UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PAULO VICTOR SILVA MENEZES

MÉTODOS DE CONTAGEM: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

ITABAIANA (SE)
2016

PAULO VICTOR SILVA MENEZES

MÉTODOS DE CONTAGEM:
UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wagner Ferreira Santos

ITABAIANA (SE)
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M543m

Menezes, Paulo Victor Silva.
Métodos de contagem: uma abordagem investigativa / Paulo Victor Silva Menezes; orientador Wagner Ferreira Santos. – Itabaiana, 2016.
77 f. ; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Análise Combinatória. 2. Métodos de contagem. 3. Investigação Matemática.4. Atividades. I.Santos, Wagner Ferreira. II. Título.

CDU 519.1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Métodos de Contagem: Uma Abordagem Investigativa

por

Paulo Victor Silva Menezes

Aprovada pela Banca Examinadora:

Wagner Ferreira Santos
Prof. Wagner Ferreira Santos - UFS
Orientador

Mateus Alegri
Prof. Mateus Alegri - UFS
Primeiro Examinador

TCEtcheverria
Prof. Teresa Cristina Etcheverria- UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 31 de Agosto de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Escrever os agradecimentos deste trabalho é um momento especial, pois cursar um mestrado era um plano desde o Ensino Médio, e naquela época eu tinha ciência que precisaria ir para outro estado da federação para fazer isso. Porém, consegui fazer o curso no meu estado e na cidade que resido! Portanto agradecer é obrigação!!

O agradecimento inicial é ao ser superior. Deus me fortalece diariamente para os “bons combates”.

Minha esposa, neste espaço, merece um agradecimento especial. Sem esse apoio diário não sei se conseguiria atingir meus objetivos. Obrigado Ana Paula, meu filho Paulinho, minha mãe Dona Fátima e minha avó Dona Odete que se alegram com as minhas alegrias.

Aos colegas de curso Aedson Nascimento, Anderson da Silva, Arionaldo Peixoto, Djenal dos Santos, Emerson Campos, Gildo Gouveia, Jailson Santos, José Augusto Reis, Marcelo Pereira, Monica Lima, Samilly Teles e Simone de Jesus, pelo convívio semanal durante dois anos.

Aos meus alunos do segundo ano C do Nestor Carvalho que colaboraram para a execução dessa pesquisa, a qual me revelou não ser tão simples como o programado, mas soubemos contornar as dificuldades e através delas enriquecemos e aprimoramos esse trabalho.

Um agradecimento importante que faço é ao Governo Federal por implantar esse programa voltado para os guerreiros professores da educação básica do Brasil.

O último agradecimento e não menos importante é para o servidor público Wagner Ferreira Santos que desempenha com dedicação suas atividades docentes e enriquece o Departamento de Matemática do Campus Professor Alberto Carvalho.

RESUMO

No segundo ano do Ensino Médio a abordagem dos métodos de contagem geralmente é feita dando ênfase as fórmulas de arranjos e combinação. Nesse trabalho apresentamos como alternativa o estudo da análise combinatória utilizando as investigações matemáticas. Para tanto, fizemos uso de três atividades que foram desenvolvidas com alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual do interior de Sergipe no ano letivo de 2015. As atividades foram feitas em grupos e o livro didático não foi utilizado. Na análise das atividades percebemos a importância desse tipo de aula que exige uma postura ativa dos discentes, pois, as fórmulas não são apresentadas como prontas e acabadas e o professor deixa de ser a figura central e passa a ser um orientador. Analisamos também a viabilidade desse tipo de aula que possui uma exigência maior por parte do planejamento do professor. O planejamento inicial sofreu modificações no decorrer das atividades, porém os resultados, de maneira geral, foram favoráveis para uma aprendizagem significativa dos alunos, isso ficou evidenciado nas apresentações dos grupos na lousa e na escrita das questões.

Palavras-chave: Métodos de Contagem; Investigação Matemática; Atividades.

ABSTRACT

In the second year of high school the approach of counting methods is usually done emphasizing the formulas arrangements and combination. In this work we present an alternative to the study of combinatorics using mathematical investigations. Therefore, we used three activities that have been developed with students of the second year of high school to a state school in the interior of Sergipe in the academic year 2015. The activities were done in groups and the textbook was not used. In the analysis of the activities we realize the importance of this type of class that requires an active attitude of the students, because the formulas are not presented as ready and finished and the teacher ceases to be the central figure and becomes a mentor. We also analyze the feasibility of this type of class that has a greater demand on the part of the teacher's planning. The initial plan was modified in the course of activities, but the results, in general, were favorable for significant learning of the students, this was evident in the presentations of the groups on the blackboard and writing the questions.

Keywords: Count methods; Mathematics research; Activities.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O trabalho apresentado é resultado de uma pesquisa desenvolvida no ano letivo de 2015, numa turma do segundo ano do Ensino Médio, composta por 41 alunos, de uma escola da rede estadual de Sergipe, Colégio Estadual Professor Nestor Carvalho Lima.

Tradicionalmente as aulas de matemática destinadas a análise combinatória são direcionadas ao uso de fórmulas prontas e acabadas. O propósito dessa pesquisa é trabalhar nas aulas designadas para os métodos de contagem uma abordagem que conduza os alunos a uma postura ativa e que através de problemas propostos deduzam ferramentas matemáticas úteis na solução de várias situações que se mostrem semelhantes do ponto de vista matemático.

No capítulo 1 abordarmos o embasamento teórico que utilizamos para o desenvolvimento do trabalho. O trabalho foi desenvolvido a partir de uma nova tendência na Educação Matemática: investigação matemática. O estudioso que mais se destaca com esse tema é o autor português João Pedro da Ponte.

No capítulo 2 fazemos uma abordagem, com um enfoque nessa metodologia de investigação, dos métodos de contagem, conteúdo escolhido para desenvolver as atividades. Classificamos uma série de problemas que apresentam em sua essência o mesmo modelo matemático de resolução. Ainda, mostramos uma conexão entre análise combinatória e funções.

A pesquisa se deu com a aplicação de três atividades na turma. No capítulo 3 apresentamos nossas expectativas para o desenvolvimento do trabalho, ou seja, de que forma os alunos podiam apresentar as respostas dos problemas propostos.

A apresentação e análise das respostas dos alunos são expostas no capítulo 4. Nesse capítulo, perceberemos as múltiplas formas que os alunos desenvolveram as soluções dos problemas. Um fato interessante que ocorreu foi que apesar de ter sido solicitado aos alunos que não olhassem o livro, percebemos que alguns alunos estudaram o conteúdo em casa através do livro didático. Também discutimos sobre a necessidade de mudar alguns aspectos que tínhamos planejado no início das atividades.

No capítulo seguinte apresentamos reflexões sobre os avanços das pesquisas em Educação Matemática, o cotidiano do professor da educação básica e os desafios encontrados na construção desse trabalho.

CAPÍTULO 1

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

O ensino de matemática nas últimas décadas vem passando por transformações. As aulas estão dando espaço para uma participação mais ativa dos alunos, e estes não se atêm mais a trabalhar com extensas listas de exercícios repetitivos. Os alunos estão sendo convidados a reflexão através de atividades que provocam questionamentos. Isso se deve ao avanço da Educação Matemática.

A Educação Matemática tem como objetivo criar e desenvolver meios que oportunizem um ensino mais significativo da Matemática para alunos e professores. Esses meios se apresentam na forma de métodos inovadores de ensino, material de apoio, mudanças curriculares, entre outros.

Hoje o que se prioriza não são somente as regras que levam ao resultado, mas também o contexto. Por exemplo, num produto entre dois números, a prioridade maior não é dada às regras que se resolvem a operação, mas como se chega àquele produto através de determinada interpretação de algum problema. Com isso, se os alunos já dominam as regras da operação de multiplicação, a calculadora pode ser um instrumento eficiente para dar passos maiores.

Uma tendência contemporânea no ensino de matemática é o trabalho com atividades exploratórias, atividades com investigação. Essas atividades mobilizam os estudantes a participarem da aula construindo o conhecimento. O professor deixa de ser a figura central, o “dono do conhecimento”, e passa a ser um orientador. Vantagens significativas residem nesse tipo de aula: alunos interagem com objetivos comuns, na busca de determinados resultados podem surgir outros também significativos, conjecturas são produzidas e testadas.

Como atividade de ensino-aprendizagem na escola, a investigação matemática oportuniza alunos a atuarem como matemáticos. Mas, como é feito o processo de investigação? Quais são os pré-requisitos? Pode ser trabalhado em qualquer ano do Ensino Fundamental ou em qualquer série do Ensino Médio? Investigação matemática e resolução de problemas são sinônimos? É possível planejar todas as aulas de uma série com investigação matemática?

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 20)

> Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro

> momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. Esses momentos surgem, muitas vezes, em simultâneo: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc.

Pelo roteiro que o autor apresenta percebemos que atividades com investigação requerem um bom planejamento e acompanhamento por parte do professor. Os pré-requisitos são estabelecidos de acordo com a série e o assunto que será abordado. Artigos de Ponte mostram a aplicação dessa abordagem em séries iniciais, mas alguns artigos e dissertações no Brasil descrevem o trabalho com investigações também no Ensino Médio. O presente trabalho foi desenvolvido a partir de uma experiência com uma turma do Ensino Médio.

As atividades investigativas se organizam a partir da formação de pequenos grupos de alunos. A partir daí o professor encaminha a atividade proposta, comum para todos os grupos, e faz uma pequena introdução. Depois disso os alunos começam a ir em busca do que foi solicitado e, consequentemente, nessa busca, se deparam com questionamentos que serão debatidos pelo grupo e que também podem ser encaminhados para o professor. Este, faz o processo de “abridor de caminhos”: não responde prontamente os questionamentos feitos pelos alunos, mas dá encaminhamentos que tornam possível os próprios alunos alcançarem suas respostas. Isso acontece por meio de outros questionamentos, observações, testes.

Depois do debate interno de cada grupo sobre determinada questão proposta, o passo adiante é o debate com toda a turma. Para isso um integrante de um grupo se dispõe a ir para a lousa apresentar as conclusões do seu grupo. Outros grupos poderão acrescentar algo que não foi exposto ou até mesmo apresentar seus argumentos, também na lousa, se tiverem percorrido caminhos distintos. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 41), esse debate é a parte principal da aula investigativa

> No final de uma investigação, o balanço do trabalho realizado constitui um momento importante de partilha de conhecimentos. Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador. O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. É, ainda, um momento privilegiado, para despertar os alunos para a importância da justificação matemática das suas conjecturas. No caso de alunos ainda pouco familiarizados com as investigações, o modelo que o professor possa oferecer nessa fase da aula é determinante para que esses comecem a perceber o sentido de uma demonstração matemática.

As atividades investigativas se diferenciam da resolução de problemas no que diz respeito ao seu caráter aberto, na resolução de problemas o aluno precisa chegar em um resultado específico, já nas atividades de investigação os alunos além de chegarem a resultados que nem sempre são pré determinados, podem também criar outras questões.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998, p.117) recomendam o uso de atividades investigativas

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades.

Portanto, atividades com investigações devem fazer parte das opções que o professor dispõe para planejamento de suas aulas, uma vez que essas possuem uma relevância em termos de aprendizagem para os alunos.

CAPÍTULO 2

UMA APRESENTAÇÃO INVESTIGATIVA DOS MÉTODOS DE CONTAGEM

ENUMERAÇÃO

Aprendemos a contar fazendo a enumeração, isto é, exibindo a lista de todos os elementos de um determinado conjunto. Se, por exemplo, fosse solicitado o número de elementos de um conjunto $A = \{a, b\}$, contaríamos: $a(1), b(2)$, ou seja, A possui 2 elementos. Matematicamente, estamos definindo uma função bijetiva $f: I \to A$, onde $I = \{1, 2\}$, dada por $f(1) = a$ e $f(2) = b$.

Uma segunda pergunta que pode ser feita imediatamente é: de quantas formas podemos contar o conjunto A? Ou equivalentemente, de quantos modos podemos ordenar os elementos a, b numa fila? Ou ainda, quantas funções bijetivas $f: I \to A$ existem? Seguindo a ideia de enumeração, a primeira tentativa pode ser feita pela enumeração dos elementos do conjunto $P(A) = \{(a, b), (b, a)\}$. Logo, $n(P\{a, b\}) = 2$, ou ainda, $P_2 = 2$.

Seguindo o raciocínio, poderíamos questionar: e o que acontecerá se o conjunto A possuir 3 elementos, digamos, $A = \{a, b, c\}$? Teríamos $P_3 = 6$, pois $P(\{a, b, c\}) = \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$. Nesta última enumeração, listamos os elementos de $P(\{a, b, c\})$ de uma maneira que podemos observar um certo padrão: existem 2 ternas que têm a como primeiro membro, $(a, b, c), (a, c, b)$, mais 2 ternas que têm b como primeiro membro, $(b, a, c), (b, c, a)$ e mais 2 ternas com c como primeiro membro, $(c, a, b), (c, b, a)$. Assim, após escolher um elemento para ser o primeiro membro da terna, sempre poderemos formar 2 ternas distintas com os elementos restantes. Teremos assim um total de $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$ ternas. Daí, podemos escrever que $P_3 = 3 \cdot P_2$.

E se dermos mais um passo, isto é, se adicionarmos mais um elemento ao conjunto A e este passar a 4, depois 5, depois 6 elementos? Nota-se que P_A ficará cada vez maior e isso tornará a enumeração de todos seus elementos bastante tediosa e não apresentará informações tão relevantes para o objetivo de apenas contá-los. Surgem então os métodos de contagem ou análise combinatória, um ramo da matemática que estuda o número de elementos de determinados conjuntos, sem ter a preocupação de descrevê-los um a um.

Ao longo deste capítulo apresentamos os princípios fundamentais de contagem e tratamos os problemas mais comuns estudados na análise combinatória. Identificamos quais problemas podem ser considerados idênticos do ponto de vista matemático. Utilizamos uma linguagem investigativa, tentando seguir a ideia de uma aula investigativa. Portanto, o leitor será convidado a tomar o papel de aluno numa aula de investigação matemática, guiada por uma série de questionamentos, na busca de argumentos que possam justificar e comprovar algumas conjecturas.

PERMUTAÇÕES

"Aline, Bia, Claudinha e Diana são alunas do 6º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras?" (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2013, p. 262)

Inicialmente, vamos abreviar o nome das meninas, utilizando as iniciais de seus nomes: a, b, c, d. Fixando a no primeiro lugar da fila, quantas formas teremos de organizar as outras meninas? Essa pergunta já foi respondida quando contamos as partes do conjunto $A = \{a, b, c\}$ e obtemos como resultado $P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 = 6$. Com isso, teremos mais 6 formas de organizar com b no primeiro lugar, mais 6 com c e mais 6 com d, ou seja, $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ ou equivalentemente,

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2.$$

Matematicamente, o que fizemos foi contar o número de funções

$$f: I = \{1, 2, 3, 4\} \to A = \{a, b, c, d\}$$

bijetivas.

As situações que seguem são equivalentes ao problema de arrumar as meninas em fila:

A. Utilizando as letras da palavra VIDA, quantas palavras podemos formar com ou sem sentido?

B. De quantas formas podemos pintar uma bandeira com 4 faixas utilizando cores distintas e sendo disponível 4 cores distintas: azul, verde, vermelho e amarelo?

A resposta para esses problemas é a mesma: $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. De modo geral, utilizamos

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

e abreviamos

$$P_n = n!$$

Definimos $0! = 1$.

Se $f: I_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\} \to A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $n(A) = k$, podemos afirmar que existem $k!$ funções bijetivas $f: I_k \to A$. O número $k!$ que é chamado de **número de permutações** do conjunto A.

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderia viajar de Recife a Porto Alegre? (DANTE, 2013, p. 243)

A situação envolve a quantidade de formas de se fazer uma viagem, vejamos a ilustração:

$$RE \quad \begin{matrix} \to roteiro\ 1 \\ \to roteiro\ 2 \\ \to roteiro\ 3 \\ \to roteiro\ 4 \\ \to roteiro\ 5 \end{matrix} \quad SP \quad \begin{matrix} \to roteiro\ a \\ \to roteiro\ b \\ \to roteiro\ c \\ \to roteiro\ d \end{matrix} \quad POA$$

Quantas formas essa pessoa tem de chegar a Porto Alegre utilizando o $roteiro\ 1$?

Utilizando o $roteiro\ 1$ essa pessoa pode escolher um entre os outros 4 roteiros disponíveis entre São Paulo e Porto Alegre: a, b, c, d. Daí temos um total de 4 possibilidades de fazer a viagem utilizando inicialmente o $roteiro\ 1$. Analogamente, o leitor pode perceber, que temos mais 4 possibilidades com o $roteiro\ 2$, mais 4 com o $roteiro\ 3$, mais 4 com o $roteiro\ 4$ e mais 4 com o $roteiro$ 5, abreviando temos:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4.$$

Quantas placas diferentes de automóveis, formadas por três letras e 4 algarismos, podem existir?

$$\underbrace{\_\_ \quad \_\_ \quad \_\_}_{3\ letras} \quad \underbrace{\_\_ \quad \_\_ \quad \_\_ \quad \_\_}_{4\ algarismos}$$

Quantos números de dois algarismos podemos formar utilizando os dez dígitos do sistema decimal? Note que para cada dígito temos 10 possibilidades de combinação com outro, ou seja, temos.

$$10 \cdot 10 = 10^2$$

possibilidades de formar números de dois algarismos. E quantos números de três algarismos podemos formar? Ora, para cada algarismo podemos fazer 10^2 combinações, pois temos 10^2 números de dois algarismos. Portanto temos

$$10^2 + 10^2 + \cdots + 10^2 = 10 \cdot 10^2 = 10^3$$

maneiras diferentes de montar números com 3 algarismos. Seguindo esse raciocínio teremos

$$\underbrace{26 \cdot 26 \cdot 26}_{3\ letras} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{4\ algarismos} = 26^3 \cdot 10^4$$

formas de montar placas diferentes.

Como na questão anterior, multiplicamos o total de possibilidades de cada etapa para realizar a contagem. Esse procedimento é conhecido como **Princípio Multiplicativo**:

"Suponha que uma sequência seja formada por k *elementos* $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$*, em que:*

a_1 *pode ser escolhido de* n_1 *maneiras distintas;*

a_2 *pode ser escolhido de* n_2 *formas diferentes, a partir de cada uma das possibilidades anteriores;*

a_3 *pode ser escolhido de* n_3 *modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;*

$$\vdots$$

a_k *pode ser escolhido de* n_k *maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.*

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ *é:*

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$*"* (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2013, p. 262)

ARRANJOS

Se tivermos, $n(A) > k$, não vão existir mais funções bijetivas $f: I_k \to A$, porque não é possível exibir nenhuma função sobrejetiva. Contudo, ainda existem funções injetivas. Quantas são elas? Acompanhe a situação que segue:

Quantas “palavras” de 4 letras podemos formar com as letras da palavra PERNAMBUCO?

Podemos utilizar o princípio multiplicativo, pois temos 10 maneiras de escolher a primeira letra, 9 maneiras de escolher a segunda, 8 maneiras de escolher a terceira e 7 maneiras de escolher a quarta, portanto podemos formar:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

palavras de 4 letras.

O que fizemos, matematicamente, foi contar quantas funções injetivas

$$f: I_4 = \{1, 2, 3, 4\} \to A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}\}$$

existem.

Situações equivalentes:

- Escolher 4 pessoas dentre 10 para sentarem em cadeiras numeradas de 1 a 4.

- Pintar uma bandeira com 4 faixas com cores distintas tendo disponíveis 10 cores.

O número de formas de arrumar k objetos de um grupo com n objetos é denominado **arranjos de n elementos tomados k a k** e denotamos assim: $A_{n,k}$. Seguindo o raciocínio do exemplo, temos:

$$A_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}_{k\ fatores} \qquad (1)$$

Se multiplicarmos e dividirmos a expressão (1) por $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ temos:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Portanto, se tivermos, $n(A) > k$, vão existir

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

funções injetivas $f: I_k \to A$.

