UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

SIMONE DE JESUS DA FONSECA

ANÁLISE DAS DIFICULDADES ENFRENTADAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM INTERPRETAR E RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

ITABAIANA

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

SIMONE DE JESUS DA FONSECA

ANÁLISE DAS DIFICULDADES ENFRENTADAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM INTERPRETAR E RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Marta Elid Amorim Mateus

ITABAIANA

2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Fonseca, Simone de Jesus da

F676a Análise das dificuldades enfrentadas por alunos do ensino médio em interpretar e resolver problemas de matemática financeira / Simone de Jesus da Fonseca; orientador Marta Elid Amorim Mateus. - São Cristóvão, 2016.

104 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Matemática financeira - Estudo e ensino. 2. Matemática financeira - Problemas e exercícios. 3. Matemática (Ensino médio). 4. Teoria dos erros. I. Mateus, Marta Elid Amorim, orient. II. Título.

CDU 37.016:51-7

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Análise das dificuldades enfrentadas por alunos do Ensino Médio em interpretar e resolver problemas de Matemática Financeira

por

Simone de Jesus da Fonseca

Aprovada pela Banca Examinadora:

Marta Elid Amorim Mateus.

Prof.ª Dr.ª Marta Elid Amorim Mateus - UFS
Orientadora

Wagner Ferreira Santos

Prof. Dr. Wagner Ferreira Santos - UFS
Primeiro Examinador

TCEtcheverria

Prof.ª Dr.ª Teresa Cristina Etcheverria - UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 31 de Maio de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

DEDICATÓRIA

À minha mãe, por todo amor e cuidado.

Ao meu pai, por todo amor e apoio de sempre.

À Marta, por ampliar meus horizontes.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente minha eterna gratidão a Deus, por se fazer presente na minha vida. Por ter me dado a força necessária para concluir esse trabalho e não ter me deixado fraquejar nos momentos em que eu não acreditava que iria conseguir.

À minha mãe, pelo amor incondicional e cuidado de sempre. Por não medir esforços para a realização dos meus sonhos. Por se preocupar tanto quando eu passava as madrugadas e finais de semana trancafiada no quarto para estudar. Enfim, obrigada por ser mãe!

Ao meu pai, pelo amor e apoio que sempre me dedicou. Sou grata por acreditar em mim e me ter como exemplo. Isso é muito gratificante e me fortalece!

Obrigada meus pais. Tudo o que sou hoje, devo a vocês. E nada que eu faça retribuirá tudo o que fazem por mim. É por vocês e pra vocês mais essa vitória. Amo vocês!

À minha querida orientadora, Marta Élid, por ter abraçado esse trabalho comigo, por todos os ensinamentos, paciência e dedicação. Agradeço pelo carinho, atenção, por acreditar em mim e por me animar quando achava que não conseguiria terminar a tempo. Minha gratidão! (Ah, agora me fez chorar, mas de felicidade, muita felicidade! (risos)).

Aos meus irmãos, em especial Silvânia e Denise, por me apoiarem, me socorrerem quando mais precisei e suportarem minhas crises quando o trabalho parecia não ter fim.

Ao meu cunhado Vinicius que me socorreu quando minha impressora me deixou na mão (risos).

À professora Amisa Dayane, pela força que me deu com o Abstract.

Aos meus colegas de curso. Aédson que me incentivou a fazer a seleção, me fez acreditar que esse sonho seria possível e não mediu esforços para nos ajudar nessa jornada. Às meninas, Mônica e Samilly, que estiveram comigo em todos os momentos. Apoiamo-nos uma nas outras quando pensamos fraquejar. A Jailson e Emerson, que nos deram força nos estudos para a qualificação. E aos demais colegas, Anderson, Arionaldo, Augusto, Djenal, Gildo, Marcelo e Paulo. Obrigada por tudo que vivemos nesses dois anos de curso. Sem dúvidas, somos a melhor turma de mestrado. Foi uma honra conhecer e compartilhar desse sonho junto a vocês. Que Deus os abençoe sempre. Sucesso, galera!

À minha amiga/irmã Camila, por ter se tornado tão importante na minha vida, por ter me dado apoio e por acreditar em mim. Obrigada por entender minhas ausências, me ouvir em todos os momentos e aturar minhas chatices. Amo você, dinda!

Às minhas irmãs de república, de forma especial, Graça, Tatiane e Thayse. Agradeço por serem minha família de coração, por suprirem a falta da minha família de sangue e cuidarem tão bem de mim quando preciso ficar longe de casa. Obrigada por sempre acreditarem em mim mais do que eu mesma. Amo vocês pra sempre!

À escola em que trabalho e aos alunos participantes desta pesquisa, por abrirem portas e tornarem possível sua realização.

Aos membros da banca, professora Dr.ª Teresa Cristina Etcheverria e professor Dr. Wagner Ferreira Santos, por contribuírem no aperfeiçoamento deste trabalho.

À Capes pela concessão da bolsa de estudos.

Meus sinceros agradecimentos a todos que torceram, acreditaram e contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste sonho.

RESUMO

Esta pesquisa teve o propósito de identificar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas em Matemática Financeira bem como, analisar os erros cometidos por eles. O estudo envolveu 39 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de um colégio estadual do Alto Sertão Sergipano. A coleta de dados contou com a aplicação de dois questionários com quatro questões cada um, ambos envolvendo os mesmos assuntos de Matemática Financeira. Para a análise do primeiro questionário foi utilizada a Análise de Erros (Cury 1994) e o Modelo de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1986, 1987) citado por Cury (2007), com a finalidade de conhecer e categorizar os tipos de erros cometidos pelos alunos na resolução das questões. Já no segundo questionário, composto por problemas, foi utilizada a análise qualitativa de conteúdo e as fases consideradas por Polya (1995) para a resolução de problemas. Nessa ótica, procuramos identificar a fase que se apresenta como a maior dificuldade dos alunos na resolução de problemas. Na análise do primeiro questionário detectamos que a maior dificuldade enfrentada está relacionada a erros técnicos, que envolvem erros de cálculos e manipulações algébricas. Isso nos mostrou como o déficit nas operações reflete na aprendizagem dos demais conteúdos matemáticos. O segundo questionário comprovou nossa suspeita de que a maior dificuldade enfrentada pelos discentes na resolução de problemas está na interpretação dos enunciados.

Palavras-chave: Matemática Financeira; Análise de erros; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This research had the purpose to identify students' difficulties in the financial mathematics problem solving as well, analyze the mistakes made by them. The study involved 39 students of the 3rd year in high school of a state school at the Sergipano High Hinterland. The data collection included the application of two questionnaires with four questions each, both involving the same Financial Mathematics subjects. For the analysis of the first questionnaire was used Error Analysis (Cury 1994) and Movshovitz-Hadar, Zaslavsky and Inbar Model (1986, 1987) quoted by Cury (2007), in order to meet and categorize the types of errors made by the students in the resolution of issues. In the second questionnaire, consisted of problems, we used the qualitative analysis and the phases considered by Polya (1995) to solve problems. From this perspective, we tried to identify the stage that presents itself as the most difficulties of students in problem solving. In the analysis of the first questionnaire, we detected that the biggest difficulty faced is related to technical errors, errors involving calculations and algebraic manipulations. This showed us how the deficit in the operations reflects in the learning of other mathematical content. The second questionnaire proved our mistrust that the greatest difficulty faced by students in problem solving is in the interpretation of the statements.

KEYWORDS: Financial Mathematics; Error Analysis; Problem Solving.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Protocolo do aluno A34 64
Figura 2: Protocolo do aluno A11 65
Figura 3: Protocolo do aluno A21 66
Figura 4: Protocolo do aluno A4 67
Figura 5: Protocolo do aluno A3 68
Figura 6: Protocolo do aluno A11 68
Figura 7: Protocolo do aluno A30 69
Figura 8: Protocolo do aluno A18 70
Figura 9: Protocolo do aluno A30 70
Figura 10: Protocolo do aluno A22 71
Figura 11: Protocolo do aluno A7 71
Figura 12: Protocolo do aluno A30 72
Figura 13: Protocolo do aluno A3 73
Figura 14: Protocolo do aluno A3 73
Figura 15: Protocolo do aluno A18 74
Figura 16: Protocolo do aluno A31 75
Figura 17: Protocolo do aluno A30 76
Figura 18: Protocolo do aluno A30 76
Figura 19: Protocolo do aluno A22 77
Figura 20: Protocolo do aluno A7. Questão 1 78
Figura 21: Protocolo do aluno A3. Questão 4 78
Figura 22: Questão 1. Protocolo do aluno A20 84
Figura 23: Questão 3, item (b). Protocolo do aluno A27 85
Figura 24: Questão 3. Protocolo do aluno A29 86
Figura 25: Questão 2, item (a). Protocolo do aluno A31 87
Figura 26: Questão 4. Protocolo do aluno A13 88
Figura 27: Questão 1. Protocolo do aluno A8 88
Figura 28: Questão 3. Protocolo do aluno A13 89
Figura 29: Questão 2. Protocolo do aluno A17 89
Figura 30: Questão 3. Protocolo do aluno A15 90

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Tabela 1: Desempenho dos alunos no Questionário I 55
Tabela 2: Desempenho dos alunos no Questionário II 55
Tabela 3: Comparativo do desempenho dos alunos nos dois questionários ... 56
Tabela 4: Desempenho dos alunos nas duas questões referentes ao mesmo conteúdo 57
Tabela 5: Número de erros cometidos por categoria no Questionário I........... 61
Tabela 6: Número de casos por categoria no Questionário II.......................... 83

Quadro 1: Diferenças de codificação entre as três abordagens para análise de conteúdo 59

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 13

CAPÍTULO 1 16

MATEMÁTICA FINANCEIRA – O CONHECIMENTO MATEMÁTICO RELACIONADO AO NOSSO ESTUDO 16

1.1 Porcentagem 16

1.2 Aumentos e descontos 19

1.3 Capital, juros, taxa de juros e montante 23

1.4 Regimes de capitalização 23

1.4.1 Regime de capitalização simples 23

1.4.3 Fórmulas das taxas equivalentes. 30

1.4.4 Taxas proporcionais não são equivalentes. 30

1.5 Sistemas de amortização 33

CAPÍTULO 2 39

CONFIGURAÇÕES DA PESQUISA E FUNDAMENTOS TEÓRICOS 39

2.1 Configurações da pesquisa 39

2.1.1 Antecedentes e motivações 39

2.1.2 Objetivos e questões de pesquisa 41

2.1.3 Metodologia de pesquisa 41

2.2 Fundamentos Teóricos 44

2.2.1 Utilização do erro como ferramenta para identificar e superar as dificuldades dos alunos 45

2.2.2 Modelo de Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar 47

2.2.3 Orientações curriculares relativas à Resolução de Problemas 48

2.2.4 Fases para a Resolução de Problemas (Polya) 50

CAPÍTULO 3 53

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS SOB A PERSPECTIVA DA ANÁLISE DE ERROS 53

3.1 Quantificação dos erros 53

3.2 Tipos de erros 58

CAPÍTULO 4 80

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 80

4.1 Dificuldade de compreensão 84

4.2 Dificuldade de planejamento 85

4.3 Dificuldade de execução 87

4.4 Dificuldade de retrospecto 89

CONCLUSÕES 92

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 98

APÊNDICES 100

APÊNDICE I (Questionário I) 101

APÊNDICE II (Questionário II) 103

APRESENTAÇÃO

Este trabalho visa identificar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas em Matemática Financeira bem como, analisar os erros cometidos por eles.

Consideramos importante conhecer, além dos erros dos alunos, as suas causas, pois tendo ciência destas, o professor terá ferramentas que o auxiliarão na elaboração de uma proposta de intervenção, com a finalidade de sanar as dificuldades encontradas pelos discentes na resolução de problemas envolvendo Matemática Financeira.

Neste trabalho, apresentamos e discutimos os dados de uma investigação sobre erros cometidos por alunos do Ensino Médio ao resolverem problemas relacionados a conteúdos de Matemática Financeira, o que nos dará respaldo para futuramente promover uma intervenção com base nos resultados encontrados.

A motivação dessa pesquisa se deu por entendermos a resolução de problemas como uma metodologia de ensino que proporciona o desenvolvimento intelectual do aluno, desperta a curiosidade e articula a teoria com situações reais.

Os PCN (1998) indicam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Então, é importante trabalhar a investigação, argumentação, comprovação e estímulo à criatividade dos estudantes. Dessa forma, este trabalho nos permite refletir sobre as dificuldades dos alunos diante de situações-problema e suas prováveis causas. E, para tanto, nos propusemos buscar respostas para as seguintes questões de pesquisa:

- Quais os erros cometidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Sergipe ao resolver questões relativas à Matemática Financeira?
- Quais as dificuldades encontradas por estes alunos ao resolver problemas de Matemática Financeira?

Buscando respostas para a primeira indagação, aplicamos, em 29 de março, um questionário composto de quatro questões de Matemática

Financeira envolvendo aumentos e descontos, juros simples, juros compostos e Sistema *Price,* em que os dados estavam explícitos para o aluno usar na sua resolução. Em um segundo momento, dia 31 de março, fizemos a aplicação do segundo questionário, composto por quatro problemas envolvendo os mesmos conteúdos do primeiro.

Após a correção dos dois questionários, quantificamos as respostas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco, classificação utilizada por Brum e Cury (2013). De posse destes dados, comparamos os resultados dos alunos em cada questão correspondente a fim de conhecer o desempenho deles diante de questões envolvendo os mesmos conteúdos apresentados de maneira diferente.

No primeiro questionário utilizamos a análise de erros (Cury, 1994) para quantificar e discutir os tipos de erros cometidos pelos alunos nas questões propostas e o modelo Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1986, 1987), citado por Cury (2007), para a categorização dos erros. Assim como no primeiro questionário, utilizamos para análise do questionário II, a análise qualitativa de conteúdo e, por se tratar de situações-problema, optamos pelas quatro fases sugeridas por Polya (1995) para a resolução de problemas a fim de discutir esse grupo de dados.

O trabalho está organizado em quatro capítulos e uma seção para conclusões, descritos a seguir.

O primeiro capítulo é composto pelo conhecimento matemático relacionado ao nosso estudo, a saber, Matemática Financeira. Nele, abordamos os conteúdos que achamos relevantes para a nossa pesquisa e que fizeram parte dos questionários aplicados aos estudantes.

No capítulo seguinte, as nossas inquietações, motivações e justificativas para a escolha do tema desta investigação. Além disso, apresentamos os objetivos que pretendíamos alcançar, a metodologia utilizada, a caracterização dos sujeitos e os instrumentos de coletas de dados desta pesquisa. Apresentamos, ainda, os fundamentos teóricos que deram suporte ao nosso trabalho. Em seguida, apresentamos as orientações curriculares para a utilização da resolução de problemas na educação básica e as fases que, segundo Polya (1995) devem ser consideradas na resolução de um problema.

No capítulo três, apresentamos e discutimos os resultados sob a perspectiva da Análise de erros, quantificamos e apresentamos os tipos de erros cometidos pelos discentes na resolução do questionário I, respondendo à primeira questão da nossa pesquisa.

Expomos, no quarto e último capítulo, a discussão dos resultados sob a perspectiva da Resolução de Problemas, utilizando as fases sugeridas por Polya (1995), que são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Nesse momento, procuramos identificar a fase que se apresenta como a maior dificuldade dos alunos na resolução de problemas.

Para finalizar, apresentamos nossas conclusões fazendo uma síntese dos resultados obtidos na análise dos dados e respondemos às questões da nossa pesquisa, bem como as reflexões decorrentes do trabalho e perspectivas futuras.

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA FINANCEIRA – O CONHECIMENTO MATEMÁTICO RELACIONADO AO NOSSO ESTUDO

Nesse capítulo consta a resolução de situações-problema que envolvem os tópicos de Matemática Financeira que nortearam os questionários desta pesquisa. Iniciaremos com a definição de porcentagem acompanhada de cálculos de aumentos e descontos. Em seguida, apresentaremos as definições a cerca de capital, juros, taxa de juros e montante, para introduzirmos os regimes de capitalização simples e composta. Além disso, traremos tópicos que tratam da diferença entre taxas equivalentes e proporcionais. Por fim, faremos uma abordagem sobre os sistemas de amortização: SAC e Sistema *Price*. Na criação desse tópico, tomamos como referência os livros "*A Matemática do Ensino Médio"* volume 2, de autoria dos pesquisadores Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006), *"Fundamentos de Matemática Elementar 11", dos autores Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004)* e "*Novo Olhar Matemática"* volume 2, livro didático adotado na escola campo, de Souza (2013) .

1.1 Porcentagem

Esse tópico é composto de uma introdução sobre a definição de porcentagem, a notação "%" e as formas como é expresso um percentual. O conceito será introduzido a partir de um problema que trata de razões com denominadores 100, chamadas razões centesimais, uma vez que a resolução de problemas é indicada desde a formação de conceitos à aplicabilidade dos conteúdos. Em seguida, serão apresentados três problemas resolvidos utilizando tais conceitos.

Considere o número de habitantes de duas cidades, A e B, em dois anos consecutivos que chamaremos de 0 e 1. (Adaptado de Iezzi, Hazzan e Degenszajn, 2004, p.12).

Cidade	Número de habitantes no ano 0	Número de habitantes no ano 1	Crescimento populacional (entre 0 e 1)
A	20 000	23 600	3 600
B	40 000	46 400	6 400

Note que a razão entre o crescimento populacional e o número de habitantes do ano 0 vale:

- $\frac{3600}{20000}$ para a cidade A;
- $\frac{6400}{40000}$ para a cidade B.

Para compararmos essas razões podemos expressá-las com o mesmo denominador, por exemplo, 100:

- País A: $\frac{3600}{40000} = \frac{18}{100}$. Portanto, a razão vale $\frac{18}{100}$.
- País B: $\frac{6400}{40000} = \frac{16}{100}$. Logo, a razão vale $\frac{16}{100}$.

Concluímos assim, que a cidade A teve maior taxa de crescimento populacional.

Segundo Iezzi e colaboradores (2004, p.13), essas razões de denominadores 100 são chamadas de *razões centesimais*, *taxas percentuais* ou simplesmente de *porcentagens.* As porcentagens costumam ser indicadas pelo numerador seguido do símbolo % (lê-se: “por cento”).

Dessa forma, podemos dizer que a taxa de crescimento populacional das cidades A e B, foram, respectivamente, 18% e 16%.

Essas taxas percentuais também costumam ser expressas na forma decimal, que é obtida dividindo-se o numerador por 100.

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$34{,}5\% = \frac{34{,}5}{100} = 0{,}345$$

Pode-se utilizar porcentagem quando se quer expressar uma quantidade em percentual em relação à outra. Por exemplo, suponhamos que seja dado um desconto de 15% em um produto que custa R$ 120,00. Esse desconto de 15% sobre 120 corresponde à divisão do preço por 100, tomando 15 partes, isto é:

$15\%\ de\ 120 \Leftrightarrow 15.\frac{120}{100} = \frac{15}{100}.120 = 18$

Para Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p.13), de maneira geral, calcular $a\%$ de x, corresponde a multiplicar $\frac{a}{100}$ por x.

Exemplo 1: Uma casa foi comprada por R$ 80 000,00 e, um ano depois, foi vendida por R$ 88 000,00. Qual o lucro, em porcentagem, em relação ao preço de custo?

Solução: O lucro (em reais) foi de: $88\,000 - 80\,000 = 8\,000$

Dessa forma, o lucro (em porcentagem) do preço de custo será:

$$\frac{8000}{80000} = 0{,}1 = 10\%$$

O lucro foi de 10%

Exemplo 2: Em uma turma, a razão entre o número de homens e o de mulheres é $\frac{3}{5}$. Em relação ao total de alunos da turma, qual a porcentagem de homens? (Adaptada de Iezzi, Hazzan e Degenszajn, 2004, p.14).

Solução: Seja x o número de homens e y o número de mulheres:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5x = 3y \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}y \Leftrightarrow x = 0{,}6y \text{ (I)}$$

A razão entre o número de homens e o total de alunos da turma é dada por

$$\frac{x}{x+y} \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{0{,}6y}{0{,}6y + y} = \frac{0{,}6y}{1{,}6y} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Assim, a porcentagem de homens da turma é 37,5%.

Exemplo 3: (UFRJ) A organização de uma festa distribui gratuitamente 200 ingressos para 100 casais. Outros 300 ingressos foram vendidos, 30% dos quais para mulheres. As 500 pessoas com ingressos foram à festa.

a) Determine o percentual de mulheres da festa.

b) Se os organizadores quisessem ter igual número de homens e de mulheres na festa, quantos ingressos a mais eles deveriam distribuir apenas para as pessoas do sexo feminino?

Solução: a) Dos 200 ingressos distribuídos para os 100 casais, 100 mulheres foram contempladas. Dos 300 ingressos vendidos, 30% foram para mulheres, assim, temos:

$30\%\ de\ 300 \Leftrightarrow 30.\frac{300}{100} = 90$ ingressos para mulheres

Logo, havia 190 mulheres na festa.

Calculando o percentual de mulheres da festa, teremos:

$$\frac{190}{500} = \frac{38}{100} = 38\%$$

Portanto, o percentual de mulheres da festa é 38%.

b) Se foram 310 homens para a festa, então deveria ter, também, 310 mulheres. Como havia 190 mulheres na festa, deveriam ser distribuídos mais 120 ingressos para mulheres para igualar o número de pessoas do mesmo sexo na festa.

1.2 Aumentos e descontos

É comum um cliente pedir uma baixa no preço quando se compra grande número de produtos, ou mesmo quando se dispõe a fazer um pagamento à vista. Essa baixa no preço chama-se *desconto.* Para discutir esses conhecimentos, fazemos uso da resolução de problemas que estão exemplificados a seguir.

Exemplo 4: André efetuou uma compra de R$ 80,00 e, por fazer o pagamento à vista, pediu um desconto na sua compra. O vendedor concedeu um desconto de 5%, ou seja,

$$\frac{5}{100}.80 = \frac{400}{100} = 4\ reais$$

Dessa forma, o desconto será de R$ 4,00. Assim o valor pago pela compra de André será de $80 - 4 = 76$ reais.

