UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

RONALD GAMA SILVA

RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS VIA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2016

RONALD GAMA SILVA

RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS VIA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Matemática PROFMAT da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Fábio dos Santos

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S586r

Silva, Ronald Gama
Reconhecimento de quádricas via diagonalização de matrizes / Ronald Gama Silva; orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2016.
54 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Matrizes (Matemática). 2. Superfícies (Matemática). 3. Álgebra linear. 4. Geometria analítica. I. Santos, Fábio, orient. II. Título.

CDU: 512.643

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Reconhecimento de Quádricas via Diagonalização de Matrizes

por

Ronald Gama Silva

Aprovada pela Banca Examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Dr. Fabio dos Santos - UFS
Orientador

Eder Mateus de Souza

Prof. Dr. Eder Mateus de Souza - UFS
Primeiro Examinador

Lucia de Fatima de Medeiros Brandão Dias

Prof.ª Dr.ª Lucia de Fátima de Medeiros Brandão Dias - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 06 de Julho de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedicatória

Dedico esta conquista à minha família, em especial à minha querida filha, Ayanna Sophia.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por ter me dado força e perseverança para seguir sempre em frente. Agradeço aos meus pais, Valdemir Alves da Silva e Railda Prado Gama Silva e ao meu irmão, Randerson Gama Silva pelo amor e incentivo constante que nunca deixaram faltar. Agradeço a todas as pessoas que, de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram positivamente para eu chegar até aqui: todos meus professores em especial ao meu orientador, Dr. Fábio dos Santos, aos colegas de turmas, aos amigos mais próximos, à minha sobrinha Clara Raíssa e aos meus demais familiares. De forma especial, agradeço à minha amada esposa, Suely Silva Santos Gama, que caminhou junto comigo em todos os momentos e foi imprescindível para a conclusão deste trabalho. A agradeço pelo apoio nos momentos de dificuldade dessa caminhada, incentivando e se preocupando comigo.

Resumo

Nesta dissertação faremos um estudo das quádricas, as quais podem ser definidas como soluções de equações do segundo grau com três variáveis, tendo como objetivo principal o reconhecimento das mesmas por meio de uma simplificação da forma quadrática associada, cujo procedimento envolve a diagonalização de matrizes simétricas. Ao longo deste trabalho, serão abordados os pré-requisitos necessários para que o leitor, com pouca familiaridade no assunto, possa compreender cada etapa de seu desenvolvimento, como espaços euclidianos e diagonalização de matrizes.

Palavras - chave: Quádricas, Reconhecimento das Quádricas, Diagonalização de Matrizes Simétricas.

Abstract

This thesis we will make a study of the quadrics, which can be defined as quadratic equations solutions with three variables, with the main objective recognition of same through a simplification of the quadratic form associated, whose procedure involves the diagonalization of symmetric matrices. Throughout we this work, will address the requirements for the reader with little familiarity on the subject, can understand each stage of its development, as Euclidean spaces and matrix diagonalization.

Keywords: Quadrics, Recognition of Quadrics, Matrix Diagonalization Symmetric.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A origem das superfícies quádricas está intimamente ligada à origem das seções cônicas, pois informalmente falando, superfícies quádricas são as regiões formadas quando as cônicas se movimentam no espaço.

Foi no século IV a.C. que o astrônomo e geômetra Menêcmo descobriu que havia duas curvas, chamadas mais tarde de parábola e hipérbole, que apresentavam propriedades que possibilitavam encontrar a solução para o problema da duplicação do cubo (problema de Delos). Como decorrência dessa descoberta apareceu outra curva chamada mais tarde de elipse. Assim Menêcmo tornou-se então, como afirma uma carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu Euergeta, o descobridor das seções cônicas.

As contribuições de Euclides sobre as cônicas, infelizmente perderam-se, talvez porque rapidamente foram ultrapassadas pelo trabalho mais extenso escrito por Apolônio. Apesar de ter pouco avançado nos teoremas específicos das seções cônicas, Euclides instituiu as bases dos maiores desenvolvimentos posteriores sobre o tema, finalizados por Apolônio e Pappus de Alexandria. Alias, Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu, aproximadamente, entre 287 a.C. e 212 a.C. e, juntamente com Euclides, formaram a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da antiguidade.

Muitos séculos se passaram sem importantes avanços científicos na Matemática. No século XVII, ocorreu o primeiro grande avanço na geometria após os gregos. Em 1629, o matemático francês Pierre De Fermat (1601-1665), na restauração de obras perdidas da Antiguidade e na sua tentativa de reconstituir certas demontrações perdidas de Apolônio sobre os lugares geométricos, começou a fazer descobertas muito importantes em Matemática.

Em 1637, o notável filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) publicou, na Holanda, em francês, seu grandioso Discurso sobre o método para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências, que dentre outros feitos mostrou como, utilizando a álgebra, a geometria poderia ser estudada.

Figura 1: René Descarte

Figura 2: Pierre de Fermat

Pierre De Fermat e principalmente René Descartes, com suas obras, sistematizaram o emprego da Álgebra nos problemas de Geometria. Assim as ciências matemáticas obtiveram um progresso vertiginoso, o que rendeu a René Descartes o reconhecimento por muitos pesquisadores como sendo o iniciador da Matemática Moderna.

Portanto, induzido pela importância da aplicação dos conhecimentos das Quádricas nas diversas áreas das Ciências e na vida dos alunos, pretendo com o presente trabalho contribuir no sentido de expor uma ferramenta a mais para o estudo da geometria analítica, no tocante ao reconhecimento dos tipos de quádricas. E para tal, utilizarei conceitos fundamentais da álgebra linear, bem como a diagonalização de matrizes simétricas.

Esta dissertação será dividida em três capítulos. No primeiro, trataremos dos conceitos preliminares que servirão de base para que o leitor compreenda os processos seguintes. Aos leitores que já possuam tais conhecimentos básicos, a leitura deste capítulo é facultativa.

No segundo capítulo, veremos os procedimentos necessários para o processo de diagonalização de matrizes simétricas, bem como as vantagens de utilizar esse processo.

Por fim, no terceiro capítulo, faremos o reconhecimento das quádricas por meio da diagonalização de matrizes, que é o objetivo principal deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é destinado às noções preliminares, essenciais à boa compreensão desta dissertação. Nele será abordada a estrutura euclidiana do $\mathbb{R}^3$, assim como as ferramentas necessárias para a mudança de um sistema de coordenadas.

1.1 A estrutura euclidiana do $\mathbb{R}^3$

1.1.1 Espaço vetorial

O $\mathbb{R}^3$ representa o conjunto dos ternos de números (x, y, z), com $x, y, z \in \mathbb{R}$, ou seja, é o conjunto de triplas de numeros reais, comumente visualizado como o espaço. Uma tripla (x, y, z) pode ser visualizada, geometricamente, tanto como representando as coordenadas de um ponto, como as coordenadas de um vetor com ponto inicial na origem. A noção comum de vetores, juntamente com as operações de adição e multiplicação por nuḿeros reais forma a ideia básica de espaço vetorial, o objeto principal da Álgebra Linear.

Definição 1.1.1. *Um conjunto V será dito um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, se possui uma operação de adição com as mesmas propriedades da adição de um corpo; ou seja,*

A1 *A adição é associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todos $u, v, w \in V$;*

A2 *A adição é comutativa: $u + v = v + u$, para todos $u, v \in V$;*

A3 *A adição possui elemento neutro: existe $0 \in V$, tal que $v + 0 = v$, para todo $v \in V$;*

A4 *A adição possui simétricos: para todo* $v \in V$*, existe* $-v \in V$ *tal que* $v+(-v) = 0$*.*

E além disso, existe uma operação chamada de multiplicação por escalar, que associa a um elemento $a \in \mathbb{K}$ *e a um elemento* $v \in V$*, um elemento* $av \in V$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

ME1 $a(u + v) = au + av$*, para todos* $a \in \mathbb{K}$*e* $u, v \in V$*;*

ME2 $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$*, para todos* $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ *e* $v \in V$*;*

ME3 $(a_1a_2)v = a_1(a_2v)$*, para todos* $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ *e* $v \in V$*;*

ME4 $1v = v$*, para todo* $v \in V$*.*

Definidas em $\mathbb{R}^3$ as operações de adição e multiplicação por escalar por $(x_1, y_1, z_1)+ (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, $a(x, y, z) = (ax, ay, az)$, para $a \in \mathbb{R}$, segue que $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, onde o elemento neutro da adição é o vetor $(0, 0, 0)$ e o simétrico de (x_1, x_2, x_3) é o vetor $-(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$. Assim, o $\mathbb{R}^3$ munido dessas duas operações possui uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

1.1.2 Produto interno

Mostraresmos nesta seção que o $\mathbb{R}^3$, além da estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, possui uma estrutura adicional, a qual explicitaremos na continuação.