Quantas formas teríamos de pintar uma bandeira com p faixas utilizando p cores distintas? Note que esse problema pode ser visto como um arranjo de p elementos tomados p a p:

$n = p$ e $k = p$

$$A_{p,p} = \frac{p!}{(p-p)!} = \frac{p!}{0!} = \frac{p!}{1} = p!$$

Ou seja, permutações podem ser vistas como casos particulares de arranjos.

PERMUTAÇÕES CIRCULARES

"De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?" (LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 2006, p. 97)

Se ao invés de uma roda as crianças fossem colocadas em fila, nosso problema seria permutar 5 objetos e como vimos seriam

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

formas. O que diferencia a posição circular para a posição em fila? Denominando as crianças por a, b, c, d e e temos como exemplos de permutações as sequências:

$$(a, b, c, d, e), (c, d, e, a, b)$$

temos permutações diferentes, porém se pensarmos em círculo temos sequências iguais. De fato, quem está à direita de b é a criança a em ambas as sequências, quem está à direita de c é a criança b em ambas sequências e assim sucessivamente. Portanto, temos a mesma roda de ciranda.

Note que a sequência (a, b, c, d, e) é equivalente às sequências:

$$(b, c, d, e, a), (c, d, e, a, b), (d, e, a, b, c), (e, a, b, c, d),$$

quando pensamos em círculo. Ou seja, cada permutação é contada 5 vezes. Daí, o total de modos das 5 crianças formarem uma roda é

$$\frac{120}{5} = \frac{5!}{5} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Seguindo esse mesmo raciocínio, temos que o total de modos de se organizar n objetos em círculo é:

$$\frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!$$

COMBINAÇÕES

"Quando termina o treino, Jaqueline costuma tomar uma vitamina com leite na lanchonete da academia. Numa tarde, a lanchonete dispunha das seguintes frutas: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. De quantas maneiras distintas Jaqueline pode pedir sua vitamina misturando exatamente três dessas frutas?" (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2013, p. 269)

Vamos abreviar o nome das frutas com as letras f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Podemos começar contando os arranjos que podemos formar com 6 elementos tomados 3 a 3:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Escolher as frutas f_1, f_2, f_3 ou as frutas f_2, f_3, f_1 são escolhas equivalentes. Portanto, precisamos retirar do total encontrado todas as repetições que foram levadas em conta. Para isso precisamos descobrir quantas vezes cada grupo de três frutas se repetem. Já temos ferramenta para isso, as permutações de 3:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Daí, Jaqueline pode pedir sua vitamina de $120/6 = 20$ maneiras distintas.

A situação da escolha de frutas da vitamina de Jaqueline é um caso particular do modelo matemático a seguir:

Sendo I_n um conjunto com n elementos, $\{1, 2, \dots, n\}$, quantos subconjuntos com $0 \leq k \leq n$ elementos I_n possui?

Podemos seguir os passos do exemplo:

- total de arranjos de n elementos tomados k a k:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- total de repetições de cada subconjunto com k elementos: $k!$
- total de subconjuntos:

$$\frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Esse total de subconjuntos é denominado de **combinação simples de n elementos tomados k a k** e denotado assim

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

As situações a seguir, possuem o mesmo padrão:

A. De quantas maneiras diferentes você pode escolher seis entre sessenta números em um jogo?
C. Em uma classe de quarenta alunos, quantas são as possíveis escolhas para dois representantes de sala?

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES

Anagramas são palavras formadas a partir de outra através da troca de posição de suas letras. Quantos são os anagramas da palavra OVO?

Se considerássemos o primeiro O diferente do segundo teríamos:

O_1VO_2 O_1O_2V O_2VO_1 O_2O_1V VO_1O_2 VO_2O_1

Porém, a primeira palavra é igual a terceira, a segunda é igual a quarta e a quinta é igual a sexta. Ou seja, quando permutamos os 2 O's não produzimos uma nova palavra. Então existem 3 anagramas.

Podemos responder um questionamento mais amplo: quantas permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com

$$\alpha + \beta + \gamma = n$$

podemos formar?

Se todos elementos fossem diferentes, teríamos $n!$ permutações. Mas temos elementos de três tipos, dos quais mudando a ordem dos elementos de um mesmo tipo não temos novas permutações, daí podemos de início considerar que os n elementos são todos de tipos diferentes e depois retirarmos as repetições, fazendo a divisão:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

obtendo o número de permutações de n elementos com repetição.

Em geral, se forem n elementos, dos quais k_1 do tipo 1, k_2 do tipo 2, ..., k_r do tipo r com

$$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$$

então podemos formar

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,...\,k_r!}$$

permutações com repetição.

CAPÍTULO 3

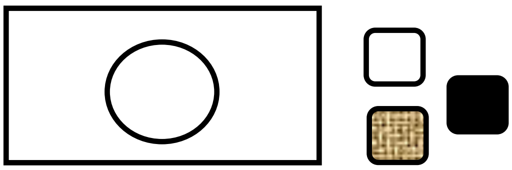
EXPECTATIVAS COM RELAÇÃO ÀS APLICAÇÕES DAS ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos nossas expectativas em relação às respostas dadas pelos estudantes às tarefas de investigação desenvolvidas. Foram três atividades.

3.1 SOBRE A ATIVIDADE 1

Questão 01

Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando as cores dadas. (LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 2005, p. 128)



a) Liste todas as possíveis bandeiras, incluindo as que possuem as duas regiões pintadas com a mesma cor.

Solução: Esse item é simples, pois apenas com o auxílio de desenhos os alunos podem observar o padrão. Esperamos que os alunos listem, fazendo o desenho e pintando todas as possibilidades. Com essa listagem esperamos que eles observem o padrão que se forma: três bandeiras com o círculo branco, três com o círculo preto e três com o círculo marrom:

$$3 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

Cada parcela da expressão acima representa o total de bandeiras com o círculo pintado com a mesma cor, como são três cores teremos $3 \cdot 3$ bandeiras.

b) Quantas são as bandeiras com cores distintas?

Solução: Podemos fazer a contagem, da mesma forma do item anterior, fixando uma cor no círculo, a diferença é que a cor fixa no círculo não será usada na outra região, daí teremos um total de 6 bandeiras: $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$.

c) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que 4 cores estão disponíveis? E com 5 cores disponíveis?

Solução: Nesse item já esperamos que os alunos utilizem uma notação mais abreviada para a listagem das bandeiras. Aqui utilizaremos a notação de par ordenado, onde a primeira coordenada faz referência à cor do círculo e a segunda a cor da região interna ao retângulo que não está contida no círculo. Sejam c_1, c_2, c_3 e c_4 as cores. Fixando c_1 no centro temos: $(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4)$. De forma análoga com c_2 ou c_3 ou c_4 no centro, portanto temos $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$ formas diferentes.

Com 5 cores o raciocínio é análogo: $(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), (c_1, c_5)$, portanto

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 \text{ formas.}$$

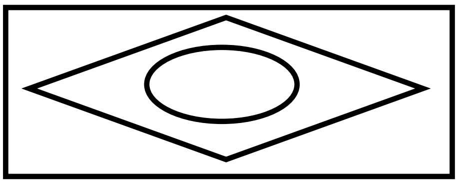
d) Em geral, com n cores disponíveis, de quantas maneiras é possível pintar a bandeira?

Solução: Utilizando cores distintas: $\underbrace{(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), \ldots, (c_1, c_n)}_{n-1\, pares}$, daí temos $n - 1$ formas com a cor c_1 no centro. Como são n cores teremos:

$$\underbrace{(n-1) + (n-1) + \cdots + (n-1)}_{n\, parcelas} = n \cdot (n-1)$$

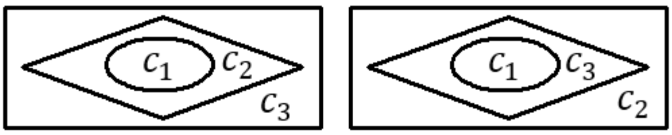
Questão 02

Considere agora a bandeira com a forma abaixo:



a) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que 3 cores estão disponíveis? E com 4 cores disponíveis? E com 5 cores? Em geral com *n* cores?

Solução: Nomeando as cores como c_1, c_2 e c_3, podemos fixar c_1 no círculo, daí teremos 2 bandeiras diferentes:



Portanto, fixando c_2 mais duas e c_3 mais duas: $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$.

<u>Com 4 cores disponíveis</u>: c_1, c_2, c_3 e c_4. Fixando c_1 no centro, nosso problema é pintar duas regiões utilizando 3 cores, ou seja, o que fizemos na primeira questão. Portanto com c_1 no centro temos $3 \cdot 2$ formas diferentes de pintar a bandeira. De modo análogo com c_2, c_3 e c_4:

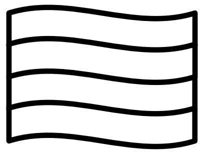
$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

<u>Com 5 cores disponíveis</u>: c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5. Fixando c_1 no centro, temos 4 cores restantes para pintar duas regiões, isso foi feito no item c da primeira questão: $4 \cdot 3$ formas. Como são 5 cores, temos: $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

<u>Com n cores</u>: $c_1, c_2, \dots, c_n$. De forma análoga, fixando c_1 no centro, temos $n - 1$ cores para pintar 2 regiões. No item d da questão 1 chegamos a conclusão que para pintar 2 regiões com n cores temos $n(n-1)$ formas. Daí, para pintar duas regiões com $n - 1$ cores temos: $(n-1)\big((n-1)-1\big) = (n-1)(n-2)$ formas. Portanto para cada cor fixada no centro, temos $(n-1)(n-2)$ formas, como são n cores temos: $\underbrace{(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2) + \cdots + (n-1)(n-2)}_{n\ parcelas} = n(n-1)(n-2)$.

Questão 03

Considere agora a bandeira com a forma ao lado:



a) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que 4 cores estão disponíveis? E com 5 cores disponíveis? E com 6 cores? Em

geral, com n cores?

Solução:

<u>Quatro cores</u>: c_1, c_2, c_3, c_4

Fixando c_1 na 1ª faixa precisamos encontrar o número de maneiras de pintar 3 faixas com 3 cores distintas, mas isso já foi respondido no item (a) da questão 2: $3 \cdot 2$ formas. Fixando as demais cores, temos $3 \cdot 2$ formas para cada:

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

<u>Cinco cores</u>: c_1, c_2, c_3, c_4, c_5

Raciocínio análogo: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Esperamos que os alunos observem que a quantidade de fatores $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$ é a mesma quantidade de faixas da bandeira.

<u>Seis cores</u>:

De maneira análoga teríamos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

<u>n cores</u>: pode-se deduzir que seriam $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$ formas.

Questão 04

Considere uma bandeira com k faixas horizontais.

a) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que k cores estão disponíveis? E com n cores disponíveis? (n maior que k) O número n pode ser menor que k?

Solução:

Nesse item esperamos que os alunos deduzam tais resultados observando os casos anteriores e cheguem ao princípio multiplicativo:

Se para tomar a decisão D_1 (pintar a primeira região da bandeira) temos p_1 possibilidades, tomada a decisão D_1 temos p_2 possibilidades para tomar a decisão D_2 (pintar a segunda região da bandeira), e assim sucessivamente até a decisão D_n quando teremos p_n possibilidades. Então teremos $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ possibilidades de tomar sucessivamente as decisões D_1, $D_2, \ldots, D_n$.

<u>k cores disponíveis</u>

Com 3 regiões e 3 cores tivemos $3 \cdot 2$ bandeiras;

com 4 faixas e 4 cores tivemos $4 \cdot 3 \cdot 2$ bandeiras;

daí com k faixas e k cores obteremos $\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2}_{k-1\ fatores}$ bandeiras.

<u>n cores disponíveis</u>

Como nas questões anteriores, o número de bandeiras era representado por um produto que tinha a quantidade de fatores iguais ao número de faixas e o primeiro fator era o total de cores, daí temos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big)$$

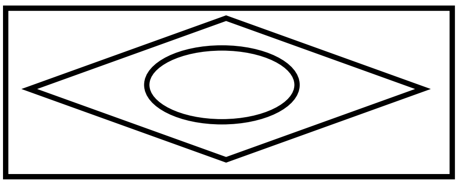
Diante das condições apresentadas se tivéssemos $n < k$ o produto

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$$

resultaria em zero ou em um número negativo, o que não faz sentido. Portanto $n \geq k$.

Questão 02

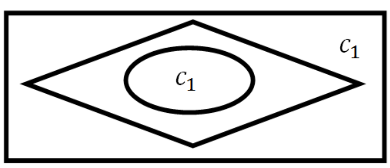
Considere agora a bandeira com a forma abaixo:



b) De quantas maneiras ela pode ser pintada, com 4 cores disponíveis, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas? E com 5 cores disponíveis? Em geral com *n* cores?

Solução:

<u>Com 4 cores</u>: c_1, c_2, c_3 e c_4. Fixando c_1 no centro, teríamos $3 \cdot 2$ possibilidades para pintar as outras 2 regiões se todas as regiões fossem pintadas com cores distintas. Mas como a terceira região pode ser pintada com a mesma cor que a primeira temos mais 3 possibilidades:



$$3 \cdot 2 + 3 = 3 \cdot 3$$

Daí, fixando as demais cores, temos um total de

$$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^2 \text{ formas.}$$

Com 5 cores: c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5. Com 5 cores o procedimento é análogo. Fixando c_1 na região do círculo, restam 4 cores que de acordo com a primeira questão (c) teríamos $4 \cdot 3$ formas se todas as cores fossem distintas, mas como c_1 pode ser usada também na 3ª região temos mais 4 possibilidades:

$$4 \cdot 3 + 4 = 4 \cdot 4$$

Com isso temos um total de

$$4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 4 = 5 \cdot 4^2$$

Com n cores: $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n$

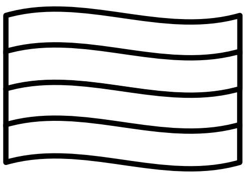
De modo análogo teremos

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-1) = n \cdot (n-1)^2$$

formas de pintar a bandeira.

Questão 03

Considere agora a bandeira com a forma ao lado:



b) De quantas maneiras ela pode ser pintada, com 4 cores disponíveis, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas? E com 5 cores disponíveis? E com 6 cores? Em geral com *n* cores?

Solução:

Aqui já esperamos o uso do princípio multiplicativo.

Quatro cores: para pintar a primeira região (primeira decisão) temos 4 cores disponíveis, independente da cor escolhida, para pintar a segunda região (segunda decisão) teremos 3 cores disponíveis, para a terceira região (terceira decisão) temos também 3 cores disponíveis pois não podemos usar a cor utilizada na segunda faixa, mas podemos usar a cor da já usada na primeira faixa e da mesma forma temos 3 cores disponíveis para a pintura da quarta faixa (quarta decisão). Portanto, pelo princícpio multiplicativo teremos

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^3$$

formas de pintar a bandeira com a condição exigida.

Para os demais casos os argumentos são análogos. Com 5 cores teremos

$$5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 5 \cdot 4^3$$

e com 6 cores teremos

$$6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4^3$$

formas de pintar a bandeira.

Questão 04

Considere uma bandeira com k faixas horizontais.

b) De quantas maneiras ela pode ser pintada, com k cores disponíveis, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas? E com n cores disponíveis?(n maior que k) O número n pode ser menor que k?

Solução:

Esse item é a generalização dos outros itens b das questões 2 e 3. Portanto o argumento aqui é também análogo, teremos um total de

$$k \cdot \underbrace{(k-1) \cdot (k-1) \cdot \ldots (k-1)}_{k-1\ fatores} = k \cdot (k-1)^{k-1}$$

formas de pintar a bandeira com k cores disponíveis.

Para $n > k$ teremos n possibilidades para pintar a primeira faixa e $n-1$ possibilidades para as demais, portanto pelo princípio multiplicativo teremos:

$$n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-1)}_{k-1\ fatores} = n \cdot (n-1)^{k-1}$$

formas de pintar a bandeira.

Como a condição para essa questão é que apenas regiões adjacentes tenham cores distintas, com apenas 2 cores diferentes podemos pintar qualquer bandeira composta por faixas horizontais. Portanto nesse caso, diferente do que ocorreu no item a dessa mesma questão, o número de cores pode sim ser menor que a quantidade de faixas.

Questão 5

Crie uma bandeira, distinta das anteriores, e elabore perguntas sobre formas de

colorir, use a criatividade para as condições de pintura.

Esperamos que os alunos elaborem questões, resolvam e troquem sua questão com a de outro grupo para que tenham oportunidade de ver e responder o que os colegas pensaram.

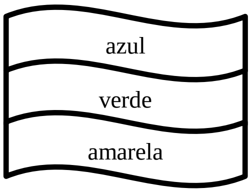
3.2 SOBRE A ATIVIDADE 2

Questão 01

Na coloração de uma bandeira com 3 faixas, João dispunha de $\mathbf{10}$ cores:

0 - preta	**1 - branca**	**2 - vermelha**	**3 - verde**	**4 - azul**
5 - amarela	**6 - roxa**	**7 - rosa**	**8 - marrom**	**9 - cinza**

João codificou a maneira de pintar a bandeira conforme abaixo:



$\longrightarrow$ $(\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{5})$

a) Quantos códigos de três dígitos João dispõe?

Solução:

Esperamos que os alunos observem a semelhança entre essa questão e as outras da atividade 01. Na questão 2 da atividade 01 chegamos a conclusão que dispomos de $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ formas diferentes de pintar uma bandeira com 3 faixas utilizando n cores distintas. No entanto, aqui podemos repetir as cores, com isso João dispõe de

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$

formas de pintar a bandeira utilizando as dez cores disponíveis.

b) Considerando que a primeira faixa não pode ser pintada com a cor preta (0), e também que as faixas devem ter cores distintas, quantos códigos deste tipo João dispõe?

Solução:

Aqui precisamos também usar o princípio multiplicativo: temos que contar a quantidade de possibilidades de cada decisão. As decisões são escolher que cor pintar para cada faixa:

- para pintar a primeira faixa temos 9 possibilidades, só não podemos utilizar a cor preta, que é codificada pelo algarismo zero
- para a pintura da segunda faixa dispomos também de nove cores: não podemos utilizar a cor utilizada na primeira faixa, mas podemos utilizar a cor preta
- por último, a terceira faixa pode ser pintada com uma das oito cores restantes

daí, temos $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ possibilidades.

c) Quantos são os números de três dígitos distintos?

Solução:

Aqui, esperamos que os alunos observem que esse item é equivalente ao anterior e que a quantidade de números de três dígitos distintos é a mesma quantidade de códigos:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

d) De quantas formas João pode pintar sua bandeira utilizando na última faixa apenas uma das seguintes cores: preta, vermelha, azul, roxa ou marrom?

Solução:

Usar na última faixa as cores descritas acima equivale a formar códigos do tipo $(x, y, 0), (x, y, 2), (x, y, 4), (x, y, 6), (x, y, 8)$ onde $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Assim temos 10 possibilidades para o primeiro valor da tripla ordenada, dez para o segundo e cinco para o terceiro, pelo princípio multiplicativo temos $10 \cdot 10 \cdot 5$ códigos diferentes, ou seja 500 formas de João pintar a sua bandeira.

e) Quantos são os números pares de três dígitos?

