria das potências simbólicas está relacionada com as noções geométricas de variedades secantes e aplicações birracionais. Nosso foco será somente sobre os resultados que representam o marco inicial do entrelaçamento entre estas noções.

3.1 Potências simbólicas e variedades secantes

Seja k um corpo e X, Y variedades irredutíveis de $\mathbb{P}^{n-1}$.

Definição 3.1.1. A *variedade join imersa* de X e Y, denotada $X * Y$, é dada pela seguinte igualdade

$$X * Y = \overline{\bigcup_{x \in X} \bigcup_{y \in Y} \langle x, y \rangle}$$

onde $\langle x, y \rangle$ denotada o subsepaço de $\mathbb{P}^n$ gerado por x e y e o fecho é o de Zariski.

Quando $X = Y$ a variedade join passa a ser chamada de *variedade secante* de X

e a denotamos por $X^{\{2\}}$. De maneira indutiva definimos a *r-ésima variedade secante* de X, denotada $X^{\{r\}}$, pela igualdade

$$X^{\{r\}} = X^{\{r-1\}} * X$$

Observação 3.1.2. Equivalentemente, podemos pensar r-ésima variedade secante de X, denotada, como o fecho (de Zariski) da união de todos os espaços lineares gerados por r pontos de X.

Para o que segue, fixamos as seguintes informações:

- Dada uma subvariedade W de $\mathbb{P}^{n-1}$ escreveremos $\mathrm{I}(W)$ para denotar o ideal de definição de W.

- Uma subvariedade W de $\mathbb{P}^{n-1}$ é dita *não-degenerada* se não existe hiperplano de $\mathbb{P}^{n-1}$ contendo W.

Exemplo 3.1.3.

Definição 3.1.4. Sejam I e J ideais homogêneos de $k[X_1, \ldots, X_n]$. O ideal *join* de I e J, denotado por $I * J$, é dado pela seguinte igualdade:

$$I * J = (I(Y_1, \ldots, Y_n) + J(Z_1, \ldots, Z_n) + (X_i - Y_i - Z_i \mid i = 1, \ldots, n)) \cap k[X_1, \ldots, X_n]$$

onde $I(Y_1, \ldots, Y_n)$ e $J(Z_1, \ldots, Z_n)$ denotam os ideais obtidos de I e J pelas substituições $X_i \mapsto Y_i$ e $X_i \mapsto Z_i$ respectivamente.

Quando $I = J$, o join passa a ser chamado de *ideal secante* de I e o denotamos por $I^{\{2\}}$. De maneira indutiva, definimos o r-ésimo ideal secante de I, denotado $I^{\{r\}}$, por

$$I^{\{r\}} = I^{\{r-1\}} * I.$$

Listamos agora algumas propriedades sobre variedades e ideais joins

- Se k é um corpo perfeito então $\sqrt{I * J} = \sqrt{I} * \sqrt{J}$. Em particular, se I e J são radicais então $I * J$ também é radical (ver [30, Proposition 1.2]).

- Se k é um corpo algebricamente fechado então $I(X * Y) = I(X) * I(Y)$

- $\dim (k[X_1, \ldots, X_n]/(I * J)) \leq \min\{n, \dim k[X_1, \ldots, X_n]/I + \dim k[X_1, \ldots, X_n]/J\}$.

O resultado que apresentaremos agora é devido a Michael Catalano e relaciona as noções de potências simbólicas e ideais secantes

Teorema 3.1.5. ([5, Theorem 2.1]) *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero e X uma subvariedade irredutível de $\mathbb{P}^{n-1}$ não-degenerada. Então,* $\mathrm{I}(X)^{\{r\}} \subset \mathrm{I}(X)^{(r)}$.