As lojas, visando determinado ganho, tendem a reajustar o valor de seus produtos a fim de obterem o lucro desejado. Esse reajuste é chamado de *aumento.* Os aumentos também são feitos quando os pagamentos serão feitos algum tempo depois da compra.

Exemplo 5: Em uma negociação salarial entre determinada categoria que recebe R$ 750,00, foi acordado um aumento de 14%. Qual o valor do salário após o reajuste?

Solução: O aumento será de

$$\frac{14}{100}.750 = \frac{10500}{100} = 105\, reais$$

Daí, o novo salário será de $750 + 105 = 855$.

De modo geral, o valor C_1 após um desconto com taxa i, referente a um valor inicial C_0 pode ser calculado por:

$$C_1 = C_0 - iC_0$$

$$C_1 = C_0(1 - i)$$

Exemplo 6: Uma TV, após um desconto de 22% passou a custar R$1131,00. Qual o preço da TV antes do desconto?

Solução: Note que o valor de 1131,00 corresponde ao valor com o desconto de 22%, assim, teremos:

$$1131 = C_0(1 - 0{,}22)$$

$$C_0 = \frac{1131}{0{,}78} = 1450$$

Portanto, a TV custava R$ 1450,00.

Mas como poderíamos calcular o valor após vários descontos?

Chamemos as taxas de descontos de $i_1, i_2, \ldots, i_n$, o valor inicial de C_0 e C_n o valor após n descontos.

$C_1 = C_0(1 - i_1)$

$C_2 = C_1(1 - i_2)$

$C_3 = C_2(1 - i_3)$

...

$C_n = C_{n-1}(1 - i_n) = C_0(1 - i_1).(1 - i_2).\cdots.(1 - i_n)$

Assim, o valor final $C_n = C$ é dado por:

$C = C_0(1 - i_1).(1 - i_2).\cdots.(1 - i_n)$

Exemplo 7: Certa loja ofereceu um desconto de 10% em um produto que custa R$160,00 e, logo após, pelo pagamento à vista, foi dado outro desconto de 15%. Qual o preço do produto após os descontos sucessivos?

$$C_2 = C_0(1 - i_1).(1 - i_2)$$

$$C = 160(1 - 0{,}1).(1 - 0{,}15)$$

$$C = 122{,}40$$

O preço do produto após os dois descontos é de R$ 122,40.

De modo análogo, o valor C_1 após um aumento com taxa i, referente a um valor inicial C_0 pode ser calculado por:

$$C_1 = C_0 + iC_0$$

$$C_1 = C_0(1 + i)$$

Exemplo 8: Um investidor comprou um imóvel por R$ 35 000,00. Após um ano, resolveu vender lucrando 28% do preço de compra. Por quanto ele deverá vender para obter o lucro desejado?

Solução: Seja C_0 o preço de compra e C o preço de venda do imóvel. Assim, vamos ter:

$$C = C_0(1 + i)$$

$$C = 35000(1 + 0{,}28)$$

$$C = 44800$$

O preço de venda do imóvel deverá ser R$ 44 800.

Como poderíamos calcular o valor após vários aumentos?

Chamemos as taxas de descontos de $i_1, i_2, \ldots, i_n$, o valor inicial de C_0 e C_n o valor após n aumentos.

$C_1 = C_0(1 + i_1)$

$C_2 = C_1(1 + i_2)$

$C_3 = C_2(1 + i_3)$

...

$C_n = C_{n-1}(1 + i_n) = C_0(1 + i_1).(1 + i_2).\cdots.(1 + i_n)$

Portanto, o valor final $C_n = C$ é expresso por:

$C = C_0(1 + i_1).(1 + i_2).\cdots.(1 + i_n)$

Exemplo 9: O dono de uma loja de brinquedos aumenta o preço de cada objeto em 25% em relação ao preço de custo. Imaginando um pedido de desconto dos clientes, ele dá outro aumento de 12%, a fim de obter certa margem de lucro. Qual o preço de venda de uma boneca que custou R$ 280,00?

Solução: O preço de custo da boneca é 280 reais. Seja C o preço de venda da boneca após os dois aumentos sucessivos. Daí:

$$C = C_0(1 + i_1).(1 + i_2)$$

$$C = 280(1 + 0{,}25).(1 + 0{,}12)$$

$$C = 392{,}00$$

Logo, o preço de venda da boneca será de R$ 392,00.

Exemplo 10: Uma empresa de transporte coletivo municipal reajustou 3 vezes a tarifa de ônibus nos últimos quatro anos. Os reajustes foram de 5%, 4% e 5%, respectivamente, sendo que a tarifa passou a ser de R$ 3,10. Qual era o valor da tarifa antes dos três reajustes? (Retirada de SOUZA, Joamir Roberto de, 2013, p.70).

Solução: Seja C_0 o valor da tarifa antes dos reajustes e C o valor reajustado.

$$C = C_0(1 + i_1).(1 + i_2).(1 + i_3)$$

$$3{,}10 = C_0(1 + 0{,}05).(1 + 0{,}04).(1 + 0{,}05)$$

$$C_0 = \frac{3{,}10}{1{,}1466} = 2{,}70$$

O preço da tarifa antes do reajuste era de R$ 2,70.

Exemplo 11: Uma loja de roupas masculinas reajustou o preço de uma camisa de R$ 72,00 em 8%. Como as vendas diminuíram após o aumento, o dono resolveu dar um desconto de 15% nas compras à vista. Quanto pagará por esse tipo de camisa, um cliente que efetuar o pagamento no ato da compra?

Solução: Como houve um aumento e um desconto, calculamos da seguinte maneira:

$$C = C_0(1 + i_1).(1 - i_2)$$

$$C = 72(1 + 0{,}08).(1 - 0{,}15)$$

$$C = 66{,}10$$

O cliente pagará R$ 66,10.

1.3 Capital, juros, taxa de juros e montante

A Matemática Financeira é uma das mais importantes aplicações de progressões geométricas. Dentre suas funcionalidades, estão o estudo sobre empréstimos e a análise de investimentos.

É comum que alguém que pega um empréstimo de determinado capital (*C)* de outra pessoa, por certo período, o devolva acrescido de um valor remunerativo pelo empréstimo, denominado de *juro (J).* Chamamos de montante (*M*), a soma do capital com o juro ($C + J$). A razão entre o juro e o capital é chamada de crescimento do capital em determinado período e denominada *taxa de juros* (i).

Exemplo 12: Sophia tomou um empréstimo de R\$200,00. Três meses depois, pagou R\$270,00. Os juros pagos por Sophia são de R\$70,00 e a taxa de juros é de $\frac{70}{200} = \frac{35}{100} = 0{,}35 = 35\%$ ao trimestre. O principal, que é a dívida inicial de Sophia, é igual a R\$ 200,00; o montante, que é a dívida na época do pagamento, é de R\$ 270,00. (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.45).

1.4 Regimes de capitalização

No exemplo anterior, vimos o que ocorre a um empréstimo por um determinado período à estabelecida taxa.

Se um capital for aplicado a certa taxa por período, por vários intervalos ou períodos de tempo, o valor do montante pode ser calculado segundo duas convenções de cálculo, chamadas de *regimes de capitalização*: *capitalização simples* (ou juros simples) e *capitalização composta* (ou juros compostos). (Iezzi, Hazzan e Degenszajn, 2004, p.44).

1.4.1 Regime de capitalização simples

Nesse regime de capitalização, os juros em cada período são fixos e são dados pelo produto do capital pela taxa estabelecida e são pagos ao final da aplicação.

Exemplo 13. Um capital de R$ 4000 é aplicado no regime de juros simples durante 5 meses à taxa de 15% a.m. Os juros de cada período são calculados da seguinte maneira: (Adaptada de Iezzi, Hazzan e Degenszajn, 2004, p.44)

Juros gerados no 1º mês: $4000.(0{,}15) = 600$
Juros gerados no 2º mês: $4000.(0{,}15) = 600$
Juros gerados no 3º mês: $4000.(0{,}15) = 600$
Juros gerados no 4º mês: $4000.(0{,}15) = 600$
Juros gerados no 5º mês: $4000.(0{,}15) = 600$
Juros após 5 meses: $c.i + c.i + c.i + c.i + c.i = c.i.5 = 4000.(0{,}15).5 = 3000$

Note que os juros são fixos e valem, ao final do período, R$ 3000,00. Assim, o montante após 5 anos vale R$ 7000,00.

Dessa forma, podemos concluir que os juros de uma aplicação C, em um período de tempo n à taxa de juros i por período, pode ser calculado por $J = c.i.n$. Observe que o prazo deve estar na mesma unidade de i. Embora a fórmula tenha sido deduzida para n inteiro, ela é estendida para qualquer prazo fracionário, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ano, $\frac{2}{5}$ de ano.

Exemplo 14. Vamos determinar o montante de uma aplicação de R$ 2500,00 a juros simples e à taxa de 4% a.m., durante 2 anos.
Solução: Seja $C = 2500$, $i = 4\%\ a.m.$ e $n = 2\ anos = 24\ meses$.
Para calcular os juros simples, temos:

$$J = 2500.(0{,}04).24 = 2400$$

E, consequentemente, o montante é dado por

$$M = 2500 + 2400 = 4900$$

Nesse tipo de capitalização, no cálculo dos juros de cada período, a taxa incide apenas sobre o capital inicial.

1.4.2 Regime de capitalização composta

Nesse regime, os juros do 1º período correspondem ao produto do capital pela taxa; esses juros são adicionados ao capital, gerando o montante

M_1, após 1 período. Os juros do 2º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_1; esses juros são adicionados a M_1, gerando o montante M_2, após 2 períodos. Os juros do 3º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_2; esses juros são adicionados a M_2, gerando o montante M_3, após 3 períodos. Sendo assim, os juros em cada período são iguais ao montante do início do período multiplicado pela taxa, e esses juros são adicionados ao montante do início do período, gerando o montante do final do período. (Iezzi, Hazzan e Degenszajn, 2004, p.45).

Exemplo 15. Pedro tomou um empréstimo de 150 reais a juros de taxa 20% ao mês. Após um mês, a dívida de Pedro será acrescida de $0{,}20 \times 150$ reais de juros (pois $J = i.c$), passando a 180 reais. Se Pedro, ao fim do mês, não tiver a quantia a ser paga e pedir um adiamento de mais um mês, e seu credor concordar em manter a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por 216 reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão de $0{,}20 \times 180\, reais = 36\, reais$. (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.46).

Algumas pessoas podem pensar que juros de 20% ao mês dão, em dois meses, juros de 40%. Note que juros de 20% ao mês dão, em dois meses, juros de 44%.

Teorema 1[1]. No regime de juros compostos de taxa i, um principal C transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $M_n = C(1+i)^n$.

Prova.

Montante após 1 período:

$M_1 = C + C.i = C(1+i)$

Montante após 2 períodos:

$M_2 = M_1 + M_1.i = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$

Montante após 3 períodos

$M_3 = M_2 + M_2.i = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$

[1] Teorema retirado do livro A Matemática do Ensino Médio volume 2, Elon Lages Lima e colaboradores, 2006.

...

Montante após n períodos:

$M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i = M_{n-1}(1+i) = C(1+i)^{n-1}(1+i) = C(1+i)^n$ ■

Note que os valores do capital crescem a uma taxa constante i e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão $(1+i)$.

Exemplo 16. Qual será o montante resultante de um investimento de 300 reais a juros de 12% ao mês, durante três meses?

Solução. $M_3 = C(1+i)^3 = 300(1+0{,}12)^3 = 421{,}48$ reais. ■

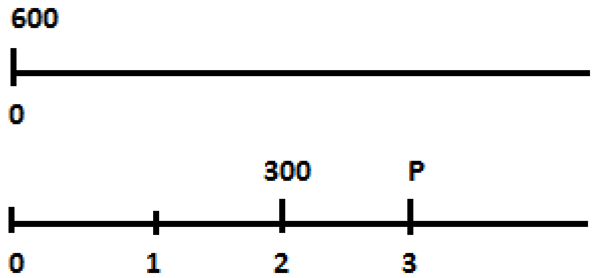
Podemos notar que o dinheiro rendeu R$ 121,48 de juros.

É importante perceber que o valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida. Se eu consigo fazer com que meu dinheiro renda 10% ao mês, é-me indiferente pagar agora R$100,00 ou pagar R$110,00 daqui a um mês. É mais vantajoso pagar R$105,00 daqui a um mês do que pagar R$100,00 agora. É mais vantajoso pagar R$100,00 agora do que pagar R$120,00 daqui a um mês. No fundo, só há um único problema de Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo. (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.46).

Outro modo de ler o Teorema 1, $M_n = C(1+i)^n$, é que uma quantia, hoje igual a C, transformar-se-á, depois de *n* períodos de tempo, em uma quantia igual a $C(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é *A*, equivalerá no futuro, depois de *n* períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$. Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais: para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$. Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$. (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.47).

Exemplo 17. Antônio tomou um empréstimo de 600 reais, a juros de 12% ao mês. Dois meses após, Antônio pagou 300 reais e, um mês após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento? (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.47).

Solução. Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, 600 reais, na data 0, têm o mesmo valor de 300 reais dois meses após, mais um pagamento igual a *P*, na data 3.



Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos

$$600 = \frac{300}{(1+0{,}12)^2} + \frac{p}{(1+0{,}12)^3}$$

Daí, $P = 506{,}96$. O último pagamento foi de R$506,96.

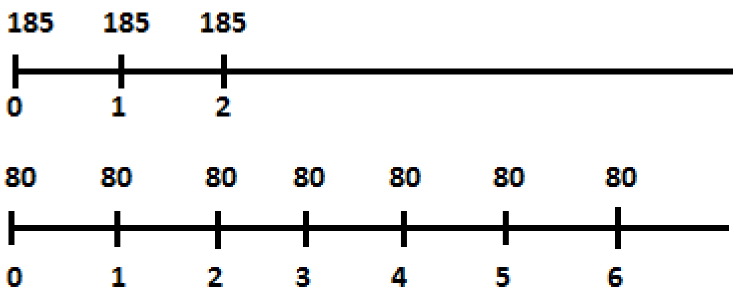
Exemplo 18. Carlos pretende comprar um aparelho e dispõe de duas formas de pagamento na compra de um televisor:

$i)$ três prestações mensais de R$185,00 cada.

$ii)$ sete prestações mensais de R$80,00 cada.

Em ambos os casos, a primeira prestação é paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Carlos, qual a melhor opção que ele possui? (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.45).

Solução. Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo, na época 2. Os esquemas de pagamentos são:



Temos,

$a = 185(1+0{,}02)^2 + 185(1+0{,}02) + 185 = 566{,}17$

$$b = 80(1+0{,}02)^2 + 80(1+0{,}02) + 80 + \frac{80}{1+0{,}02} + \frac{80}{(1+0{,}02)^2} + \frac{80}{(1+0{,}02)^3} + \frac{80}{(1+0{,}02)^4} = 549{,}45$$

Carlos deve preferir o pagamento em sete prestações. ■

Algumas pessoas tendem a achar que é preferível o esquema 1, cujo pagamento será de R$555,00 ao invés do esquema 2, cujo total pago é de R$560,00.

Por isso, antes de avaliar propostas de pagamento, deve-se deslocar as quantias no tempo. Isso vai depender da época à qual ele se refere.

Exemplo 19. Laura, ao entrar em uma loja de roupas, se depara com três condições de pagamento.

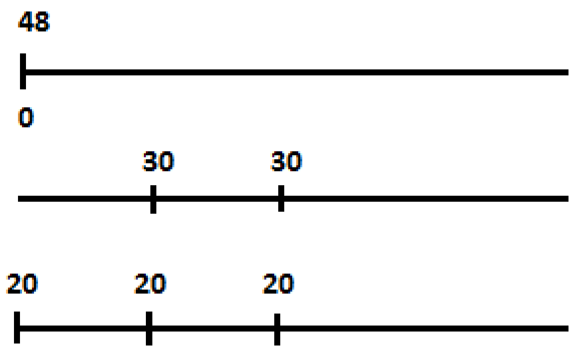
$i)$ à vista, com 20% de desconto.

$ii)$ em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

$iii)$ em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para Laura, se o dinheiro vale, para ela, 15% ao mês? (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.49).

Solução. Supondo uma peça custando R$ 60,00, temos os três esquemas abaixo



Comparando os valores, por exemplo, na época 0, obtemos:

$a = 48$

$$b = \frac{30}{1+0{,}15} + \frac{30}{(1+0{,}15)^2} = 48{,}77$$

$$c = 20 + \frac{20}{1+0{,}15} + \frac{20}{(1+0{,}15)^2} = 52{,}51$$

A melhor alternativa é a primeira e a pior é a em três prestações. ■

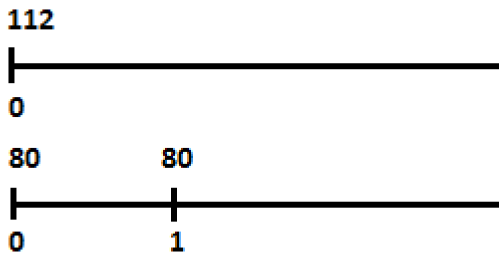
Exemplo 20. Duas opções de pagamento são oferecidas por uma loja de cosméticos:

$i)$ à vista, com 30% de desconto.

$ii)$ em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo? (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.50).

Solução. Sabendo que um produto custa R$ 160,00, temos os esquemas de pagamentos abaixo:



Igualando os valores, por exemplo, na época 0 (a data usada nessas comparações é chamada de data focal), obtemos

$$112 = 80 + \frac{80}{1+i} \Leftrightarrow 32 = \frac{80}{1+i} \Leftrightarrow 32i = 80 - 32 \Leftrightarrow i = \frac{48}{32} = 1{,}5 = 150\%.$$

A loja cobra 150% ao mês nas vendas a prazo. ■

Exemplo 21. Quanto tempo leva, para um capital dobrar à taxa de juros de 6% ao mês?

Solução. Temos $C(1+0{,}06)^n = 2C$. Daí,

$$1{,}06^n = 2 \text{ e } n = \frac{log2}{log1{,}06} \cong 12\; meses$$

Em, aproximadamente, doze meses você dobrará o seu capital inicial. ■

1.4.3 Fórmulas das taxas equivalentes. Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que $1 + I = (1 + i)^n$. (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.51)

Exemplo 22. A taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês é I tal que
$1 + I = (1 + 0{,}12)^{12}$
$I = 1{,}12^{12} - 1$
$I \cong 2{,}90$
Daí, $I \cong 2{,}90 = 290\%$ ao ano. ■
(Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.51).

Um erro muito comum é achar que juros de 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$ ao ano. Taxas com 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem. (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.51).

1.4.4 Taxas proporcionais não são equivalentes. Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma frase como “144% ao ano, com capitalização mensal” significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 144% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional. Portanto, a tradução da expressão “144% ao ano, com capitalização mensal” é “12% ao mês”. As pessoas menos educadas matematicamente podem pensar que os juros sejam realmente de 144% ao ano, mas isso não é verdade. Como vimos no exemplo 22, os juros são de 290% ao ano. A taxa de 144% ao ano é chamada de taxa nominal e a taxa de 290% ao ano é chamada de taxa efetiva. (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.51).

Exemplo 23. “24% ao ano com capitalização semestral”, significa “12% ao semestre”; “1% ao mês com capitalização trimestral” significa “3% ao trimestre” e “6% ao ano com capitalização mensal” significa “0,5% ao mês”. (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.51).

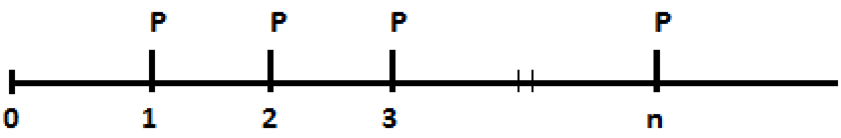
Exemplo 24. Qual será a taxa anual de juros à qual está investido um capital a juros de 6% ao ano capitalizado mensalmente?

Solução. O dinheiro está investido a juros de taxa $i = 0{,}5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente a I tal que $1 + I = (1+i)^{12} \rightarrow I = (1 + 0{,}005)^{12} - 1$. Daí, $I = 0{,}0617 = 6{,}17\%$ ao ano. A taxa de 6% ao ano é nominal e a taxa de 6,17% ao ano é efetiva. ■

Exemplo 25. A taxa efetiva semestral correspondente a 24% ao semestre com capitalização mensal é I tal que $1 + I = (1 + 0{,}04)^{6}$. Daí, $I = 26{,}53\%$ ao semestre. ■ (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.52).

Segundo Lima e colaboradores (2006, p.52), um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é chamado de série, ou de anuidade (apesar do nome, nada a ver com ano) ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme.

Teorema 2.[2] O valor de uma série uniforme de *n* pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.



Prova. O valor da série na época 0 é

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

[2] Teorema retirado do livro A Matemática do Ensino Médio volume 2, Elon Lages Lima e colaboradores, 2006.

Note que esta é a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$. Daí, a soma dos n primeiros termos dessa progressão é dado por:

$$A = \frac{P}{1+i}\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = P\frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{1+i-1} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \blacksquare$$

Exemplo 26. Um eletrodoméstico, cujo preço é R$420,00, é vendido em 6 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 7% ao mês, determine o valor das prestações. (Adaptada de LIMA, Elon Lages et at, 2006, p.53).

Solução. Observe que a primeira prestação só é paga um tempo depois da compra, logo, essas prestações são ditas postecipadas.
Igualando os valores na época 0, obtemos:

$$420 = P\frac{1-(1+0{,}07)^{-6}}{0{,}07}$$

$$P = 420\frac{0{,}07}{1-1{,}07^{-6}} = 88{,}11.$$

As prestações são de R$ 88,11.

Exemplo 27. Um objeto, cujo preço à vista é R$350,00, é vendido em 4 prestações mensais iguais, antecipadas (isto é, a primeira é paga no ato da compra). Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações. (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.54).