Solução:

Mais uma vez, esperamos que os discentes observem a semelhança entre esse item e o anterior. No item anterior cada código do tipo (x, y, z) com

$$x \in \{\, 1, 2, \dots, 9\}, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \text{ e } z \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

representa um número par. Daí podemos encontrar o total de número pares subtraindo de 500 todos códigos do tipo $(0, y, z)$ pois representam números de dois algarismos e foram contados. Temos um total de $1 \cdot 10 \cdot 5 = 50$ números desse tipo. Portanto o total de números pares com três dígitos é $500 - 50 = 450$.

f) Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

Solução:

Esperamos que os alunos façam essa contagem em partes: números que terminam em zero, os que terminam em dois, os que terminam em 4, os que terminam em 6 e os que terminam em 8. Para contar os que terminam em 0, analisaremos quantas possibilidades temos para a ordem das dezenas e das centenas:

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ 0$$

Para a ordem das centenas podemos utilizar qualquer um dos nove restantes. Para a ordem das dezenas temos 8 possibilidades, pois já foi usado um algarismo na ordem das centenas e o zero foi usado na ordem das unidades. Com isso teremos

$$9 \cdot 8 \cdot 1 = 72 \text{ números que terminam em zero.}$$

Agora analisemos os que terminam em 2:

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ 2$$

Para a ordem das centenas temos 8 maneiras de escolher o algarismo, pois, só não podemos utilizar o dois que foi fixo nas unidades e o zero (senão o número teria 2 dígitos). Para a ordem das dezenas só não podemos utilizar o dois e o que foi escolhido na ordem das centenas, ou seja, temos também oito possibilidades. Daí, teremos

$$8 \cdot 8 \cdot 1 = 64 \text{ números que terminam em dois.}$$

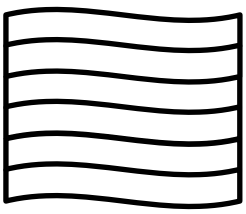
A contagem dos outros números segue este último caso de forma análoga. No total temos

$$72 + 64 + 64 + 64 + 64 = 72 + 4 \cdot 64 = 72 + 256 = 328$$

números pares com três dígitos distintos.

Questão 02

De quantos modos diferentes podemos pintar a bandeira, sem repetição de cores, estando disponível 6 cores distintas



1 – preta	**3 – vermelha**	**5 – roxa**
2 – branca	**4 – amarela**	**6 – rosa**

Solução:

Para a primeira faixa temos 6 possibilidades, para a segunda temos 5 possibilidades e assim sucessivamente até a última faixa quando teremos apenas uma possibilidade. Esperamos que os alunos apresentem como resposta o produto

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

daí introduziremos a notação de fatorial (!) mostrando que esse produto pode ser abreviado assim

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

Questão 03

De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

Solução:

Esperamos que os alunos percebam que a resposta dessa questão é equivalente a resposta da questão anterior.

Questão 04

De quantos modos pode-se ordenar n objetos?

Aqui esperamos que os alunos enxerguem que essa questão trata da generalização da questão anterior e cheguem a obter como resposta

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

A quantidade de modos de ordenar n objetos é chamada de permutação de n.

De posse dessa nova notação, podemos voltar para as duas primeiras perguntas do item a da questão 4 da atividade 1:

Questão 04 (Atividade 1)

Considere uma bandeira com k faixas horizontais.

a) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que k cores estão disponíveis? E com n cores disponíveis? (n maior que k)

Com k cores tivemos como resposta

$$\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2}_{k-1\ fatores}$$

Solicitaremos aos alunos para que reescrevam a resposta utilizando a notação de fatorial, como o número 1 é o elemento neutro do produto o produto acima é exatamente $k!$.

A segunda pergunta pode ser feita assim: **quantos arranjos de k cores pode-se fazer**

utilizando n cores? Ou seja, cada forma de pintar uma bandeira de k faixas utilizando k cores entre n cores ou cada forma de montar um número de três algarismos escolhidos numa lista de dez algarismos corresponde a um **arranjo**.

A resposta correspondente a segunda pergunta é

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big)$$

pediremos aos alunos que multipliquem e dividam esse produto pela expressão $(n-k)!$:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1}$$

Assim chega-se na fórmula conhecida que aparece nos livros didáticos.

3.3 SOBRE A ATIVIDADE 3

Trabalhamos com o princípio multiplicativo na atividade 1, na atividade 2 introduzimos a notação de fatorial e abordamos agrupamentos chamados arranjos. O objetivo dessa atividade é trabalhar com os agrupamentos conhecidos como combinação.

Questão 01

Na turma de Astrogildo, foi criada uma loteria diferente. Cada cartela possui 5 números conforme abaixo.

a) Quantas apostas diferentes podem ser feitas escolhendo 2 números da cartela?

Solução:

Escolher os números 1 e 2 é a mesma escolha de 2 e 1, usando a notação de conjunto temos:

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}.$$

Temos 10 formas de escolher 2 entre os 5 números disponíveis na loteria. Se contássemos todos os arranjos possíveis com 2 elementos utilizando a fórmula (1) teríamos:

$$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 4 = 20$$

Vinte é justamente o dobro da resposta que encontramos, pois nos agrupamentos de arranjos, escolher 1 e 2 não é a mesma coisa de escolher 2 e 1. Portanto, nesse tipo de problema será essencial sabermos quantos arranjos formamos com cada agrupamento que montamos. Nesse item são dois arranjos que formamos para cada agrupamento de dois números.

b) Quantas apostas diferentes podem ser feitas escolhendo 3 números da cartela?

Solução:

Esse item é análogo ao anterior. Precisamos saber quantos arranjos conseguimos montar com cada grupo de três números que escolhermos, pois todos esses arranjos resultarão em apenas uma aposta diferente.

Se escolhermos os números $2, 4$ e 5. Temos 6 arranjos diferentes:

$$(2,4,5),(2,5,4),(4,2,5),(4,5,2),(5,2,4),(5,4,2).$$

Mas, para o nosso problema todas essas escolhas de aposta representam uma só, ou seja, se usarmos a fórmula (1) para encontrar todas as apostas possíveis, teremos que logo em seguida dividir o resultado por 6:

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

Dividindo 60 por 6 temos 10 possibilidades de apostas diferentes. Listando essas possibilidades temos:

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}.$$

Como o próprio nome sugere os <u>métodos de contagem</u> não tem a preocupação de listar todos os resultados possíveis para os problemas, mas desenvolver caminhos para chegar no número de possibilidades.

Questão 02

De quantos modos podem-se escolher três jogadores de um time de futebol, para

representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Solução:

Esse problema é semelhante ao da loteria, pois escolher os jogadores A, B e C é o mesmo que escolher B, A e C. Usaremos aqui a informação da questão anterior que escolher três elementos gera uma repetição de seis. Como um time de futebol é composto por onze jogadores, nosso problema é descobrir o número de arranjos de três elementos que podemos formar e em seguida dividir esse valor por 6.

Total de arranjos:

$$\frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11!}{8!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$$

dividindo por 6:

$$990 \div 6 = 165$$

Portanto, há 165 formas de escolher três jogadores.

Esse tipo de agrupamento onde a ordem dos elementos não gera um novo agrupamento é denominado combinação.

Questão 03

De quantos modos pode-se fazer uma aposta mínima no jogo mega-sena? (a aposta mínima da mega-sena consiste em escolher 6 números dentre os 60 disponíveis no volante da aposta)

Solução:

Esse problema é semelhante aos já vistos. Calcularemos o total de arranjos com 6 elementos escolhidos num total de 60, verificaremos quantas são as permutações com 6 números, pois esse resultado é o número que representa as repetições de cada aposta, e dividimos o total de arranjos pelo total de permutações:

$$\frac{60!}{(60-6)!} \div 6! = \frac{60!}{54!} \cdot \frac{1}{6!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 50\,063\,860.$$

O resultado do problema evidencia quão numeroso é o espaço amostral referente às apostas possíveis da mega-sena.

Questão 04

O valor da aposta mínima na mega-sena é R$3,50. Por quê numa aposta de 7

números o apostador deve pagar R$24,50?

Solução:

Esperamos que os alunos analisem e verifiquem a equivalência entre uma aposta de 7 números e 7 apostas de 6 números.

Com 7 números escolhidos podemos criar 7 subconjuntos de 6 elementos cada, de fato, como fizemos na questão anterior calcularemos o total de permutações de 6 elementos e o total de arranjos com 6 elementos escolhidos num total de 7:

$$\frac{7!}{(7-6)!} \div 6! = \frac{7!}{1!} \cdot \frac{1}{6!} = \frac{7 \cdot 6!}{6!} = 7.$$

Equivalências como essas, justificam também os valores de outras apostas:

Quantidade de número jogados	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Valor da aposta	3,5	24,5	98	294	735	1617	3234	6006	10510,5	17517,5

Questão 05

De modo geral, qual o número de modos de escolher k dentre n objetos?

Solução:

Essa questão é a generalização da questões anteriores. Esperamos que os alunos dividam o número total de arranjos pelo total de permutações:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \div k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo apresentaremos as respostas dos alunos para as atividades propostas. No início das atividades a sala possuía 41 alunos que foram divididos em 9 grupos de 4 e um grupo de 5. No decorrer das atividades, ocorreram pequenas alterações na composição dos grupos em virtude, principalmente, da transferência de alunos de um turno para o outro. Nomearemos os grupos como Grupo 1 (G1), Grupo 2 (G2), ..., Grupo 10 (G10).

O conteúdo trabalhado foi métodos de contagem a partir de uma abordagem investigativa. No início da aplicação das atividades os alunos sofreram um impacto, pois o método de aulas tradicionais estava sendo deixado de lado. Nessas atividades os alunos deveriam, através de tentativas, conjecturas e análises ir em busca das respostas para os questionamentos solicitados. O professor fez o papel de orientador.

O planejamento inicial era aplicar as três atividades em um período de cinco semanas. Porém em virtude das novidades e dificuldades que surgiram, tais como modificação na metodologia, o período de aplicação se estendeu para dois meses e meio.

Uma das dificuldades encontrada foi o horário de aplicação das atividades. O horário foi o mesmo das aulas regulares, porém nesse horário as aulas não eram seguidas: tínhamos uma aula na segunda, uma na quarta e duas na sexta-feira (2º e 5º horários). A culminância do Projeto A África é Aqui, que faz parte do Projeto Político Pedagógico da escola, numa sexta-feira contribuiu para que não concluíssemos as atividades no tempo previsto. Uma outra situação que ocorreu também foi ceder um horário para o professor de português passar um filme.

A abordagem investigativa trouxe um aproveitamento significativo para as aulas, pois os alunos eram convidados a serem protagonistas das aulas, não ficavam esperando por resultados e fórmulas apresentadas tradicionalmente pelo professor. A discussão em grupo era constante. Apesar de uma resistência da minoria em querer o modelo de aula tradicional.

Elaboramos três atividades que seriam respondidas pelos grupos. Inicialmente cada grupo recebeu a primeira atividade, todos deveriam resolver a primeira questão, em seguida um representante de um dos grupos deveria ir para a lousa apresentar a solução encontrada para fazermos a discussão. Depois todos resolveriam a segunda questão e o procedimento se repetia. Como todos os grupos estavam com a atividade completa, alguns grupos se adiantaram, daí percebemos um desalinhamento entre os grupos. Como a turma era grande, era importante um alinhamento em relação à ordem das questões. Daí, na segunda e terceira atividades entregamos questão por questão aos grupos.

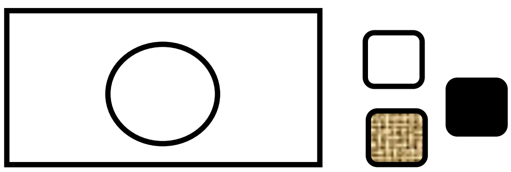
Com a apresentação das questões pelos alunos na lousa, percebemos que para concluir as três atividades levaríamos mais tempo do que o previsto, tornando assim inviável a abordagem dos demais conteúdos do segundo ano que estavam no planejamento anual. Daí decidimos, a partir da Atividade 2, que o comentário de cada questão seria feito pelo professor orientador.

4.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1

Nesta seção apresentamos as respostas de alguns grupos para os questionamentos referente a primeira atividade. Inicialmente os alunos tiveram grande preocupação em apresentar respostas certas. No decorrer da atividade, deixei claro para os alunos que o resultado final não era o mais importante dessas atividades e sim o caminho que seria percorrido. Uma das dificuldades foi orientar grupo por grupo, eram dez no total.

4.1.1 Respostas apresentadas na questão 1

Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando as cores dadas.



a) Liste todas as possíveis bandeiras, incluindo as que possuem as duas regiões pintadas com a mesma cor.

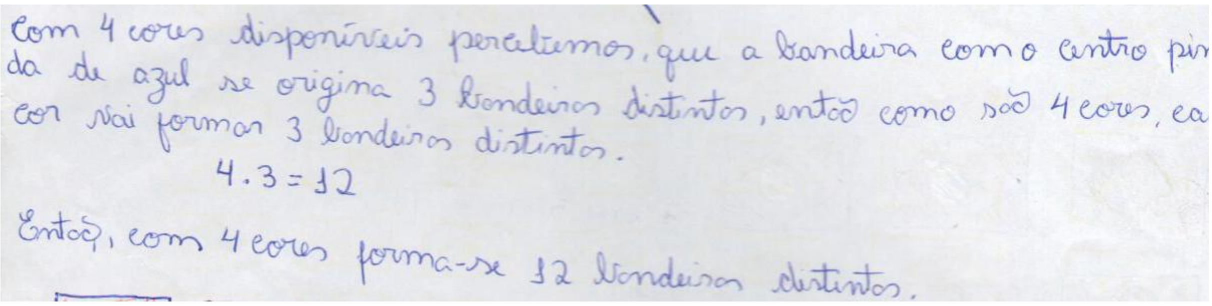
b) Quantas são as bandeiras com cores distintas?

c) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que 4 cores estão disponíveis? E com 5 cores disponíveis?

d) Em geral, com n cores disponíveis, de quantas maneiras é possível pintar a bandeira?

Nessa questão os alunos conseguiram responder os itens a, b e c com uma certa tranquilidade. Porém uma das dificuldades que apareceram foi o significado da palavra <u>distinta</u>, houve grupos que resolveram sem levar em conta a palavra distinta, mas em outro momento refizeram a questão descartando as repetições. Alguns grupos já começaram a observar o padrão de algumas repetições e usaram a estratégia de fazer multiplicações, ao invés de contar as bandeiras uma por uma, como fizeram outros grupos.

O G9 apresentou a solução dos itens na lousa e usou como estratégia fixar uma cor no círculo, que eles chamaram de centro. O raciocínio do G8 foi análogo:



Com 4 cores disponíveis percebemos, que a bandeira com o centro pin
da de azul se origina 3 bandeiras distintas, então como são 4 cores, ea
cor vai formar 3 bandeiras distintas.
4.3 = 12
Então, com 4 cores forma-se 12 bandeiras distintas.

Figura 1: Resolução do G8 ao item c da questão 1 da atividade 1

O item d gerou mais dificuldade de resolução em todos os grupos, e a pergunta comum foi feita: quanto vale esse *n*? Nesse momento procurei intervir com algumas respostas: “esse *n* representa um número inteiro positivo qualquer maior do que 2, pode ser 5, 6, ..., 10, 30...” Alguns alunos insistiam: “mas professor, qual é o número? ” Uma outra intervenção foi necessária: “a resposta deve ser uma expressão que contenha *n*, que dependa de *n”*. As dúvidas persistiram e a intervenção final foi desenvolver o item d na lousa utilizando a mesma ideia apresentada pelo G8:

“Temos n cores disponíveis, vamos nomeá-las como $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$. Fixando c_1 no centro formamos $n-1$ bandeiras com cores distintas, já que c_1 não pode ser usada na região do retângulo. Daí, fixando as demais cores, observamos que cada uma dará origem também a $n-1$ bandeiras, portanto temos:

$$(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)=n\cdot(n-1)\text{”}$$

Antes disso, o G4 entendeu que o n seria o número 6, provavelmente esse entendimento foi em virtude dos números anteriores serem 4 e 5:

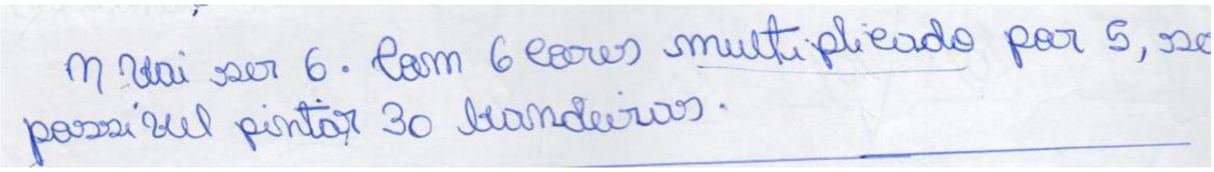
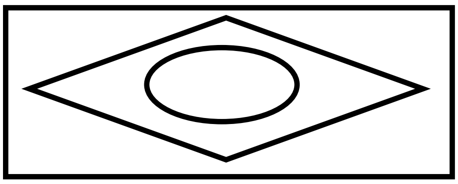

n vai ser 6. Com 6 cores multiplicado por 5, se
possível pintar 30 bandeiras.

Figura 2: Resolução do G4 ao item d da questão 1 da Atividade 1

No decorrer da aplicação das atividades, percebemos a dificuldade dos alunos na resolução do item b da questão 2, pois esse item exige uma condição para a pintura das bandeiras: regiões adjacentes devem ser pintadas com cores distintas. Daí, como os itens b, das questões 3 e 4 também exigem essa condição, resolvemos orientar os alunos para que resolvessem o item a das questões 3 e 4 e deixassem para um outro momento a resolução do item b.

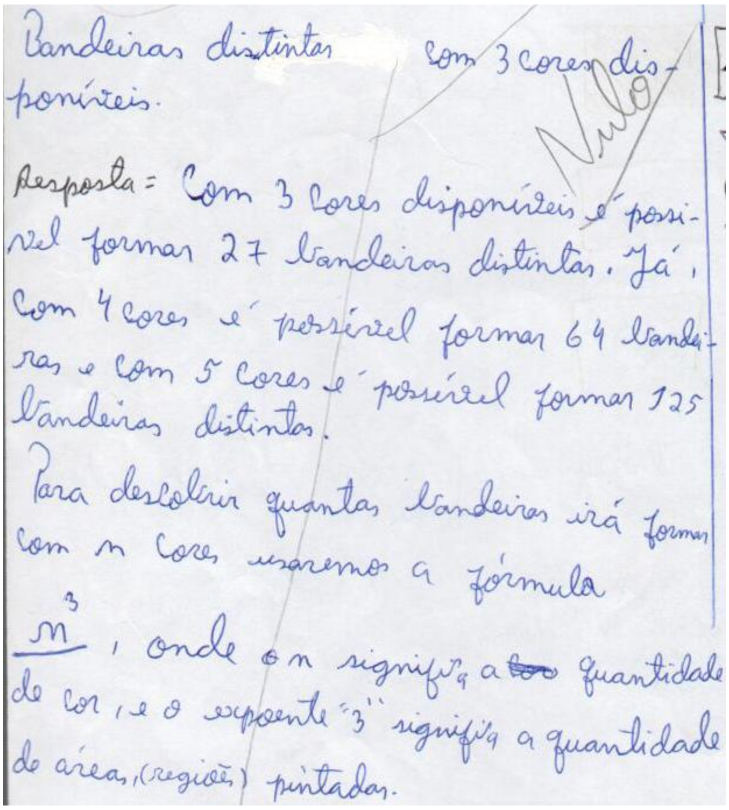
4.1.2 Respostas apresentadas na questão 2 (item a)

Considere agora a bandeira com a forma abaixo:



a) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que 3 cores estão disponíveis? E com 4 cores disponíveis? E com 5 cores? Em geral com *n* cores?

O G8 apresentou como solução para o item (a) o desenho de 27 bandeiras e um outro com 64 bandeiras e o texto:



Bandeiras distintas com 3 cores disponíveis.

Nulo

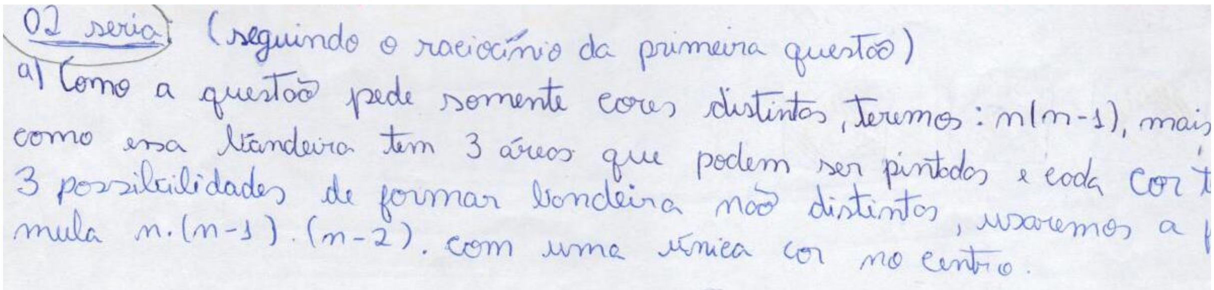
Resposta = Com 3 cores disponíveis é possível formar 27 bandeiras distintas. Já, com 4 cores é possível formar 64 bandeiras e com 5 cores é possível formar 125 bandeiras distintas.