Definição 1.1.2. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Um produto interno em* V *é uma função que a cada par de vetores* u *e* w *em* V *associa um número real, denotado por* $\langle u, v\rangle$*, que satisfaz as seguintes condições para quaisquer vetores* u, v *e* w *de* V *e qualquer número real* k*:*

PI 1 $\langle v, v\rangle \geq 0$*;*

PI 2 $\langle v, v\rangle = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$*;*

PI 3 $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$*;*

PI 4 $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$*;*

PI 5 $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$*.*

O produto escalar de $\mathbb{R}^3$ definido por $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ satisfaz os aximomas PI 1, PI 2, PI 3, PI 4 e PI 5, de modo que ele define um produto interno em $\mathbb{R}^3$. De fato, a noção de produto interno generaliza a noção de produto escalar em $\mathbb{R}^3$ e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo definir vários conceitos geométricos como por exemplo a norma, a distância e o ângulo.

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno é chamado de espaço vetorial euclidiano. Deste modo, o $\mathbb{R}^3$ é um espaço euclidiano.

1.1.3 Características de um espaço euclidiano

Seja V um espaço euclidiano. A norma ou comprimento de um vetor $v \in V$ é definida como o número real não negativo dado por

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Se $\|v\| = 1$, dizemos que v é um vetor unitário. Neste caso, diz-se que o vetor v está normalizado.

Chamamos de distância entre dois vetore u, v em V, o número real representado por $d(u, v)$ definido por: $d(u, v) = \|u - v\|$.

Exemplo 1.1.3. *Sejam $u = (4, 2, 1)$ e $v = (-3, 1, 3)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Vamos determinar a distância entre u e v. Usando a definição de distância, temos que*

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(4 + 3, 2 - 1, 1 - 3)\|.$$

Donde,

$$d(u, v) = \sqrt{(4 + 3)^2 + (2 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{54}.$$

Sejam u e v vetores não nulos do espaço euclidiano V. O ângulo entre esses vetores é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Quando $\langle u, v \rangle = 0$, dizemos que os vetores u e v são ortogonais. Isso acontece quando um vetor é nulo ou $\theta = \pi/2$.

Vale destacar que, em geral, não é de muito interesse determinar o ângulo entre dois vetores. Porém, saber se esse ângulo é reto ou não, ou seja, se tais vetores são ortogonais ou não, é de enorme importância para determinar bases de V com certas propriedades, boas para uso na Álgebra Linear.

1.2 Bases ortonormais

Antes de explanarmos o que venha ser uma base ortonormal, serão apresentadas algumas definições necessárias para a compreensão desta seção.

Definição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que um vetor qualquer $u \in V$ é combinação linear dos vetores de S, se existem escalares $k_1, k_2, k_3, ..., k_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + ... + k_nu_n.$$

O conjunto gerado por todas as combinações lineares de $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ em V, é chamado de espaço gerado por S e denotado por $W = G(u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$.

Definição 1.2.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Consideremos a equação vetorial:*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0, \text{ com } a_1, a_2, ...a_n \text{ números reais.}$$

▷ *Se a equação possuir uma única solução dada por:*

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$$

dizemos que $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente independentes.

▷ *Se a equação possuir uma solução diferente da solução nula, dizemos que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente dependentes.*

O termo "linearmente dependente" insinua que os vetores de alguma forma dependem um do outro, como podemos perceber pelo teorema seguinte cuja demostração pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.2.3. *Um conjunto finito α com dois ou mais vetores de um espaço vetorial V é linearmente dependente se, somente se, pelo menos um dos vetores de α pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.*

Definição 1.2.4. *Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V.*

Dizemos que α é uma base de V se as seguintes condições são verificadas:

- *α é linearmente independente;*
- *$V = G(\alpha)$.*

Os vetores $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$, denominada de base canônica.

A prova do teorema a seguir pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.2.5.

Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de vetores não nulos $v_1, v_2, ..., v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores de V é linearmente dependente. (Consequentemente, qualquer conjunto de vetores de V linearmente independente tem, no máximo, n vetores).

Em consequência, temos que todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de elementos.

Definição 1.2.6. *O número de elementos de uma base de um espaço vetorial não nulo V de dimensão finita é chamado de dimensão de V e denotado por $\dim V$.*

Se V for um espaço vetorial euclidiano, então um conjunto de vetores em V é chamado conjunto ortogonal, se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais, ou seja, possuem produto interno igual a zero. Além disso, se nesse conjunto ortogonal todos os seus vetores forem unitários, será chamado *conjunto ortonormal*. Assim podemos concluir que, uma base consistindo de vetores ortogonais é chamada de *base ortogonal* e uma base consistindo de vetores ortonormais é chamada de *base ortonormal*.

Um exemplo de *base ortonormal* é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, denominada referencial padrão do plano, pois as coordenadas de um vetor qualquer $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}$ nesta base, são dadas pelas coordenadas do próprio vetor

$$u = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) = z(0,0,1).$$

Trabalhar com esse tipo de base facilita muito o trabalho de decompor um vetor do espaço em termos dos vetores da base. Vale ressaltar que o processo de multiplicar um vetor não nulo pelo inverso de sua norma para obter um vetor de norma 1 é chamado de normalização. Porém, antes de normalizar um vetor, o mesmo deve ser ortogonal. Mas, quando não for? Nesse caso, faz-se necessário ortogonalizá-lo, sendo que um dos meios para isso é o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt cujos passos estão na prova do próximo teorema, o qual é fundamentado pela proposição abaixo.

Proposição 1.2.7. *Suponhamos que* $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ *seja um conjunto ortogonal de vetores não nulos de* $\mathbb{R}^n$*. Se* $v \in \mathbb{R}^n$*, então*

$$k_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

são os únicos números reais tais que o vetor

$$v' = v - k_1 w_1 - k_2 w_2 - \cdots - k_r w_r$$

é ortogonal aos vetores $w_1, w_2, ..., w_r$*.*

Teorema 1.2.8. *Todo espaço euclidiano possui uma base ortogonal.*

Demonstração: Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Tomemos

$$\begin{aligned}
&w_1 = v_1,\\
&w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1,\\
&w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2,\\
&\vdots\\
&w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.7, o conjunto $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ é um conjunto ortogonal. Além disso, como o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente, cada vetor w_i é não nulo. Assim, o conjunto $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de $\mathbb{R}^n$. Como, por definição, $\mathbb{R}^n$ possui dimensão n, segue que $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.9. *Aplicaremos o processo de Gram-schmidt ao conjunto* $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ *para obtermos uma base ortogonal* $\{w_1, w_2, w_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*.*

Fazendo

$$w_1 = (1,0,0),$$

$$w_2 = (1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(1,0,0)\rangle}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) = (0,1,1),$$

$$w_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,0,0)\rangle}{\|(0,1,1)\|^2}(1,0,0) - \frac{\langle (0,0,1),(0,1,1)\rangle}{\|(0,1,1)\|^2}(0,1,1) = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Assim, $\left\{(1,0,0),(0,1,1),(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right\}$ *é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$.

Em diversas situações se faz necessário representar as coordenadas de um vetor em relação a uma base na forma de matriz. Assim, apresentaremos a definição de matriz coordenada.

Definição 1.2.10. *Sejam* $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^n$ *e* $v \in \mathbb{R}$, *onde* $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. *Chamamos os números reais* $a_1, a_2, ..., a_n$ *de coordenadas de* v *em relação à base* β *e denotamos por*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

1.3 Mudança de coordenadas

1.3.1 Matriz mudança de base

Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usar um segundo sistema de coordenadas, ou seja, um novo referencial que represente de forma mais simples a mesma situação. Por esse motivo, será apresentada a *mudança de base*. Como a noção de base é a generalização para espaços vetoriais arbitrários da noção de sistemas de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, mudar de base é análogo a mudar de eixos coordenados em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Sejam $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $\alpha = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ duas bases ordenadas de V, onde V é um espaço euclidiano. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \text{ e } v = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n.$$

Como já foi mostrado, podemos relacionar as coordenadas de v em relação às duas bases.