Prova. Seja $f \in \mathrm{I}(X)^{\{r\}} = \mathrm{I}(X^{\{r\}})$ polinômio não nulo. Pelo teorema de Zariski-Nagata, é suficiente mostrar que todas as derivadas parciais de f de ordem no máximo $r-1$ pertencem a $\mathrm{I}(X)$. Para isso, suponhamos p um ponto geral de X. Como X é não-degenerada, podemos encontrar um conjunto Σ de n pontos linearmente independentes de X contendo p.

A menos de uma mudança de coordenadas, podemos supor

$$\Sigma = \{(1 : 0 : \ldots : 0), (0 : 1 : \ldots : 0), \ldots (0 : 0 : \ldots : 1)\}$$

e

$$p = (1 : 0 : \ldots : 0).$$

Claramente, $\mathrm{I}(X^{\{r\}}) \subset \mathrm{I}(\Sigma^{\{r\}})$. Como $\Sigma^{\{r\}}$ contém qualquer subespaço gerado por p e quaisquer outros $(r-1)$ pontos de $\Sigma^{\{r\}} - \{p\}$ temos:

$$\mathrm{I}(\Sigma^{\{r\}}) \subset J = \bigcap_{S \subset \{x_2,\ldots,x_n\}, |S|=r-1} I_S$$

onde a interseção é sobre todos os subconjuntos de variáveis $\{x_2, \ldots, x_n\}$ de cardinalidade $r-1$ e I_s é o ideal gerado por todas as variáveis $x_i \notin S$.

Notemos que cada I_S é um ideal monomial; logo, como $f \in J$ então todos os termos monomiais de f também pertencem a J. Considere m um termo monomial. Se $\mathrm{gr}(m) \leq r-1$, então existem no máximo $r-1$ variáveis distintas dividindo m. Considere S um conjunto de cardinalidade $r-1$ contendo todas estas variáveis. Claramente, $m \notin I_S$. Assim, f não contém um monômio de grau menor que r. Consequentemente, todas as derivadas de f de ordem no máximo $r-1$ se anula em p. Como p é um ponto geral de X, o teorema está provado. $\square$

Em um artigo de 2008, S. Sullivant apresentou em [31, Proposition 2.2] a seguinte generalização do resultado de Michael Catalano

Teorema 3.1.6. *Seja k um corpo algebricamente fechado (não necessariamente de característica zero). Suponhamos $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ um ideal homogêneo e radical tal que $I \subset (X_1, \ldots, X_n)^2$. Então:*

$$I^{\{r+s-1\}} \subset (I^{\{r\}})^{(s)}$$

Notemos que para cada $1 \leq i \leq r-1$ temos $I^{(i)} I^{(r-i)} \subset I^{(r)}$. Assim, para cada ideal homogêneo radical $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ não contendo formas lineares temos:

$$I^{\{r\}} + \sum_{i=1}^{r-1} I^{(i)} I^{(r-i)} \subset I^{(r)} \tag{3.1}$$

Mais geralmente, temos a seguinte inclusão:

$$I^{\{r+s-1\}} + \sum_{i=1}^{s-1} (I^{\{r\}})^{(i)} (I^{\{r\}})^{(s-i)} \subset (I^{\{r\}})^{(s)} \tag{3.2}$$

Uma pergunta natural é sobre quando esta inclusão é uma igualdade. Em [31] Seth Sullivant sugere a seguinte definição:

Definição 3.1.7. Um ideal homogêneo e radical $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ é dito r-*diferencialmente perfeito* se para todo s

$$I^{\{r+s-1\}} + \sum_{i=1}^{s-1} (I^{\{r\}})^{(i)} (I^{\{r\}})^{(s-i)} = (I^{\{r\}})^{(s)}$$

Dizemos que I é *diferencialmente perfeito* se ele for r-diferencialmente perfeito para todo r.