Para descobrir quantas bandeiras irá formar com n cores usaremos a fórmula

n^3, onde o n significa a quantidade de cor, e o expoente "3" significa a quantidade de área, (regiões) pintadas.

Figura 3: Resolução do G8 ao item a da questão 2 da Atividade 1

Em um outro momento o grupo refez a questão acrescentando mais argumentos e retirando as repetições.



02 seria) (seguindo o raciocínio da primeira questão)
a) Como a questão pede somente cores distintas, teremos: $n(n-1)$, mais
como essa bandeira tem 3 áreas que podem ser pintadas e cada cor t
3 possibilidades de formar bandeira não distintos, usaremos a f
mula $n.(n-1).(n-2)$. com uma única cor no centro.

Figura 4: Segunda resolução do G8 ao item a da questão 2 da Atividade 1

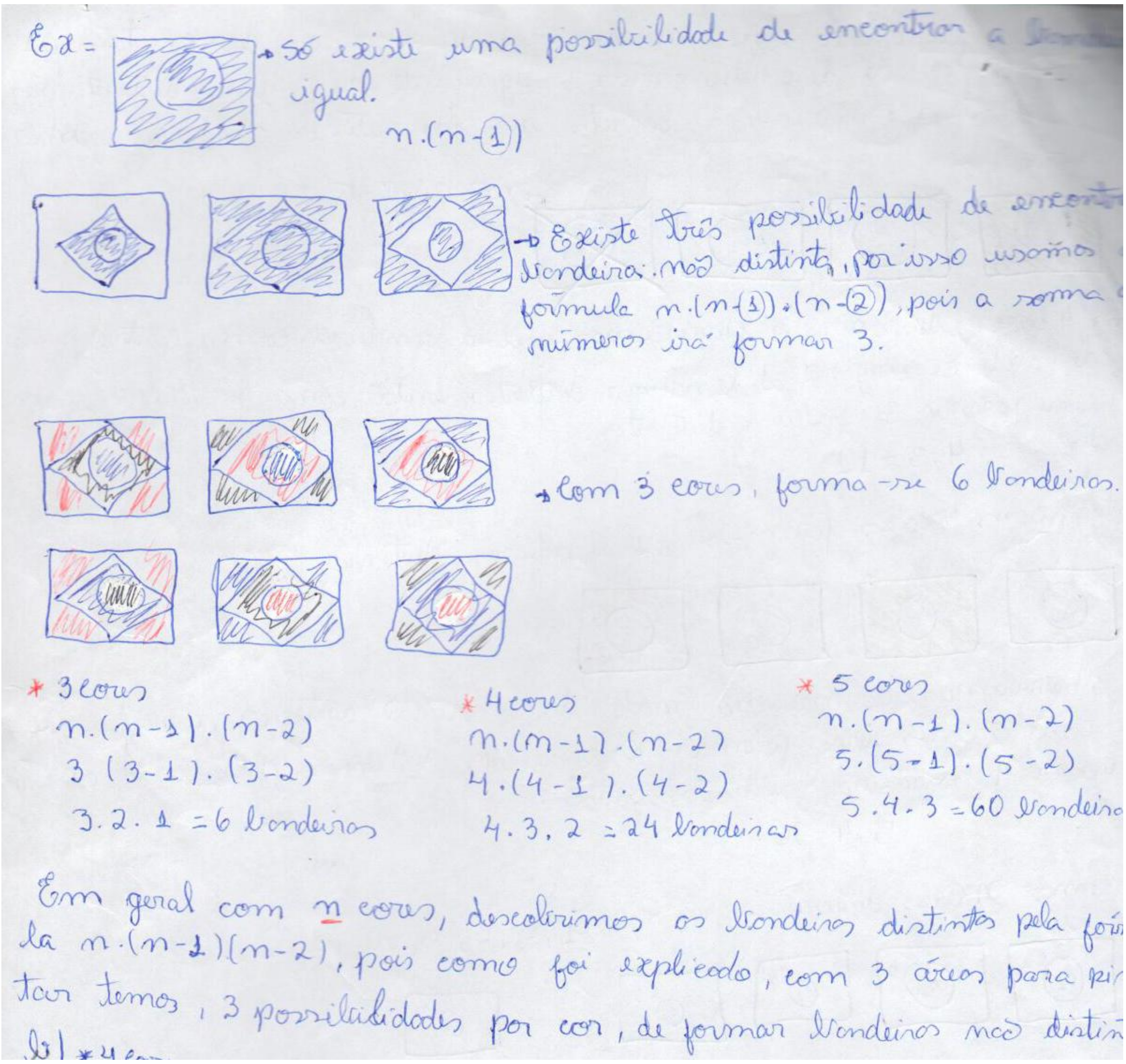


Figura 5: Continuação da resolução do G8 ao item a da questão 2 da Atividade 1

De uma forma geral, os grupos continuaram a listar as bandeiras, porém alguns não fizeram a lista de todas as bandeiras, a partir de uma listagem deduziram o total como o G9:

Figura 6: Resolução do G9 ao item a da questão 2 da Atividade 1

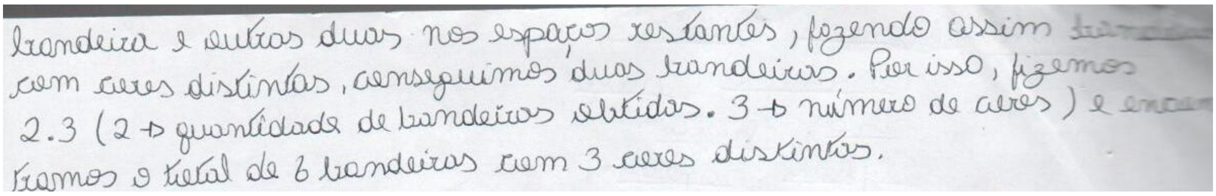


Figura 7: Continuação da resolução do G9 ao item a da questão 2 da Atividade 1

Nesse momento os componentes do grupo fizeram uma conjectura:

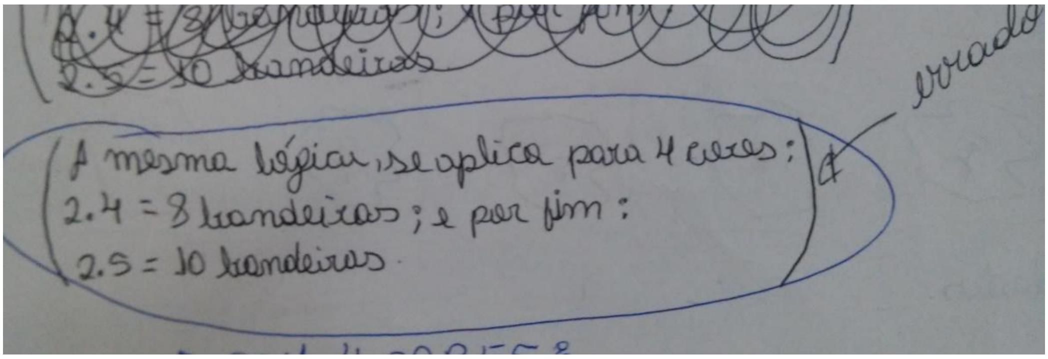


Figura 8: Conjectura do G9 ao item a da questão 2 da Atividade 1

Esse é o segundo momento de uma investigação matemática de acordo com Ponte: processo de formulação de conjecturas.

Depois, com o auxílio de desenhos perceberam que a conjectura para 4 e 5 cores não funcionava:

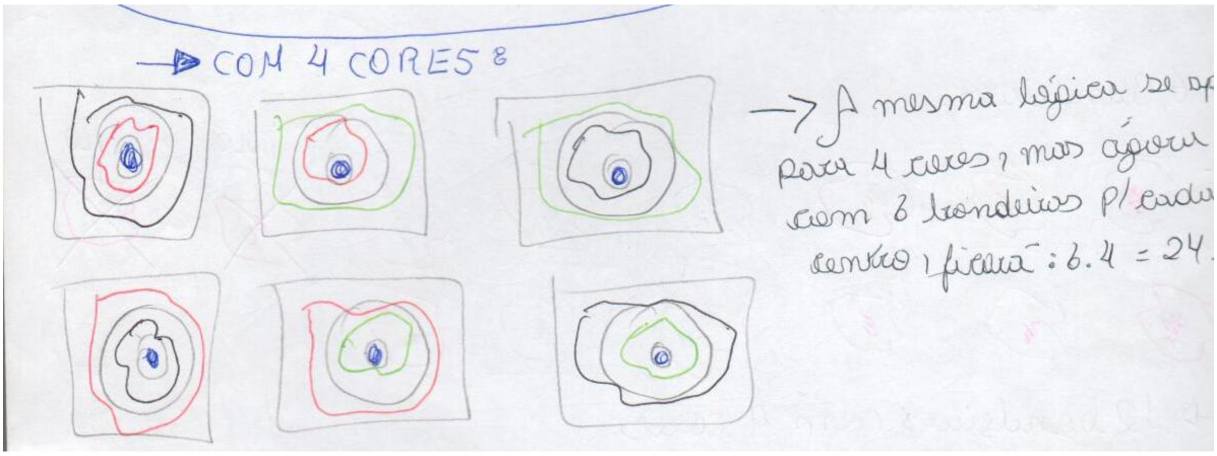


Figura 9: Continuação da resolução do G9 ao item a da questão 2 da Atividade 1

Nesse esquema, vemos que o grupo pintou de azul a parte que corresponde ao círculo gerando assim 6 bandeiras, como são 4 cores diferentes foi feito o produto $6 \cdot 4$ (a rigor o produto a ser apresentado deveria ser $4 \cdot 6$, pois teremos quatro grupos de seis bandeiras).

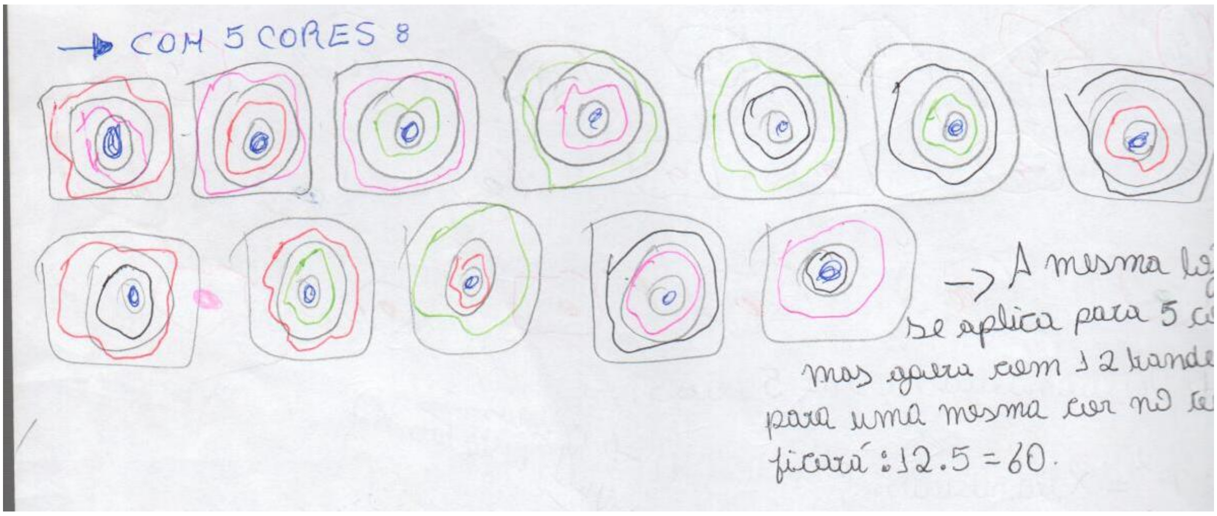
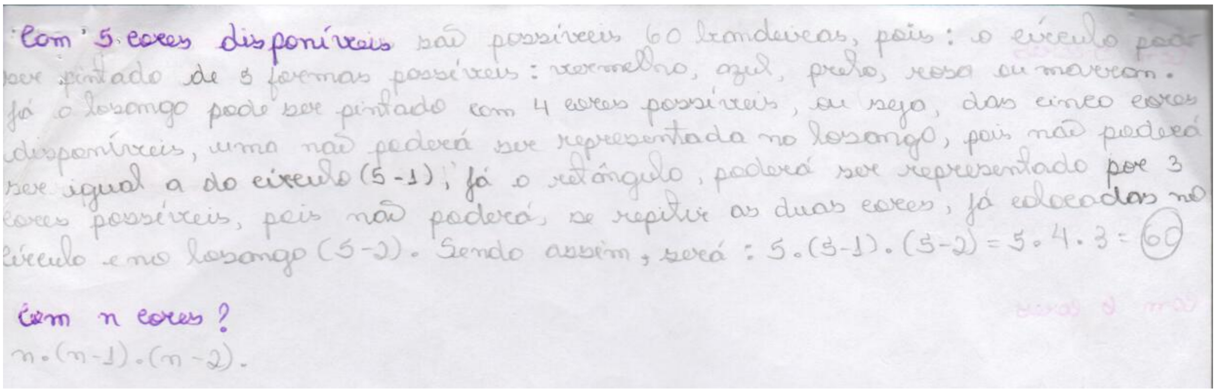


Figura 10: Continuação da resolução do G9 ao item a da questão 2 da Atividade 1

A generalização do item a não foi feita por alguns grupos. A intervenção que fizemos foi que eles poderiam utilizar o resultado do item d da questão anterior, isto é, uma bandeira de duas regiões com n cores pode ser pintada de $n(n-1)$ formas. Apenas alguns integrantes de três grupos entenderam a dica e fizeram a generalização na lousa.

O G5 escreveu assim:


Com 5 cores disponíveis são possíveis 60 bandeiras, pois: o círculo pode ser pintado de 5 formas possíveis: vermelho, azul, preto, rosa ou marrom. Já o losango pode ser pintado com 4 cores possíveis, ou seja, das cinco cores disponíveis, uma não poderá ser representada no losango, pois não poderá ser igual a do círculo (5-1); já o retângulo, poderá ser representado por 3 cores possíveis, pois não poderá se repetir as duas cores, já colocadas no círculo e no losango (5-2). Sendo assim, será: 5.(5-1).(5-2) = 5.4.3 = 60

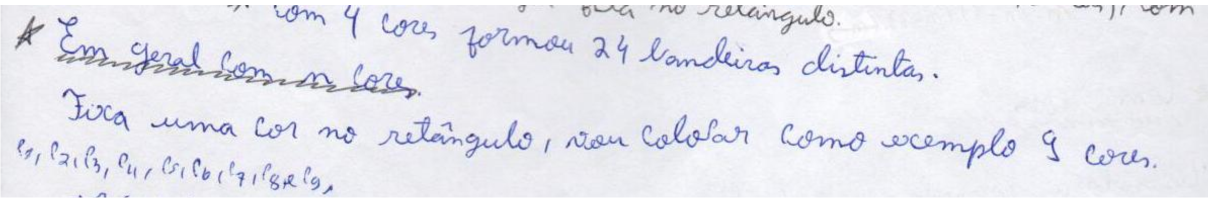
Com n cores?

n.(n-1).(n-2).

Figura 11: Resolução do G5 ao item a da questão 2 da Atividade 1

Notamos na resposta do G5 o uso de forma implícita do princípio multiplicativo.

O G8 escreveu assim:

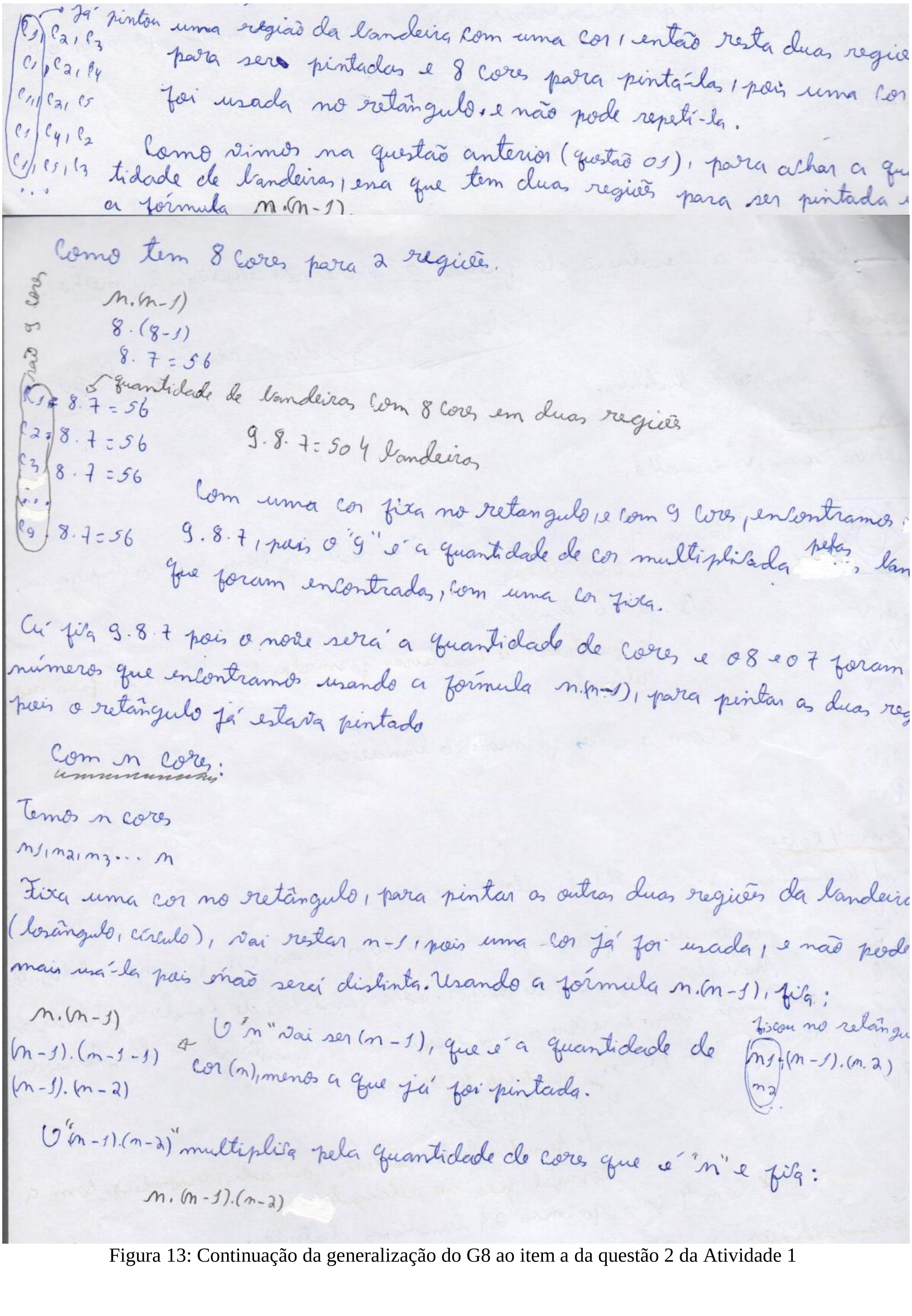

com 4 cores formou 24 bandeiras distintas.

Em geral com n cores.

Fica uma cor no retângulo, vou colocar como exemplo 9 cores.

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ e c_9,

Figura 12: Generalização do G8 ao item a da questão 2 da Atividade 1



C_1, C_2, C_3
C_1, C_2, C_4
C_1, C_2, C_5
C_1, C_4, C_2
C_1, C_5, C_3
...