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [v]_\alpha = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Por se tratarem de bases do $\mathbb{R}^n$ podemos escrever os vetores de uma em relação aos vetores da outra, assim:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{cases}$$

Daí, um modo de explanar o vetor v é o seguinte:

$$\begin{aligned} v &= y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n) + \cdots + y_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n) \\ &= (a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n)u_1 + \cdots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n)u_n \\ &= x_1u_1 + \cdots + x_nu_n. \end{aligned}$$

Como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Estabelecida a relação entre as coordenadas de β e α, será escrita sua versão matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Denotando:

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Podemos escrever

$$[v]_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta} \cdot [v]_{\alpha},$$

onde $[I]^{\alpha}_{\beta}$ é a chamada *matriz mudança de base* α para a base β. Para escrever $[v]_{\alpha}$ em função de $[v]_{\beta}$, basta tomar a inversa de $[I]^{\alpha}_{\beta}$, ou seja, $[I]^{\beta}_{\alpha}$.

Portanto, para transformar as coordenadas de um vetor para uma outra base, devemos multiplicar pela *inversa da matriz mudança de base*. É importante ressaltar que, caso as bases β e α sejam ortonormais para V, situação muito natural em diversas aplicações, as matrizes $[I]^{\alpha}_{\beta}$ e $[I]^{\beta}_{\alpha}$ serão chamadas de *matrizes ortogonais*, matrizes cuja transposta é igual à sua inversa. Além disso, são matrizes que possuem colunas e linha formadas por vetores ortonormais.

Exemplo 1.3.1. *Considerando a base canônica α de $\mathbb{R}^3$ e uma outra base $\beta = \{(1,1,3),(1,2,0),(-1,2,4)\}$ também de $\mathbb{R}^3$, temos que*

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

onde os elementos que compõem a matriz são números reais que satisfazem o sistema de equações:

$$\begin{cases} (1,0,0) = a_{11}(1,1,3) + a_{21}(1,2,0) + a_{31}(-1,2,4) \\ (0,1,0) = a_{12}(1,1,3) + a_{22}(1,2,0) + a_{32}(-1,2,4) \\ (0,0,1) = a_{13}(1,1,3) + a_{23}(1,2,0) + a_{33}(-1,2,4) \end{cases}$$

Resolvendo as equações acima, obtemos $a_{11} = 4/8, a_{21} = 1/8, a_{31} = -3/8, a_{12} =$

$-1/4, a_{22} = 7/16, a_{32} = 3/16, a_{13} = 1/4, a_{23} = -3/16$ *e* $a_{33} = 1/16$. *Portanto,*

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 4/8 & -1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 7/16 & -3/16 \\ -3/8 & 3/16 & 1/16 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Translação de eixos em $\mathbb{R}^3$

A translação no espaço pode ser vista como simplesmente uma extensão a partir da translação no plano, ou seja, ocorre a partir da soma da matriz de translação com todos os pontos do objeto

$$\begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, sua representaçao fica a seguinte

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \\ z' = z + T_z, \end{cases}$$

onde T_x, T_y, T_z representam as componentes do vetor de translaçao; x, y, z as coordenadas iniciais e x', y', z' as coordenadas finais.

1.3.3 Rotação de eixos no $\mathbb{R}^3$

Na Matemática, particularmente, na Álgebra Linear e na Geometria, rotação de eixos coordenados é uma transformação linear de um sistema de coordenadas, que consiste em fazer girar os eixos coordenados no sentido anti-horário em torno de sua origem e por um mesmo ângulo θ, no caso do plano, ou por ângulos distintos, como veremos no espaço tridimensional.

No $\mathbb{R}^3$ um sistema de coordenadas (x, y, z) pode ser girado por um angulo θ em torno de um dos eixos coordenados passando assim, para um sistema (x', y', z'), bastando para isso efetuar uma mudança de base entre duas bases ortonormais, β e α, pois trata-se de eixos ortogonais onde seus vetores são todos unitários. Deste modo, considerando que o eixo escolhido seja o eixo x a matriz mudança de base

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Nesse contexto, $[v]_\beta$ será representada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

e $[v]_\alpha$ será representada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, há situações em que se faz necessário mais de uma rotação. Nestes casos é possível rotacionar o sistema de coordenadas por todos os eixos (x, y, z) e por até três ângulos distintos. Assim, a matriz que representa a sequência de rotações, a qual podemos chamar de movimento rígido, iguala-se ao produto das matrizes que representam as sucessivas etapas na ordem adequada, e é tambem uma matriz de rotação.

Seja R_x, R_y, R_z, respectivamente as matrizes de rotação em torno dos eixos x, y, z, e θ, β, α os ângulos também respectivos, temos:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} R_y = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} R_z = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

assim a matriz resultante, responsável pela mudança de coordenada é denotada por

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} \cos\beta \cdot \cos\alpha & -\cos\beta \cdot \sin\alpha & \sin\beta \\ \sin\theta \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha + \cos\theta \cdot \sin\alpha & -\sin\theta \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha + \cos\theta \cdot \cos\alpha & -\sin\theta \cdot \cos\beta \\ -\cos\theta \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha & \cos\theta \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha + \sin\theta \cdot \cos\alpha & \cos\theta \cdot \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Portanto, neste caso teríamos:

$$R_{xyz} = [I]_\beta^\alpha.$$

1.4 Formas quadráticas

Nesta seção apresentaremos a definição de formas quadráticas, um conteúdo de destaque em muitos ramos da Matemática e essencial para a compreensão deste trabalho.

Definição 1.4.1. *Uma forma quadrática ou quádrica em* $\mathbb{R}^3$ *é uma função* $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *do tipo*

$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

onde a, b, c, d, e *e* f *são constantes reais não nulas. Note que todos os termos de* $Q(x, y, z)$ *são de grau 2, e os termos* dxy, exz *e* fyz *são denominados termos cruzado.*

Exemplo 1.4.2. *A função* $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $Q(x, y, z) = x^2+2y^2+z^2-4xy-2yz$ *define uma forma quadrática em* $\mathbb{R}^3$*.*

Exemplo 1.4.3. *A função* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 3x$ *não define uma forma quadrática, pois um dos termos de sua expressão,* $-3x$*, não é de grau 2.*

Uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ pode ser associada a uma matriz, da seguinte maneira: seja $X = (x, y, z)$ um vetor do $\mathbb{R}^3$ de modo que a matriz coordenada de X em relação à base α, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, pode ser representada por:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Definimos a matriz associada à forma quadrática Q como sendo a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

onde os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}, ou seja, os elementos da diagonal principal, correspondem aos coeficientes dos termos quadrados, e os elementos $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}$ e a_{32} derivam dos coeficientes dos termos cruzados, sendo que $a_{12} + a_{21}$ corresponde ao coeficiente do termo xy, $a_{13} + a_{31}$ corresponde ao coeficiente do termo xz e $a_{23} + a_{32}$ corresponde ao coeficiente do termo yz, logo existe uma infinidade de possibilidades para representar $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}$ e a_{32}. Porém, o que quase sempre ocorre é igualar os elementos que compõe cada termo cruzado afim de utilizar matrizes simétricas, pelo fato de tais matrizes propiciar algumas facilidades, que serão vistas mais adiante. Entende-se por matriz simétrica toda matriz coincidente à sua transposta. No qual, dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, chamamos de transposta de A, e denotamos por A^t, a matriz $[b_{ij}]_{nxm}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq m$.

A versão matricial da forma quadrática Q é dada por

$$Q(X) = X^t AX.$$

Exemplo 1.4.4. *Considere a forma quádrica* $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2yz$. *Vamos obter a forma matricial equivalente. A matriz associada terá ordem 3, ou seja, será da forma:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Como já foi visto, os elementos da diagonal principal são os elementos dos termos ao quadrado, que nesse caso valem $a_{11} = 1, a_{22} = 2$ *e* $a_{33} = 1$. *Além disso, como* $a_{12} + a_{21} = -4, a_{13} + a_{31} = 0$ *e* $a_{23} + a_{32} = -2$ *podemos escolher, convenientemente, A simétrica, assim teremos:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos então que a forma matricial de Q é dada por

$$Q(X) = X^t AX = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Capítulo 2

Diagonalização de Matrizes 3×3

Neste capítulo o enfoque será dado a diagonalização de matrizes simétricas de terceira ordem.

2.1 Autovalores e autovetores de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Dizemos que um número real λ é um *autovalor* de A se existir um vetor não nulo v de $\mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de *autovetor* de A, correspondente ao autovalor λ.