Notemos que a igualdade (3.2) é equivalente a

$$(I^{\{r\}})^s = \sum_{\lambda \vdash s} I^{\{r+\lambda_1-1\}} I^{\{r+\lambda_2-1\}} \cdots I^{\{r+\lambda_{\ell(\lambda)}-1\}} \tag{3.3}$$

onde a soma varia sobre todas as partições λ de s e $\ell(\lambda)$ é o número de partes de λ.

Na sequência listaremos alguns ideais que são r-diferencialmente perfeitos para algum r.

3.1.1 Ideais de arestas

Seja G um grafo simples com conjunto de vértices $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ e conjunto de arestas $E(G)$. O *ideal de arestas* associado ao grafo G é o ideal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ definido pela seguinte igualdade

$$I(G) = \{x_i x_j \mid \{i, j\} \in E(G)\}.$$

Consideremos as seguintes terminologias:

- Para cada subconjunto V' dos vértices de um grafo G, denotamos por G'_V o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V' e mantêm as adjacências de V' que apareciam em G. Chamamos G'_V de *subgrafo induzido* de G.

- Uma *m-coloração* de um grafo G é uma função dos vértice de G no conjunto $\{1, \ldots, m\}$ tal que os vértices de uma mesma aresta não podem estar assosciados ao mesmo número (cor). O *número cromático* de G é o menor m tal que existe uma m-coloração de G. Denotamos o número cromático de G por $\chi(G)$.

- Um *clique* de um grafo G é uma coleção de vértices de G que formam um subgrafo completo de G. O *número clique* de G, denotado $\omega(G)$, é a cardinalidade do maior clique de G.

É imediato que $\omega(G)$ é um limitante superior para $\chi(G)$. Esta relação entre $\omega(G)$ e $\chi(G)$ nos levam a seguinte definição

Definição 3.1.8. Um grafo G é dito *perfeito* se para cada subconjunto V' dos vértices de G tivermos $\omega(G_{V'}) = \chi(G_{V'})$.

Teorema 3.1.9. ([31, Theorem 3.2]) *O ideal de arestas associado a um grafo G é 1-diferencialmente perfeito se, e somente se, G é grafo perfeito.*

3.1.2 Ideais gerados pelos 2×2 menores de uma matriz genérica

Seja A um anel e

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

uma matriz de ordem $m \times n$ com entradas em A. Dado um $t \leq \min\{m, n\}$, escrevemos $I_t(\varphi)$ para denotar o ideal gerados por todos os menores de φ de ordem t.

Se k é um corpo e

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \ldots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

uma matriz de ordem $m \times n$ cujas entradas são indeterminadas sobre k então chamamos esta de *matriz genérica* sobre k.

Observação 3.1.10. Uma referência que reune diversos aspectos dos ideais $I_t(X)$ é [4].

Em [31, Theorem 5.5] temos o seguinte resultado

Teorema 3.1.11. *O ideal $I_2(X)$ é diferencialmente perfeito.*

3.2 Potências simbólicas e aplicações birracionais

Seja k um corpo algebricamente fechado e $V \subset \mathbb{P}^{n-1}$ uma variedade integral com anel de coordenadas homogêneas $R = k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$. Uma aplicação racional $\mathfrak{G} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ é representável por m formas $\mathbf{g} = \{\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_m\} \subset R$ (onde "$-$"significa a classe de resíduos do polinômio) do mesmo grau $d \geq 1$, não todas nulas. De fato, tal conjunto de representantes para $\mathfrak{G} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ não é único. Se considerarmos $k(V)$ o corpo de frações de R, então qualquer outra n-upla $(\overline{g'}_1, \ldots, \overline{g'}_n)$ que seja equivalente a $(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n)$ no espaço projetivo $\mathbb{P}^n_{k(V)} = \mathbb{P}^n_k \otimes_k \operatorname{Spec}(k(V))$ é um representante de $\mathfrak{G} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$.

A *imagem* de $\mathfrak{G}$ é a subvariedade projetiva $W \subset \mathbb{P}^{m-1}$ cujo o anel de coordenadas homogêneas é a k-subálgebra $k[\mathbf{g}] \subset R$ depois de renormalização da graduação.