→ Já pintou uma região da bandeira com uma cor, então resta duas regiões para ser pintadas e 8 cores para pintá-las, pois uma cor foi usada no retângulo, e não pode repetí-la.

Como vimos na questão anterior (questão 01), para achar a quantidade de bandeiras, era que tem duas regiões para ser pintada a fórmula $n.(n-1)$.

Como tem 8 cores para 2 regiões.

$n.(n-1)$
$8.(8-1)$
$8.7=56$
↳ quantidade de bandeiras com 8 cores em duas regiões

não 9 cores

C_1 = $8.7=56$
C_2 = $8.7=56$
C_3 $8.7=56$
...
C_9 $8.7=56$

$9.8.7=504$ bandeiras

Com uma cor fixa no retangulo, e com 9 cores, encontramos $9.8.7$, pois o "9" é a quantidade de cor multiplicada pelas ..., ban... que foram encontrada, com uma cor fixa.

Aí fica $9.8.7$ pois o nove será a quantidade de cores e o 8 e o 7 foram números que encontramos usando a fórmula $n.(n-1)$, para pintar as duas re... pois o retângulo já estava pintado

Com n cores:

Temos n cores
$n_1, n_2, n_3 \ldots n$

Fixa uma cor no retângulo, para pintar as outras duas regiões da bandeira (losângulo, círculo), vai restar $n-1$, pois uma cor já foi usada, e não pode mais usá-la pois não será distinta. Usando a fórmula $n.(n-1)$, fica:

$n.(n-1)$
$(n-1).(n-1-1)$
$(n-1).(n-2)$

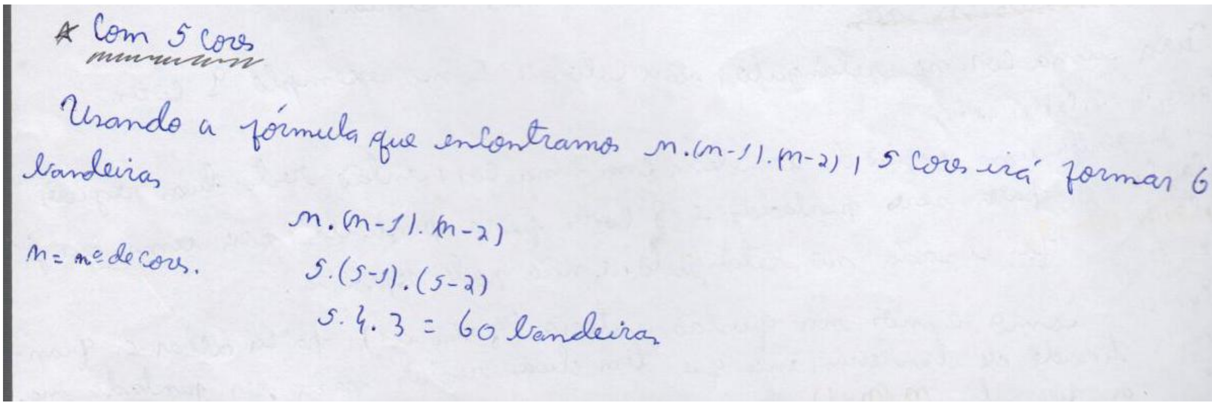
O "n" vai ser $(n-1)$, que é a quantidade de cor (n), menos a que já foi pintada.

fixou no retângulo
$n_1 . (n-1).(n-2)$
n_2

O "$(n-1).(n-2)$" multiplica pela quantidade de cores que é "n" e fica:

$n.(n-1).(n-2)$

Figura 13: Continuação da generalização do G8 ao item a da questão 2 da Atividade 1


* Com 5 cores

Usando a fórmula que encontramos n.(n-1).(n-2), 5 cores irá formar 6 bandeiras

n = nº de cores.

n.(n-1).(n-2)

5.(5-1).(5-2)

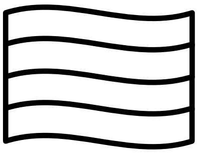
5.4.3 = 60 bandeiras

Figura 14: Continuação da generalização do G8 ao item a da questão 2 da Atividade 1

A solução detalhada apresentada por esse grupo, revela um entendimento significativo por parte dos seus componentes. No início eles acrescentaram mais um caso particular, 9 cores, desenvolveram a solução e em seguida fizeram a generalização e para isso usaram o resultado da questão anterior.

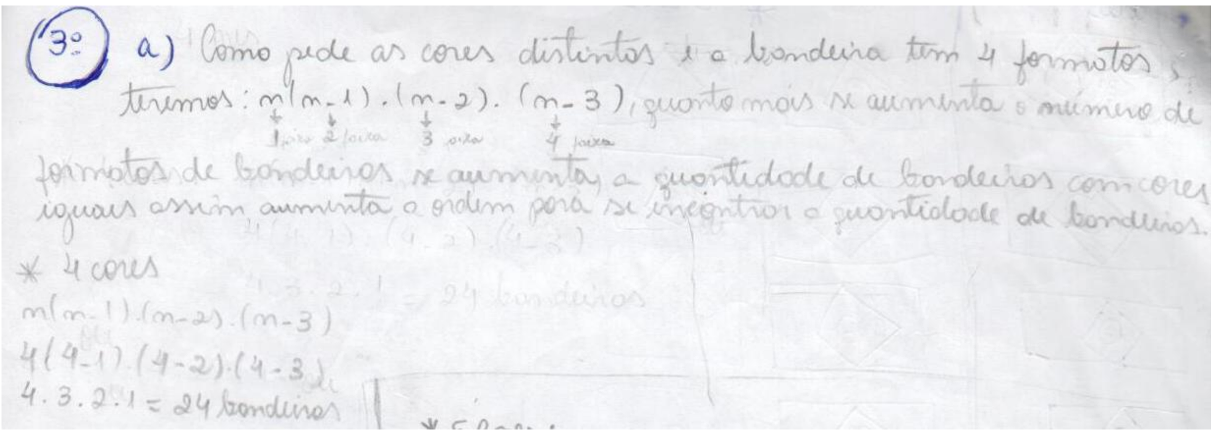
4.1.3 Respostas apresentadas na questão 3 (item a)

Considere agora a bandeira com a forma ao lado:



a) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que 4 cores estão disponíveis? E com 5 cores disponíveis? E com 6 cores? Em geral, com *n* cores?

Nesse item o G2 já começou com a generalização:


3º a) Como pede as cores distintos e a bandeira tem 4 formatos, teremos: m(m-1).(m-2).(m-3), quanto mais se aumenta o número de formatos de bandeiras se aumenta a quantidade de bandeiras com cores iguais assim aumenta a ordem para se encontrar a quantidade de bandeiras.

1ª faixa, 2 faixa, 3 faixa, 4 faixa

* 4 cores

m(m-1)(m-2).(m-3)

4(4-1).(4-2).(4-3)

4.3.2.1 = 24 bandeiras

Figura 15: Generalização do G2 ao item a da questão 3 da Atividade 1

Da mesma forma com 5 e 6 cores. Com n cores o grupo apenas colocou a fórmula. Notamos também nesse grupo o uso do princípio multiplicativo.

Porém, nem todos os grupos perceberam o padrão de repetição. O G10 fez a listagem de 360 bandeiras, conforme apresentado na figura a seguir.

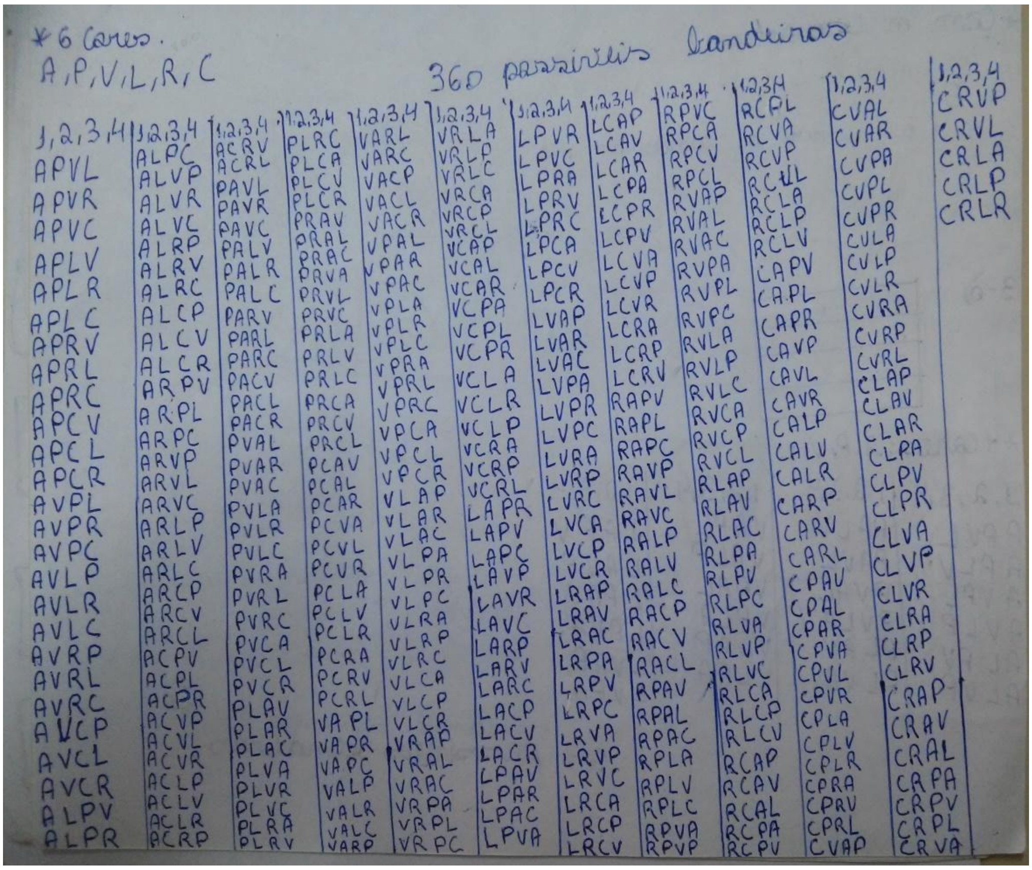


Figura 16: Resolução do G10 ao item a da questão 3 da Atividade 1

O G8 detalhou a generalização usando argumentos análogos ao da generalização da questão 02 e chegou na fórmula:

$$n.(n-1).(n-2).(n-3)$$

Figura 17: Fórmula apresentada pelo G8 ao item a da questão 3 da Atividade 1

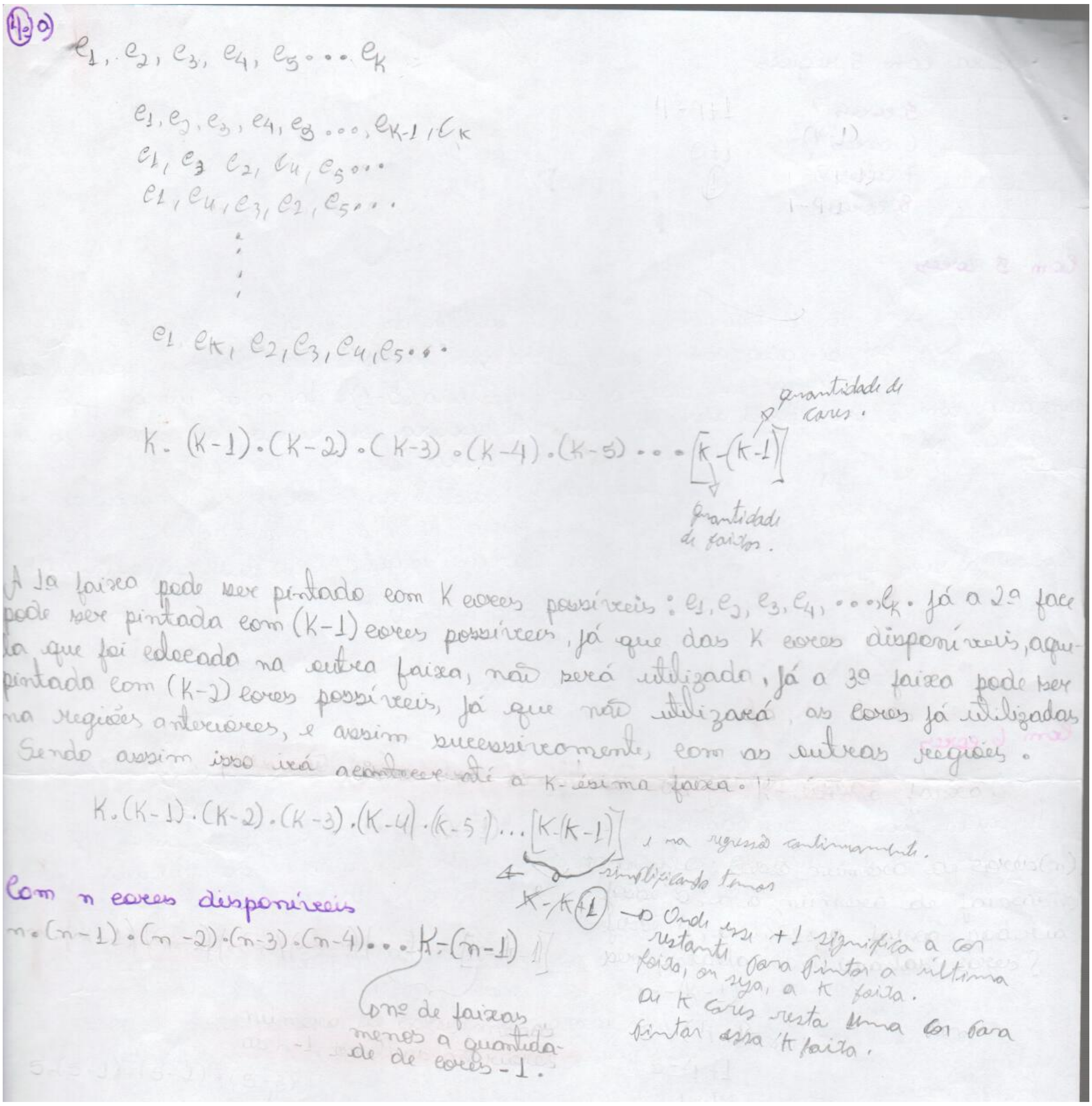
4.1.4 Resultados apresentados na questão 4 (item a)

Considere uma bandeira com k faixas horizontais.

a) Quantas são as possíveis bandeiras, com cores distintas, no caso em que k cores estão disponíveis? E com n cores disponíveis (n maior que k)? O número n pode ser menor que k?

O G8 atribuiu valores inteiros para k e resolveu como nos itens anteriores.

O G5 escreveu assim:


4) a) $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \ldots e_K$

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{K-1}, e_K$

$e_1, e_3, e_2, e_4, e_5 \ldots$

$e_1, e_4, e_3, e_2, e_5 \ldots$

$\vdots$

$e_1, e_K, e_2, e_3, e_4, e_5 \ldots$

quantidade de cores.

$K \cdot (K-1)\cdot(K-2)\cdot(K-3)\cdot(K-4)\cdot(K-5)\cdots[K-(K-1)]$

quantidade de faixas.

A 1ª faixa pode ser pintada com K cores possíveis: $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_K$. Já a 2ª faixa pode ser pintada com (K-1) cores possíveis, já que das K cores disponíveis, aquela que foi colocada na outra faixa, não será utilizada, já a 3ª faixa pode ser pintada com (K-2) cores possíveis, já que não utilizará as cores já utilizadas na regiões anteriores, e assim sucessivamente, com as outras regiões. Sendo assim isso irá acontecer até a K-ésima faixa.

$K\cdot(K-1)\cdot(K-2)\cdot(K-3)\cdot(K-4)\cdot(K-5)\ldots[K-(K-1)]$, na regressão continuamente.

simplificando temos $K-K+1$ → Onde esse +1 significa a cor restante para pintar a última faixa, ou seja, a K faixa. Das K cores resta uma cor para pintar essa K faixa.

Com n cores disponíveis

$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdots K-(n-1)$

nº de faixas menos a quantidade de cores - 1.

Figura 18: Resolução do G5 ao item a da questão 3 da Atividade 1

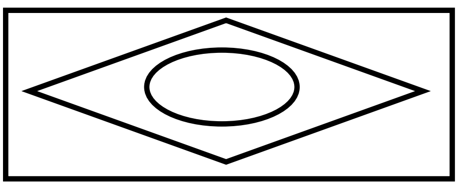
Diante dessa solução percebemos o grande proveito de trabalhar com esse tipo de atividade, pois os discentes estão de fato construindo o conhecimento, ao invés de receber fórmulas “prontas e acabadas”. Apesar de que dentro de cada grupo o entendimento varia, ou seja, a sala é dividida em grupos, mas os componentes do mesmo grupo não possuem o mesmo entendimento. Observei particularmente nesse grupo que das quatro componentes, uma tinha mais habilidade de compreensão, uma outra possuía uma compreensão que eu classifico como mediana e as outras duas uma baixa compreensão em relação aos assuntos de matemática no geral, mas o trabalho em grupo propicia responsabilidades também individuais, e talvez mais ainda do que em aulas tradicionais.

Já na segunda resposta, quando temos n cores disponíveis, percebemos um equívoco do grupo, pois $k-(n-1)$ representa um número nulo ou negativo.

O caso $n<k$ não foi registrado pelos discentes.

4.1.5 Resultados apresentados na questão 2 (item b)

Considere agora a bandeira com a forma abaixo:



b) De quantas maneiras ela pode ser pintada, com 4 cores disponíveis, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas? E com 5 cores disponíveis? Em geral com n cores?