Solução. Igualando os valores na época -1 (essa escolha, que pode parecer exótica, é muito conveniente pois dispomos de uma fórmula que calcula diretamente o valor da série nessa época), obtemos:

$$\frac{350}{1+0{,}08} = P\frac{1-(1+0{,}08)^{-4}}{0{,}08}$$

$$P \cong 97{,}84$$

Quando um banco empresta dinheiro (crédito pessoal ou desconto de duplicatas), o tomador do empréstimo emite uma nota promissória que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar ao banco, em uma data fixada, uma certa quantia, que é chamada de valor de face da promissória. O banco, então, desconta a promissória para o cliente, isto é, recebe a promissória de valor de face F e entrega ao cliente uma quantia A (menor que F, naturalmente). A diferença $F - A$ é chamada de desconto. Os bancos efetuam o desconto de acordo com a fórmula $A = F(1 - d.t),$ onde d é uma data fixada pelo banco e chamada de taxa de desconto bancário (ou taxa de desconto simples por fora) e t é o prazo da operação, medido na unidade de tempo a que se refere a taxa. (LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.56).

Exemplo 28. Jorge tem uma promissória no valor de R$ 220,00, com vencimento em 90 dias, em um banco cuja taxa de desconto é de 14% ao mês.

a) Quanto Jorge receberá ao descontar essa promissória?
b) Qual a taxa mensal de juros que Jorge está pagando?

(Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.56).

Solução. a) Sabendo que, $A = F(1 - dt),$ teremos $A = 220(1 - 0{,}14.3) = 127{,}60$. Logo, Jorge receberá agora R$ 127,60, para pagar 220 em 90 dias.

b) Sendo i é a taxa mensal de juros à qual cresce a dívida de Jorge, temos

$$A = \frac{F}{(1+i)^3}$$

$$127{,}60 = \frac{220}{(1+i)^3}$$

$$(1+i)^3 = \frac{220}{127{,}60}$$

Daí, $i = 0{,}1991 = 19{,}91\%$.

Observe que anunciar a taxa de desconto e não a taxa de juros é um modo sutil de fazer crer aos mais ingênuos estarem eles pagando juros menores que os que realmente lhes estão sendo cobrados. ■

1.5 Sistemas de amortização

Para Lima e colaboradores (2006, p.56), quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade. Uma parte do pagamento quita os juros e outra parte amortiza (abate) a dívida.

Exemplo 29. Júlia tomou empréstimo de 200, a juros mensais de taxa 12%. Ela quitou sua dívida em três meses, pagando a cada mês os juros devidos e amortizando 30% da dívida no primeiro mês e 30% e 40% nos dois meses seguintes. (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.57).

Na planilha abaixo A_k, J_k, P_k, D_k são, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida (isto é, o valor da dívida após o pagamento da prestação) na época *k*.

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{P_k}$	$\boldsymbol{A_k}$	$\boldsymbol{J_k}$	$\boldsymbol{D_k}$
0	__	__	__	200
1	84	60	24	140
2	76,80	60	16,80	80
3	89,60	80	9,60	__

Para facilitar a compreensão, olhe cada linha na ordem A_k, D_k, J_k e P_k.

Os sistemas usuais de amortização são o sistema de amortização constante (SAC) e o sistema francês de amortização, também chamado de Tabela *Price* (*Richard Price* foi um economista inglês). O sistema francês é caracterizado por prestações constantes. (Lima e colaboradores, 2006, p.57).

Exemplo 30. Uma dívida de 300 é paga, com juros de 18% ao mês, em 5 meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização. (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.57).

Solução. Como no SAC, as amortizações são constantes, cada uma será equivalente a $\frac{1}{5}$ da dívida inicial. A planilha é, portanto:

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{P_k}$	$\boldsymbol{A_k}$	$\boldsymbol{J_k}$	$\boldsymbol{D_k}$
0	__	__	__	300
1	114	60	54	240
2	103,20	60	43,20	180
3	92,40	60	32,40	120
4	81,60	60	21,60	60
5	70,80	60	10,80	__

Para facilitar a compreensão, olhe cada linha na ordem A_k , D_k, J_k e P_k.

Teorema 3.[3] No SAC, sendo *n* o número de pagamentos, i a taxa de juros e D_0 a dívida, temos:

$A_k = \frac{D_0}{n}$,

$D_k = \frac{n-k}{n} D_0$,

$J_k = iD_{k-1}$,

$P_k = A_k + J_k$

Prova. Como a dívida D_0 é amortizada em *n* quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_k = \frac{D_0}{n}$$

Após k amortizações, o estado da dívida é

$$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n} D_0$$

Os juros são calculados em cima do estado da dívida no momento do pagamento, ou seja,

$$J_k = iD_{k-1}$$

A prestação a ser paga deve corresponder à junção da amortização com os juros correspondentes, assim

$$P_k = A_k + J_k$$

Exemplo 31. Camila tem uma dívida de 240 a ser paga, em 5 meses, pelo sistema francês, com juros de 6% ao mês. Faça a planilha de amortização da dívida de Camila. (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.58).

Solução: Como no sistema francês as prestações são constantes, pelo teorema 2, cada prestação valerá

$$P = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 240 \frac{0{,}06}{1-1{,}06^{-5}} = 56{,}98.$$

[3] Teorema retirado do livro A Matemática do Ensino Médio volume 2, Elon Lages Lima e colaboradores, 2006.

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	__	__	__	240,00
1	56,98	42,58	14,40	197,42
2	56,98	45,13	11,85	152,29
3	56,98	47,84	9,14	104,45
4	56,98	50,71	6,27	53,74
5	56,98	53,74	3,22	__

Para mais fácil compreensão, olhe cada linha na ordem P_k, J_k, A_k e D_k.

Teorema 4.[4] No sistema francês de amortização, sendo *n* o número de pagamentos, i a taxa de juros e D_0 a dívida, temos

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$J_k = iD_{k-1}, A = P_k - J_k$$

Prova. A primeira fórmula é, simplesmente, o teorema 2.

Na segunda fórmula, observe que D_k é a dívida que será liquidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos a P_k. Portanto, novamente pelo teorema 2, temos

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

Substituindo o valor de P_k, obtemos

$$D_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}. \blacksquare$$

Exemplo 32. Em um mês cuja inflação foi de 25%, Paulo Jorge investiu seu capital a juros de 30% ao mês. Evidentemente, isso não significa que Paulo

[4] Teorema retirado do livro A Matemática do Ensino Médio volume 2, Elon Lages Lima e colaboradores, 2006.

Jorge tenha aumentado seu poder de compra em 30%, pois, embora a quantidade de reais de Paulo Jorge tenha crescido 30%, o valor do real sofreu uma redução. Dizemos nesse caso que 30% ao mês é a taxa nominal de juros mensais de Paulo Jorge. (Retirada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.59).

Suponhamos que, no início do referido mês, o capital C de Paulo Jorge pudesse comprar x artigos de preço unitário igual a p. No fim do mês, o capital passou a ser 1,25p. Logo, Paulo Jorge poderá agora comprar

$$\frac{1{,}3C}{1{,}25p} = 1{,}04x \text{ artigos.}$$

O poder de compra de Paulo Jorge aumentou em 4% nesse mês. Essa taxa de 4% ao mês, à qual cresceu o poder de compra de Paulo Jorge, é chamada de taxa real de juros. ■

Exemplo 33. Em algumas situações (prazos pequenos, juros de mora) são usados juros simples e não juros compostos. No regime de juros simples, os juros em cada época são calculados sobre o principal e não sobre o montante da época anterior. Por exemplo, um principal igual a 500, a juros simples de 10% ao mês, evolui de acordo com a tabela a seguir: (Adaptada de LIMA, Elon Lages et al, 2006, p.60).

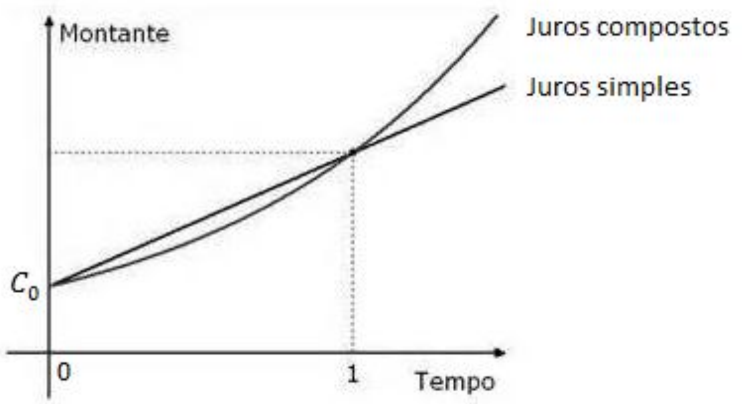
$\boldsymbol{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**
$\boldsymbol{C_n}$	500	550	600	650	700	...

Não há dificuldade em calcular juros simples, pois a taxa incide sempre sobre o capital inicial. No nosso exemplo, os juros são sempre de 10% de 500, ou seja, 50.

É claro então que, $C_n = c_0 + niC_0$, o que faz com que os valores de C_n formem uma progressão aritmética.

No mesmo exemplo, a juros compostos, o valor evolui segundo a seguinte tabela

$\boldsymbol{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**
$\boldsymbol{C_n}$	500	550	605	665,50	732,05	...



Olhando para os gráficos de evolução de um mesmo principal C_0 a juros de taxa i, a juros simples e a juros compostos, observamos que o montante a juros compostos é superior ao montante a juros simples, exceto se o prazo for menor que 1. É por isso que juros simples só são utilizados em cobranças de juros em prazos inferiores ao prazo que se refere à taxa de juros combinada. ■

CAPÍTULO 2

CONFIGURAÇÕES DA PESQUISA E FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Configurações da pesquisa

Este tópico é composto por uma reflexão sobre as minhas[5] motivações em realizar essa investigação, os objetivos e questões de pesquisa, bem como a metodologia utilizada na realização deste trabalho.

2.1.1 Antecedentes e motivações

Durante os quase quatro anos que leciono Matemática, algo que tem me preocupado, além do déficit apresentado pelos alunos nas operações básicas, é a grande dificuldade que percebo nos discentes em interpretar situações-problema.

No caso particular da Matemática Financeira, noto que é comum alguns alunos conseguirem calcular juros, aumentos e descontos diretamente, porém, quando se deparam com problemas, não conseguem obter o mesmo desempenho. Isso me induz a acreditar que a maior dificuldade esteja na interpretação.

Ainda é comum perceber a rejeição que os estudantes têm com a resolução de problemas, bem como com as demonstrações das fórmulas Durante os procedimentos para se chegar à compreensão dos resultados, a maioria dos alunos chega a demonstrar sua insatisfação. Contudo, é importante conhecer todo o processo para se chegar aos resultados e não somente a fórmula por si só, para então aplicá-la.

É grande o meu esforço em diminuir tais dificuldades de meus alunos. Procuro trabalhar diariamente com situações-problema durante as minhas aulas para que essa rejeição torne-se uma satisfação. Embora seja um processo lento, aos poucos percebo que os alunos têm se mostrado menos

[5] O texto do tópico 2.1.1 reflete as motivações da mestranda, por isso está escrito na primeira pessoa do singular.

receosos com a resolução de problemas, principalmente quando eles conseguem resolver.

Procuro, também, pedir que os estudantes exponham suas resoluções para os colegas a fim de mostrar que não existe uma única estratégia para se chegar à solução. Deixar que eles interajam, discutam os procedimentos e concluam o mesmo resultado torna o trabalho deles mais gratificante, levando-os a aceitarem ser desafiados a pensar por si só.

Além da deficiência na resolução de problemas, me desanima ver que alunos prestes a concluir o Ensino Médio apresentam grande dificuldade nas operações básicas, principalmente na divisão. É comum eles pedirem sempre para usarem a calculadora, que não deixa de ser um bom aliado na aprendizagem, porém não pode ser um meio que substitua os cálculos feitos pelos próprios alunos. É justamente por se apoiarem sempre nela que muitos não conseguem realizar uma simples operação, pois se tornam dependentes dela nos momentos que precisam expor o conhecimento adquirido. Acredito que nunca apresentei dificuldade com as operações porque sempre fui orientada a fazer todos os cálculos e usar a calculadora apenas para conferência. Tão importante quanto utilizar novas tecnologias é saber usá-la a nosso favor.

Durante um bom tempo da minha vida escolar não fui influenciada a resolver problemas, mas quando fui estimulada nessa tarefa me senti desafiada a usar o raciocínio e confesso que sempre gostei de desafios. É gratificante!

Na Educação Básica senti falta de conhecer os métodos para se chegar à determinada fórmula. Sempre me foram apresentados os resultados prontos e aceitava-os sem muito questionamento. Quando me foi dada a possibilidade de conhecer as demonstrações (na graduação) passei a defender ainda mais sua utilização na vida escolar, apesar de apresentar muita dificuldade, pois era algo novo para mim. É importante conhecer que todo resultado tem um caminho lógico e sabê-lo dá sentido à utilização das fórmulas.

Diante dessa realidade enfrentada pelos meus alunos, me senti motivada a procurar entender as causas de tais dificuldades. Procurei através deste trabalho, fazer uma análise dos erros cometidos pelos alunos nas suas resoluções e o reflexo desses erros básicos na aprendizagem dos demais conteúdos. De forma especial, decidi trabalhar com a resolução de problemas para tentar compreender a origem de tamanha dificuldade apresentada, de modo particular, na Matemática Financeira. Daí a escolha das metodologias desta pesquisa.

2.1.2 Objetivos e questões de pesquisa

Este trabalho visa identificar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas em Matemática Financeira bem como, analisar os erros cometidos por eles.

Visando atingir estes objetivos, propomos as seguintes questões de pesquisa.

- Quais os erros cometidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Sergipe ao resolver questões relativas à Matemática Financeira?
- Quais as dificuldades encontradas por estes alunos ao resolver problemas de Matemática Financeira?

2.1.3 Metodologia de pesquisa

Neste trabalho foram utilizadas análises com abordagens qualitativas e quantitativas, com a pretensão de chegar à compreensão dos tipos de erros cometidos e suas possíveis causas na resolução das questões e problemas propostos.

Inicialmente as pesquisas foram bibliográficas e de campo, a fim de conhecer a realidade dos alunos em relação à interpretação e resolução de problemas em Matemática Financeira.

Tendo em vista que a pesquisa foi realizada no local onde ocorrem os problemas, ou seja, na sala de aula, trata-se de uma pesquisa de campo. Fiorentini e Lorenzato (2012) afirmam que a pesquisa de campo

> [...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação

> participante, pesquisa–ação, aplicação de questionário, teste, entre outros. (p. 106).

Dessa forma, a pesquisa naturalística ou de campo, visa observar um problema de forma natural, ou seja, sem intervenção. A situação é observada de forma real, no âmbito em que acontece.

Para a realização da pesquisa, os instrumentos de coletas de dados foram dois questionários envolvendo conteúdos relativos à Matemática Financeira. Além de resolverem as questões, os alunos ainda foram orientados a expor suas dificuldades na resolução de alguma questão que, por ventura, viesse a ocorrer. Dessa forma, ficaria mais claro analisar o que realmente dificultou na resolução da questão, seja um problema de interpretação, de cálculos algébricos, ou de outra natureza.

Os participantes da pesquisa foram alunos do 3° ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino do Alto Sertão Sergipano. Foram escolhidas duas turmas compostas por 22 alunos cada, sendo 21 do sexo masculino e 23 do sexo feminino na faixa etária entre 16 e 19 anos. No entanto, apenas 39 foram analisados, 20 do sexo masculino e 19 do sexo feminino, em consequência de alguns alunos terem respondido a apenas um dos questionários, sendo inviável utilizá-los, uma vez que um dos objetivos era comparar questões correspondentes nos dois questionários.

Foram escolhidas turmas de 3° ano, visto que eles devem estar preparados para resolver esses tipos de questões, pois os conteúdos abordados são trabalhados no 2º ano. A escolha das turmas é justificada por se apresentarem nas mesmas condições: são turmas vespertinas, a faixa etária de ambas coincide, a maioria reside na área urbana, por isso são mais assíduos, já que não há problemas com o transporte para o seu deslocamento, problema comum com as turmas noturnas.

A escolha da escola se deu pelo fato de ser o meu local de trabalho, o que facilitou a coleta dos dados pelo fácil acesso aos estudantes e adequação dos meus horários de trabalho. Vale ressaltar que não leciono nas turmas selecionadas, o que possibilita a confiabilidade de que as questões não foram tendenciosas, já que não conheço a realidade dos alunos participantes da pesquisa.

Houve grande receptividade por parte da direção, do professor das turmas e dos alunos em fazerem parte desta pesquisa, o que facilitou e gratificou ainda mais o meu trabalho.

A escola se localiza no Alto Sertão Sergipano e apresenta um total de 730 alunos distribuídos em 25 turmas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, durante os três turnos.

A elaboração dos dois questionários buscou analisar o conhecimento e desenvolvimento dos alunos frente aos mesmos cálculos, em situações diferentes, com maior grau de complexidade. Dessa forma, ambos os questionários eram compostos por quatro questões e envolviam os mesmos conteúdos, a saber, juros simples, juros compostos, aumentos e descontos e Sistema *Price*. No primeiro, os exercícios eram perguntas diretas, com todos os dados em destaque, para serem apenas aplicadas as fórmulas. No segundo, as questões eram problemas em que os alunos, antes de resolverem, precisavam interpretar as situações propostas. Vale ressaltar que os questionários foram aplicados no horário normal de aula pelo professor de matemática das turmas, em dias diferentes, 29 e 31 de março, a fim de não tornar cansativo a ponto de desestimular os alunos na resolução.

Em sua elaboração busquei diversificar os dados de forma a trabalhar com taxas inteiras e decimais, em unidades diferentes (taxa e tempo), para verificar a atenção dos alunos na leitura e interpretação dos problemas. Além disso, para a elaboração das questões, tomei por base o livro didático utilizado por eles, a fim de trabalhar as questões na mesma linguagem.

Antes de fazer a análise dos dados, todos os estudantes foram indicados por uma letra e um número, a fim de preservar suas identidades. Os 39 discentes participantes da análise foram identificados de A1 a A39. Assim, o estudante representado por A1 corresponde ao aluno um e assim por diante. Essa indicação não seguiu nenhum critério específico, sendo organizado na ordem em que estavam dispostos no momento da análise. Também não foram separadas as turmas, uma vez que a análise não pretendia compará-las.

Os dados dos questionários foram coletados e analisados de maneiras diferentes. No primeiro momento, as resoluções das questões do questionário I foram analisadas, quantificando os acertos, acertos parciais, erros e questões não resolvidas. Em seguida, utilizamos uma categorização dos tipos de erros segundo o modelo de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1986, 1987), citado por Cury (2007) que se adequou ao nosso trabalho.

Para a análise do segundo questionário, utilizamos as quatro fases que, segundo Polya (1995), são necessárias na resolução de problemas, visto que esse questionário foi elaborado com o objetivo de o aluno apresentar além da resolução operacional, a sua interpretação para o problema.

Tal modelo e as fases sugeridas por Polya (1995) serão detalhadas posteriormente, no decorrer das análises e discussões, bem como o seu percurso.

2.2 Fundamentos Teóricos

Tendo em vista os objetivos desta pesquisa, achamos por bem discutir algumas ideias que deram suporte ao nosso trabalho de análise e discussões dos resultados obtidos.

Muito se tem discutido sobre o ensino da Matemática e as metodologias de ensino mais eficazes para a aprendizagem dessa disciplina pelos alunos. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN 1997) destacam que:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1997, p. 19)

Aprender matemática é compreender o significado das notações, dos símbolos, da conexão entre os conteúdos e a relação estabelecida entre as diversas áreas do conhecimento para dar sentido aos objetivos do seu estudo. Dessa forma, é necessário desenvolver no aluno o desejo e a capacidade de aprender a aprender. Amazonas (2009) afirma que:

> Ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Os educadores matemáticos devem procurar alternativas que motivem a aprendizagem e desenvolvam a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando as interações do sujeito com outras pessoas. (p.1)

Não basta transmitirmos o conhecimento pronto e acabado aos discentes. É preciso estimular e explorar a criatividade para que os estudantes sejam ativos na construção do conhecimento e não ajam como meros expectadores.

2.2.1 Utilização do erro como ferramenta para identificar e superar as dificuldades dos alunos

Apoiadas na ideia de que a Matemática está sujeita a erros e correções e teve sua origem em problemas e necessidades humanas, acreditamos que a Matemática é uma área que está em total harmonia com a realidade e deve estar inteiramente ligada ao cotidiano do aluno. Para Cury (1994):

> O ensino de Matemática, em consonância com essa visão, deve proporcionar ao aluno o envolvimento com os problemas da sua realidade sociocultural e a possibilidade de construir suas próprias soluções. Os erros cometidos pelos alunos fazem parte do próprio processo de elaboração do conhecimento e devem ser fonte de exploração de novas ideias e novos conteúdos matemáticos. (Cury, 1994, p.20)

Cury (2007), em um dos seus trabalhos sobre a utilização do erro, ainda faz uma abordagem da visão que se tem dos erros, diz ela:

> Donaldson diz que “do ponto de vista do senso comum, os erros são acontecimentos desastrados, que seria melhor evitar completamente, se possíveis.” (DONALDSON, 1977, p.181) Porém, segundo o mesmo autor, este é um ponto de vista errôneo, porque os erros podem ter um papel extremamente fecundo na atividade intelectual. (Cury, 2007, p.25)

O erro, nada mais é do que uma tentativa de acerto do aluno e, se olhado dessa forma, pode ser utilizado como um aliado na aprendizagem. Sobre isso, os PCN (1998) apontam que:

> Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Ao procurar identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno está

> pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho. (BRASIL, 1998, p. 55)

Nesta ótica, quando o erro é tratado de maneira adequada, ele passa a ser um grande aliado na construção do conhecimento do aluno e, consequentemente, na busca por melhorias na qualidade do ensino. “Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios. Nesse sentido, a análise do erro pode ser uma pista interessante e eficaz.” (BRASIL, 1997, p. 41).