Escreveremos $S := k[\mathbf{g}] \simeq k[\mathbf{Y}]/I(W)$, onde $I(W) \subset k[\mathbf{Y}] = k[Y_1, \ldots, Y_m]$ é o ideal homogêneo de definição da imagem no mergulho $W \subset \mathbb{P}^{m-1}$.

A aplicação $\mathfrak{G}$ é dita ser *birracional sobre a imagem* se existir uma aplicação racional $\mathfrak{F} : W \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ tal que para um conjunto de representantes $\mathbf{f} = \{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n\} \subset S$ tenhamos

$$(f_1(\mathbf{g}) : \cdots : f_n(\mathbf{g})) \equiv (X_1 : \cdots : X_n), \pmod{I(V)}$$

e

$$(g_1(\mathbf{f}) : \cdots : g_m(\mathbf{f})) \equiv (Y_1 : \cdots : Y_m) \pmod{I(W)}$$

Ter informação sobre a aplicação inversa – e.g., sobre seu grau – será bastante relevante na sequência. Neste trabalho, estaremos interessados somente no caso em que $V = \mathbb{P}^{n-1}$. O ideal $I = (g_0, \ldots, g_n) \subset R$ é dito o *ideal base* da aplicação racional $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$. Nesta situação particular, a congruência estrutural acima

$$(f_0(g_0, \ldots, g_n), \ldots, f_n(g_0, \ldots, g_n)) \equiv (X_0, \ldots, X_n),$$

envolvendo a aplicação inversa, define unicamente uma forma $D \in R$ tal que

$$f_i(g_0, \ldots, g_m) = X_i D,$$

com $i = 0, \ldots, n$. Chamaremos esse D um *fator de inversão* (do domínio) de $\mathfrak{G}$ associado ao representante dado.

Observação 3.2.1. Para maiores detalhes sobre aplicações birracionais dentro de uma perspectiva mais algébrica sugerimos as referências [9], [26] e [28].

O fator de inversão admite a seguinte propriedade curiosa:

Lema 3.2.2. *Seja* $I \subset R = k[\mathbf{X}]$ *o ideal base de uma aplicação* $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ *birracional sobre a imagem e seja* $D \in R$ *o fator de inversão do domínio relativo a um dado representante da aplicação inversa. Se o ideal máximo* $(\mathbf{X})$ *não é primo associado de* R/I*, então* D *é um elemento da potência simbólica* $I^{(d)}$*, onde* d *é o grau das coordenadas do representante da aplicação inversa em consideração.*

Prova. Nas notações acima, como para cada $1 \leq i \leq n$ o polinômio homogêneo f_i tem grau d, segue que $X_i D = f_i(\mathbf{g}) \in I^d$; logo, $(\mathbf{X})D \subset I^d$. Como $(\mathbf{X}) \notin \mathrm{Ass}(R/I)$, segue pelo lema da esquiva a existência de $h \in (\mathbf{X})$ que não pertence a união dos primos associados de R/I. A natureza de h juntamente com a definição de potência simbólica nos dá $D \in I^{(d)}$. $\square$

Naturalmente, esse lema nos conduz à seguinte questão:

Questão 3.2.3. Nas notações do lema acima, qual a contribuição de D na geração do ideal $I^{(d)}$? Ou, mais ambiciosamente, qual sua contribuição na geração da álgebra de Rees simbólica $\mathcal{R}^{(I)}$?

De fato, emm [24] e [25] os autores mostram algumas classes de ideais em que as respostas para as questões acima são afirmativas.

Referências Bibliográficas

[1] M. Atiyah and Ian G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Massachusetts: Addison–Wesley Publishing, 1969.

[2] M. Brodmann, Asymptotic stability of Ass(M/I^nM), Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), 16–18.

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 39, Cambridge University Press, 1993.