O item b trouxe uma dúvida comum para todos grupos: o que são regiões adjacentes? Era necessário saber o significado para poder iniciar a questão. De forma simples disse que regiões adjacentes são as regiões vizinhas. O G10 fez assim:

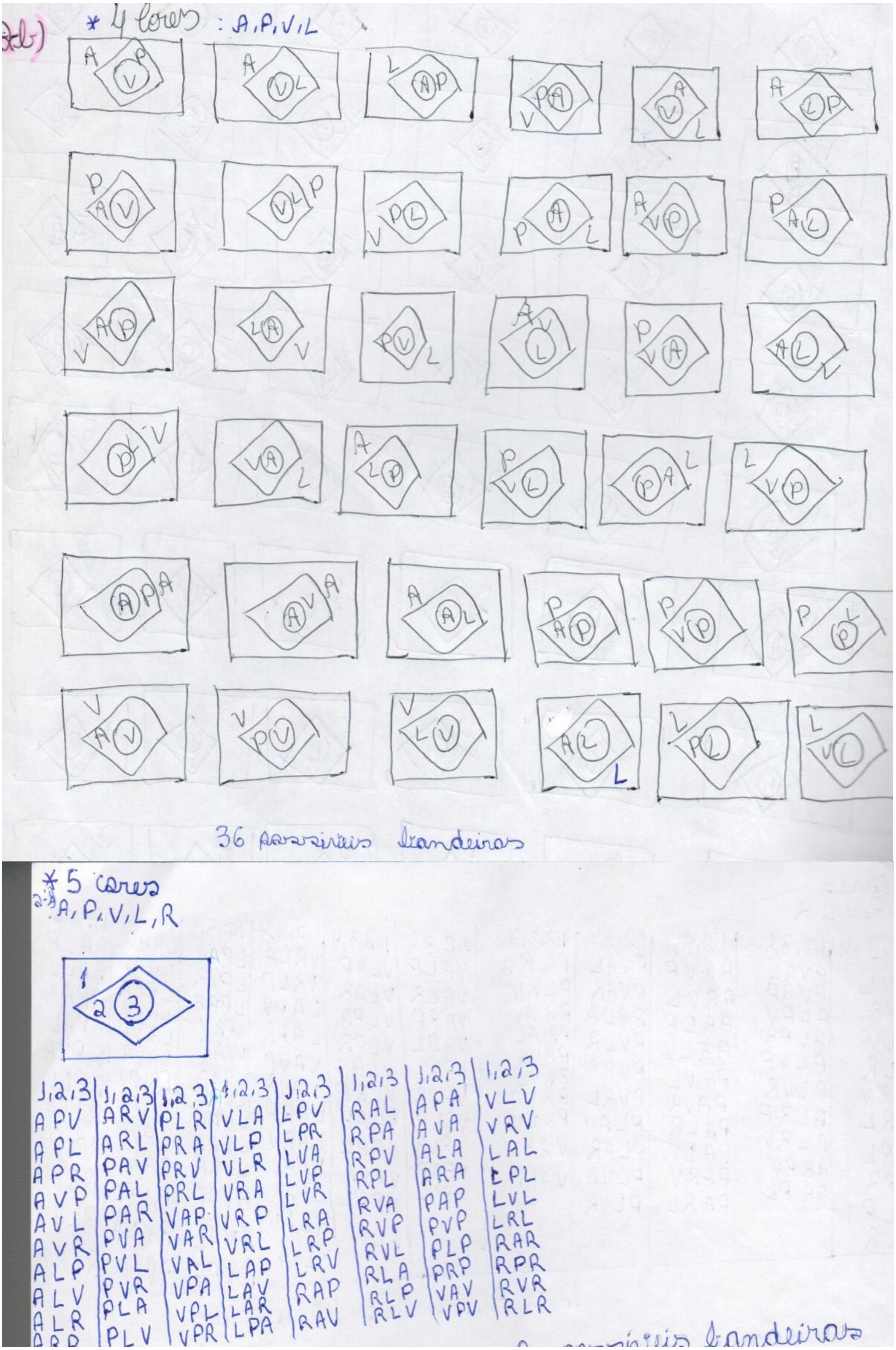


Figura 19: Resolução do G10 ao item b da questão 2 da Atividade 1

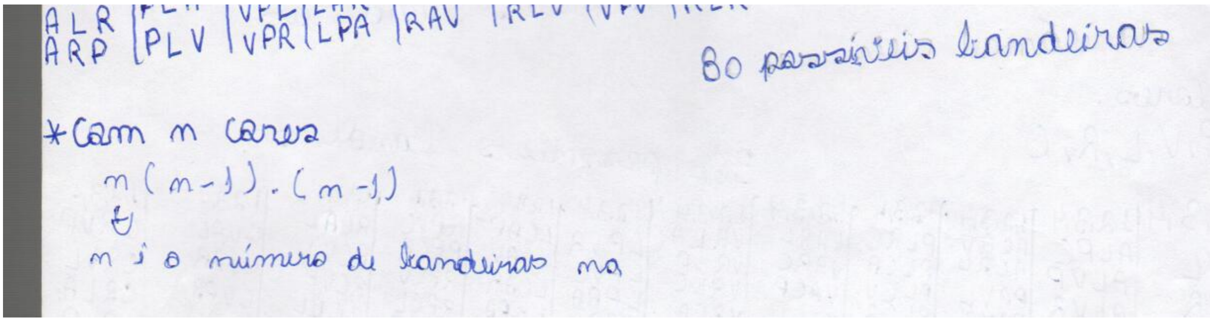


Figura 20: Continuação da resolução do G10 ao item b da questão 2 da Atividade 1

Com quatro cores disponíveis eles fizeram o desenho das bandeiras, já com 5 cores, eles encontraram uma forma abreviada: designaram cada região como um número e utilizaram as iniciais das cores. Observamos também que nessa resposta eles buscaram seguir um padrão, o que não foi observado na resposta anterior. Primeiro eles listam todas as possibilidades com a cor A na região 1, depois P, V, L e R. Nas duas últimas colunas encontram-se as repetições permitidas, aí também existe um padrão: fazem todas possibilidades iniciando com A, depois com P, V, L e R. A fórmula apresentada para a generalização está correta, mas não foi comentada, provavelmente os componentes copiaram de outro grupo.

O G4 abreviou a resposta:

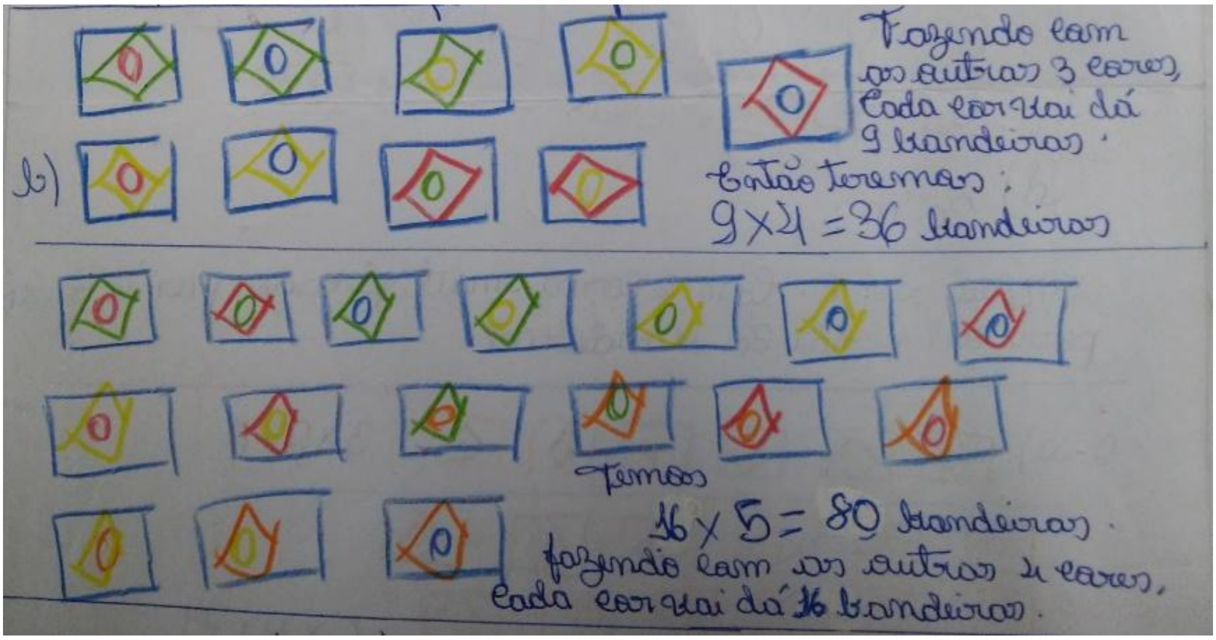


Figura21: Resolução do G4 ao item b da questão 2 da Atividade 1

Quanto à generalização nem todos conseguiram. O G3 apresentou de forma simples esse esquema:

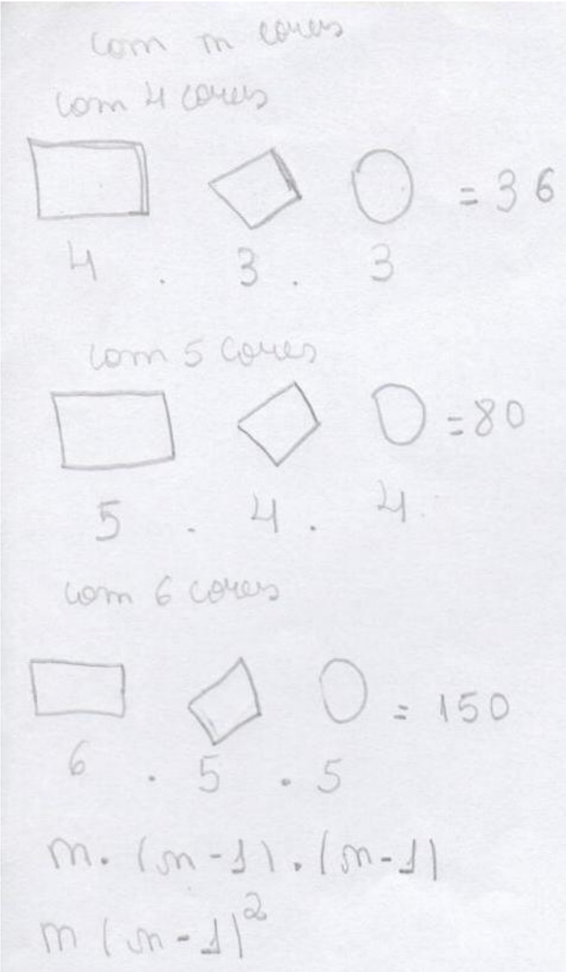


Figura 22: Resolução do G3 ao item b da questão 2 da Atividade 1

O esquema apresentado pelo G3 evidencia o uso do princípio multiplicativo. Apesar de não adotarmos o livro didático para trabalharmos com essa atividade, percebi os componentes desse grupo e de alguns outros grupos procurando o assunto no livro e acredito que eles estudaram em casa alguma parte do conteúdo.

O G5 escreveu:

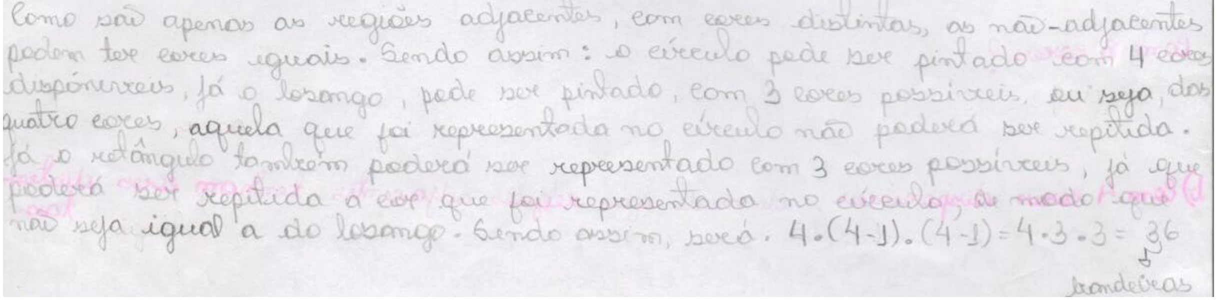
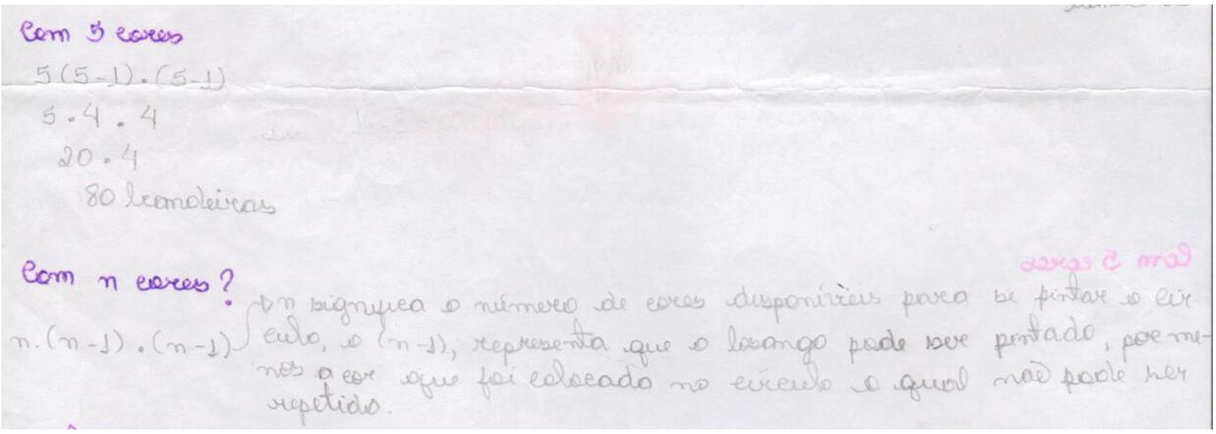

Como são apenas as regiões adjacentes, com cores distintas, as não-adjacentes podem ter cores iguais. Sendo assim: o círculo pode ser pintado com 4 cores disponíveis, já o losango, pode ser pintado, com 3 cores possíveis, ou seja, das quatro cores, aquela que foi representada no círculo não poderá ser repetida. Já o retângulo também poderá ser representado com 3 cores possíveis, já que poderá ser repetida a cor que foi representada no círculo, de modo que não seja igual a do losango. Sendo assim, será: 4.(4-1).(4-1)=4.3.3= 36 bandeiras

Figura 23: Resolução do G5 ao item b da questão 2 da Atividade 1


Com 5 cores
5(5-1).(5-1)
5.4.4
20.4
80 bandeiras

Com n cores?
n.(n-1).(n-1) n significa o número de cores disponíveis para se pintar o círculo, o (n-1), representa que o losango pode ser pintado, por menos a cor que foi colocado no círculo o qual não pode ser repetido.

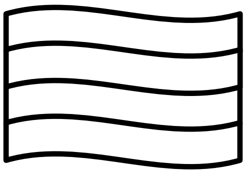
Figura 24: Resolução do G5 ao item b da questão 2 da Atividade 1

Notamos que o uso do princípio multiplicativo é um eficiente meio para fazermos contagens.

4.1.6 Resultados apresentados na questão 3 (item b)

Considere agora a bandeira com a forma ao lado:

b) De quantas maneiras ela pode ser pintada, com 4 cores disponíveis, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas? E com 5 cores disponíveis? E com 6 cores? Em geral com n cores?



Esse item apresentou uma diferença em relação aos outros, em virtude da condição que apenas regiões adjacentes possuam cores diferentes. O princípio multiplicativo é uma boa ferramenta aqui.

O G2 escreveu assim:

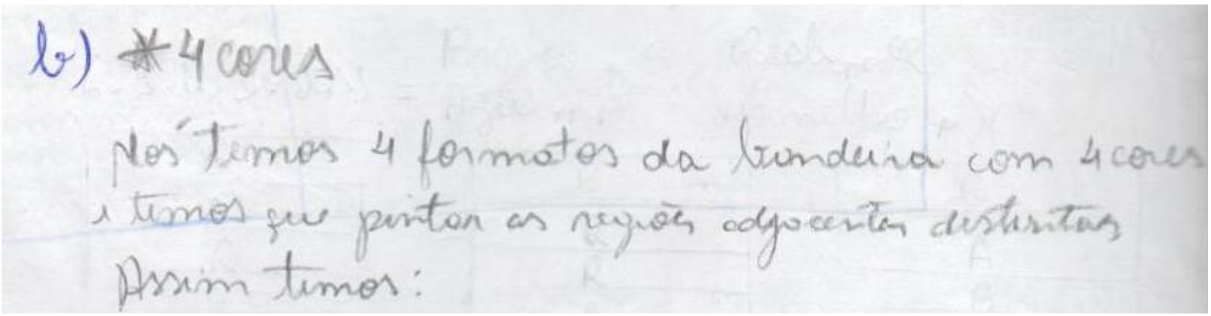
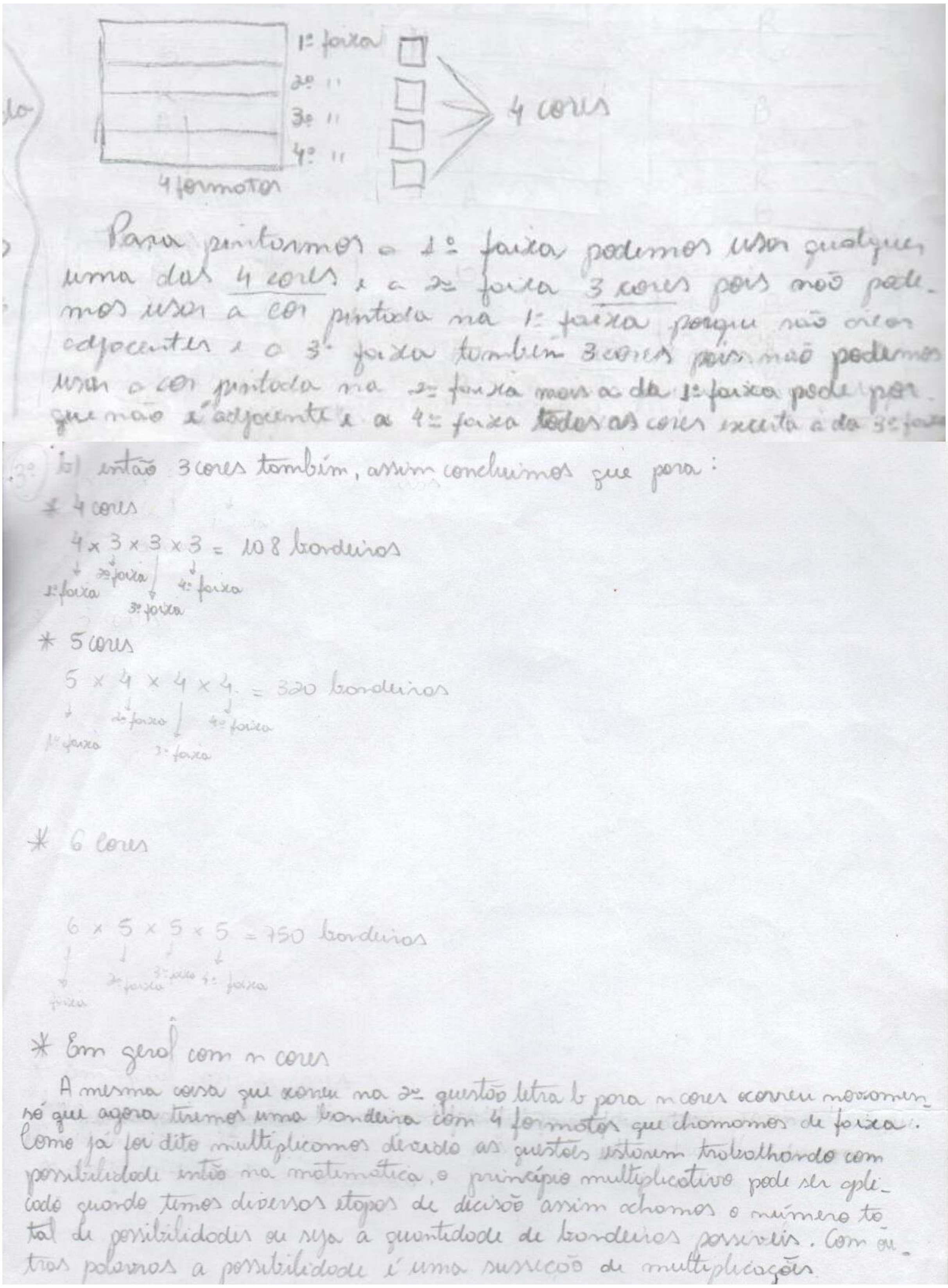

b) *4 cores
Nós temos 4 formatos da bandeira com 4 cores e temos que pintar as regiões adjacentes distintas
Assim temos:

Figura 25: Resolução do G2 ao item b da questão 2 da Atividade 1



Para pintarmos a 1ª faixa podemos usar qualquer uma das 4 cores, e a 2ª faixa 3 cores pois não podemos usar a cor pintada na 1ª faixa porque são areas adjacentes e a 3ª faixa também 3 cores pois não podemos usar a cor pintada na 2ª faixa mas a da 1ª faixa pode porque não é adjacente e a 4ª faixa todas as cores exceto a da 3ª faixa (b) então 3 cores também, assim concluimos que para:

* 4 cores

4 x 3 x 3 x 3 = 108 bandeiras

1ª faixa, 2ª faixa, 3ª faixa, 4ª faixa

* 5 cores

5 x 4 x 4 x 4 = 320 bandeiras

1ª faixa, 2ª faixa, 3ª faixa, 4ª faixa

* 6 cores

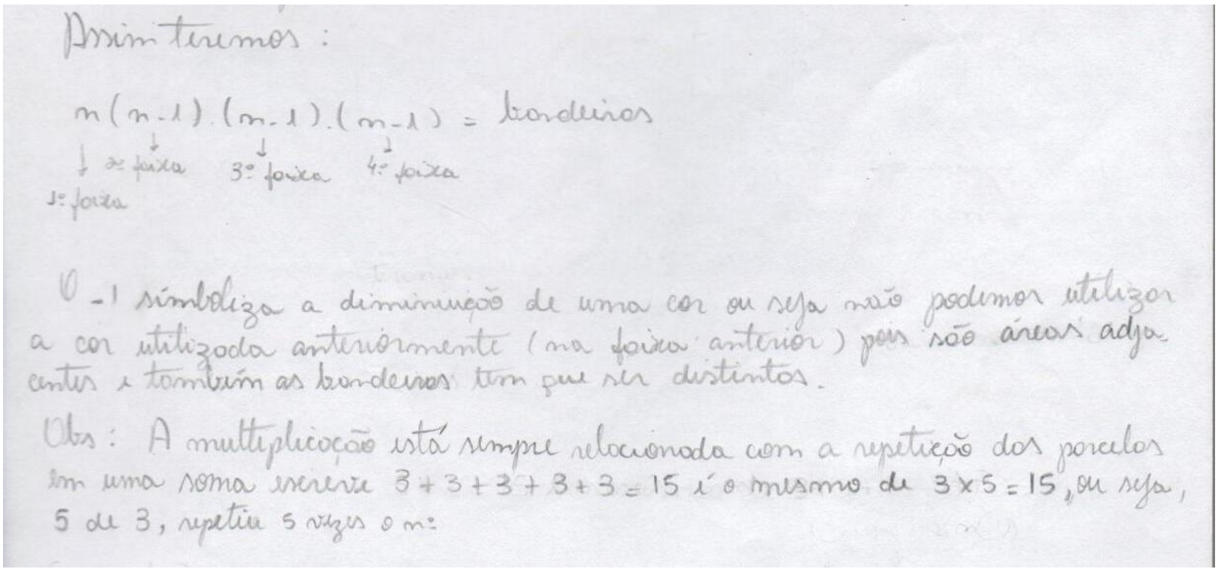
6 x 5 x 5 x 5 = 750 bandeiras

faixa, 2ª faixa, 3ª faixa, 4ª faixa

* Em geral com n cores

A mesma coisa que ocorreu na 2ª questão letra b para n cores ocorreu novamente só que agora temos uma bandeira com 4 formatos que chamamos de faixa. Como já foi dito multiplicamos devido as questões estarem trabalhando com possibilidade então na matemática, o princípio multiplicativo pode ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão assim achamos o número total de possibilidades ou seja a quantidade de bandeiras possíveis. Com outras palavras a possibilidade é uma sucessão de multiplicações

Figura 26: Continuação da resolução do G2 ao item b da questão 2 da Atividade 1



Assim teremos :

$n(n-1).(n-1).(n-1)$ = bandeiras

1ª faixa, 2ª faixa, 3ª faixa, 4ª faixa

n -1 simboliza a diminuição de uma cor ou seja não podemos utilizar a cor utilizada anteriormente (na faixa anterior) pois são áreas adjacentes e também as bandeiras tem que ser distintas.