Ao determinante da matriz $A - \lambda I$ dár-se o nome de polinômio característico da matriz A e, pode ser denotado por $P_A(\lambda)$. Notemos $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A se, somente se, λ é uma raiz do polinômio característico da matriz A, ou seja,$P_A(\lambda) = 0$.

Vejamos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 2.1.1. *Se A é uma matriz identidade de ordem n, ou seja, $A = I_n$, então o único autovalor é $\lambda = 1$; qualquer vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ é um autovetor de A associado com o autovalor $\lambda = 1$.*

Exemplo 2.1.2. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Desejamos obter os autovalores de A e seus autovetores associados. Queremos assim *achar todos os números reais* λ *e todos os vetores não nulos*

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

que satisfaça $Av = \lambda v$*, ou seja,*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A equação acima se torna o sistema linear

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = \lambda x \\ 2x + 2y - z = \lambda y \\ 2x - y + 2z = \lambda z \end{cases}$$

Esse sistema possui uma solução não trivial se, e somente se, o determinante de sua matriz de coeficientes for nulo. De forma equivalente, temos que $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$*. Mas,*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda - 3)).$$

Portanto, os zeros de $P_A(\lambda)$ *são* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = -3$*, os quais são os autovalores de* A*.*

Uma vez encontrados os autovalores da matriz, para encontrar os autovetores basta resolver o sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$*, ou seja,*

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 3$*, tem-se:*

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Analogamente, para $\lambda = -3$*, tem-se:*

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas lineares acima, temos que os autovetores associados a λ_1 *e* λ_2 *são, respectivamente* $(\frac{y+z}{2}, y, z)$ *e* $(-2z, z, z)$ *para todo* y *e* $z \in \mathbb{R}$ *,* $y, z \neq 0$*.*

2.2 Diagonalização de matrizes

A diagonalização de matrizes corresponde ao processo de obtenção de uma matriz diagonal que seja semelhante à matriz original. O principal motivo para a obtenção dessa matriz é, matematicamente, o custo operacional reduzido que ela propicia. Antes porém, faz-se necessário o conhecimento de algumas definições que darão suporte a tal procedimento.

Definição 2.2.1. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais. Uma transformação linear de* V *em* W *é uma função* $T : V \longrightarrow W$ *que possui as seguintes propriedades:*

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$*, para quaisquer* v_1 *e* v_2 *em* V*;*

2. $T(av) = aT(v)$*, para quaisquer* v *em* V *e* a *em* $\mathbb{R}$

São portanto funções cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que, além disso, preservam as operações de adição e de multiplicação de um vetor por um escalar.

Quando uma transformação linear for de um espaço vetorial V nele mesmo, ela será chamada de *operador linear* em V, caso particular de enorme utilidade para o desenvolvimento do presente trabalho, pois mostraremos como associar matrizes quadradas a esses operadores.

Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, em que $\dim V = n$, $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $\alpha = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ bases de V. Assim $T(v_1), ..., T(v_n)$ podem ser escritos como combinação linear de α e pode-se determinar de modo único números reais a_{ij}, com $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, tais que

$$T(v_i) = a_{1i}w_1 + ... + a_{ji}w_j + ... + a_{ni}wn.$$

Seja A a matriz quadrática de ordem n cujos elementos das colunas são as coordenadas dos $T(v_i)$ para $i = 1, ..., n$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [T]^{\beta}_{\alpha}$$

O que significa que foi aplicado T aos elementos de β e estes vetores foram escritos como combinação linear dos elementos de α.

A prova do teorema a seguir pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.2.2. *Um operador linear $T : V \longrightarrow V$ admite uma base β em relação à qual a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$ é diagonal se, e somente se, essa base β for formada por autovetores de T.*

Assim fica claro que, supondo $A = [T]^{\alpha}_{\alpha}$, com α sendo a base canônica, uma matriz quadrada de ordem n definida pelo operador T, e $D = [T]^{\beta}_{\beta}$, com β sendo a base formada pelos autovetores de A, a matriz diagonal, as afirmações seguintes corroboram e complementam o que foi apresentado na seção anterior:

1. As entradas da diagonal principal da matriz diagonal D são dadas pelos autovalores de A.

2. Caso A tenha n autovalores distintos, então A é diagonalizável. Além disso, A é semelhante a matriz diagonal D.

3. A é diagonalizável, se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes.

Portanto, podemos escrever a seguinte versão matricial do Teorema 2.2.2, cuja demostração pode ser encontrada em [5]

Teorema 2.2.3. *Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se, somente se, existe uma matriz P invertível de ordem n tal que $D = P^{-1}AP$, é uma matriz diagonal.*

No Teorema 2.2.3, a matriz P é a *matriz mudança de base*, chamada também por *matriz que diagonaliza* A. E pode ser representada pelos autovetores linearmente independentes da matriz A.

Exemplo 2.2.4. *Verificaremos que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e encontraremos uma matriz inversível P que diagonaliza A, ou seja, tal que $D = P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

Inicialmente, note que o polinômio característico de A é dado por

$$P_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda),$$

de modo que $P_A(\lambda) = 0$ para $\lambda = 1$ e para $\lambda = -1$. Logo estes são os autovalores de A.

Resolvendo as equações matriciais

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtemos os conjuntos formadores de autovetores $\{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\{(-z, -3/2z, z); z \in \mathbb{R}\}$ associados aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Daí, podemos escolher, $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 0)$ autovetores associados a $\lambda = 1$ e $v_3 = (1, 3/2, -1)$ um autovetor associado a $\lambda = -1$. Assim, tomemos $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 3/2, -1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ formada de autovetores de A. Dessa forma

$$D = P^{-1}AP,$$

com

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.3 Diagonalização de matrizes simétricas

Quando o assunto é diagonalização de matrizes, um tipo em particular de matrizes deve ser levado em consideração devido a sua importância, que é a matriz simétrica. Como já foi visto, trabalhar com tal matriz representa uma enorme vantagem, visto que a matriz simétrica propicia uma enorme redução nos cálculos, simplificando sua aplicação em diversas situações como no reconhecimento das cônicas, quádricas e no cálculo de composições de funções, por exemplo.

A diagonalização de matrizes simétricas é também chamada de diagonalização ortogonal, pois a matriz P que diagonaliza uma matriz A, simétrica, é uma matriz ortogonal ($P^t = P^{-1}$), isto é, os vetores que representam as linhas e as colunas de P são ortonormais. A explicação para tal afirmação é dada por um dos principais teoremas da Álgebra Linear, o *Teorema Espectral*.

2.3.1 O Teorema espectral para matrizes simétricas

Teorema 2.3.1. *Se A é uma matriz simétrica de ordem n, então existe uma matriz ortogonal P de ordem n, tal que $P^{-1}AP = P^tAP$ é diagonal.*

Em outras palavras, o que o teorema 2.3.1 afirma, é que toda matriz simétrica é diagonalizável e, além disso, existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A tal que as colunas da matriz ortogonal P é formada por esses autovetores.

A demonstração do teorema 2.3.1 pode ser encontrada em [5].

Desta forma, para diagonalizar uma matriz simétrica basta seguir os passos abaixo relacionados:

Passo 1: Encontrar uma base formada por autovetores de A.

Passo 2: Obter uma base ortonormal a partir dos autovetores de A.

Passo 3: Formar a matriz P cujas colunas são os vetores da base construída no Passo 2; esta matriz diagonaliza A ortogonalmente.

Exemplo 2.3.2. *Diagonalizaremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 17 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Segue do Teorema 2.3.1 que é possível diagonalizar essa matriz, uma vez que ela é simétrica.

O polinômio característico de A é dado por

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 31\lambda^2 + 270\lambda - 648 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)(\lambda - 18),$$

do qual vemos que A *tem autovalores* $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ *e* $\lambda_3 = 18$.

Encontrando-se os autovetores correspondentes, obtemos, respectivamente:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que v_1, v_2 *e* v_2 *são ortogonais dois a dois. Assim, é possível normalizá-los a fim de obter autovetores unitários.*

$$\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||} \Longrightarrow u_1 = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} \Longrightarrow u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ u_2 = \dfrac{v_2}{||v_2||} \Longrightarrow u_2 = \frac{(1,1/2,1)}{3/2} \Longrightarrow u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \right) \\ u_3 = \dfrac{v_1}{||v_1||} \Longrightarrow u_3 = \frac{(1,-4,1)}{\sqrt{18}} \Longrightarrow u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \right) \end{array} .$$

Logo, tomando

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

tem-se que $P^{-1}AP = D$.