[4] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal rings,* Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York Londo Paris Tokyo, 1988.

[5] M. Catalano-Johnson, The homogeneous ideals of higher secant varieties, J. Pure Appl. Algebra 158 (2001) 123–129

[6] J. Chen, S. Morey, A. Sung, The stable set of associated primes of the ideal of a graph, Rocky Mountain J. Math. 32 (2002), no. 1, 71–89.

[7] C. De Concini, D. Eisenbud, and C. Procesi, Young diagrams and determinantal varieties, Invent. Math. **56** (1980), 129–165

[8] R. C. Cowsik, Symbolic powers and numbers of defining equations, Lecture notes in pure and Applied Math. 91 (1984) 13–14.

[9] A. Doria, H. Hassanzadeh and A. Simis, A characteristic free criterion of birationality, Advances in Math., **230** (2012), 390–413.

[10] L. Ein, R. Lazarsfeld and K. E. Simith, Uniform bounds and symbolic powers on smoth varieties, Inventiones Math., 144 (2001), 241–252.

[11] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer, 1995.

[12] D. Eisenbud and B. Mazur, Evolutions, symbolc powers and Fittings ideals. J. Reine Angew. Math, 488 (1997), 189–201.

[13] S. Goto, K. Nishida, and K.I. Watanabe, Non-Cohen-Macaulay symbolic blowups for space monomial curves and counter examples to Cowsik's question, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994) 383-392.

[14] J. Herzog, T. Hibi, NV Trung; Symbolic powers of monomial ideals and vertex cover algebras. Adv. Math., 210 (1) (2007), 304–322

[15] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos, On the arithmetic and homology of algebras of linear type, Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984), 661–683.

[16] M. Hochster, Criteria for Equality of Ordinary and Symbolic Powers of Primes, Math. Z., 133 (1973), 53–65.

[17] M. Hochster and C. Huneke, Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals, Inventiones Math. 174 (2002), 349–369.

[18] M. Hochster and C. Huneke, Fine behavior of symbolic powers of ideals, Illinois J. Math. 51 (2007) 171–183.

[19] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin–Cummings, Reading, MA, 1980.

[20] S. McAdam, *Asymptotic Prime Divisors*, Lecture Notes in Math. **103**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[21] D. Rees, On a problem of Zariski, Illinois J. Math. **2** (1958), 145–149.

[22] P. Roberts, A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), 589–592.

[23] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, J. Algebra 132 (1990), 461–473.

[24] Z. Ramos and A. Simis, Symbolic powers of perfect ideals of codimension 2 and birational maps, J. Algebra **413** (2014), 153–197.

[25] Z. Ramos and A. Simis, On catalecticant perfect ideals of codimension 2, J. Algebra and Its Appl., to appear.

[26] F. Russo and A. Simis, On birational maps and Jacobian matrices, Compositio Math. **126** (2001), 335–358.

[27] A. Simis, Effective computation of symbolic powers by jacobian matrices, Comm. in Algebra **24** (1996), 3561–3565.

[28] A. Simis, Cremona transformations and some related algebras, J. Algebra **280** (2004), 162–179.

[29] A. Simis, W. Vasconcelos and R.Villarreal, On the ideal theory of graphs, Journal of Algebra, Vol. 167, No 2, july 15, 1994.

[30] A. Simis, B. Ulrich, On the Ideal of an embedded join, J. Algebra 226 (2000), 1-14.

[31] S. Sullivant, Combinatorial symbolic powers, J. Algebra 319, No. 1, 115–142 (2008).

[32] I. Swanson, Linear equivalence of ideal topologies, Math. Z., 234 (2000), 755-775

[33] W. Vasconcelos, *Arithmetic of Blowup Algebras*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series **195**, Cambridge University Press, (1994).

[34] W. V. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, Heidelberg, 1998.

[35] R. Villarreal, *Combinatorial Optimization Methods in Commutative Algebra*,