No entanto, analisar as causas de um erro não é uma tarefa fácil, principalmente porque é difícil interpretar o pensar do aluno que, muitas vezes, não se mostra de forma explícita na sua resolução. Sobre isso, os PCN (1997) apontam:

> Diferentes fatores podem ser causa de um erro. Por exemplo, um aluno que erra o resultado da operação $126 - 39$ pode não ter estabelecido uma correspondência entre os dígitos ao “armar” a conta; pode ter subtraído 6 de 9, apoiado na ideia de que na subtração se retira o número menor do número maior; pode ter colocado qualquer número como resposta por não ter compreendido o significado da operação; pode ter utilizado um procedimento aditivo ou contar errado; pode ter cometido erros de cálculo por falta de um repertório básico. Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação. (BRASIL, 1997, p. 41)

Nessa perspectiva, um erro pode ter sua origem em diferentes aspectos. O professor tomando ciência da causa do erro fica mais fácil de planejar uma estratégia adequada para auxiliar o discente a repensar a sua maneira de tratar o problema.

Feltes (2007) aborda o importante papel dos erros na construção do conhecimento através de uma frase de Piaget ao afirmar que:

> "[...] um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas consequências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas ideias." (PIAGET, apud FELTES, 2007, p.5).

Nessa perspectiva, um erro cometido pode ser aceito, uma vez que abre possibilidades para a construção do conhecimento, estimulando a sua análise e a descoberta de uma nova visão sobre determinados assuntos.

2.2.2 Modelo de Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar

Para a categorização dos erros, buscamos uma organização que englobasse os tipos de erros apresentados nesta pesquisa. O trabalho mais próximo ao nosso é um estudo feito por Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar (1986,1987) citado por Cury (2007), que afirma em sua pesquisa que são professores israelenses que realizaram uma investigação sobre as respostas dadas por alunos submetidos ao exame anual de Matemática, aplicado ao final do segundo grau em todo o país.

Cury (2007, p.29) comenta ainda que o modelo de classificação criado por Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar apresenta seis categorias:

a) uso errado dos dados;
b) linguagem mal interpretada;
c) definição ou teorema distorcido;
d) erros técnicos
e) solução não verificada;
f) inferência logicamente inválida;

Essas categorias foram adaptadas e definidas por nós, adequando à nossa pesquisa, e são apresentadas a seguir:

Categoria I – Uso errado dos dados: nesta classe são considerados os erros associados à forma incorreta de utilizar os dados identificados corretamente.

Categoria II – Linguagem mal interpretada: esses erros estão relacionados à tradução incorreta dos dados para outra linguagem.

Categoria III – Definições ou teoremas distorcidos: nesta categoria, estão contidos os erros relacionados a definições ou propriedades que não se aplicam na questão proposta.

Categoria IV – Erros técnicos: são incluídos aqui os erros de manipulação algébrica.

Categoria V – Solução não verificada: nesta categoria, são incluídos erros no resultado final, embora tenha utilizado um método correto de resolução. Isso ocorre pelo fato de o aluno não verificar a solução encontrada.

Categoria VI – Inferência logicamente inválida: são considerados nesta categoria, os erros devido a raciocínios falaciosos.

2.2.3 Orientações curriculares relativas à Resolução de Problemas

Um problema, por mais simples que seja, desafia a mente, a curiosidade, oferecendo aos alunos a opção da descoberta. Esse deve ser o propósito de um problema, fazer o aluno ter interesse pela Matemática e estimular a criação de uma solução, ampliando o seu raciocínio e aprimorando o seu conhecimento. Em relação ao surgimento dessa área de conhecimento, os PCN apontam que:

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (BRASIL, 1997, p.32)

Sendo assim, percebemos o quanto a Matemática está inteiramente ligada ao nosso cotidiano, e não é, como muitos pensam, uma disciplina abstrata, distante da nossa realidade.

Mas, em que consiste um problema? Para os PCN (1997, p.34), "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la".

Segundo Newell & Simon (1972), citado por Ramos e colaboradores (2001, p.3), "um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação"**.** Sobre a definição de problema, Chi e Glaser (1983), ainda citado por Ramos e colaboradores (2001, p.3), afirmam que um "problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal, alguma estratégia em particular".

Diante destas concepções, para um problema existir, é necessário que haja um objetivo a ser alcançado e devemos criar uma maneira, que faça sentido, para resolver e alcançar esse propósito. Nessa ótica, os PCN explicitam:

> [...] o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p.15)

Nesse sentido faz-se necessário compreender a importância da resolução de problemas e como deve ser entendido o método de resolver problemas. Mediante esses argumentos, os PCN apontam que:

> Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. (BRASIL, 1997, p.34)

Dessa forma, é necessário que o aluno seja incentivado a aprender a dar sentido ao problema e encontrar estratégias que o leve à sua solução. A aplicação de um problema permite questionamentos e pensamentos próprios dos estudantes, propiciando o uso do raciocínio, ao invés da utilização apenas de regras e conceitos. Daí a resolução de problemas consiste em uma importante ferramenta didática, por proporcionar o desenvolvimento intelectual do aluno.

A resolução de problemas é abordada nos PCN como uma proposta que defende, dentre outros princípios, que:

> • o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> • o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada; (BRASIL, 1997, p. 32)

No mesmo âmbito do Ensino Fundamental, a resolução de problemas é considerada de grande importância pelos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM), que apontam:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2002, p.112)

Porém, é importante ressaltar que não devemos descartar o uso de outros tipos de questões que exijam apenas os cálculos e aplicações de propriedades, pois estes são importantes para a aprendizagem de técnicas e cálculos algébricos, como apontam os PCNEM:

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. Isso não significa que os exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho. (BRASIL, 2002, p.113)

Assim como aprender a calcular, usar técnicas e propriedades, o uso da metodologia de resolução de problemas tem sua importância e deve ser inserido desde os anos iniciais na vida escolar do estudante. É através dela que o aluno começa a pensar por si mesmo e tende a se apropriar do conhecimento de maneira mais eficaz.

2.2.4 Fases para a Resolução de Problemas (Polya)

Para a resolução de qualquer situação-problema, segundo Polya (1995, p.3) devem ser consideradas quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Cada uma delas tem sua importância quando se busca resolver um problema. A seguir são detalhadas cada uma das fases:

- **Compreensão:** para começar a resolver um problema, o enunciado deve ser bem entendido. O aluno deve identificar as principais partes dos problemas, a incógnita, os dados, a condicionante. É interessante adotar uma notação adequada para os dados, escolhendo os signos apropriados e considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos. É importante fazer indagações e suposições que possam favorecer na obtenção de outros dados.
- **Estabelecimento de um plano:** para se criar um plano, devemos conhecer de modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que são necessários para a obtenção da incógnita. Esse é um caminho que pode aparecer repentinamente ou ser longo demais, pois pode surgir após várias tentativas. Fazer indagações pode ser essencial para o surgimento de uma boa estratégia. Será difícil ter uma boa ideia se pouco se conhece sobre o assunto. Uma opção é tentar lembrar-se de algum exemplo resolvido anteriormente que tenha a mesma incógnita e analisar se é possível utilizá-lo.
- **Execução do plano:** nessa fase é preciso ter paciência para executar cada passo com atenção. Quando a ideia não é concebida pelo próprio aluno, têm grandes chances de ele se perder pelo caminho. Por isso, essa etapa será mais fácil quando é criada pelo próprio estudante. É importante o professor insistir para que o discente verifique cada passo. O principal é que o aluno fique convicto da correção de cada passo.
- **Retrospecto:** quando se termina a resolução e a deixa de lado por já ter chegado à solução, o aluno pode estar perdendo uma fase importante do processo. É interessante fazer um retrospecto da resolução completa e examinar o resultado final e o caminho que o levou àquela solução. A esta altura, o discente já cumpriu o seu plano e escreveu a resolução verificando cada passo. Assim, terá boas razões para acreditar que tenha resolvido corretamente. É claro que, mesmo assim, é possível haver erros.

Diante desse processo, é importante que o professor convença o aluno da importância de cada etapa e dê a oportunidade de o estudante pensar por si só, antes de auxiliá-lo nas tomadas de decisões. A utilização adequada de cada uma destas fases torna a resolução de problemas uma metodologia de ensino da Matemática com grandes chances de ser um aliado interessante e prazeroso na aprendizagem.

CAPÍTULO 3

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS SOB A PERSPECTIVA DA ANÁLISE DE ERROS

Neste capítulo, apresentamos os resultados e discussões do primeiro questionário sob a perspectiva da análise de erros (Cury, 1994). Inicialmente quantificamos todos os erros apresentados nos dois questionários e comparamos os resultados obtidos em ambos. Dessa forma, fazemos uma análise do desempenho dos alunos em cada uma das questões referentes ao mesmo tópico de Matemática Financeira e discutimos os principais erros apresentados em cada questão.

3.1 Quantificação dos erros

A análise das respostas dos alunos objetiva dar suporte ao professor no entendimento das estratégias de resolução das questões parcialmente corretas ou incorretas. Tais resultados nos faz refletir sobre como e quais práticas pedagógicas podem ser utilizadas em uma intervenção futura, na tentativa de sanar as dificuldades apresentadas.

Nesse primeiro momento, traremos uma abordagem quantitativa dos erros e acertos por questões dos dois questionários, a fim de identificar as dificuldades dos alunos ao se depararem com situações semelhantes apresentadas de maneiras diferentes, a saber: o primeiro questionário foi elaborado com questões em que os dados estavam explícitos assim como, o que se solicitava como resposta. Já o segundo questionário, exigia a interpretação do problema pelo aluno, a fim de resolver as questões. Por exemplo, a questão 1 do Questionário I e a questão 4 do Questionário II são referentes ao Sistema *Price.* Da mesma forma que as demais questões são associadas nos dois questionários, uma vez que as questões referentes aos mesmos tópicos não se apresentavam na mesma ordem em ambos os questionários, que se encontram nos apêndices I e II.

Para a organização dos dados, os questionários foram corrigidos e, na categorização dos erros cometidos, consideramos apenas o primeiro erro, uma vez que um mesmo aluno pode ter cometido vários deles durante a sua resolução.

Buscando uma melhor compreensão dos dados obtidos, foram criadas algumas tabelas considerando quatro aspectos nas questões: corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco que, segundo Brum e Cury (2013), podem abranger sentidos amplos, e varia de pesquisador para pesquisador. Dessa forma, achamos por bem, defini-los usando os critérios que consideramos em cada um desses aspectos:

— **Corretas:** consideramos as questões que chegaram ao resultado esperado usando fórmulas adequadas, propriedades matemáticas e/ou raciocínios lógicos corretos.
— **Parcialmente corretas:** as questões em que o aluno usa a fórmula ou raciocínio adequados, mas comete algum tipo de erro relacionado à aplicação de propriedades ou operações matemáticas e, por conta disso, não chega ao resultado esperado.
— **Incorretas:** foram classificadas as questões que usavam raciocínios falaciosos, usando fórmulas ou propriedades incabíveis na sua resolução.
— **Em branco:** foram consideradas as que o aluno não inicia qualquer tipo de resolução.

A tabela a seguir contém o quantitativo de incorreções e de acertos do Questionário I, que apresenta questões diretas sobre alguns assuntos de Matemática Financeira. Os assuntos relacionados estão entre parênteses ao lado de cada questão que serão apresentadas posteriormente, assim como, as discussões das resoluções apresentadas pelos alunos.

Tabela 1: Desempenho dos alunos no Questionário I

Questionário I					
		Corretas	**Parc.Corretas**	**Incorretas**	**Em Branco**
Questão 1 (Sistema Price)		4	15	6	14
Questão 2	a)	23	1	3	12
(Aumentos e	b)	23	3	2	11
descontos)	c)	21	1	5	12
Questão 3	a)	20	3	3	13
(Juros Simples)	b)	16	2	2	19
Questão 4	a)	15	3	4	17
(Juros Compostos)	b)	14	2	3	20

Fonte: Acervo da pesquisa

É notório que algumas questões apresentaram um número significativo de acertos, estes, superando o número de incorretas, exceto a questão que trata do Sistema *Price*. Além disso, houve um grande número de questões em branco.

A tabela seguinte quantifica os acertos e incorreções do questionário II, que apresenta problemas envolvendo os mesmos assuntos de Matemática Financeira do anterior, mas não na mesma ordem.

Tabela 2: Desempenho dos alunos no Questionário II

Questionário II					
		Corretas	**Parc.Corretas**	**Incorretas**	**Em Branco**
Questão 1 (Aumentos e	a)	6	1	25	7
descontos)	b)	5	1	24	9
Questão 2	a)	14	3	14	8
(Juros Compostos)	b)	12	--	15	12
Questão 3	a)	18	4	5	12
(Juros Simples)	b)	16	--	3	20
Questão 4 (Sistema Price)		3	7	18	11

Fonte: Acervo da pesquisa

Na tabela 2, observamos uma realidade um pouco diferente da anterior. Nesta segunda tabela, o número de incorreções supera o número de acertos na maioria das questões, embora algumas tenham um número significativo de acertos. Também, o número de questões em branco se apresenta em grande quantidade, apesar de, em algumas questões, serem menores que no Questionário I.

Com o intuito de analisar o desempenho dos alunos nos dois questionários, foi criada uma nova tabela que compara os resultados apresentados por eles nas questões referentes aos mesmos tópicos nos dois questionários.

Tabela 3: Comparativo do desempenho dos alunos nos dois questionários

		Corretas		**Parc.corretas**		**Incorretas**		**Em branco**	
		Q1	**Q2**	**Q1**	**Q2**	**Q1**	**Q2**	**Q1**	**Q2**
Sistema Price		4	3	15	7	6	18	14	11
Juros Simples	a)	20	18	3	4	3	5	13	12
	b)	16	16	2	--	2	3	19	20
Juros Compostos	a)	15	14	3	3	4	14	17	8
	b)	14	12	2	--	3	15	20	12
Aumento e	a)	23	6	3	2	2	24	11	7
desconto	b)	21	5	1	2	5	23	12	9

Fonte: Acervo da pesquisa

Analisando a Tabela 3, podemos notar que os números de respostas corretas no Questionário I são sempre maiores ou iguais aos acertos do Questionário II, havendo uma diferença ainda maior na questão de aumento e desconto.

Isso nos mostra que grande parte dos alunos conhece as técnicas de resolução, porém, não conseguiu ter um bom desempenho nesse tipo de questão do Questionário II, o que pode ser um indicativo de que apresentaram dificuldade na interpretação do problema. Dessa forma, esse resultado nos leva a supor que interpretar a situação presente no problema foi uma dificuldade enfrentada pelos discentes, já que os mesmos alunos que acertaram a questão direta no Questionário I, não conseguiram acertar a questão semelhante presente no Questionário II.

Observe também, que os números de questões parcialmente corretas se apresentam de forma significativa, o que nos mostra que os alunos conheciam as fórmulas resolutivas, porém apresentaram outros tipos de dificuldades em suas resoluções.

Podemos perceber também que, em algumas questões, os discentes se empenharam mais em tentar resolver no Questionário II, uma vez que o número de estudantes que deixaram em branco no Questionário I é maior, na maioria dos exercícios. Isso pode ser explicado pelo fato de que o desempenho e o estímulo do aluno dependem do momento em que se encontram para resolver as atividades propostas. O estudante pode não conseguir desenvolver um raciocínio de uma questão agora, mas outro dia, pode resolver com êxito o mesmo problema.

A fim de comparar o desempenho individual dos alunos em ambos os questionários, organizamos uma tabela e nela agrupamos algumas categorias. Aqui, consideramos **Acertos**, as questões completamente corretas e **Não acerto**, o conjunto das questões incorretas, parcialmente corretas e em branco.

Por conta de, posteriormente, apresentarmos uma análise sobre o desempenho dos alunos em um questionário que envolve apenas a aplicação dos dados (Questionário I) e em outro que é necessário primeiro interpretar para só depois resolver o problema (Questionário II), apresentamos uma tabela com o desempenho dos alunos nas duas questões, dos diferentes questionários, envolvendo o mesmo conteúdo.

Tabela 4: Desempenho dos alunos nas duas questões referentes ao mesmo conteúdo

		Q1/Q2	Q1/Q2	Q1/Q2	Q1/Q2
Questão		**Acerto/Acerto**	**Acerto/Não acerto**	**Não acerto/ Acerto**	**Não acerto /Não acerto**
Sistema Price (P1, P4)		--	4	3	32
Juros Simples (P3, P3)	a)	15	5	3	16
	b)	10	6	6	17
Juros Compostos (P4, P2)	a)	8	7	5	19
	b)	9	5	2	23
Aumento e desconto (P2, P1)	a)	4	19	2	14
	b)	3	18	2	16

Fonte: Acervo da pesquisa

Consideramos interessante observar a coluna Acerto/Não acerto. Esta se refere à quantidade de alunos que acertaram as questões no questionário I e erraram no questionário II. Observe que um número considerável de estudantes consegue resolver uma questão direta (dados explícitos na questão), utilizando os conceitos adequados, ou mesmo a fórmula, fazendo todas as manipulações algébricas corretamente, mas quando se depararam com situações-problema, não conseguem repetir o bom desempenho. Isso nos faz inferir que o problema é de interpretação, uma vez que os cálculos são os mesmos, porém com os enunciados mais complexos.

3.2 Tipos de erros

Embora o principal objetivo dessa pesquisa seja analisar as dificuldades dos alunos na interpretação e resolução de problemas em Matemática financeira, em nossa investigação, no primeiro momento, aplicamos um questionário, a fim de categorizar os principais erros cometidos pelos alunos na sua resolução.

Para realizarmos essa análise, utilizamos princípios da Análise de Conteúdo de Hsieh e Shannon (2005). Para estes pesquisadores, a Análise de Conteúdo é um método a ser utilizado em pesquisas qualitativas e pode ser feita sob três diferentes abordagens: Convencional, Direcionada e Somativa, como descritos a seguir.

Quadro 1: Diferenças de codificação entre as três abordagens para análise de conteúdo[6]

Tipo de Análise de Conteúdo	O estudo inicia com	Momento de definir códigos ou palavra-chave	Origem de códigos e palavras-chave
Análise de Conteúdo Convencional	Observação	Os códigos são definidos durante a análise dos dados	Os códigos são derivados a partir de dados
Análise de Conteúdo Direcionada	Teoria	Os códigos são definidos antes e durante a análise dos dados	Os códigos são derivados da teoria ou resultados de pesquisas relevantes
Análise de Conteúdo Somativa	Palavras-chave	Palavras-chave são identificadas antes e durante a análise dos dados	Palavras-chave são derivadas do interesse dos pesquisadores ou da revisão de literatura

Fonte: Mateus, 2015, p.122.

O tipo específico de abordagem de Análise de Conteúdo Qualitativa de Hsieh e Shannon (2005) escolhido deve estar de acordo com os interesses teóricos e o objetivo de estudo.

Para esse grupo de dados, a nossa análise se enquadra na Análise de Conteúdo Convencional, visto que nossos códigos (categorias) foram definidos ao longo da análise dos dados, mesmo que depois disso tenhamos reagrupado essas categorias segundo o modelo de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1986, 1987), citado por Cury (2007).

A nossa análise seguiu o seguinte percurso: no primeiro momento fomos muito minuciosas na análise das resoluções dos alunos e separamos por tipo de erro, por exemplo, erros relacionados à adição, a multiplicação, a divisão e a potência. Depois dessa classificação, reorganizamos os dados de maneira que tivéssemos grandes categorias que englobassem erros de mesma natureza e, assim, os erros citados passaram a fazer parte de uma mesma categoria, a saber, erros operacionais.

---

[6] **TABLE 4: Major Coding Differences Among Three Approaches to Content Analysis**

Type of Content Analysis	*Study Starts With*	*Timing of Defining Codes or Keywords*	*Source of Codes or Keywords*
Conventional content analysis	Observation	Codes are defined during data analysis	Codes are derived from data
Directed content analysis	Theory	Codes are defined before and during data analysis	Codes are derived from theory or relevant research findings
Summative content analysis	Keywords	Keywords are identified before and during data analysis	Keywords are derived from interest of researchers or review of literature

As categorias que emergiram dos dados coletados, foram então reagrupadas usando o modelo de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1986, 1987), citado por Cury (2007), que classifica os erros cometidos por estudantes do segundo grau, da forma: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, definição ou teorema distorcido, erros técnicos, solução não verificada e inferência logicamente inválida. Estas categorias foram definidas anteriormente e serão retomadas a seguir juntamente com a categoria VII criada por nós e denominada como interrupção na resolução.

Categoria I – Uso errado dos dados: são considerados os erros em que os alunos utilizam os dados da questão de forma incorreta.

Categoria II – Linguagem mal interpretada: consideramos os casos em que os discentes traduziram os dados para outra linguagem de forma errada, como, por exemplo, errar uma transformação de uma taxa percentual para a forma de número decimal ou uma transformação de um tempo em meses para um tempo em anos.

Categoria III – Definições ou teoremas distorcidos: foram incluídos os casos em que os estudantes utilizaram definições e/ou propriedades que não se aplicavam na questão.

Categoria IV – Erros técnicos: incluímos nesta categoria os erros de manipulação algébrica que, nesta pesquisa, são representados por: multiplicação, divisão, adição e potenciação.

Categoria V – Solução não verificada: consideramos os erros na solução, apesar de o aluno ter utilizado uma resolução válida.

Categoria VI – Inferência logicamente inválida: foram considerados os casos em que o discente utilizaram raciocínios falaciosos, como, por exemplo, usar métodos inexistentes e sem fundamento.

Categoria VII – Interrupção na resolução: são considerados os casos em que os alunos acertaram a questão até certo ponto, mas pararam de resolver por ter encontrado algum tipo de dificuldade.

Esta categoria VII, não necessariamente relacionada a erros, foi criada pela necessidade de incluir os casos em que houve interrupção da resolução, uma vez que o aluno não evidenciou falhas no desenvolvimento da questão.