Obs: A multiplicação está sempre relacionada com a repetição das parcelas em uma soma escreve 3+3+3+3+3=15 é o mesmo de 3x5=15, ou seja, 5 de 3, repetiu 5 vezes o nº

Figura 27: Continuação da resolução do G2 ao item b da questão 2 da Atividade 1

Apesar de solicitar que os discentes não utilizassem o livro didático, percebemos nesse item o uso do termo “princípio multiplicativo” isso indica que houve uma prévia pesquisa ao conteúdo de análise combinatória. Apesar de não ser esse o roteiro das atividades investigativas, avaliamos esse fato como positivo, pois o aluno teve a iniciativa de pesquisar, foi uma postura ativa.

4.1.7 Resultados apresentados na questão 4 (item b)

Considere uma bandeira com k faixas horizontais.

b) De quantas maneiras ela pode ser pintada, com k cores disponíveis, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas? E com n cores disponíveis (n maior que k)? O número n pode ser menor que k?

A quantidade de aulas para exploração das questões 1, 2 e 3 foi maior do que planejamos, daí solicitei que os alunos não resolvessem esse item, para podermos adiantar a outra parte do conteúdo.

4.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2

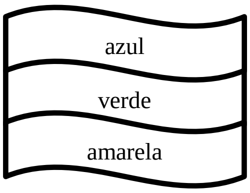
Na aplicação dessa atividade os alunos já estavam mais adaptados quanto ao método investigativo. Porém, como a atividade foi desenvolvida em grupo alguns membros do grupo começaram a relaxar deixando para um ou dois componentes a execução das atividades. Diante disso, como os alunos também estavam sendo avaliados, precisei conversar com a turma e apresentei um conceito para cada aluno até aquele momento de acordo com o que eu tinha percebido na escrita das soluções, no debate interno de cada grupo e na apresentação na lousa: insatisfatório, regular, bom, excelente.

4.2.1 Resultados apresentados na questão 1 (item a)

Na coloração de uma bandeira com 3 faixas, João dispunha de 10 cores:

0 - preta	**1 - branca**	**2 - vermelha**	**3 - verde**	**4 - azul**
5 - amarela	**6 - roxa**	**7 - rosa**	**8 - marrom**	**9 - cinza**

João codificou a maneira de pintar a bandeira conforme abaixo:



$\longrightarrow \quad (\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{5})$

a) Quantos códigos de três dígitos João dispõe?

O G7 apresentou essa resposta

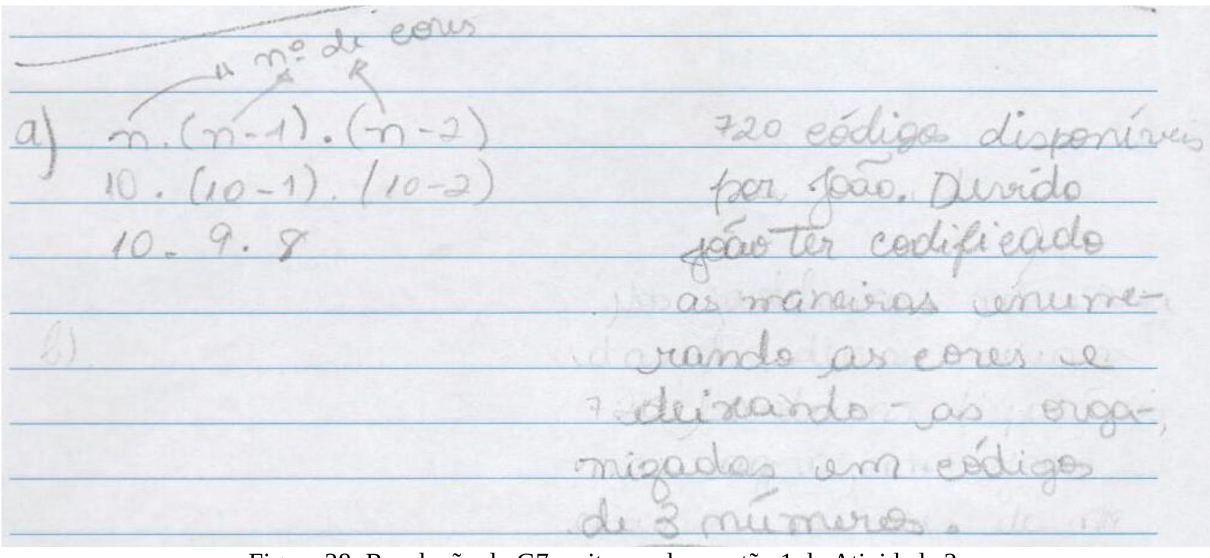

n° de cores
a) n.(n-1).(n-2)
10.(10-1).(10-2)
10.9.8
720 códigos disponíveis por João. Devido João ter codificado as maneiras enume-rando as cores e deixando-as orga-nizadas em códigos de 3 números.
b)

Figura 28: Resolução do G7 ao item a da questão 1 da Atividade 2

O G3 apresentou resposta similar

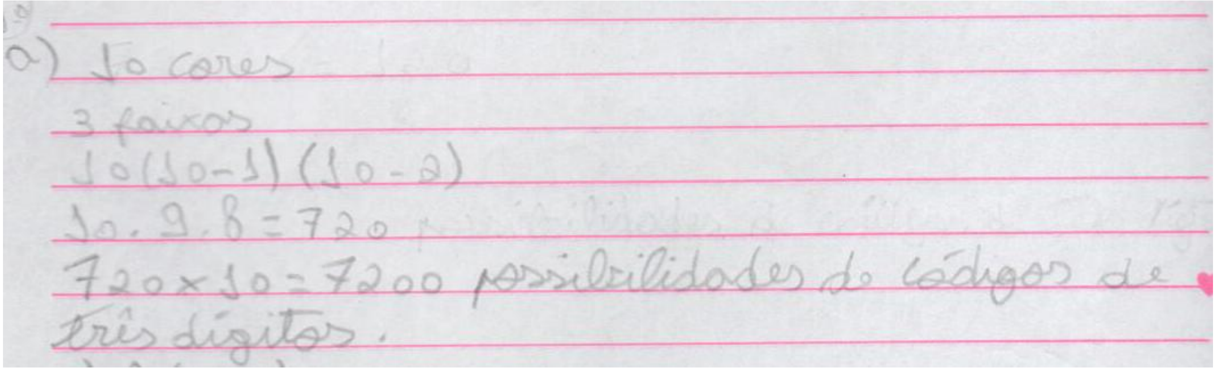


Figura 29: Resolução do G3 ao item a da questão 1 da Atividade 2

Percebemos que os alunos fizeram restrições que a questão não pediu, eles mencionaram os códigos com dígitos distintos apenas.

4.2.2 Resultados apresentados na questão 1 (item b)

b) Considerando que a primeira faixa não pode ser pintada com a cor preta (0), e também que as faixas devem ter cores distintas, quantos códigos deste tipo João dispõe?

Resposta do G3:

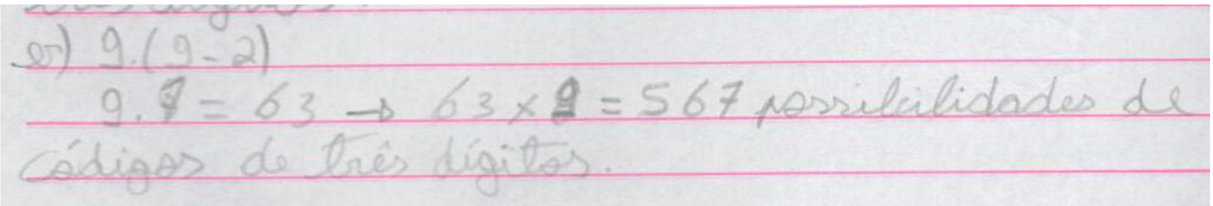


Figura 30: Resolução do G3 ao item b da questão 1 da Atividade 2

Resposta do G8:

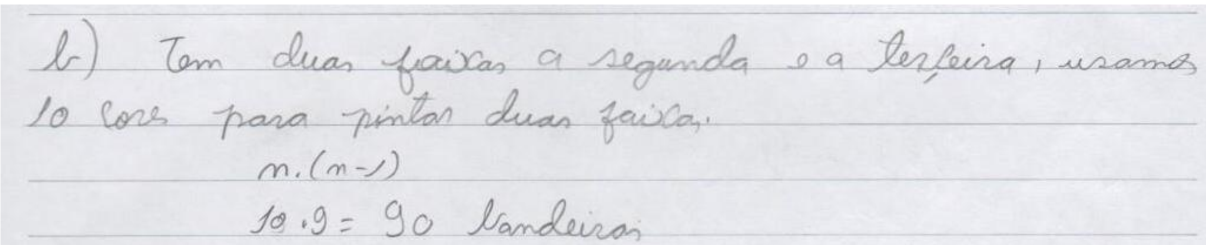
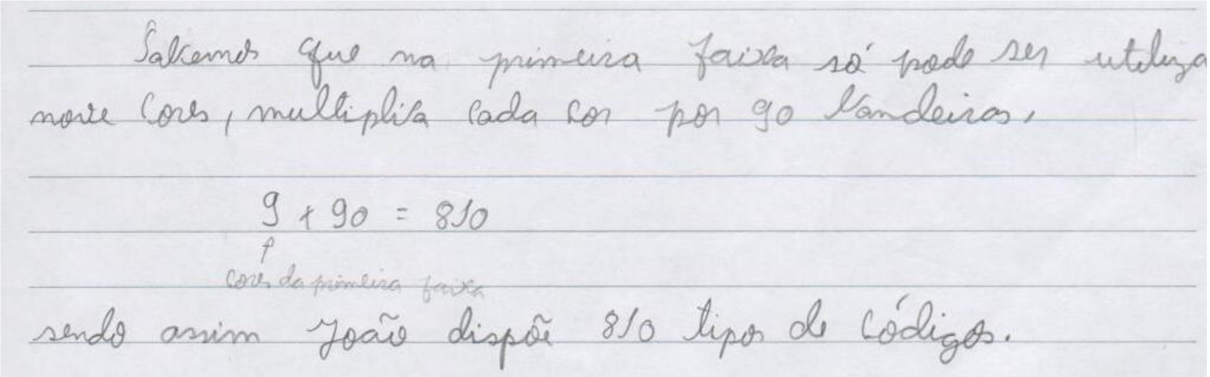


Figura 31: Resolução do G8 ao item b da questão 1 da Atividade 2


Sabemos que na primeira faixa só pode ser utiliza nove cores, multiplica cada cor por 90 bandeiras,

$9 \times 90 = 810$

cores da primeira faixa

sendo assim João dispõe 810 tipos de códigos.

Figura 32: Continuação da resolução do G8 ao item b da questão 1 da Atividade 2

O raciocínio utilizado no início da solução é coerente, o grupo conta todos os números de dois algarismos distintos e depois tenta encaixar o algarismo das centenas. A nossa expectativa era que os grupos começassem a contagem analisando a ordem das centenas. A contagem dos números de dois algarismos feita inicialmente abrange os números

$$01, 02, \dots, 10, 12, \dots, \; 98,$$

ficam de fora os números formados por algarismos repetidos:

$$00, 11, 22, 33, \dots, 99.$$

Em seguida o grupo tentou encaixar as possibilidades para a primeira faixa (ordem das centenas) e usaram o argumento que podem utilizar 9 cores, aí está o equívoco, eles lembraram apenas da restrição da cor preta (algarismo 0). Mas há outras restrições, como já temos 90 números de dois algarismos formados, precisamos dividir em casos, pois se decidirmos utilizar o algarismo 1 não podemos juntar com os números $01, 10, 12, 31$ por exemplo. Então uma forma de concluir a questão é contar quantos dos números já formados não possuem o algarismo 1, não possuem o 2 e assim sucessivamente:

números que possuem o algarismo 1:

$$\underbrace{01, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91}_{18\ números}$$

portanto, dos 90 números que temos a disposição 18 contém o algarismo 1 e 72 não contém o algarismo 1, daí podemos juntar o algarismo 1 para formar 72 números com as condições propostas.

De forma análoga, podemos formar mais 72 números iniciando com 2, com 3 e assim sucessivamente até chegar aos 72 iniciados com 9, daí temos um total de $9 \times 72 = 648$ números.

O G7 listou todos os números que se iniciam com o algarismo 1 e fez a contagem obtendo 72. Deduziu que teriam mais 72 números iniciando com 2, 3 até o 9, daí fizeram o produto

$$72 \times 9 = 648$$

obtendo todos os números.

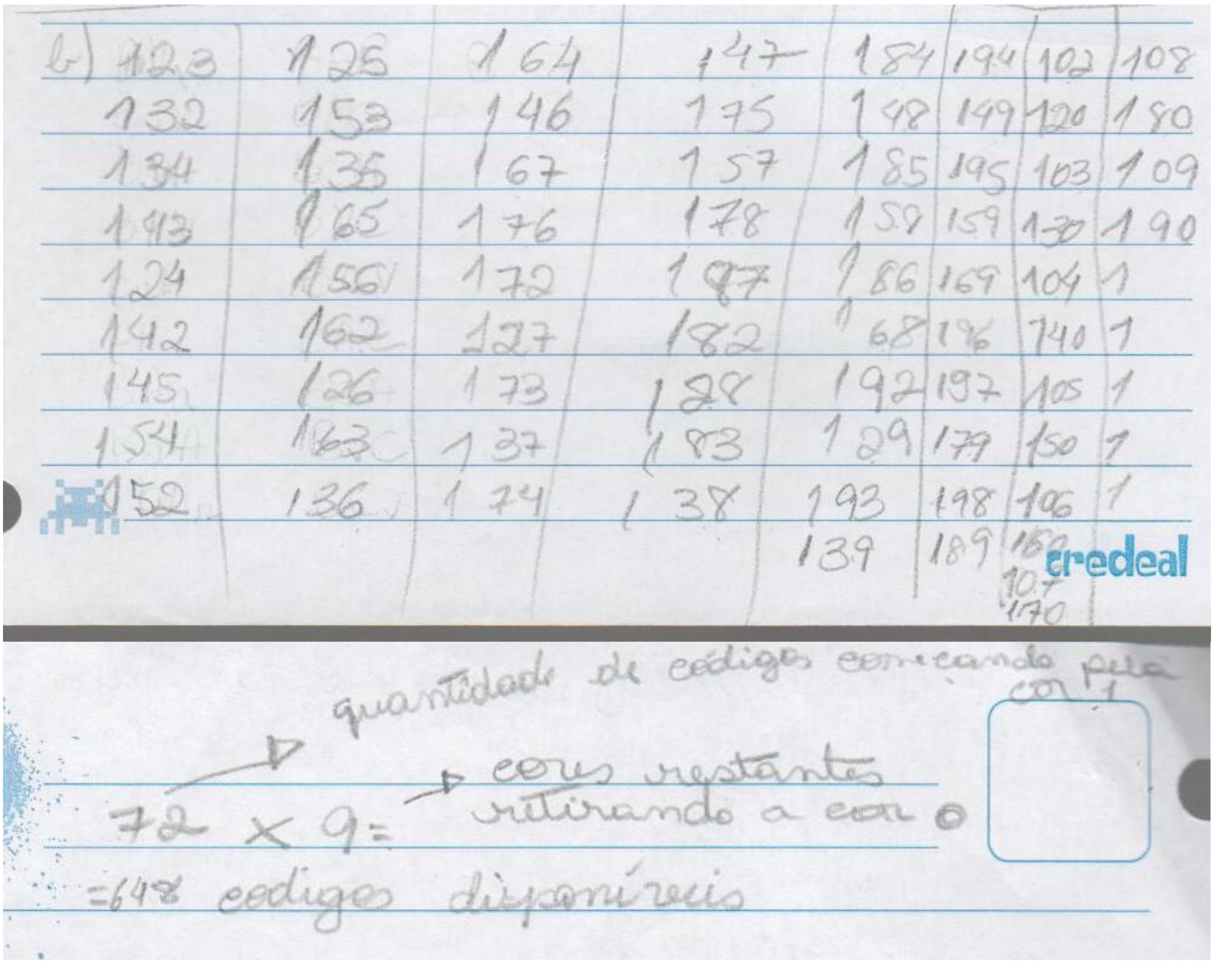


Figura 33: Resolução do G7 ao item b da questão 1 da Atividade 2

4.2.3 Resultados apresentados na questão 1 (item c)

c) Quantos são os números de três dígitos distintos?

Resposta do G3:

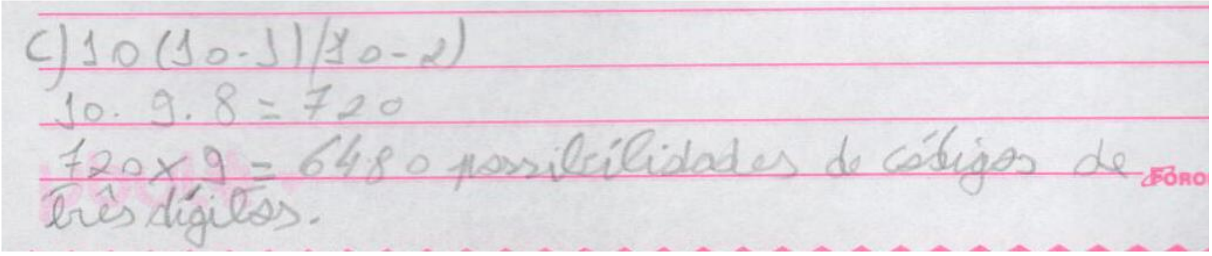

c) 10(10-1)(10-2)
10 . 9 . 8 = 720
720 x 9 = 6480 possibilidades de códigos de três dígitos.