Note agora que P *é uma matriz ortogonal, pois* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *é um conjunto ortonormal de vetores. Então,* $P^{-1} = P^t$, *e tem-se* $P^tAP = D$. *Portanto*

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 3

Reconhecimento das Quádricas

Neste último capítulo, abordaremos as quádricas, cuja representação algébrica é dada como uma solução de uma equação do segundo grau em três variáveis, culminando com a aplicação da diagonalização de matrizes (formas quadráticas) simétricas para reconhecimento das quádricas.

3.1 O estudo das quádricas

Definição 3.1.1. *Uma quádrica em $\mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas em relação ao referencial padrão $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ satisfazem a equação quadrática*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são números reais, sendo não nulo pelo menos um dos seis primeiros coeficientes a, b, c, d, e, f.

As superfícies quádricas quando cortadas pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles produzem cônicas. Particularmente, se a interseção da superfície acontecer com um plano será chamada *traço* da superfície no plano.

As quádricas mais comuns são: Superficies Cilíndrica, Superfícies Centradas (elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas), Superfícies Não Centradas (parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico) e Cones. Em casos particulares a equação acima pode representar uma reta, um plano, um par de planos paralelos, um par de planos transversais, um ponto ou o conjunto vazio como podemos observar, respectivamente, nos exemplos que seguem : $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2/4 - y^2/9 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, estes casos particulares são chamados de quádricas degeneradas. A seguir abordaremos, apenas as quádricas não degeneradas.

3.1.1 Superfícies Cilíndricas

É a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana, denominada diretriz, paralelamente a uma reta fixa, denominada geratriz.

Em nosso estudo, convenientemente, vamos nos ater às superfícies cilindricas cuja a curva diretriz é representada por uma cônica (cilindro quádrico) que se encontra em um dos planos coordenados. Neste caso, a equação da superfície cilíndrica é a mesma de sua diretriz.

Cilindro elíptico

Os cilindros elipticos são os cilindros quádricos em que a diretriz é uma elipse. Dessa forma possui equação canônica do tipo

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1,}$$

porém agora, considerada no espaço, ou seja, a variável z é livre e portanto pode ser variada em infinitos valores possíveis, funcionando como se varrêssemos o eixo z de uma elipse.

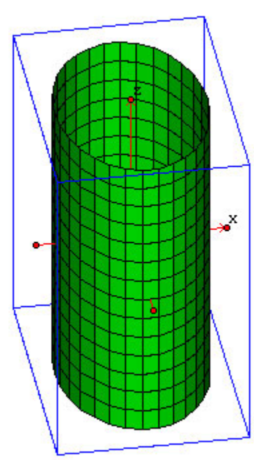

Figura 3.1: Cilindro elíptico com diretriz centrada na origem

Cilindro hiperbólico

É uma superfície quádrica derivada de uma hipérbole, varrida no espaço por um eixo coordenado. Possui equação canônica do tipo

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

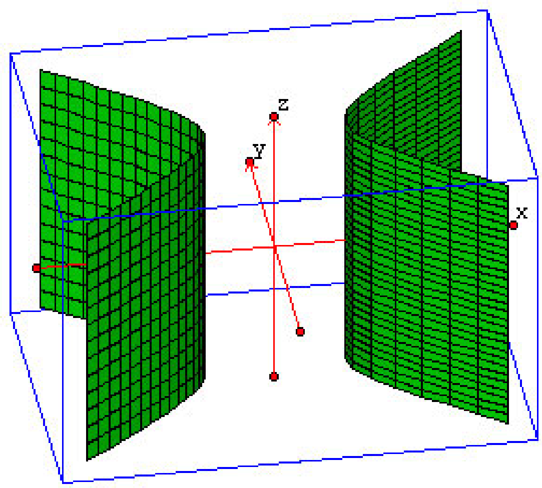

Figura 3.2: Cilindro hiperbolóico com diretriz centrada na origem

Cilindro Parabolóico

Esta superfície pode ser escrita como uma parábola, mas ao olharmos do ponto de vista do espaço teremos

$$y^2 = 4cx, z = k,$$

com $k \in \mathbb{R}$, ou seja, z é uma variável livre, como podemos observar (Figura 3.3).

É importante deixar claro que, em geral, o gráfico de uma equação que não contém uma determinada variável corresponde a uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo da variável ausente e cuja diretriz é o gráfico da equação dada no plano correspondente. Vale ressaltar, ainda, que há outras formas canônicas, variando apenas o eixo coordenado não contido no plano, e por economia de notação, sempre

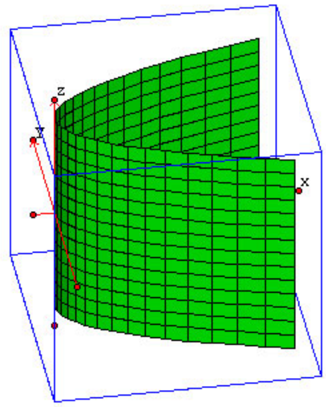

Figura 3.3: Cilindro parabolóico com diretriz centrada na origem

representaremos as formas gerais de superfícies no espaço em termos de uma determinada orientação em relação aos eixos coordenados, ficando as demais orientações subentendidas.

3.1.2 Elipsóides

O elipsóide é a superfície representada pela equação

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,$$

em que todos os coeficientes a, b e c são números reais positivos reperesentando assim, as medidas dos semi-eixos do elipsóide e (x_0, y_0, z_0) representa o centro da superfície. Uma observação importante é que todos os traços ou cortes por planos paralelos aos planos coordenados são elipses, além disso, se pelo menos dois dos valores a, b e c forem iguais, o elipsóide é de revolução, ou seja, o elipsóide é gerado pela rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos. Outro ponto que merece destaque é o fato de que se $a = b = c = R$, então a superfície é uma esfera de raio R. Consideremos um plano paralelo ao plano xOy, ou seja, um plano da forma $z = k$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}.$$

Geometricamente, isso significa que a interseção do elipsóide com o plano horizontal $z = k$ é uma elipse, um ponto ou vazia nos casos em que $|k| < c, |k| = c$ e $|k| > c$,

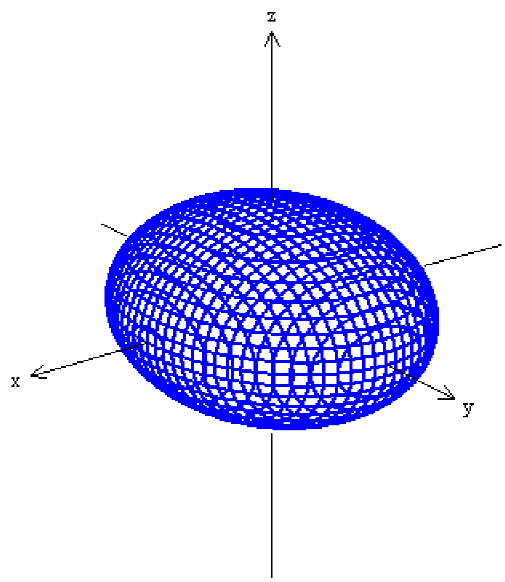

Figura 3.4: Elipsóide

respectivamente.

É importante lembrarmos que o elipsóide é simétrico em relação a todos os planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

3.1.3 Hiperbolóides

Os hiperbolóides são superfícies quádricas que se caracterizam por apresentarem três tipos de seções planas: hipérboles, elipses e retas. Sendo que as hipérboles aparecem quando realizamos dois dos três modos de obtermos seções paralelas aos planos coordenados o que sugere o nome hiperbolóide. Há dois tipos de hiperbolóides: de uma folha e de duas folhas.

Hiperbolóide de uma folha

Pode ser obtido pela equação canônica

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,$$

com (x_0, y_0, z_0) representando o centro da superfície e a, b e c os coeficientes reais, em que a e b são positivos e representam os semi-eixos reais e o coeficiente c é negativo representando o semi-eixo imaginário. Caso tenhamos $a = b$, o hiperbolóide é de revolução.