Ele resolveu corretamente a questão até certo ponto, e parou de resolver devido a alguma dificuldade encontrada e que foi mencionada por ele no próprio questionário.

Nesse tipo de análise, não há uma classificação ótima e definitiva, já que há diversas maneiras de se interpretar erros. Outros pesquisadores poderiam encontrar categorias diversas para esse mesmo material. Logo, essa categorização obedece aos critérios que consideramos relevantes para essa pesquisa. A Tabela 5, a seguir, mostra o quantitativo de erros por categoria em cada questão.

Tabela 5: Número de erros cometidos por categoria no Questionário I

Categorias	Questões							Total
	1	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**3.a**	**3.b**	**4.a**	**4.b**	
I	--	--	--	--	--	--	--	--	--
II	--	1	--	--	6	1	--	1	9
III	6	--	--	1	--	--	--	--	7
IV	11	2	4	4	--	3	6	1	31
V	--	--	--	--	--	--	--	--	--
VI	--	1	1	1	--	--	1	--	4
VII	4	--	--	--	--	--	--	--	4
TOTAL	21	4	5	6	6	4	7	2	55

Fonte: Acervo da pesquisa

A categoria I não se aplica na nossa pesquisa, pois os dados deste questionário são apresentados de forma explícita, ou seja, a identificação dos dados já foi previamente feita pelo pesquisador, restando ao aluno apenas utilizá-los.

Vale ressaltar ainda, que as categorias não são excludentes, ou seja, um aluno pode ter cometido vários erros na mesma questão. Para uma melhor compreensão e organização dos dados, optamos trabalhar apenas com o primeiro erro apresentado na resolução.

Claramente podemos observar que a maior incidência foi na categoria IV (erros técnicos). Efetivamente, esses erros que envolvem operações básicas e manipulações algébricas são muito frequentes em quase todos os conteúdos matemáticos, não especificamente, na Matemática Financeira, principalmente no que se refere à divisão.

Além dos 31 erros desse tipo, vistos na tabela anterior, podemos enquadrar como dificuldade nas operações, os quatro discentes incluídos na categoria VII. Apesar de não apresentarem erros, os mesmos evidenciaram deficiência em realizar alguns cálculos, o que não deveria se esperar de alunos que estão prestes a concluir o Ensino Médio.

Essa tabela refletiu o quanto ainda é deficiente a aprendizagem nas operações básicas. Como a Matemática é uma disciplina sequencial, essas dificuldades refletem nos demais conteúdos, já que dependem desses cálculos para sua aprendizagem efetiva.

Duas outras categorias que apresentaram números significativos de erros foram as que se referem à má interpretação de linguagens e distorção de definições e teoremas, que são as categorias II e III, pois somadas representam 16 erros.

Alguns estudantes demonstraram não compreender a linguagem matemática como, por exemplo, uma representação de um percentual. Isso ocorre pelo fato de o alunado não conhecer verdadeiramente o sentido dos símbolos matemáticos.

Granel (2003 apud Lorensatti 2009, p. 90) comenta:

> A linguagem matemática pode ser definida como um sistema simbólico, com símbolos próprios que se relacionam segundo determinadas regras. Esse conjunto de símbolos e regras deve ser entendido pela comunidade que o utiliza. A apropriação desse conhecimento é indissociável do processo de construção do conhecimento matemático. Está compreendido, na linguagem matemática, um processo de "tradução" da linguagem natural para uma linguagem formalizada, específica dessa disciplina.

Dessa forma, não basta conhecer a notação "%", é necessário entender o seu significado, o que ele representa matematicamente. Usá-lo de forma consciente e não decorada, para então, sua aplicabilidade fazer sentido.

Também foi evidenciado, nas resoluções apresentas pelos discentes, o uso indevido de regras e propriedades matemáticas. Eles usaram fórmulas existentes, mas que não se aplicavam à questão proposta. Isso porque muitos são desatentos na leitura dos enunciados ou memorizam ao invés de entenderem a que se refere cada uma delas.

Discutiremos a seguir, alguns dos tipos de erros apresentados no Questionário I dessa pesquisa. Para melhor compreensão do leitor, escolhemos fazer uma análise das categorias evidenciadas em cada questão, discutindo as possíveis causas dos problemas enfrentados pelos estudantes na sua resolução.

A primeira questão proposta foi a seguinte:

1) Jorge fez um empréstimo no Sistema *Price*, com os seguintes dados: Valor do empréstimo: 2500,00; Taxa de juros: 3% ao mês Número de prestações: 5 Qual o valor de cada prestação?
Uma solução: $p = c\frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}} = 2500\frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-5}} \cong 545{,}90$ ■

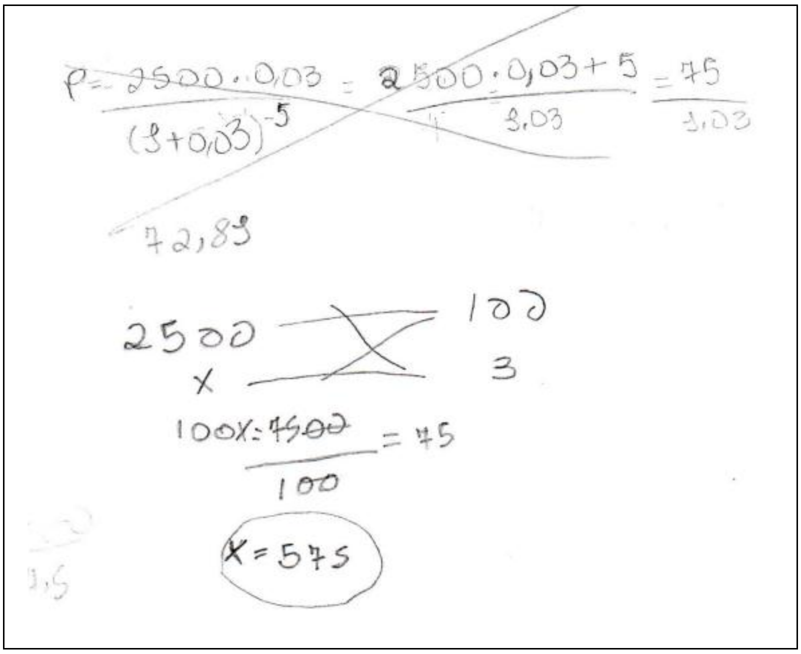
Podemos notar pela tabela 5, que os erros apresentados nessa questão se enquadraram nas categorias III, IV e VII. Sendo que, o maior número de erros cometidos está na categoria IV, com uma incidência de 11 casos dentre os 21 notificados nesse quesito.

Um erro comum na categoria III relativo a essa questão foi que, equivocadamente, os alunos dividiram o valor do empréstimo em 5 prestações iguais e, em seguida, calcularam 3% de 2.500, adicionando o valor encontrado a cada parcela. Dessa forma, os alunos consideram que os juros mensais são fixos, o que não se aplica no caso do Sistema *Price*.

Esse erro foi cometido por 6 estudantes, pois levaram em conta que os juros mensais seriam iguais e equivalentes a 3% do valor do empréstimo. Isso pode ter ocorrido pelo fato de os alunos não associarem o tipo de amortização com o comportamento da dívida em cada período. Nesse sistema, os juros são cada vez menores, embora as prestações sejam fixas.

Podemos exemplificar essa ocorrência pela resolução do estudante A34:

Figura 1: Protocolo do aluno A34



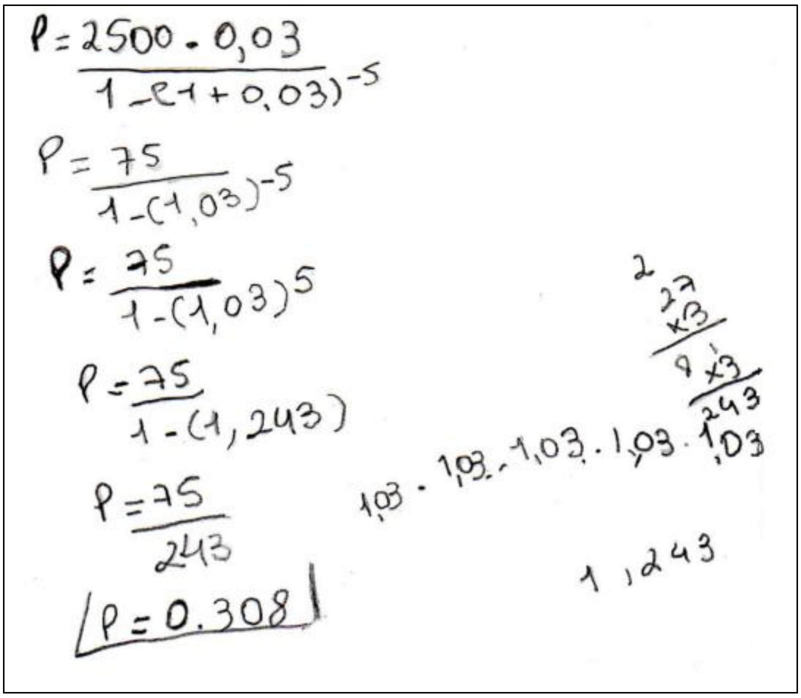
Fonte: Acervo da pesquisa

Este caso nos interessou bastante, pelo fato de o aluno resolver de duas maneiras diferentes. Observe que ele primeiramente tenta resolver usando a fórmula, que foi posta de forma incorreta, e manipulada erroneamente, e se depara com uma solução absurda, já que o valor total a ser pago seria inferior ao valor do empréstimo. É possível que ele tenha feito a verificação e notado que sua resposta não fazia sentido. Note que ele risca essa resolução e parte para outra estratégia. Em seguida, o aluno resolve considerando os juros fixos, citados anteriormente. Embora tenha errado novamente, sua nova resposta faz mais sentido.

É comum ocorrer esse tipo de equívoco, devido à maneira como os alunos assimilam o conhecimento. Muitos sabem calcular juros relativos à determinada taxa, porém, não compreendem os sistemas de capitalização e de amortização. Apenas memorizam fórmulas e aplicam sem compreenderem, de fato, seu significado.

Os principais erros associados na categoria IV, nessa questão, foram em relação à adição, multiplicação, divisão, e potenciação. Todos os alunos que apresentaram esse tipo de erro identificaram a fórmula corretamente e conseguiram conduzir a questão até se depararem com a subtração de um número inteiro por uma fração. Além disso, alguns erraram a potência com expoente negativo. Outros, embora tenham aplicado a definição de potenciação de forma correta, erraram na multiplicação. Vejamos a seguir, o protocolo do aluno A11:

Figura 2: Protocolo do aluno A11



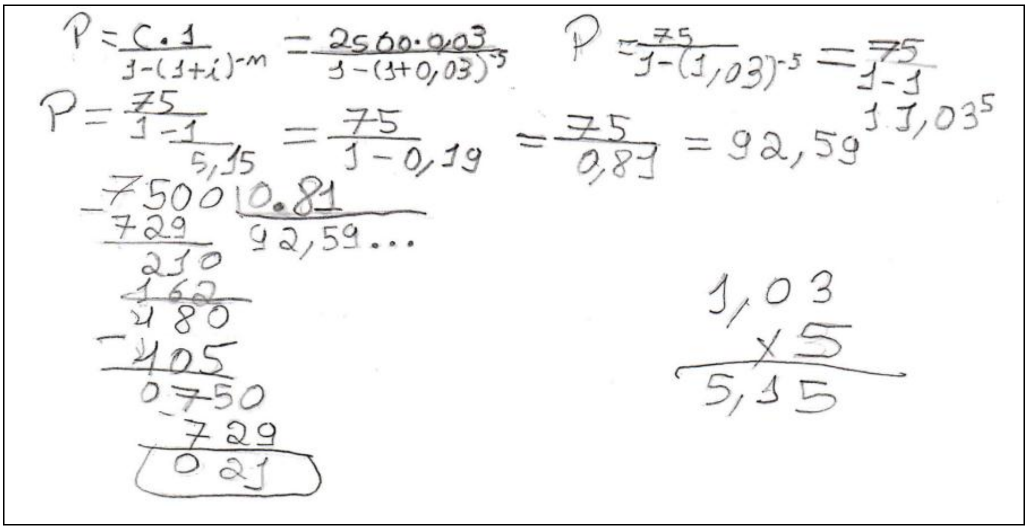
Fonte: Acervo da pesquisa

Analisando a resolução do discente, percebemos que ele comete vários equívocos, mas o primeiro foi desconsiderar o sinal negativo do expoente. É possível que ele acredite ser a mesma coisa, não importa o sinal, e sim o valor numérico. Em seguida, ele aplica a definição correta de potenciação, expressando o produto $(1{,}03).(1{,}03).(1{,}03).(1{,}03).(1{,}03)$, no entanto, ele resolve, possivelmente, primeiro a potência da parte inteira, $1^5 = 1$, e separadamente calculou a potência da parte decimal $03^5 = 243$, resultando $1{,}243$. Notamos ainda que ele calcula erroneamente a subtração $(1 - 1{,}243)$. Ele não se dá conta que o resultado é um número negativo e, como a diferença entre as partes inteiras é igual a zero, ele desconsidera que 243 é a parte decimal do número.

Essa é uma situação preocupante para nós, professores. Várias dificuldades com as operações básicas foram apresentadas e nos faz refletir sobre a aprendizagem dos alunos em conteúdos básicos. É importante revermos as estratégias utilizadas no ensino desses assuntos e darmos bastante atenção às operações básicas, já que vem se mostrando problemática nos demais conteúdos.

Um erro que nos deparamos constantemente nas turmas de Ensino Médio é o aluno, ao resolver uma potência, multiplicar a base pelo expoente. Por isso, confesso que esperava grande incidência desse tipo de erro. Todavia, apenas uma ocorrência foi registrada, como podemos observar no protocolo do aluno A21:

Figura 3: Protocolo do aluno A21

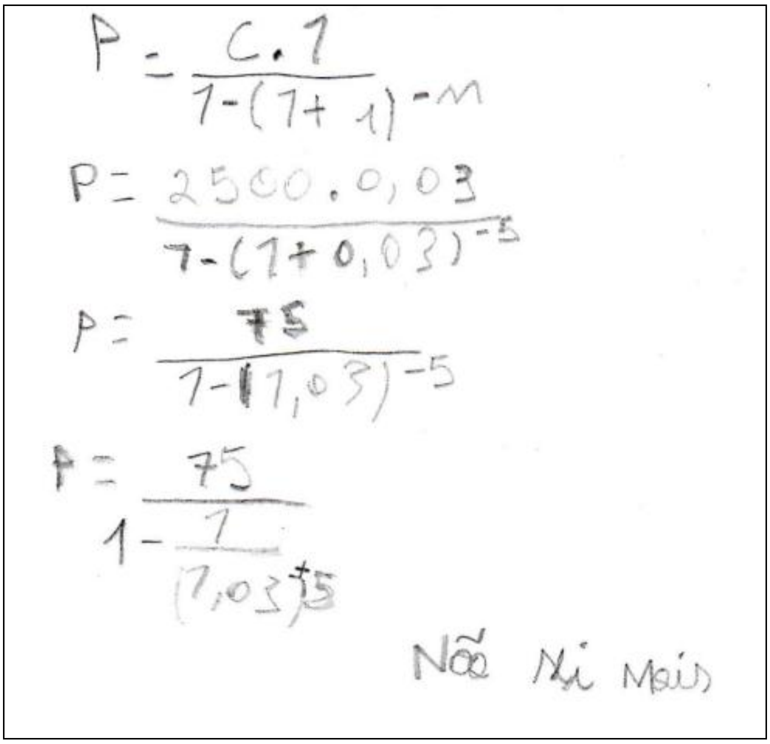


Fonte: Acervo da pesquisa

Percebemos que o aluno não apresentou problemas com as demais operações, seu erro foi apenas na definição de potenciação.

Essa questão também apresentou casos em que os alunos pararam de resolver porque não sabiam mais prosseguir, por isso criamos a categoria VII. Os quatro discentes incluídos nessa categoria pararam as suas resoluções no ponto em que, para concluí-las, precisavam apenas realizar operações básicas, o que pode ser visto na resolução do estudante A4, por exemplo:

Figura 4: Protocolo do aluno A4



Fonte: Acervo da pesquisa

Observe que o aluno, assim como os demais, teve dificuldade em resolver a expressão que continha, além de uma potência, uma fração. Dois tópicos importantes e que vêm se apresentando como grandes obstáculos para os discentes.

É comum os alunos apresentarem esse tipo de dificuldade ao iniciarem os trabalhos com frações. Por isso, é necessário ter bastante cuidado ao se ensinar esses conteúdos e dar atenção às dificuldades evidenciadas, para que conceitos equivocados não se cristalizem, vindo a ser um problema na aprendizagem de outros conteúdos.

A segunda questão proposta trata de calcular aumentos e descontos, como podemos perceber:

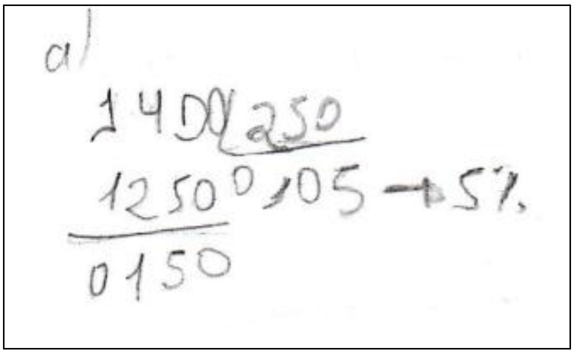
2) Calcule:
a) 14% de 250
b) Um aumento de 22,5% de 420
c) Um desconto de 15% de 120

Uma solução: a) $0{,}14 \times 250 = 35{,}00$
b) $c_1 = c_0(1+i) = 420 \times (1+0{,}225) = 514{,}50$
$c_1 = c_0(1-i) = 120 \times (1-0{,}15) = 102{,}00$ ■

Essa foi a questão que apresentou o maior número de acertos. Seus erros foram analisados por item e serão apresentados separadamente. No item (a), as categorias ocorridas foram II, IV e VI.

Na categoria II, apenas um aluno se encaixou, por escrever a linguagem percentual inadequadamente. Como podemos notar a seguir, o aluno A3, ao invés de dividir a taxa por 100 e multiplicar por 250, ele faz a operação inversa, multiplica a taxa por 100 e divide por 250. Como podemos constatar no seu protocolo.

Figura 5: Protocolo do aluno A3

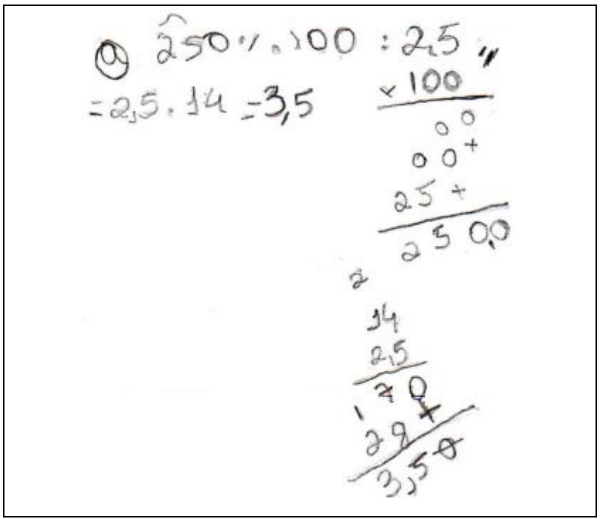


Fonte: Acervo da pesquisa

O estudante apresentou uma resolução totalmente equivocada. Isso mostra que ele não conhece o significado de um percentual, inclusive, por apresentar o resultado ainda na forma de porcentagem.

Na categoria IV, dois alunos apresentaram problemas na multiplicação com números decimais, evidenciado a seguir pelo estudante A11:

Figura 6: Protocolo do aluno A11

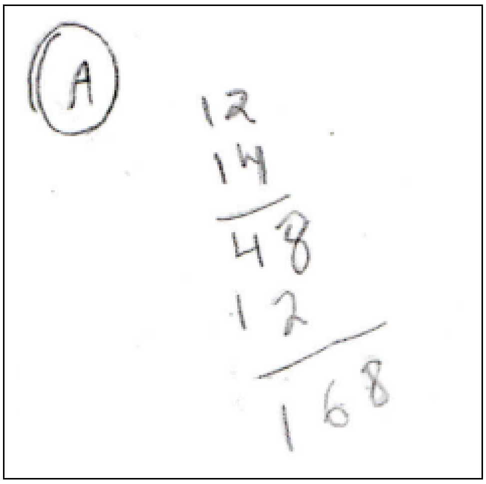


Fonte: Acervo da pesquisa

Perceba que ele multiplica corretamente, no entanto, coloca a vírgula de forma errada. Ele desconsidera o zero, para então posicionar a vírgula a uma casa decimal. É provável que ele estivesse desatento, uma vez que ele não fez a mesma coisa ao multiplicar $2{,}5$ por 100.

Apresentamos, a seguir, um exemplar de um erro cometido nesse item, enquadrado na categoria VI, sob a justificativa que o discente A30 utilizou raciocínios falaciosos em sua resolução.

Figura 7: Protocolo do aluno A30

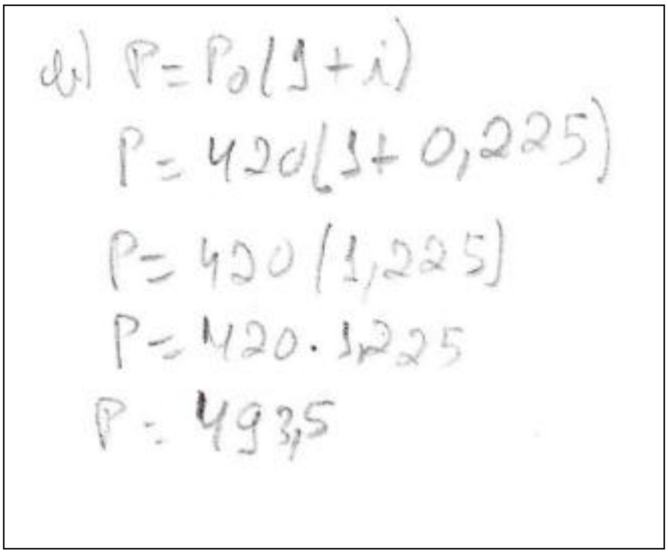


Fonte: Acervo da pesquisa

Este aluno cria uma resolução falaciosa, sem sentido, pois usa dados não apresentados na questão. Não ficou claro para nós o que ele pretendia com esses cálculos. O que notamos foi um total desconhecimento do aluno com o assunto. Se ele tivesse se apropriado do conceito de percentual, perceberia que o resultado obtido é absurdo.