Por conveniência, consideremos um hiperbolóide de uma folha com centro na origem, dado pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

assim as interseções da superfície com os eixos coordenados Ox e Oy são os pontos $(\pm a, 0, 0)$ e $(0, \pm b, 0)$, respectivamente. Já com o eixo Oz não há interseções no conjunto dos números reais. Observemos ainda que os planos paralelos aos planos xOz e yOz, que passam por $(\pm a, 0, 0)$ e $(0, \pm b, 0)$ determinam duas retas concorrentes. Quando não passam por estes pontos intersectam a superfície na forma de hipérbole. A interseção de planos paralelos ao plano xOy com a superfície do hiperbolóide são elipses.

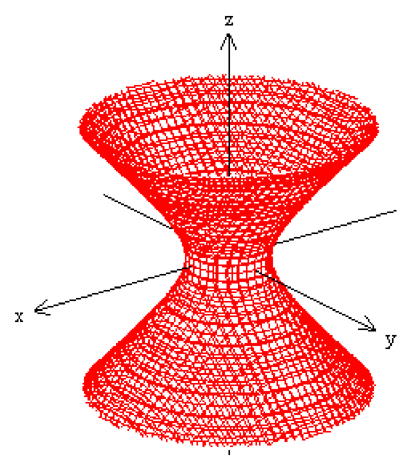

Figura 3.5: Hiperbolóide de uma folha

Vale ressaltar que o hiperbolóide é simétrico em relação a todos os planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

Hiperbolóide de duas folhas

Pode ser obtido pela equação canônica

$$-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

com (x_0, y_0, z_0) representando o centro da superfície e a, b e c os coeficientes reais, em que a e b são negativos e c é positivo. Caso tenhamos $a = b$, o hiperbolóide é de revolução.

Por conveniência, consideremos um hiperbolóide de duas folhas com centro na origem, dado pela equação

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Assim como o hiperboloide de uma folha, ele é simétrico em relação a todos os planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Os traços e planos paralelos aos planos xOz e yOz são hiperboles, já em relação a xOy não intercepta a superfície, nem qualquer plano $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$ e $|k| < c$. Porém se $|k| > c$, o traço no plano $z = k$ é uma elipse.

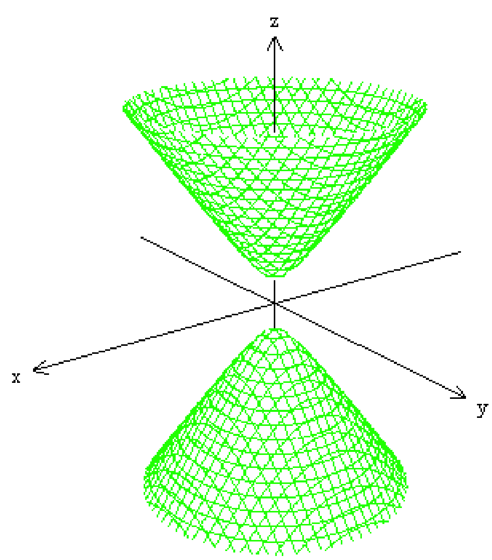

Figura 3.6: Hiperbolóide de duas folhas

3.1.4 Parabolóides

Pode ser obtido pela equação canônica

$$\pm\frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = (c - c_0)z.$$

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas dois tipos de superfícies, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários. Se tiverem sinais iguais, a equação representa um *parabolóide elíptico*, caso contrário chamaremos de *parabolóide hiperbólico*.

Parabolóide eliptico

O parabolóide elíptico é a superfície que pode ser representada pela equação canônica

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (c-c_0)z.$$

Esta superfície pode ser construída com uma sucessão de elipses centradas em (x_0, y_0).

Como principais características podemos citar:

1. É simétrica relativamente aos planos xOz e yOz.
2. A sua interseção com um plano paralelo a xOy é uma elipse, o conjunto vazio ou um ponto. Sendo que este último ocorre quando nos referimos ao traço no plano, ou seja, sua interseção é a origem $(0, 0, 0)$.
3. A sua interseção com um plano paralelo a xOz ou yOz é uma parábola.
4. Se $a = b$ o parabolóide é de revolução em torno do eixo z.

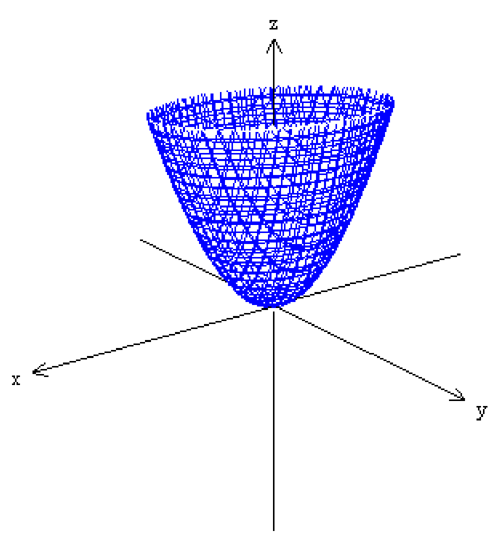

Figura 3.7: Parabolóide elíptico

Parabolóide hiperbolóico

O parabolóide hiperbolóico é a superfície que pode ser representada pela equação canônica

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (c-c_0)z.$$

Esta superfície pode ser construída com uma sucessão de hipérboles centradas em (x_0, y_0). Como principais características podemos citar:

1. É simétrica relativamente aos planos xOz e yOz.

2. A sua interseção com um plano estritamente paralelo a xOy é uma hipérbole.

3. A sua interseção com um plano paralelo a xOy é constituída por duas retas que passam na origem.

4. A sua interseção com um plano paralelo a xOz ou yOz é uma parábola.

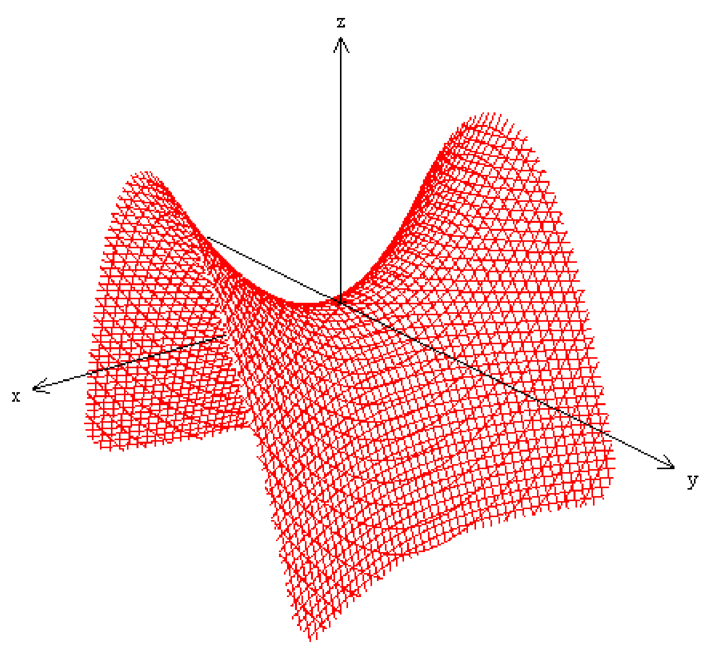

Figura 3.8: Parabolóide hiperbólico

3.1.5 Cones

Cone ou superfície cônica é uma superfície gerada por uma reta geratriz que se move apoiada numa curva diretriz plana qualquer e passando sempre por um ponto dado, ao qual denominamos de vértice da superfície cônica, não situado no plano da curva diretriz.

Consideremos o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse com vértice na origem e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados. Nestas condições, a superfície tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Como principais características podemos citar:

1. É simétrica relativamente a cada um dos planos coordenados e relativamente a origem.