No item (b), os maiores erros foram técnicos, categoria IV. Todos os erros associados a esse grupo estavam relacionados à multiplicação com números decimais, como o apresentado no protocolo do discente A18:

Figura 8: Protocolo do aluno A18

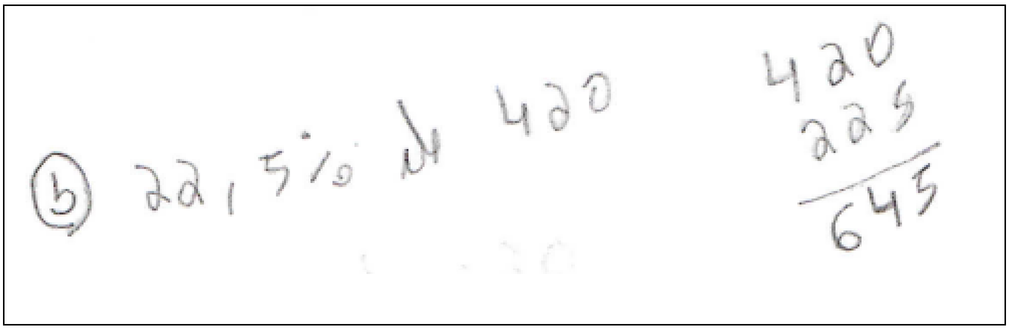


Fonte: Acervo da pesquisa

O estudante compreendeu o que era pedido na questão e utilizou a fórmula correta, mas errou a multiplicação com número decimal. É comum os alunos apresentarem esse tipo de dificuldade nas aulas de matemática.

Novamente, o aluno A30 foi o único a apresentar raciocínios falaciosos e ser enquadrado na categoria VI. Como podemos perceber, no protocolo que segue, ele soma a taxa com o valor, e ainda desconsidera a vírgula. Ou seja, além de não aplicar as operações relativas ao cálculo de percentual, ele comete erros para realizar a adição com números decimais.

Figura 9: Protocolo do aluno A30

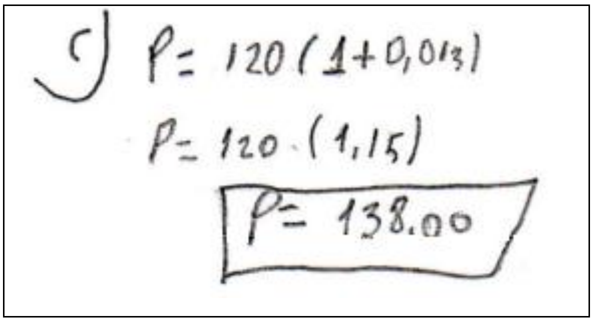


Fonte: Acervo da pesquisa

No item (c), relativo ao cálculo de um desconto, os erros foram todos enquadrados nas categorias III, IV e VI.

Apenas um erro nesse quesito está associado ao uso indevido de um teorema válido, ou seja, a resolução do aluno A22 foi encaixada na categoria III por ter utilizado uma fórmula correta, porém inadequada para a questão. O estudante, equivocadamente, calculou corretamente um aumento, no entanto, o quesito se tratava de um desconto. Como podemos perceber:

Figura 10: Protocolo do aluno A22

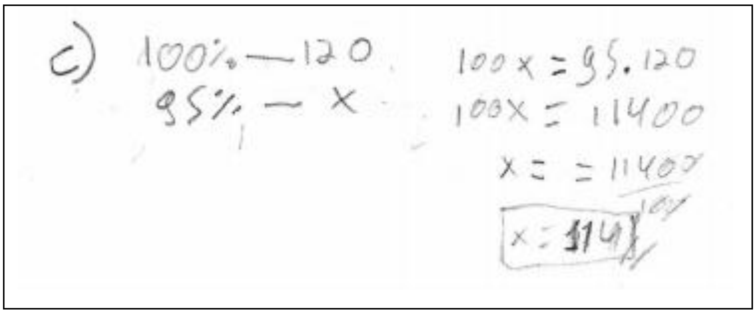


Fonte: Acervo da pesquisa

Possivelmente, esse erro foi decorrente de falta de atenção do estudante ao ler a questão, ou ainda, incompreensão dos significados das fórmulas e suas aplicações em cada situação.

Dentre os discentes cujos erros se enquadraram na categoria IV, destacamos o aluno A7, que apresenta um equívoco na subtração, como vemos a seguir:

Figura 11: Protocolo do aluno A7



Fonte: Acervo da pesquisa

Note que o aluno utiliza um método correto de resolução para essa questão, o único erro cometido foi na subtração $100 - 15$ que, por um descuido, ele utiliza 95 e não 85.

Mais uma vez, o discente A30 se utiliza de uma inferência logicamente inválida, o método é inexistente e sem fundamento para o cálculo de desconto.

Figura 12: Protocolo do aluno A30


c) Um desconto de 15% de 120 = 105

Fonte: Acervo da pesquisa

Observe que, da mesma forma que ele soma o valor e a taxa no item anterior, ele subtrai nesse caso que se refere a desconto, confirmando seu desconhecimento sobre porcentagem.

A questão 3 trata-se da capitalização a juros simples e teve o seguinte enunciado:

3) Use os dados de cada item para calcular o que se pede:

a) Sabendo que $C = 240{,}00$, i= $2{,}5\%\ a.m$ e t= $36\ meses$. Calcule os juros simples dessa aplicação.

b) Sabendo que $J = 547{,}20$, i= $6\%\ a.m$ e C= $380{,}00$. Quanto tempo deve durar tal aplicação a juros simples?

Uma solução: a) $j = c.i.t = 240.0{,}025.36 = 216{,}00$

b) $j = c.i.t$

$547{,}20 = 380.0{,}06.t$

$547{,}20 = 22{,}8.t$

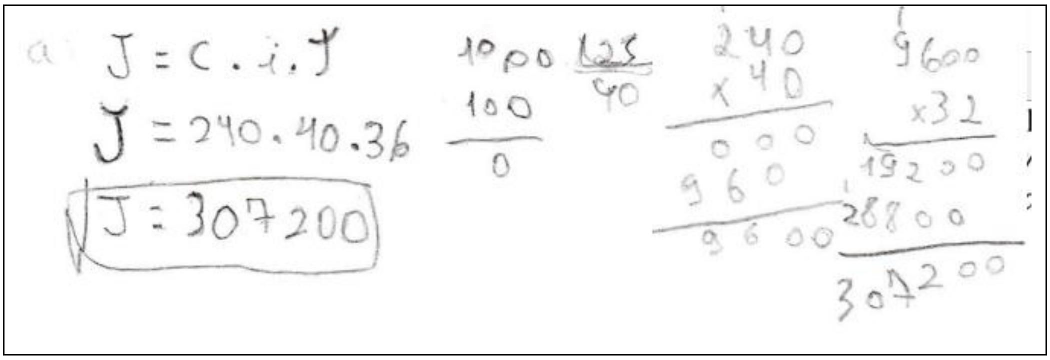
$t = \frac{547{,}20}{22{,}8}$

$t = 24\ meses$■

Nesta questão, as categorias evidenciadas foram apenas a II e a IV, as que tratam de tradução incorreta dos dados para outra linguagem e manipulações algébricas, respectivamente.

No item (a), todos os 6 erros foram incluídos na categoria II, cujos erros estão relacionados em transformar a taxa da linguagem percentual para a de número decimal. O protocolo do aluno A3 é um exemplo desse tipo de erro.

Figura 13: Protocolo do aluno A3

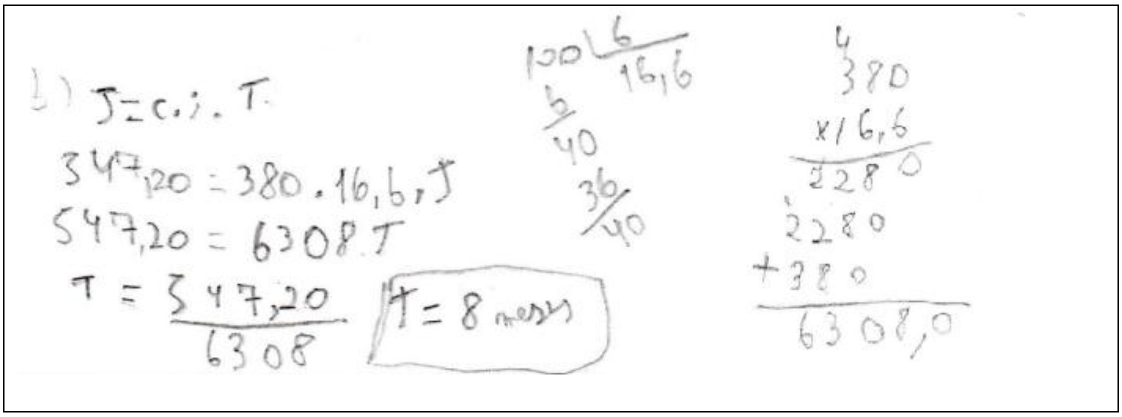


Fonte: Acervo da pesquisa

Note que ao invés de dividir a taxa 2,5 por 100, o aluno faz uma tentativa de dividir 100 pela taxa 2,5. O que mostra que ele conhece a notação de porcentagem, mas não compreende o seu significado. Ele, ainda substitui corretamente o valor de t na fórmula, mas ao efetivar os cálculos usa 32 ao invés de 36.

Já no item (b), as categorias apresentadas foram II e IV. Na categoria II, somente o aluno A3 foi incluído, vejamos seu protocolo:

Figura 14: Protocolo do aluno A3

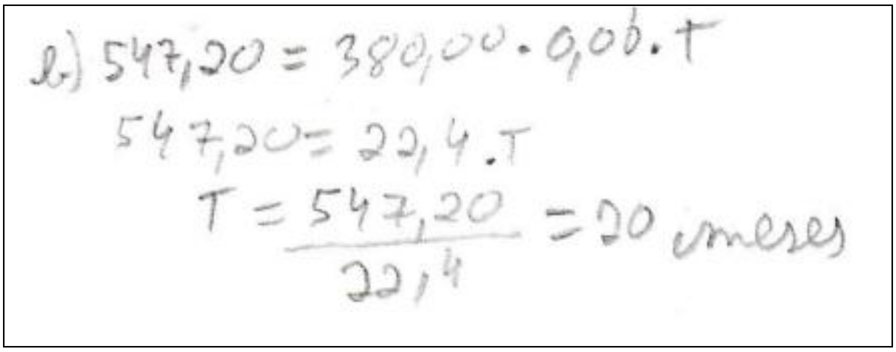


Fonte: Acervo da pesquisa

Perceba que ele comete o mesmo erro que cometeu no item (a), por não saber transformar a taxa percentual, mostrando mais uma vez, que não consegue trabalhar com porcentagem. Ele ainda erra a operação de divisão com números decimais.

A categoria mais representada neste item foi a IV, com incidência de 3 erros. Usaremos o protocolo do discente A18 para exemplificar:

Figura 15: Protocolo do aluno A18



b) $547,20 = 380,00 \cdot 0,06 \cdot T$

$547,20 = 22,4 \cdot T$

$T = \frac{547,20}{22,4} = 20$ meses

Fonte: Acervo da pesquisa

Observe que ele identifica a fórmula, manipula corretamente, porém resolve uma multiplicação errada, pois $(380,00.0,06) = 22,8$ e não $22,4$, como apresentou o discente. Note ainda, que a divisão também está calculada errada, uma vez que $547,20 \div 22,4 \cong 24,43$ e não 20. Mais uma vez, a dificuldade nas operações básicas é determinante no insucesso do desempenho dos alunos.

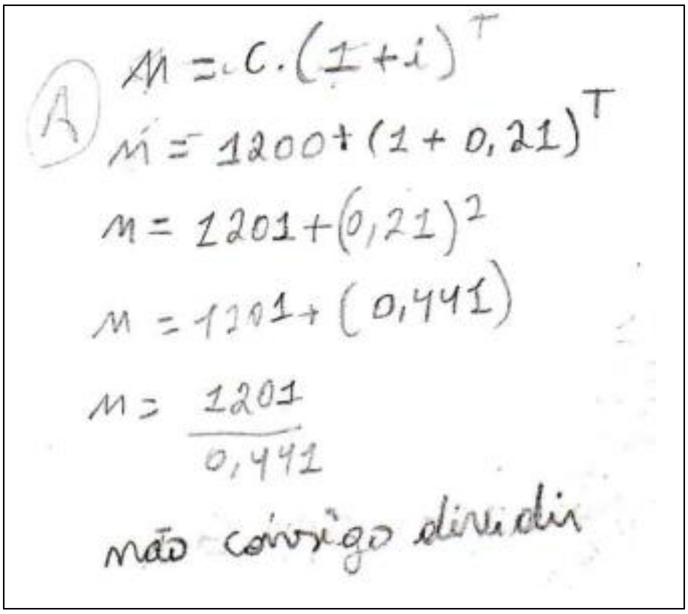
A quarta questão proposta diz respeito à capitalização a juros compostos e teve como enunciado:

4) Use os dados de cada item para calcular o que se pede: **a)** Sabendo que $C = 1200,00$, i= $21\%\ a.a$ e t= $24\ meses$. Calcule o montante resultante dessa aplicação a juros compostos. **b)** Quanto rendeu de juros essa aplicação?
Uma solução: a) $M = C.(1+i)^t = 1200.(1+0,21)^2 = 1756,92$ b) $J = M - C = 1756,92 - 1200 = 556,92$■

Nesta questão, as categorias inseridas foram II, IV e VI, linguagem mal interpretada, erros técnicos e inferência logicamente inválida, respectivamente. No item (a), classificamos os erros nas categorias IV e VI.

Para exemplificar os erros da categoria IV, vamos usar o protocolo do discente A31 a seguir:

Figura 16: Protocolo do aluno A31



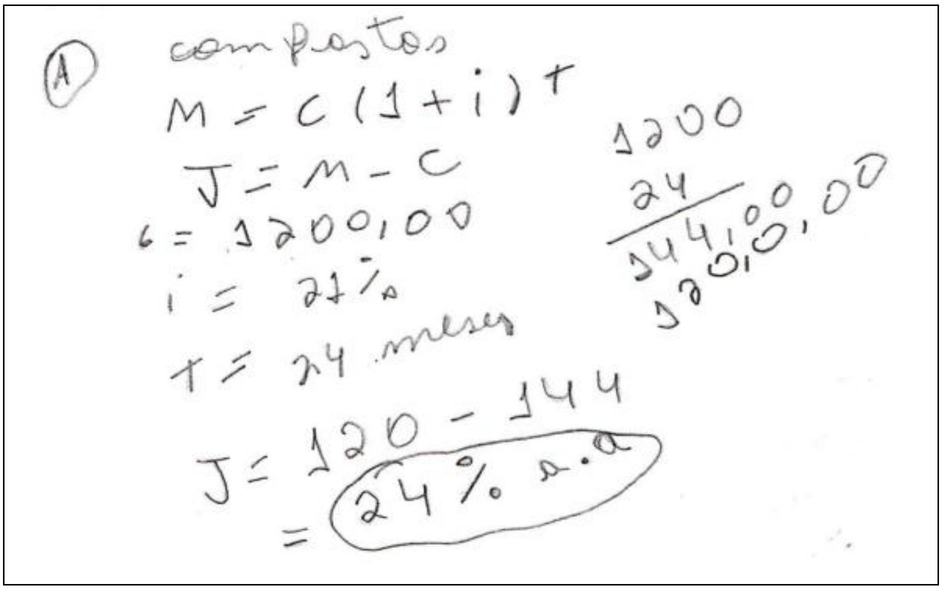
Fonte: Acervo da pesquisa

Note que ele expressa a fórmula correta, no entanto, no momento da substituição dos dados, ele troca o sinal de multiplicação pelo da adição. Mesmo se estivesse correto o sinal, ele resolve a expressão numérica de forma errada, ao desconsiderar que, em uma expressão, devemos resolver primeiramente, os parênteses. Além disso, ele expressa sua dificuldade em resolver uma divisão.

A troca pode ser justificada pela falta de atenção ao substituir os dados, ou a falta de conhecimento. Os discentes ainda apresentam falhas ao resolver expressões, pois tendem a calcular na ordem em que as operações se apresentam. O problema na divisão reflete mais uma vez a dificuldade apresentada constantemente na sala de aula com as operações básicas.

Na categoria VI, nessa questão, foi inserido novamente o erro do estudante A30, que utiliza um raciocínio incorreto na resolução, apesar de ter exposto a fórmula correta para resolver o problema.

Figura 17: Protocolo do aluno A30

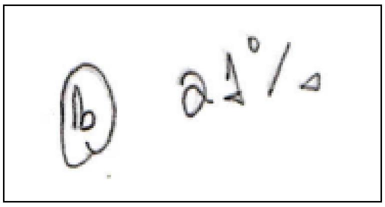


Fonte: Acervo da pesquisa

Perceba que ele soma a taxa à quantia (e soma errado), apresentando uma resolução incabível, embora tenha expressado a fórmula correta para a solução do problema. Esse fato comprova sua dificuldade em compreender sobre o conteúdo envolvendo porcentagem.

No item (b) foram categorizados erros do tipo II e IV, linguagem mal interpretada e erros técnicos, respectivamente. Na categoria II, somente o erro do discente A30 foi incluído.

Figura 18: Protocolo do aluno A30

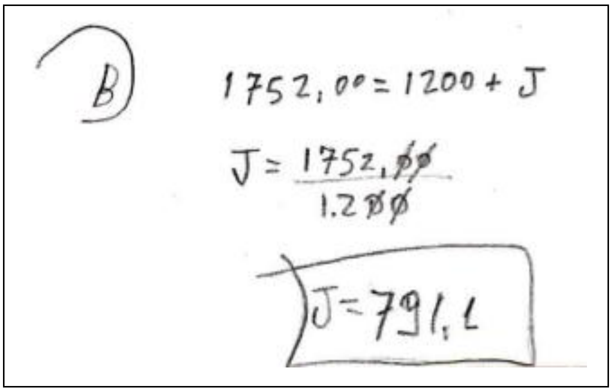


Fonte: Acervo da pesquisa

Note que o aluno responde ao item com a taxa de juros capitalizada anualmente, e não calcula o valor dos juros obtidos ao final dessa aplicação. É possível que ele não entenda que o rendimento do investimento se refere à quantia obtida ao final do tempo que durou a operação e não igual à taxa percentual na qual foi aplicado o dinheiro.

Somente o erro do aluno A22 foi inserido na categoria IV, erros técnicos, nesse item, como pode ser visto através do seu protocolo exposto a seguir:

Figura 19: Protocolo do aluno A22

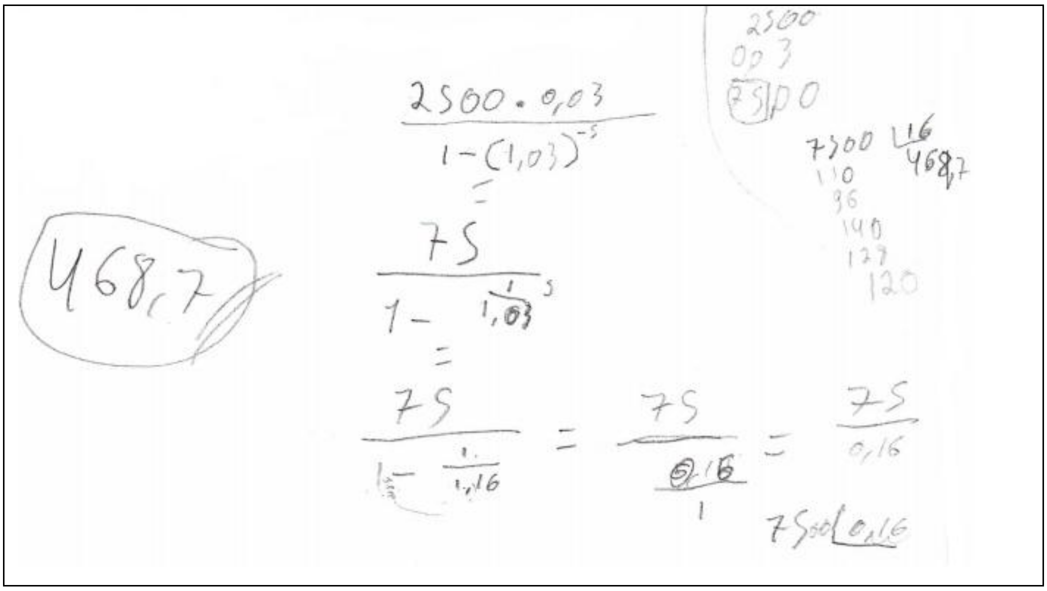


Fonte: Acervo da pesquisa

O aluno utiliza a fórmula e os dados corretos, mas manipula-os de forma incorreta. Ao invés de ele subtrair o capital do montante para obter os juros, ele divide. Mais que um erro de manipulação algébrica, ele não entende o conceito de juros, que é a diferença entre o montante e o capital.