2. A sua interseção com um plano estritamente paralelo a xOy é uma elipse.

3. A sua interseção com o plano xOy é um ponto.

4. A sua interseção com um plano estritamente paralelo ao plano xOz ou yOz é uma hipérbole.

5. A sua interseção com o plano xOz ou com o plano yOz é constituida por duas retas que passam pela origem.

6. Se $a = b$ o cone e de revolução em torno de Oz.

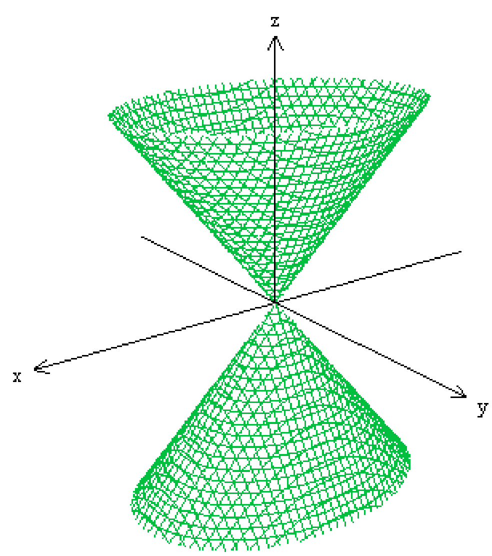

Figura 3.9: Cone elíptico

3.2 Reconhecimento das quádricas via diagonalização de matrizes

Considere a equação geral do segundo grau nas três variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são números reais, sendo não nulo pelo menos um dos seis primeiros coeficientes a, b, c, d, e, f. Como já foi dito anteriormente, as soluções desta equação são, por definição, uma quádrica, podendo ser não degenerada (cilindro quádrico, elipsóide, hiperbolóide, parabolóide ou cone) ou degenerada (uma reta , um par de retas paralelas, duas retas, um ponto ou representar o vazio). Assim, para identificar o lugar geométrico de uma determinada equação do segundo grau em três variáveis, em especial reconhecer uma quádrica, é preciso reduzir a equação dada a uma das equações mais simples, ou seja, devemos escolher uma base ortonormal conveniente do $\mathbb{R}^3$ de modo que no novo sistema de coordenadas, a equação resultante seja de fácil identificação.

Para facilitar a compreensão é possível dividir em dois casos:

Caso 1: Quando os coeficientes $d = e = f = 0$, ou seja, nenhum dos termos cruzados existe. Neste caso, basta usar o processo de completar quadrados, que é equivalente a escolher um sistema de coordenadas dado pela translação do sistema original. Em situações assim, a quádrica em questão está alinhada aos eixos coordenados, seja com centro ou vértice na origem ou quando há uma translação dos eixos coordenados.

Exemplo 3.2.1. *Determinaremos o lugar geométrico da seguinte equação:*

$$-9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 216y - 16z + 304 = 0.$$

Note que essa equação é equivalente à equação

$$-9x^2 + 36(y^2 - 6y) + 4(z^2 - 4z) = -304.$$

Completando os quadrados obtemos

$$-9x^2 + 36(y^2 - 6y + 9) + 4(z^2 - 4z + 4) = -304 + 16 + 324,$$

ou seja,

$$-9x^2 + 36(y - 3)^2 + 4(z - 2)^2 = 36.$$

Dividindo todos os termos por 36, obtemos

$$-\frac{x^2}{4} + (y-3)^2 + \frac{(z-2)^2}{9} = 1,$$

que é a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha de centro $(0, 3, 2)$.

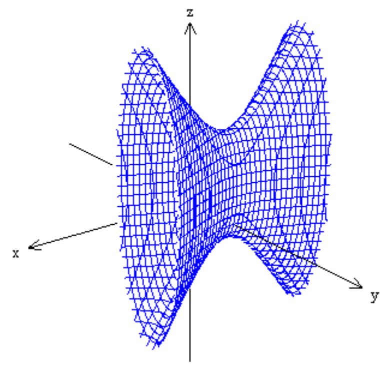

Figura 3.10: Hiperbolóide de uma folha

Exemplo 3.2.2. *Verificaremos o tipo de quádrica representada pela equação*

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 16y + 13 = 0.$$

Completando o quadrado temos

$$(x-1)^2 + 4(y+2)^2 + z^2 = 4.$$

Dividindo ambos os membros por 4 teremos:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y+2)^2 + \frac{z^2}{4} = 1,$$

que é a equação reduzida de um elipsóide de centro $(1, -2, 0)$.

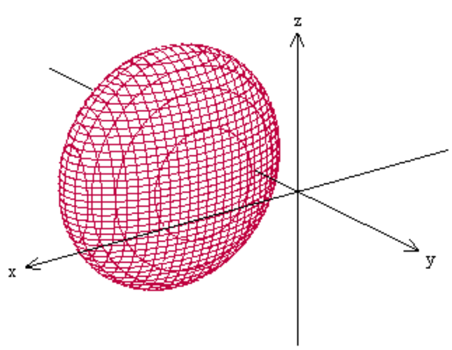

Figura 3.11: Elipsóide

Caso 2: Há casos em que o termo cruzado aparece, uma ou mais vezes, ou seja, pelo menos um dos coeficientes d, e, f é diferente de zero, o que dificulta o reconhecimento da quádrica, pois estes termos estão associados a rotações do sistema de coordenadas. Assim é preferível eliminá-los, o que é possível, a partir de uma mudança de coordenadas (x, y, z) para (x', y', z'), ou equivalentemente, uma mudança de base entre duas bases ortonormais, β e α. Numa linguagem mais simples, significa sair da base ortonormal canônica para uma base ortonormal formada por autovetores, conforme mostraremos atráves da generalização e de exemplos.

Considere a equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ números reais, com pelo menos, um dos coeficientes, d, e ou $f \neq 0$. Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = [0].$$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ formada de autovetores de A. Assim, se λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores de A (não necessariamente distintos), existem autovetores v_1, v_2 e v_3 associados a λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente, tais que $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. A matriz ortogonal $P = [I]^{\beta}_{\alpha}$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, diagonaliza A ortogonalmente, já que

$$D = P^{-1}AP$$

é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

com $P^{-1} = P^t$. Portanto,

$$A = PDP^t.$$

Substituindo a igualdade acima na equação matricial, obtemos

$$\left(\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P\right) D \left(P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = [0].$$

O produto matricial $P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base β, pois

$$P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha.$$

Chamando $[v]_\beta$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [j] = [0].$$

Se $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$, temos então

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [j] = [0],$$

equivalente à equação

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + (gx_1 + hy_1 + iz_1)x' + (gx_2 + hy_2 + iz_2)y' + (gx_3 + hy_3 + iz_3)z' + j = 0.$$

Obeservamos que o termos cruzados $x'y', x'z'$ e $y'z'$ não estão presentes, dessa forma, reduzimos este caso ao primeiro, ou seja, é suficiente completar quadrados para determinar o lugar geométrico em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.2.3. *Identificaremos a quádrica no espaço dada pela equação quadrática*

$$7x^2 + 17y^2 + 7z^2 - 4xy + 6xz - 4yz - 6x - 12y - 6z + 1 = 0.$$

Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 17 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [1] = [0].$$

Como a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 17 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ e $\lambda_3 = 18$, e os vetores unitários

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\ \text{ e } v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}},\right)$$

são, respectivamente, autovetores correspondentes. Assim, $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A. Seja $P = [I]_\alpha^\beta$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Chame $D = P^{-1}AP$. Dessa forma

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^t$, já que $P^{-1} = P^t$, segue que

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [1] = [0].$$

Chamando $[v]_\beta$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [1] = [0].$$

ou seja,

$$4x'^2+9y'^2+18z'^2-6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{\sqrt{18}}z'\right)-12\left(\frac{1}{3}y'-\frac{4}{\sqrt{18}}z'\right)-6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{\sqrt{18}}z'\right)+1=0,$$

que é equivalente à equação

$$\boxed{4x'^2+9\left(y'-\frac{2}{3}\right)^2+18\left(z'+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2=4.}$$

Transladando os eixos pelas equações de translação

$$x''=x', \quad y''=y'-\frac{2}{3} \quad e \quad z''=z'+\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

obtemos a equação

$$\boxed{4x''^2+9y''^2+18z''^2=4,}$$

que é a equação de um elipsóide.

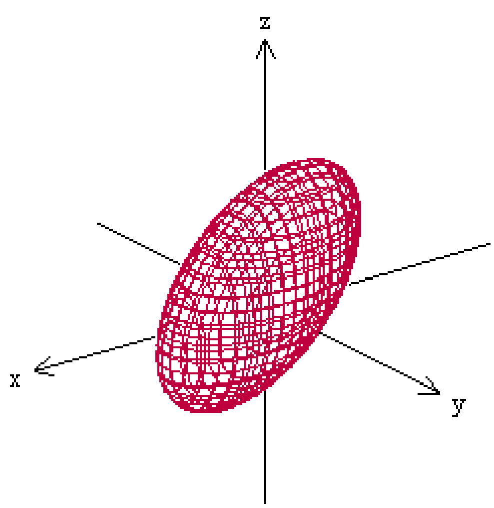

Figura 3.12: Elipsóide desalinhado ao sistema de eixos

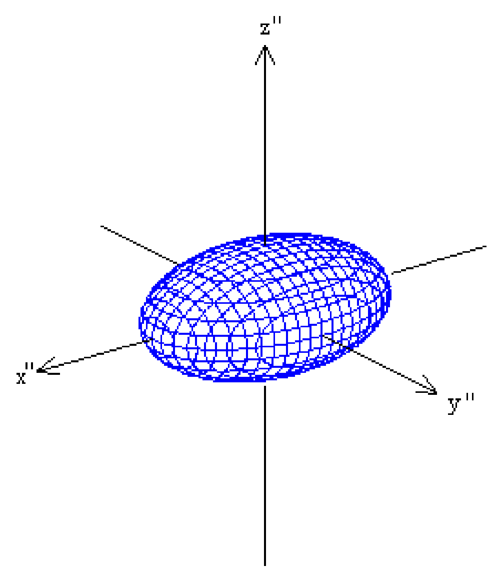

Figura 3.13: Elipsóide alinhado ao sistema de eixos

Vale lembrar que esta última equação está dada em relação ao sistema de coordenadas $O''X''Y''Z''$, no qual O'' tem coordenadas $\left(0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ em relação ao sistema $O'X'Y'Z'$.