É importante destacar que além dos erros mencionados em nossa discussão, várias questões poderiam ser enquadradas na categoria V, embora não tenhamos nenhum erro nessa categoria. Por exemplo, um aluno que fez todos os procedimentos corretos e errou o último passo, uma divisão, por exemplo, o primeiro erro cometido foi a falha na operação, no entanto, se ele tivesse verificado a solução encontrada, poderia notar incoerência, retomar a resolução e, talvez, encontrar o erro cometido. Podemos constatar esses casos nos seguintes protocolos:

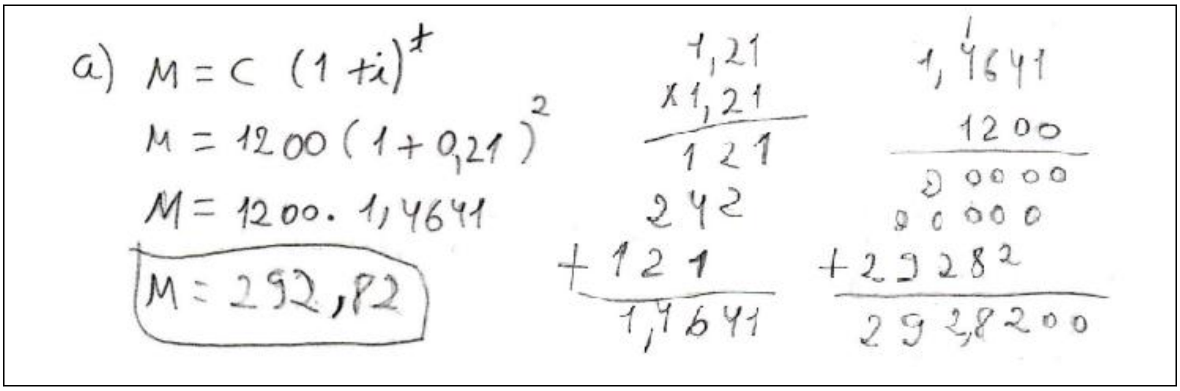
Figura 20: Protocolo do aluno A7. Questão 1



Fonte: Acervo da pesquisa

É provável que o aluno não tenha verificado sua resolução, pois caso tivesse feito, perceberia que o valor total pago pelo empréstimo seria menor que o valor contratado.

Figura 21: Protocolo do aluno A3. Questão 4.



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, o estudante encontra um montante menor que o capital investido, o que não faz sentido, pois o montante deveria ser maior que o capital aplicado. Se o aluno tivesse analisado a resposta encontrada, teria notado que sua solução estava inadequada.

Daí a importância da verificação. Alguns casos são muito fáceis de identificar incoerência, como foram os casos dos dois exemplos citados anteriormente.

Mediante os resultados encontrados nestes protocolos, é notório que, embora muitos alunos tenham apresentado bastante dificuldade no conteúdo de Matemática Financeira, visto que um número significativo de estudantes deixou as questões em branco, é comum a presença de erros com as operações básicas, o que é preocupante e desanimador, uma vez que estão prestes a concluir o Ensino Médio. Concluímos que grande parte do baixo desempenho nos conteúdos matemáticos é proveniente do seu déficit com os números e suas operações. Diante disso, é importante, tentar sanar tais dificuldades a fim de obter um bom desempenho na aprendizagem dos conteúdos de matemática. Sobre isso, Feltes (2007) se apoia na nas ideias de Ponte (2003) para afirmar que os alunos

> [...] precisam saber identificar, compreender e saber usar os números, as operações com os números e as relações numéricas. Os alunos precisam saber interpretar criticamente o modo como os números são usados na vida de todos os dias e a escola deve procurar desenvolver esse tipo de competência. (PONTE, apud Feltes, 2007, p. 65)

É necessário que a escola e o professor não se acomodem com o fato de os discentes não conseguirem efetuar cálculos simples, já que a aprendizagem efetiva dos demais conteúdos depende, em grande parte da boa relação com os números e suas operações básicas.

CAPÍTULO 4

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Após ter feito toda a análise do primeiro questionário utilizando a análise de erros de Cury (1994) e a Análise Qualitativa de Conteúdo (Hsieh e Shannon, 2005), faremos a análise do Questionário II, também, utilizando a análise de conteúdo, mas agora sob a perspectiva da Análise de Conteúdo Direcionada.

Faremos como Mateus (2015), que lança mão de uma teoria existente antes mesmo de iniciar a codificação dos dados, a análise dados coletados na aplicação do questionário que envolve situações-problema relacionadas a conteúdos de Matemática Financeira.

Optamos por esta vertente por entendermos que as quatro fases para a resolução de problemas, de Polya (1995), poderiam nos dar os elementos suficientes para a análise e discussão dos dados obtidos com a aplicação deste questionário.

Vale salientar, que o questionário ao qual nos referimos é composto de quatro situações-problema, que envolvem os mesmos assuntos de Matemática Financeira que o questionário analisado no capítulo anterior.

Uma situação-problema oferece um leque de oportunidades de raciocínios, pois desafia a curiosidade pela descoberta da solução. Esta necessita de traçar estratégias para a busca por uma resposta logicamente correta favorece o aprendizado e a criticidade dos alunos. Daí a resolução de problemas consiste em uma importante ferramenta didática, por proporcionar o desenvolvimento intelectual do aluno. Almeida (2012) usa as palavras de Dante (1991) para afirmar que:

> “Devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo”. (DANTE (1991), apud ALMEIDA, 2012, p.16)

Diante disso, é necessário que os estudantes sejam desafiados a aprender a resolver problemas, não a memorizar estratégias de resolução repetitivas. Cada problema pode ser resolvido de diferentes maneiras, cabe aos alunos desenvolverem a melhor estratégia na resolução de cada um.

Segundo Polya (1995, p.3), para a resolução de qualquer situação-problema, devem ser consideradas quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Para a análise das respostas dos alunos ao questionário II, utilizamos as fases consideradas por Polya (1995) para a resolução de problemas, caracterizando a fase na qual o aluno apresenta dificuldade na resolução. Para isso, classificamos cada categoria da seguinte maneira:

— **Dificuldade de compreensão:** consideramos nessa categoria, as questões em branco, as que os alunos justificaram não saber resolver, as questões em que houve uso de fórmulas inadequadas e ideia que não tinha lógica.
— **Dificuldade de planejamento:** foram consideradas as questões em que os discentes expressaram a fórmula, mas substituíram os dados errados.
— **Dificuldade de execução:** incluímos nessa categoria, os casos em que os estudantes conseguiram expressar a fórmula, conseguiram substituir os dados, mas não conseguiram resolver até encontrar a solução.
— **Dificuldade de retrospecto:** Consideramos os casos em que os alunos conseguiram encontrar uma resposta errada, mas não se deram conta de que ela não era a solução para o problema.

A seguir, estão as situações-problema que foram propostas para essa fase, referentes aos mesmos assuntos de Matemática Financeira que foram inseridos no Questionário I, mas não apresentados na mesma ordem. Acompanhada delas, segue uma solução para cada problema, uma vez que há várias maneiras para se chegar à mesma solução.

1) Um aparelho doméstico teve um reajuste de 4,5%, passando a custar R$ 572,00.
a) Qual o valor do aparelho antes do reajuste?
b) Se ao invés de um aumento fosse dado um desconto, com mesma taxa percentual, qual seria o valor do aparelho?

2) Pedro, sonhando fazer uma viagem daqui 3 anos, aplicou suas economias que totalizavam R$ 2340,00, à taxa de juros compostos de 24% ao ano.
a) Tendo em vista que ele não retirou nenhuma quantia para outro fim, quanto Pedro levará para sua viagem?
b) Quanto lhe rendeu essa aplicação?

3) Marta deseja obter R$ 612,00 de juros de uma aplicação de R$ 850,00 durante um ano e meio.
a) Qual a taxa mensal de juros simples à qual o capital deverá aplicado?
b) Qual a quantia que Marta deverá aplicar para obter os mesmos juros, se a taxa for de 3% ao mês?

4) Robert fez um empréstimo de R$ 2000,00, que será pago em 3 prestações mensais à taxa de juros de 4% ao mês, no Sistema *Price*. Qual o valor de cada prestação?

Uma solução:

1) a) $c_1 = c_0(1+i)$

$572 = c_0(1+0{,}045)$

$c_0 \cong 547{,}40$

b) $c_1 = c_0(1-i)$

$c_1 = 547{,}40.(1-0{,}045) \cong 522{,}80$■

2) a) $M = C.(1+i)^t$

$M = 2340.(1+0{,}24)^3 = 4461{,}50$

b) $J = M - C = 4461{,}50 - 2340 = 2121{,}50$■

3) a) $j = c.i.t$

$612 = 850.i.18$

$612 = 15300.i$

$i = \frac{612}{15300}$

$i = 0{,}04 = 4\%$

b) $j = c.i.t$

$612 = c.0{,}03.18$

$612 = 0{,}54.c$

$c = \frac{612}{0{,}54} \cong 1133{,}30$■

4) a) $p = c\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 2000\frac{0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-3}} \cong 720{,}70$■

A partir da categorização baseada nas fases sugeridas por Polya (1995), criamos uma tabela que expressa o número de erros em cada categoria, para podermos compreender em qual fase os alunos apresentam maior dificuldade durante a resolução de um problema.

Tabela 6: Número de casos por categoria no Questionário II

		Questionário II			
		Compreensão	**Planejamento**	**Execução**	**Retrospecto**
Questão 1	a)	32	--	1	--
(Aumentos e descontos)	b)	33	--	1	--
Questão 2	a)	17	1	5	2
(Juros Compostos)	b)	26	--	--	1
Questão 3	a)	13	3	2	3
(Juros Simples)	b)	21	2	--	--
Questão 4 (Sistema *Price*)		26	1	9	--

Fonte: Acervo da pesquisa

Vale ressaltar que, no item (b) da questão 2, dois alunos não foram incluídos em nenhuma categoria, pois o erro cometido deveu-se à falha no item (a). Como a questão necessitava do montante do item anterior para encontrar os juros, o aluno errou por tê-lo calculado errado, mas não no processo de resolução, uma vez que expressaram os juros como a diferença entre o montante e o capital.

Os dados da Tabela 6 confirmam a nossa suspeita de que a maior dificuldade enfrentada pelos alunos na resolução de problemas é a compreensão. Das quatro categorias, esse tipo de problema teve incidência em todas as questões.

Salmazo (2005 apud Buss 2007, p.4) afirma que

> [...] ler, implica compreender o que se está sendo expresso pela linguagem e, desta forma, entrar em comunicação com o autor. A leitura da palavra, do símbolo, ou a leitura do mundo, realiza-se plenamente quando o significado das coisas que estão representadas emerge pelo ato da interpretação.

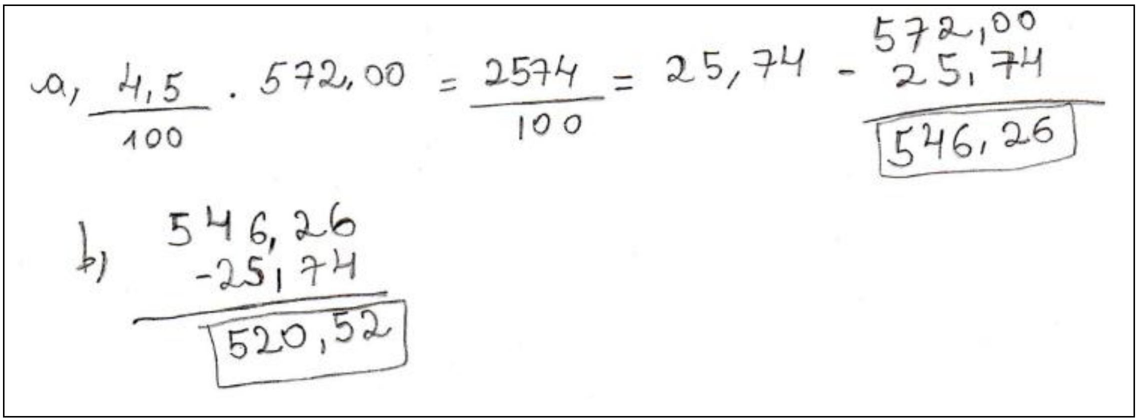
Foi evidenciado que os alunos apresentam grande dificuldade de interpretação, e esta por sua vez, está intimamente ligada à leitura, pois ler não é apenas pronunciar palavras, mas sim, entender seu significado. Os dados expressos na tabela nos dão indicativos que os discentes sequer conseguem entender o significado dos enunciados.

Optamos por fazer uma análise por categoria, e não por questão. Assim, iremos expor alguns exemplos incluídos em cada uma das fases de resolução, fazendo uma análise das dificuldades enfrentadas pelos alunos na resolução de problemas.

4.1 Dificuldade de compreensão

A fase de compreensão foi a que apresentou o maior número de dificuldades na resolução de todas as questões, como pode ser observado na tabela 6. A maior incidência foi na questão 1, referente a aumentos e descontos, que no Questionário I, apresentou o maior número de acertos. Ficou evidente que os estudantes sabem calcular aumentos e descontos, mas não conseguem interpretar os problemas referentes a esses mesmos assuntos. Podemos constatar nos protocolos a seguir:

Figura 22: Questão 1. Protocolo do aluno A20



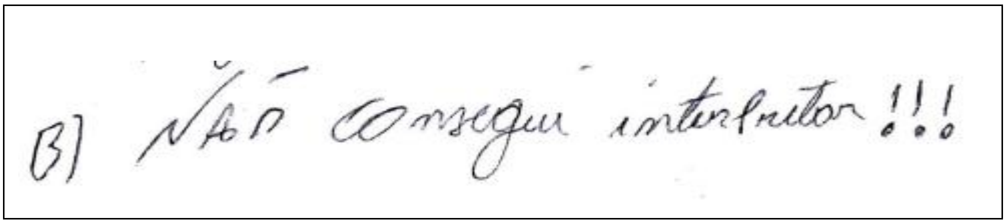
Fonte: Acervo da pesquisa

Observe que o aluno considera que o aumento a partir do valor do aparelho, seria equivalente ao desconto, com mesma taxa percentual, do valor reajustado. Ainda, no item (b), ele dá o desconto considerando o mesmo valor. Assim, o aluno demonstrou saber calcular, pois efetuou as operações corretamente, mas não compreendeu que o aumento e o desconto dados não foram calculados em cima do valor do aparelho.

Nessa questão, a maioria dos alunos cometeu o mesmo tipo de erro do aluno A20. Dos 33 discentes que não acertaram esse item, 32 erraram por não compreenderem o enunciado, destes, 7 estudantes deixaram em branco. Alguns desses casos ocorreram por alunos que tinham conseguido resolver esse tipo de questão no Questionário I, o que comprova que a maior dificuldade enfrentada é na compreensão do enunciado e não nos cálculos algébricos.

Verificamos que esse fato ocorreu em grande número, também, nas demais situações-problema. Vários alunos deixaram as questões em branco, a exemplo do aluno A27, que justificou não ter conseguido interpretar o item (b) da questão de número 3:

Figura 23: Questão 3, item (b). Protocolo do aluno A27



Fonte: Acervo da pesquisa

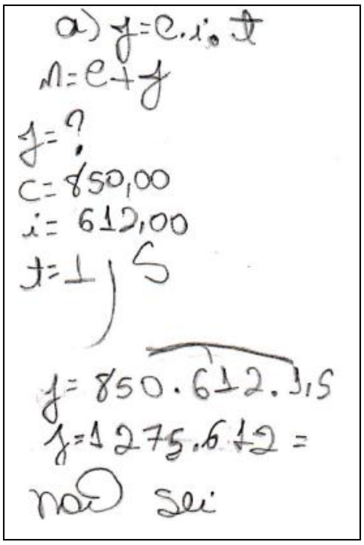
Esse tipo de justificativa foi apresentado pelos alunos no decorrer do questionário, uma vez que solicitamos para que eles expusessem as dificuldades apresentadas na resolução de cada questão, caso as tivessem.

Diante dos dados coletados ficou comprovado que a maior dificuldade apresentada pelos alunos na resolução de problemas é na compreensão do enunciado. Muitos discentes expuseram essa justificativa, além de termos concluído a partir dos estudantes que conseguiram resolver as questões do primeiro questionário e não conseguiram no segundo.

4.2 Dificuldade de planejamento

As dificuldades de planejamento não foram muito comuns entre os sujeitos pesquisados, porém dentre os que apresentaram dificuldade nesta categoria, a maior incidência foi na questão 3, referente a juros simples, com 5 ocorrências. Usaremos o protocolo do estudante A29 para exemplificar essa categoria.

Figura 24: Questão 3. Protocolo do aluno A29



a) $j = c \cdot i \cdot t$

$m = c + j$

$j = ?$

$c = 850{,}00$

$i = 612{,}00$

$t = 1{,}5$

$j = 850 \cdot 612 \cdot 1{,}5$

$j = 1275 \cdot 612 =$

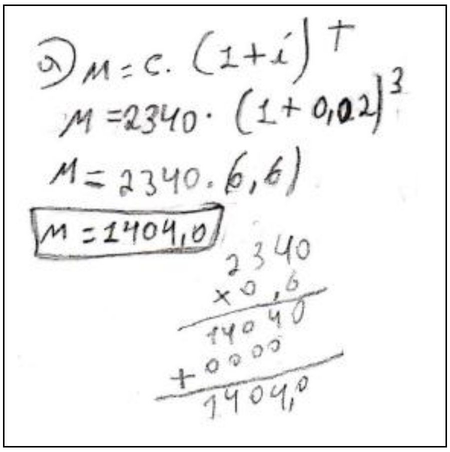
não sei

Fonte: Acervo da pesquisa

Notamos que o aluno lembrou a fórmula para o cálculo de juros simples, porém erra na substituição dos dados. Observe que ele confundiu a taxa e os juros, quando retirou os dados da questão. Isso pode ter ocorrido por ele não conseguir distinguir essas duas variáveis, ou por achar que sempre as questões buscam encontrar o valor da variável que se encontra isolada na fórmula, que é um erro que observamos frequentemente em nossas aulas de matemática.

Outro exemplo, que reforça a nossa ideia de que os alunos apresentam mais dificuldade na resolução de problemas, do que nos cálculos algébricos, é o apresentado pelo aluno A31, na questão referente a juros compostos.

Figura 25: Questão 2, item (a). Protocolo do aluno A31



Fonte: Acervo da pesquisa

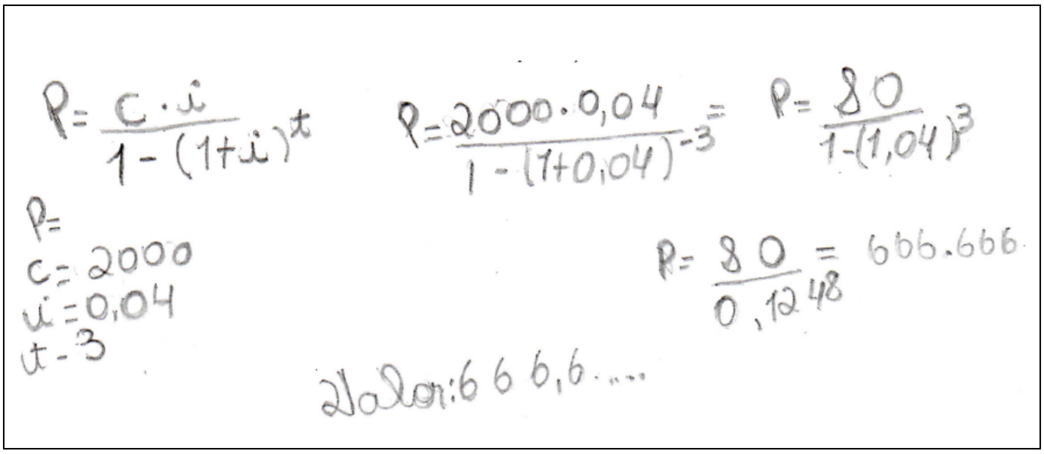
O aluno conseguiu expor a fórmula correta para a resolução do problema, porém utilizou a taxa errada na substituição dos dados. É possível que ele tenha transformado 24% em decimal de forma errada, de forma que ficasse $24\% = 0{,}024$ e considerou até a segunda casa decimal. Além disso, ao calcular a potência, o aluno não encontrou o valor esperado, mesmo para a taxa de $0{,}02$. Porém, como os cálculos realizados não constam no protocolo, não podemos inferir sobre as causas deste erro.

Dessa forma, é importante ser cuidadoso com as decisões tomadas e conferir com atenção as substituições dos dados que são utilizados na resolução de qualquer tipo de questão.

4.3 Dificuldade de execução

O segundo tipo de dificuldade mais cometido foi o relacionado com a execução, havendo maior ocorrência na questão 4, referente ao Sistema *Price*, com 9 casos, dentre os 18 incluídos nessa categoria. Um exemplo é a resolução do aluno A13:

Figura 26: Questão 4. Protocolo do aluno A13

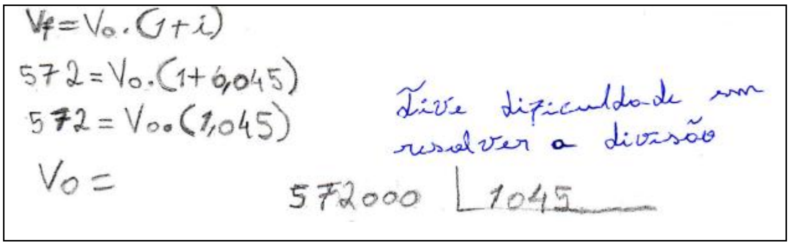


Fonte: Acervo da pesquisa

Note que o aluno compreendeu o problema, pois expõe corretamente a fórmula para a resolução, elaborou um plano, substituindo os dados de forma correta, porém cometeu um erro na execução, ao subtrair um número inteiro por um número decimal, além de não ter aplicado o conceito de uma potência com expoente negativo.

Esse tipo de dificuldade teve maior incidência na questão 4, mas também foi cometido nas outras questões. No protocolo a seguir, apresentamos o único caso relacionado à questão 1 que enquadramos nessa categoria.

Figura 27: Questão 1. Protocolo do aluno A8



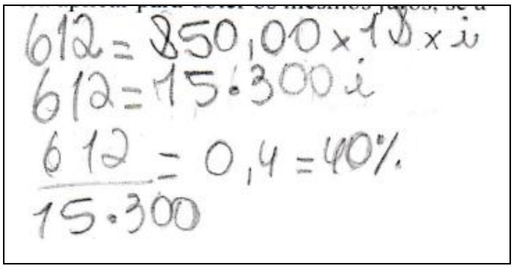
Fonte: Acervo da pesquisa

Perceba que ele utiliza uma fórmula correta para a resolução do problema, substitui corretamente os dados, compreendendo que o preço apresentado já correspondia com o valor reajustado, mas não conseguiu efetuar a divisão, para concluir sua resolução. Isso evidencia, mais uma vez, o quanto há um déficit na aprendizagem das operações básicas e como isso pode dificultar no desenvolvimento dos demais conteúdos matemáticos.

4.4 Dificuldade de retrospecto

Poucos casos foram incluídos na categoria relativa ao retrospecto, a saber, seis ocorrências. Destas, 3 foram na questão 2, referente a juros compostos, e três na questão 3, referente a juros simples. Na questão 3, podemos tomar como exemplo o caso do aluno A13:

Figura 28: Questão 3. Protocolo do aluno A13

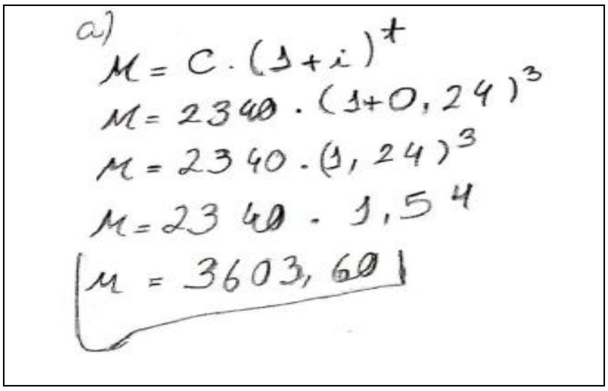


Fonte: Acervo da pesquisa

Observe que o discente compreende o problema, elabora um plano e o executa corretamente, até o último passo, que corresponde a uma divisão. Nesta, ele comete um erro e não percebe que a sua solução não faz sentido, já que uma taxa de 40% renderia muito mais que $R\$\ 612{,}00$ de juros em um ano e meio. Bastava uma simples conferência para que ele notasse a incoerência do resultado encontrado. Daí, a grande importância de se examinar a resolução de um problema.

Na questão 2, o aluno A17 esquece de resolver a potência $(1{,}24)^3$, e utiliza o resultado de $(1{,}24)^2$. O que podemos constatar a seguir:

Figura 29: Questão 2. Protocolo do aluno A17



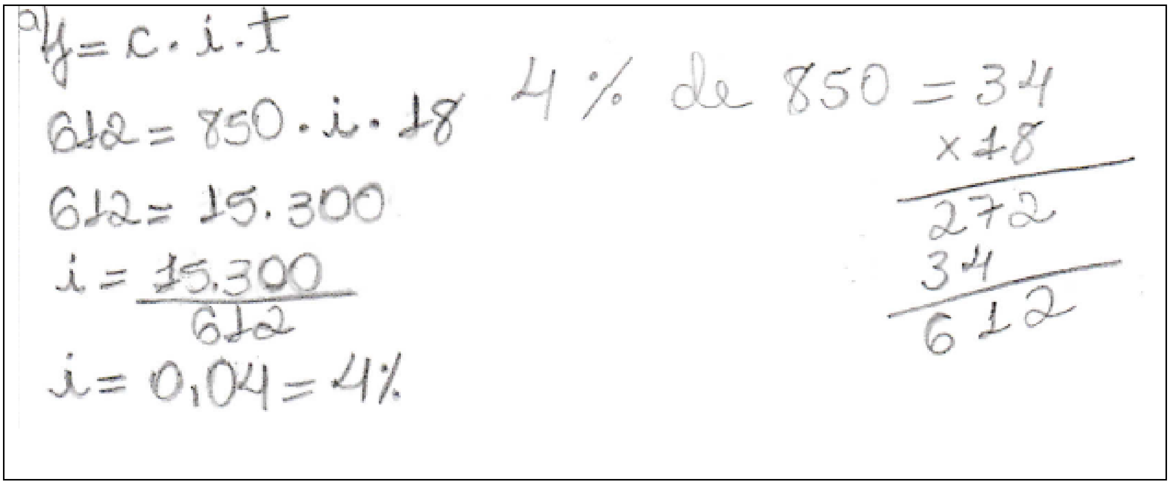
Fonte: Acervo da pesquisa

Perceba que ele faz uso da fórmula correta e executa seu plano, porém utiliza o resultado da potência de forma errada. É provável que ele tenha esquecido de multiplicar a base mais uma vez, ou então o fez e substituiu esse dado de forma errada. Se ele tivesse feito um retrospecto da sua resolução, seria possível ter descoberto sua falha.

Considerando as quatro etapas sugeridas por Polya (1995) para a resolução de problemas, encontramos um exemplo em que o aluno deixa explícito em sua resposta, que efetivamente realizou todas as fases, inclusive o retrospecto.

Diante desses dois exemplos, notamos a importância da verificação da solução encontrada. Segundo Polya (1995) quando fazemos uso desse artifício, verificando cada passo da resolução, teremos boas razões para crer que resolvemos corretamente um problema.

Figura 30: Questão 3. Protocolo do aluno A15



Fonte: Acervo da pesquisa

Observe que ele utiliza a fórmula para encontrar a taxa e em seguida confere se a mesma é realmente a solução do problema. Ele calcula o valor equivalente a 4% de R$ 850,00 e multiplica pelo número de períodos que durou a aplicação.

Nessa ótica, é necessário que o aluno conheça, além das fórmulas e métodos para se resolver problemas, o significado do enunciado, dos símbolos e notações utilizados nos conteúdos. Além disso, é importante que ele tenha consciência de que não existe um método de resolução para todos os problemas, cada um exige um pensar diferente, uma estratégia diferente, cabe a ele buscar meios que o leve a uma solução lógica, desenvolvendo o seu raciocínio e favorecendo a sua aprendizagem. Nisso, a metodologia de resolução de problemas tem muito a contribuir.

CONCLUSÕES

Apresentamos a seguir uma síntese do caminho percorrido na realização deste trabalho, as nossas reflexões sobre as questões de pesquisa com base nos resultados obtidos com a aplicação dos questionários, bem como nossas perspectivas para uma futura intervenção.

Nesta pesquisa, tivemos como objetivo identificar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas em Matemática Financeira bem como, analisar os erros cometidos por eles. Estes objetivos foram alcançados através da metodologia adotada, uma vez que a listagem dos erros e categorias em que foram agrupados favoreceu na análise dos dados.

Os instrumentos de coleta de dados foram dois questionários compostos de quatro questões cada um envolvendo assuntos de Matemática Financeira, elaborado de forma a responder as duas questões propostas. O primeiro, que teve como objetivo identificar os erros operacionais foi composto por questões com dados explícitos para serem feitos os cálculos e o segundo, por problemas que exigiam interpretação para a sua resolução com o intuito de identificar os problemas apresentados para a resolução de um problema.

Na análise do primeiro questionário foi utilizada além da análise qualitativa de conteúdo, a Análise de Erros (Cury, 1994) e o Modelo de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1986, 1987), citado por Cury (2007), com a finalidade de conhecer e categorizar os tipos de erros cometidos pelos alunos na resolução das questões. Já o segundo questionário, composto por problemas, na sua análise utilizamos análise qualitativa de conteúdo e as fases consideradas por Polya (1995) para a resolução de problemas.

O trabalho contou com a participação de 39 alunos do 3º ano do Ensino Médio de um colégio estadual do Alto Sertão Sergipano dentro do próprio ambiente escolar e se deu em dois momentos em diferentes dias, durante as aulas de matemática.

No desenvolvimento deste trabalho, fizemos uso de alguns estudos que nos deram suporte no percurso desta pesquisa que, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), trata-se de uma pesquisa de campo por ocorrer dentro do próprio ambiente em que ocorre o problema.

Utilizamos além da Análise de erros de Cury (1994), suas ideias e concepções sobre a utilização do erro como ferramenta de identificação e superação das dificuldades dos alunos, bem como a abordagem feita pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Estes também nos deram suporte sobre as orientações curriculares da utilização da resolução de problemas desde os anos iniciais até o Ensino Médio, fortalecendo sua importância como metodologia de aprendizagem em todos os níveis de ensino.

O modelo dos professores israelenses Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1986, 1987), citado por Cury (2007), se adequou ao nosso trabalho, favorecendo na categorização dos erros obtidos no primeiro questionário.

Polya (1995) nos orientou na análise do segundo questionário, trazendo uma sequência de passos que devem ser seguidos na resolução de problemas, denominados por ele como fases. Essa concepção concedeu uma visão sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao resolverem situações-problema e facilitou na resposta de uma das nossas questões de pesquisa.

Nossa opção pela análise de erros e a resolução de problemas se deu por acharmos relevante o estudo dos erros e suas causas, além de nos ajudar a tentar entender o porquê de os alunos apresentarem tanta dificuldade com a resolução de problemas.

Vale salientar que o propósito deste trabalho foi analisar os erros e as dificuldades dos estudantes em resolver problemas, para tanto, fizemos a escolha do conteúdo de Matemática Financeira, porém nenhum motivo especial impulsionou tal escolha.

No primeiro questionário, os erros destacados estavam relacionados a erros técnicos que correspondem a dificuldades em cálculos e manipulações algébricas. Um grande problema que encontramos foi a falta de domínio nas operações básicas. Era de se esperar que tais dificuldades já tivessem sido superadas, uma vez que os discentes se encontram no último ano do Ensino Médio. Assim, vê-se que esses discentes ainda carregam dificuldades com operações e isso faz com que eles não consigam um bom aproveitamento em outros conteúdos, em particular, em Matemática Financeira. Estas dificuldades não estão relacionadas apenas à compreensão de conceitos e definições, mas também a não terem apreendido conteúdos anteriores relativos a operações básicas e propriedades e suas manipulações algébricas.

Outros erros comuns estavam relacionados à linguagem mal interpretada e distorção de propriedades e teoremas. Os discentes demonstraram não conhecer alguns conceitos e notações e os usaram de forma incorreta. Isso nos faz entender que eles podem até conhecer as fórmulas, mas não sabem como e quando devem usar, pois não compreendem o significado de cada uma e suas aplicações.

Alguns alunos também apresentaram erros nas transformações das taxas percentuais em decimais, pois demonstraram não compreender o significado de um percentual.

Muitos dos erros apresentados poderiam ter sido percebidos se os discentes verificassem a solução encontrada. Alguns resultados eram fáceis de identificar incoerência. Isso mostra que eles se preocupam apenas em resolver e encontrar uma resposta.

Estes mesmos erros são encontrados durante a nossa prática educativa, apesar de todos os nossos esforços em saná-los. O problema persiste, nos preocupa bastante e gera uma sensação de fracasso profissional, mesmo entendendo que a matemática admite falhas no processo de construção do conhecimento.

Na análise do segundo questionário, utilizamos as categorias sugeridas por Polya (1995) e que foram apresentadas por nós como dificuldade de compreensão, dificuldade de planejamento, dificuldade de execução e dificuldade de retrospecto.

A categoria que apresentou o maior número de incidência foi a relacionada a problemas de compreensão. Muitos alunos se equivocaram na interpretação dos enunciados e outros deixaram em branco justificando não terem entendido o problema.

A dificuldade de planejamento foi apresentando por poucos alunos. Os erros dessa categoria estavam relacionados aos casos em que os discentes expuseram a fórmula para a resolução, porém utilizaram dados errados. Ou os casos em que utilizaram uma fórmula inadequada para o problema.

Além da dificuldade de compreensão, muitos estudantes apresentaram dificuldade na execução do plano. Ocorreram alguns problemas com as manipulações algébricas e principalmente, com as operações básicas, em grande parte, nas divisões.

As dificuldades de retrospecto não ocorreram em grande número devido ao fato de termos optado por analisar apenas o primeiro erro. No entanto, alguns erros poderiam ser inseridos nessa categoria, uma vez que alguns resultados eram muito incoerentes e com uma simples verificação poderiam ser percebidos.

Diante desses resultados e discussões que foram feitos nos capítulos anteriores, podemos expor algumas reflexões e dar respostas às nossas questões de pesquisa que foram formuladas da seguinte maneira:

- Quais os erros cometidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Sergipe ao resolver questões relativas à Matemática Financeira?
- Quais as dificuldades encontradas por estes alunos ao resolver problemas de Matemática Financeira?

A primeira questão pôde ser respondida pelos dados obtidos com a aplicação do primeiro questionário. Os erros mais frequentes estão relacionados a operações básicas e manipulações algébricas. Além disso, outro tipo de dificuldade que se apresentou em grande número foi relacionado à interpretação de linguagens. Em alguns casos, os alunos se mostraram despreparados para trabalhar com porcentagens, pois não dominam sequer transformar uma taxa percentual. Parte dos discentes demonstrou conhecer as fórmulas resolutivas, porém não conseguem aplicar corretamente nas questões. Outro tipo de erro que pode ser evitado é relativo à verificação da solução. Alguns alunos poderiam ter evitado errar, caso fizessem uma revisão da sua resolução e percebessem o erro que ocasionou a incoerência da solução. Isso nos faz acreditar que um trabalho que incentive o aluno a refletir sobre a sua resposta poderia ser um caminho para evitar tantas respostas erradas.

As dificuldades enfrentadas pelos discentes neste questionário nos fez refletir sobre a importância da educação matemática nos anos iniciais. O déficit apresentado reflete o quanto os estudantes, embora no Ensino Médio, não conseguem dominar operações básicas, que deveriam ter aprendido no Ensino Fundamental. É necessário que os professores tenham consciência da importância dessa aprendizagem e busquem alternativas que facilitem a compreensão de conteúdos básicos que darão suporte à aquisição dos conhecimentos matemáticos futuros.

No segundo questionário, nós confirmamos nossas suspeitas de que a maior dificuldade enfrentada pelos alunos na resolução de problemas está relacionada à compreensão, o que responde nossa segunda questão de pesquisa. Esse fato pode ser comprovado pela grande diferença entre o número de acertos nas questões diretas e nas situações-problema. Era de se esperar que os mesmos alunos que acertaram as questões do primeiro questionário, acertassem também as do segundo, uma vez que os cálculos eram semelhantes. Além dos erros de compreensão, os erros com as operações e manipulações algébricas também se manifestaram em grande número, repetindo os erros apresentados na análise do primeiro questionário.

Diante dos dados obtidos nas resoluções de problemas, nós pudemos perceber a importância de usar essa metodologia de ensino, uma vez que os alunos não conseguem resolver situações que exigem interpretação, o que deve ser sanado para que não se torne um obstáculo ainda maior, futuramente. É necessário inserir a resolução de problemas desde os anos iniciais, para que os estudantes sejam desafiados a desenvolver o raciocínio e construir seu próprio conhecimento. Dessa forma, a matemática fará mais sentido na vida do aluno, pois este não receberá os conteúdos já construídos, mas conhecerá os caminhos que levam a compreender verdadeiramente os assuntos.

Dessa forma, não basta indicarmos caminhos. É necessário preparar o aluno para interpretar suas estratégias de resoluções, identificar seus próprios erros e superar suas dificuldades para não persistir usando estratégias erradas. Sendo assim, os estudantes serão capazes de reconhecer quando os conhecimentos adquiridos por eles ainda não são suficientes para a aprendizagem de determinados conteúdos.

Consideramos que, mais que identificar erros, é necessário buscar suas causas, pois estas auxiliam na construção de uma intervenção adequada para o problema enfrentado. Porém, esta não é uma tarefa fácil, pois um erro pode ter sua origem em diversos aspectos.

Mediante os resultados desta pesquisa, nós sentimos a necessidade de fazer uma intervenção para tentar sanar tais dificuldades. Uma pesquisa futura poderá servir como continuidade desta, pois não basta conhecer os erros, mas sim, procurar meios que possam diminuir, ou quem sabe extinguir as dificuldades dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Carla da Conceição Pereira Cardoso. **A resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático no contexto da Educação pré-escolar e do 1º ciclo do Ensino Básico.** Relatório de Estágio – Universidade dos Açores, Departamento de Ciências da Educação. Angra do Heroísmo, 2012.

AMAZONAS, Isabelly et al. **Aplicação de novas Metodologias no Ensino de Matemática,** 2009**.** Disponível em: http://www.eventosufrpe.com.br/jepex2009/cd/resumos/R1303-1.pdf. Acesso em 05 de Maio de 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)***.* Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª séries).** Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Semtec, 2002.

BRUM, Lauren Darold; CURY, Helena Noronha. **Análise de erros em soluções de questões de Álgebra:** uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. v.4, n.1, p. 45-62 , 2013.

BUSS, Leonidis Margaret. **Dificuldade na Leitura e Interpretação de Problemas Relativos ao Cálculo de Probabilidades e Estatística.** Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/831-4.pdf Acesso em 05 de Maio de 2016.

CURY, Helena Noronha. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos.** 276 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-graduação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros em demonstrações de Geometria Plana:** um estudo com alunos de 3º grau**.** 120 f. Cópia de Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.FELTES, Rejane Zeferino. **Análise de erros em potenciação e radiciação:** um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio*.* 136 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. – 1. Reimp. – 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. – (Coleção formação de professores)

HSIEH, Hsiu-Fang., & SHANNON, Sarah E. **Three approaches to qualitative content analysis**. In: *Qualitative Health Research*, 15, 1277-1288, 2005.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**. – 1. ed. – São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio – volume 2**. – 6. ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006.

LORENSATTI, Edi Jussara Candido. **Linguagem matemática e Língua Portuguesa:** diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. Caxias do Sul, v. 14, n. 2, p. 89-99, maio/ago. 2009

MATEUS, Marta Élid Amorim. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica.** 267 f. Tese (Doutorado) - Programa em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP, 2015.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar.** 174 f. Tese (Doutorado). Faculdade de educação da Universidade de São Paulo, 1998.

POLYA, George. **A Arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

RAMOS, Agnelo Pires et al. **Problemas matemáticos:** caracterização, importância e estratégias de resolução. Seminários de Resolução de Problemas. IME-USP – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001

SOUSA, Ariana Bezerra de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o Ensino da Matemática.** Universidade Católica de Brasília. Disponível em: https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf. Acesso em 01 de maio de 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática volume 2.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE I

(Questionário I)

Prezado(a) aluno(a): Estou desenvolvendo um projeto de pesquisa para analisar dificuldades encontradas pelos alunos em interpretar e resolver questões de Matemática Financeira. Tal estudo dará suporte à escrita da minha dissertação de mestrado. Solicito sua colaboração no sentido de resolver as questões abaixo. Peço encarecidamente que resolvam cada questão com atenção, explicando o máximo possível sua resolução. Desde já agradeço sua colaboração e esclareço que todas as informações pessoais serão mantidas em sigilo. Obrigada!

Caso não consigam responder alguma questão, explique o motivo de não ter resolvido, seja por falta de compreensão do enunciado, dificuldade com as operações matemáticas ou qualquer outro motivo que o tenha feito desistir de resolver o problema.

Aluno: ____ **Turma:** ______

Questionário I

1) Jorge fez um empréstimo no sistema Price, com os seguintes dados:
Valor do empréstimo: 2500,00;
Taxa de juros: 3% ao mês
Número de prestações: 5
Qual o valor de cada prestação?

2) Calcule:
d) 14% de 250
e) Um aumento de 22,5% de 420
f) Um desconto de 15% de 120

3) Use os dados de cada item para calcular o que se pede:

d) Sabendo que $C = 240{,}00$, i= $2{,}5\%\ a.m$ e t= $36\ meses$. Calcule os juros simples dessa aplicação.

e) Sabendo que $J = 547{,}20$, i= $6\%\ a.m$ e C= $380{,}00$. Quanto tempo deve durar tal aplicação a juros simples?

4) Use os dados de cada item para calcular o que se pede:

a) Sabendo que $C = 1200{,}00$, i= $21\%\ a.a$ e t= $24\ meses$. Calcule o montante resultante dessa aplicação a juros compostos.

b) Quanto rendeu de juros essa aplicação?

APÊNDICE II
(Questionário II)

Prezado(a) aluno(a): Estou desenvolvendo um projeto de pesquisa para analisar dificuldades encontradas pelos alunos em interpretar e resolver questões de Matemática Financeira. Tal estudo dará suporte à escrita da minha dissertação de mestrado. Solicito sua colaboração no sentido de resolver as questões abaixo. Peço encarecidamente que resolvam cada questão com atenção, explicando o máximo possível sua resolução. Desde já agradeço sua colaboração e esclareço que todas as informações pessoais serão mantidas em sigilo. Obrigada!

Caso não consigam responder alguma questão, explique o motivo de não ter resolvido, seja por falta de compreensão do enunciado, dificuldade com as operações matemáticas ou qualquer outro motivo que o tenha feito desistir de resolver o problema.

Aluno: ____ **Turma:** ______

Questionário II

1) Um aparelho doméstico teve um reajuste de 4,5%, passando a custar R$ 572,00.

a) Qual o valor do aparelho antes do reajuste?

b) Se ao invés de um aumento fosse dado um desconto, com mesma taxa percentual, qual seria o valor do aparelho?

2) Pedro, sonhando fazer uma viagem daqui 3 anos, aplicou suas economias que totalizavam R$ 2340,00, à taxa de juros compostos de 24% ao ano.

a) Tendo em vista que ele não retirou nenhuma quantia para outro fim, quanto Pedro levará para sua viagem?

b) Quanto lhe rendeu essa aplicação?

3) Marta deseja obter R\$ 612,00 de juros de uma aplicação de R\$ 850,00 durante um ano e meio. **a)** Qual a taxa mensal de juros simples à qual o capital deverá aplicado? **b)** Qual a quantia que Marta deverá aplicar para obter os mesmos juros, se a taxa for de 3% ao mês?
4) Robert fez um empréstimo de R\$ 2000,00, que será pago em 5 prestações mensais à taxa de juro de 4% ao mês, no sistema *Price*. Qual o valor de cada prestação?