Exemplo 3.2.4. *Faremos o reconhecimento da quádrica no espaço dada pela equação*

$$y^2 - 4xz - 4x + 2z - 3 = 0.$$

Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-3] = [0].$$

Como a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -2$, e os vetores unitários

$$v_1 = (0, 1, 0)\,,\ v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \ \text{e}\ v_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

são, respectivamente, autovetores correspondentes. Assim, $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A. Seja $P = [I]_\alpha^\beta$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Chame $D = P^{-1}AP$. Dessa forma

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^t$, já que $P^{-1} = P^t$, segue que

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-3] = [0]\,.$$

Chamando $[v]_\beta$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [-3] = [0],$$

ou seja,

$$x'^2 + 2y'^2 - 2z'^2 - 3\sqrt{2}y' - \sqrt{2}z' - 3 = 0,$$

que é equivalente à equação

$$\boxed{x'^2 + 2\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}.}$$

Transladando os eixos pelas equações de translação

$$x'' = x', \quad y'' = y' - \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad e \quad z'' = z' - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

obtemos a equação

$$\boxed{x''^2 + 2y''^2 - 2z''^2 = \frac{17}{4},}$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha.

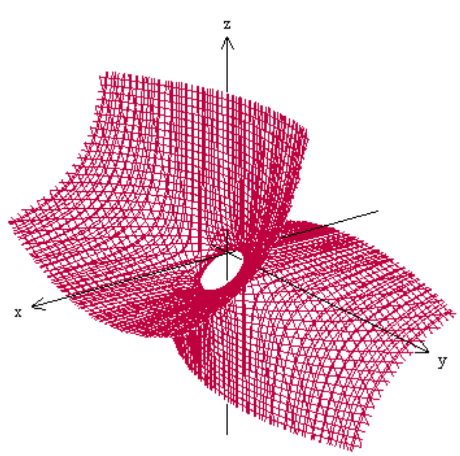

Figura 3.14: Hiperbolóide desalinhado ao sistema de eixos

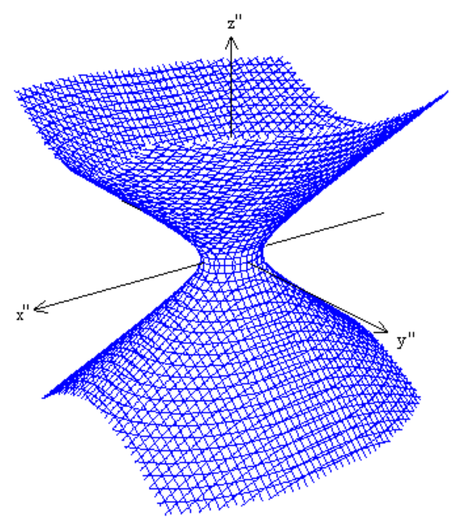

Figura 3.15: Hiperbolóide alinhado ao sistema de eixos

Vale lembrar que esta última equação está dada em relação ao sistema de coordenadas $O''X''Y''Z''$, no qual O'' tem coordenadas $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ em relação ao sistema $O'X'Y'Z'$.

Exemplo 3.2.5. *Identificaremos o lugar geométrico da quádrica dada pela equação*

$$2xy + z = 0.$$

Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [0].$$

Como a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$, e os vetores unitários

$$v_1 = (0,0,1)\,,\ v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \ e\ v_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

são, respectivamente, autovetores correspondentes. Assim, $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A. Seja $P = [I]_\alpha^\beta$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Chame $D = P^{-1}AP$. Dessa forma

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^t$, já que $P^{-1} = P^t$, segue que

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [0]\,.$$

Chamando $[v]_\beta$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}=[0]\,,$$

ou seja,

$$\boxed{y'^2 - z'^2 = -x',}$$

que é a equação de um parabolóide hiperbólico.

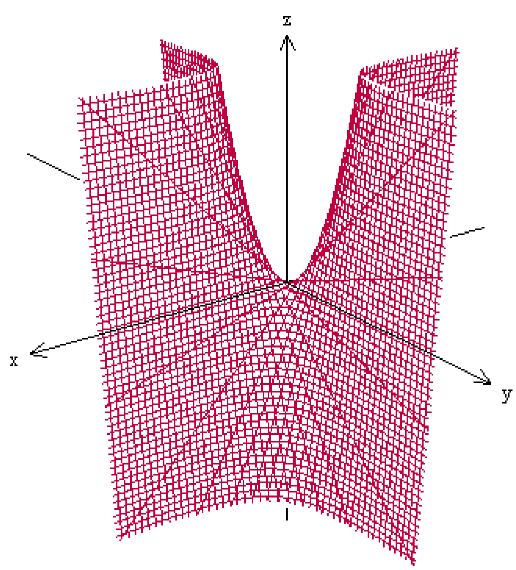

Figura 3.16: Parabolóide desalinhado ao sistema de eixos

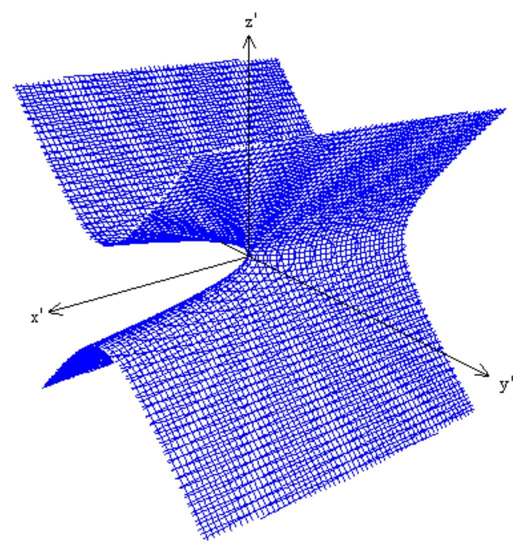

Figura 3.17: Parabolóide alinhado ao sistema de eixos

Referências Bibliográficas

[1] OYAFUÇO, K.T. *Classificação de Cônicas e Quádricas*. 2015. 76 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Unesp. São José do Rio Preto, 2015.

[2] DELGADO, J; FRENSEL, K; GRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[3] GAMA, S.S.S. *Reconhecimento de Cônicas Via diagonalização de Matrizes*. 2016. 50 p. Dissertação (Mestrado em Matemática).UFS. São Cristóvão, 2016.

[4] GASPAR, A.S. *As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações*. 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática).UNB. Brasília, 2014.

[5] HEFEZ, A; FERNANDEZ, C.S. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM , 2012. 328 p.(Coleção PROFMAT,01).

[6] PEREZ, E.S. *Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica*. 2014. 95 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). UNIRIO. Rio de Janeiro, 2014.

[7] REIS, G.L; SILVA, V.V. *Geometria Analítica*. 2^a ed. Rio de Janeiro : LTC, 2000.

[8] STEINBRUCH, A; WINTERLE,P. *Geometria Analítica*. 2^a ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

[9] <http://www.geometriaa.dominiotemporario.com/livros/cq.pdf>. Acesso em 03/05/2016.

[10] <http://www.ime.uerj.br/calculo/LivroII/introd.pdf>. Acesso em 10/04/2016.

[11] <http://www.mat.uc.pt/picado/geomdif/0405/Apontamentos/sII3.pdf>. Acesso em 20/04/2016.

[12] <http://www.professores.uff.br/katia-frensel/aulasga2/ga2-aula10.pdf>. Acesso em 11/05/2016.