Figura 34: Resolução do G3 ao item c da questão 1 da Atividade 2

O grupo não percebeu a semelhança entre os itens b e c como esperávamos. Além disso fez a contagem contando os números com o algarismo zero nas centenas. O grupo cometeu equívocos no produto.

O G8 também não percebeu a semelhança entre os itens c e d:

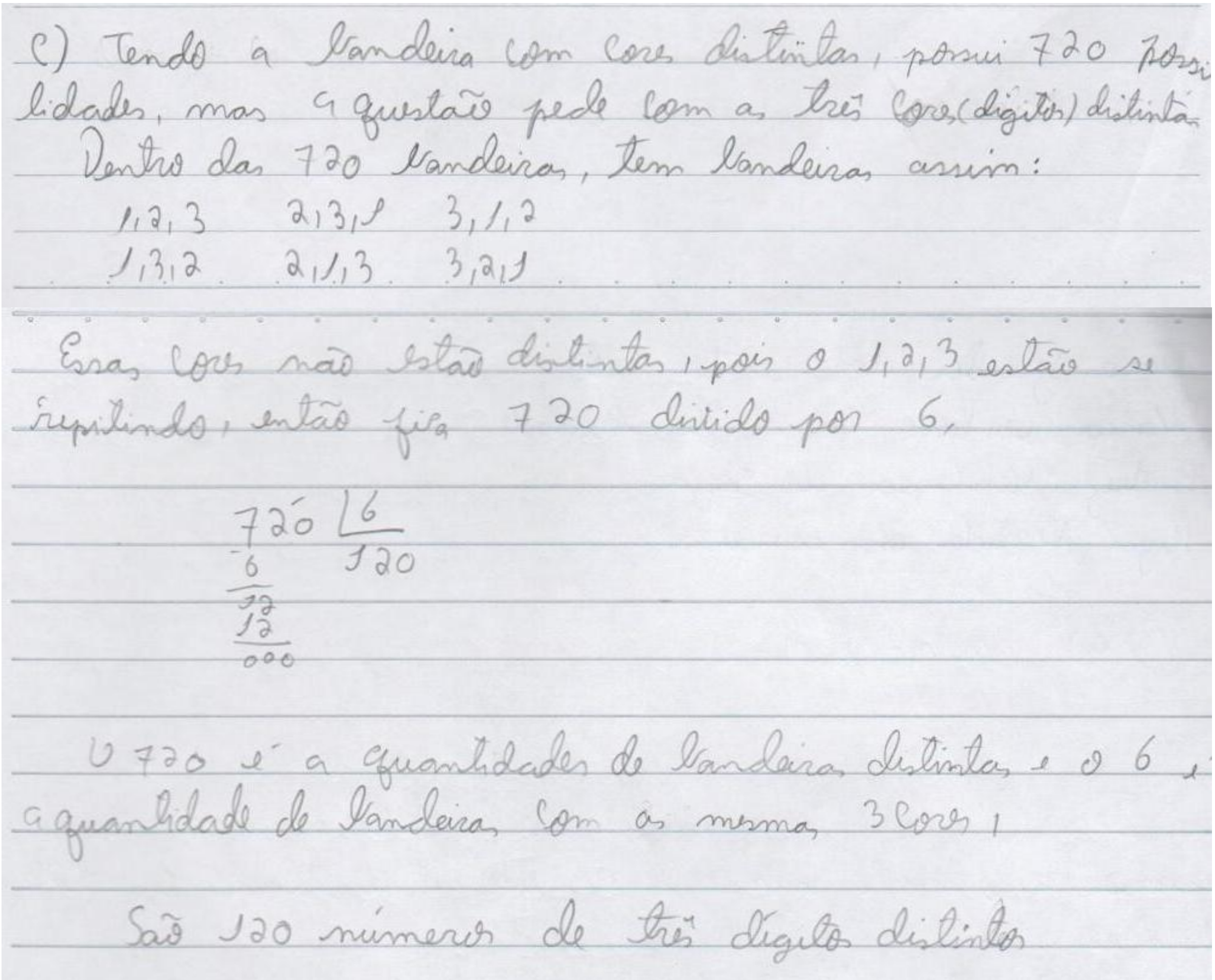

c) Tendo a bandeira com cores distintas, possui 720 possibilidades, mas a questão pede com as três cores (dígitos) distintas.
Dentro das 720 bandeiras, tem bandeiras assim:
1,2,3   2,3,1   3,1,2
1,3,2   2,1,3   3,2,1
Essas cores não estão distintas, pois o 1,2,3 estão se repitindo, então fica 720 dividido por 6.
720 | 6
120
O 720 é a quantidades de bandeira distintas e o 6 é a quantidade de bandeira com as mesmas 3 cores.
São 120 números de três dígitos distintos

Figura 35: Resolução do G7 ao item c da questão 1 da Atividade 2

Pelo que parece, o G8 não compreendeu completamente o sentido da pergunta e fez um contagem como se fossem combinações, de fato, considerando o conjunto $\{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\}$.

O G7 apesar de ter respondido corretamente o item b não apresentou resposta para o item c.

O G10 apresentou o produto que segue:

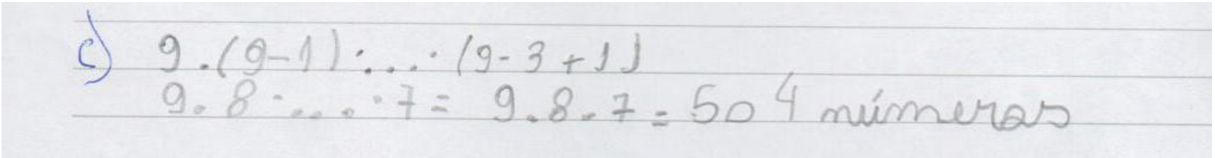
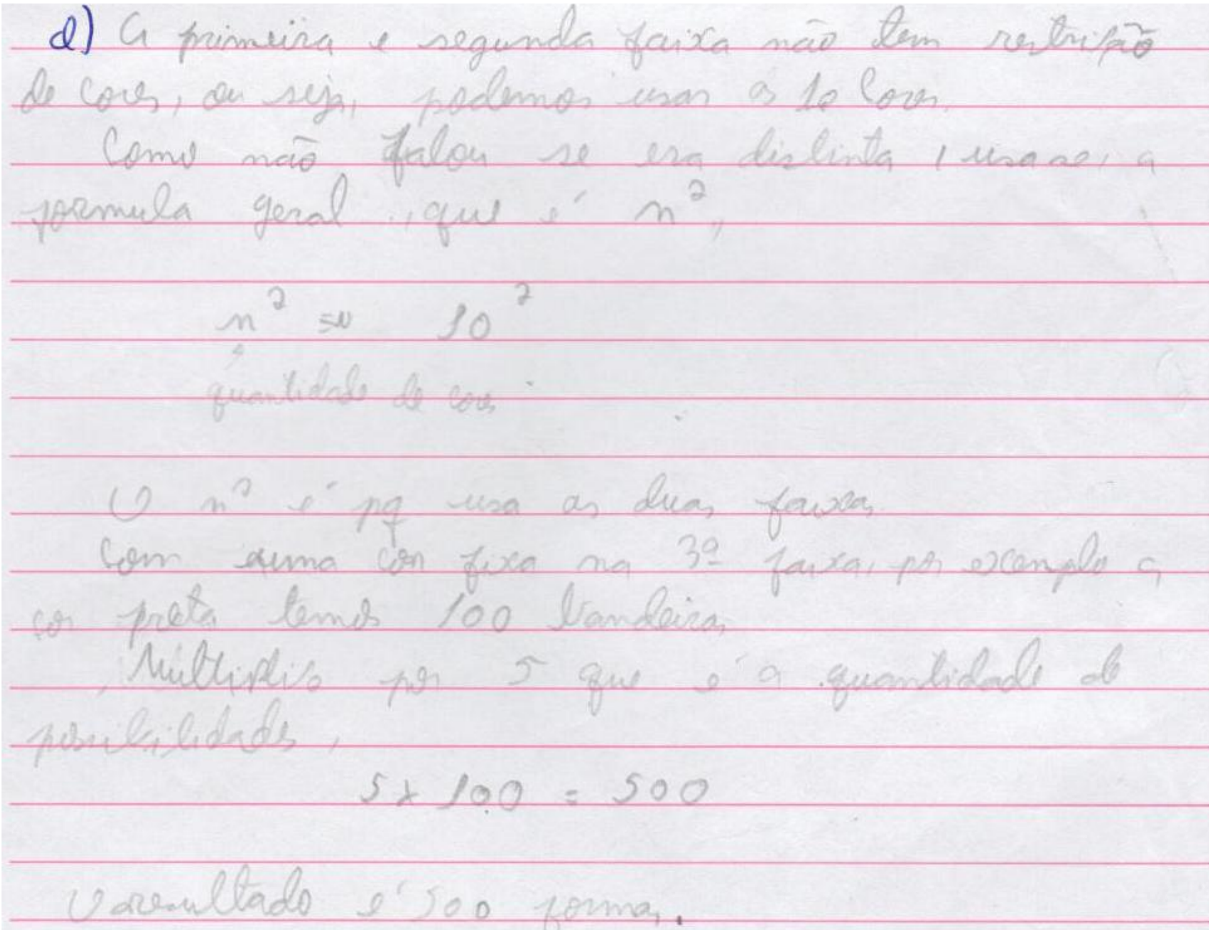

c) $9.(9-1)\cdot\ldots\cdot(9-3+1)$
$9.8\cdot\ldots\cdot7 = 9.8.7 = 504$ números

Figura 36: Resolução do G10 ao item c da questão 1 da Atividade 2

4.2.4 Resultados apresentados na questão 1 (item d)

d) De quantas formas João pode pintar sua bandeira utilizando na última faixa apenas uma das seguintes cores: preta, vermelha, azul, roxa ou marrom?

Resposta do G8


d) A primeira e segunda faixa não tem restrição de cores, ou seja, podemos usar as 10 cores.
Como não falou se era distinta, usamos a formula geral, que é n^2,

$n^2 = 10^2$
quantidade de cor

O n^2 é pq usa as duas faixas
Com uma cor fixa na 3ª faixa, por exemplo a cor preta temos 100 bandeiras
Multiplica por 5 que é a quantidade de possibilidades,
$5 \times 100 = 500$

O resultado é 500 formas.

Figura 37: Resolução do G8 ao item d da questão 1 da Atividade 2

Os argumentos apresentados foram os que esperávamos. Notamos que o grupo entendeu o enunciado e desenvolveu de forma coerente o processo de contagem.

Resposta do G10:

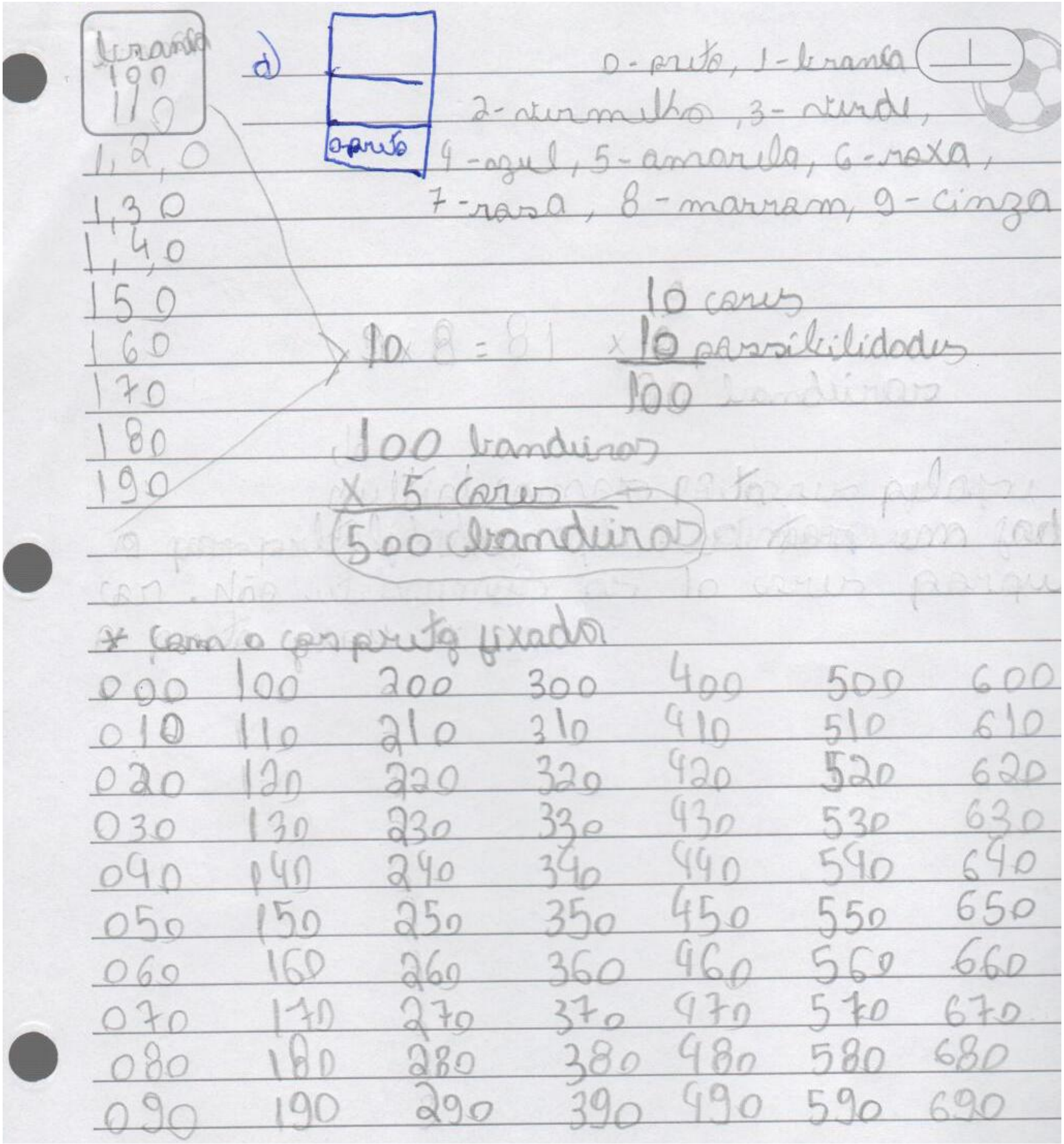

branco
100
110
d)
o preto
0 - preto, 1 - branco
2 - vermelho, 3 - verde,
4 - azul, 5 - amarelo, 6 - roxa,
7 - rosa, 8 - marrom, 9 - cinza
1,2,0
1,3,0
1,4,0
150
160
170
180
190
10
10 cores
x 10 possibilidades
100
100 bandeiras
x 5 cores
500 bandeiras
* com a cor preta fixada
000 100 200 300 400 500 600
010 110 210 310 410 510 610
020 120 220 320 420 520 620
030 130 230 330 430 530 630
040 140 240 340 440 540 640
050 150 250 350 450 550 650
060 160 260 360 460 560 660
070 170 270 370 470 570 670
080 180 280 380 480 580 680
090 190 290 390 490 590 690

Figura 38: Resolução do G10 ao item d da questão 1 da Atividade 2

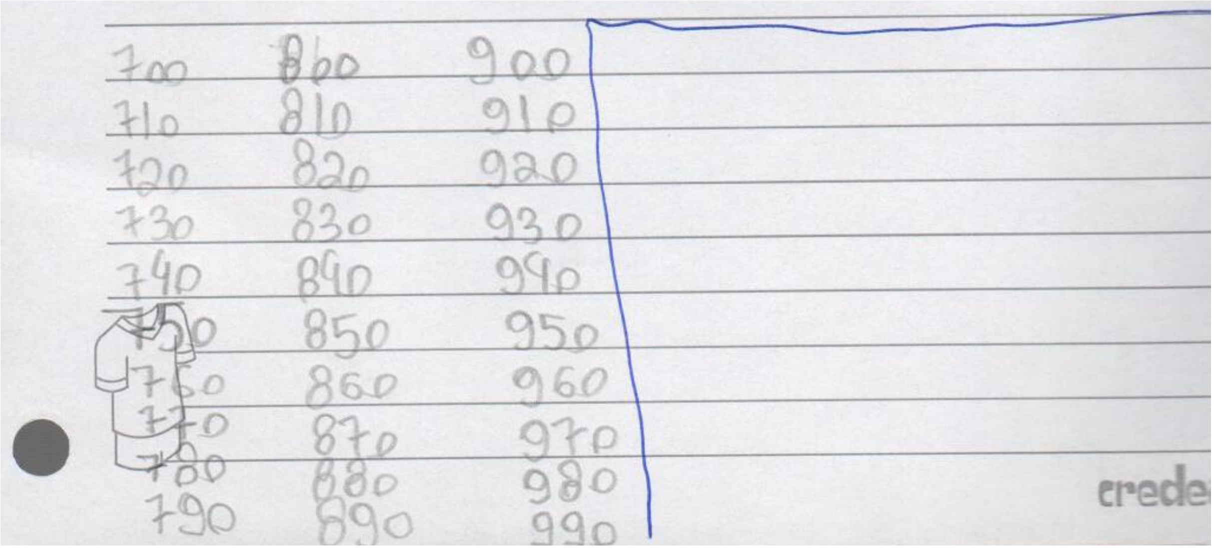


Figura 39: Continuação da resolução do G10 ao item d da questão 1 da Atividade 2

Percebemos que o grupo listou todas as possibilidades com a cor preta na última faixa, obteve 100 números e em seguida multiplicou 100 por 5.

4.2.5 Resultados apresentados na questão 1 (item e)

e) Quantos são os números pares de três dígitos?

Resposta do G8:

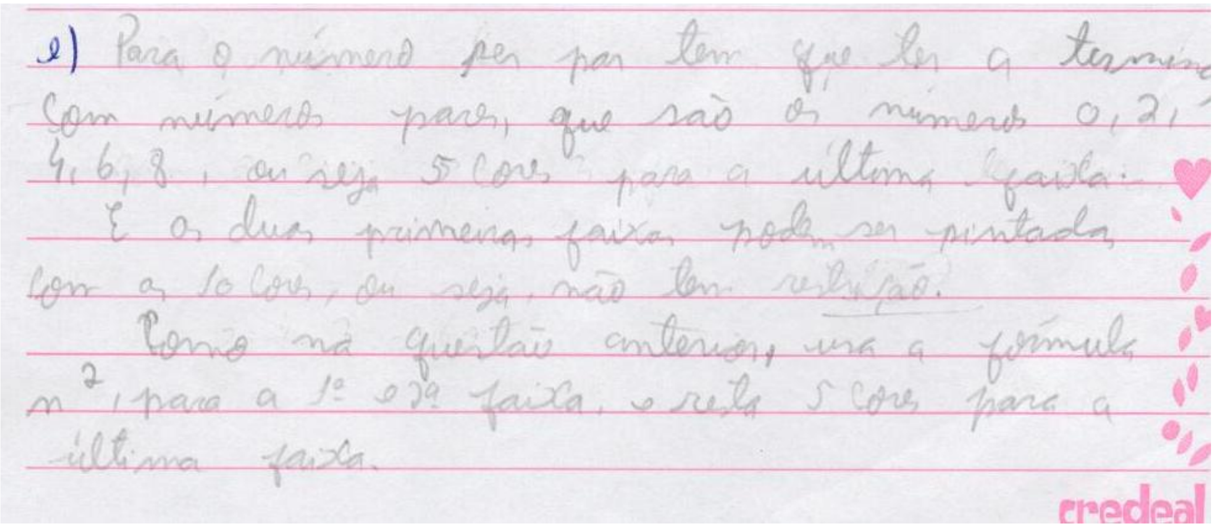


Figura 40: Resolução do G8 ao item e da questão 1 da Atividade 2

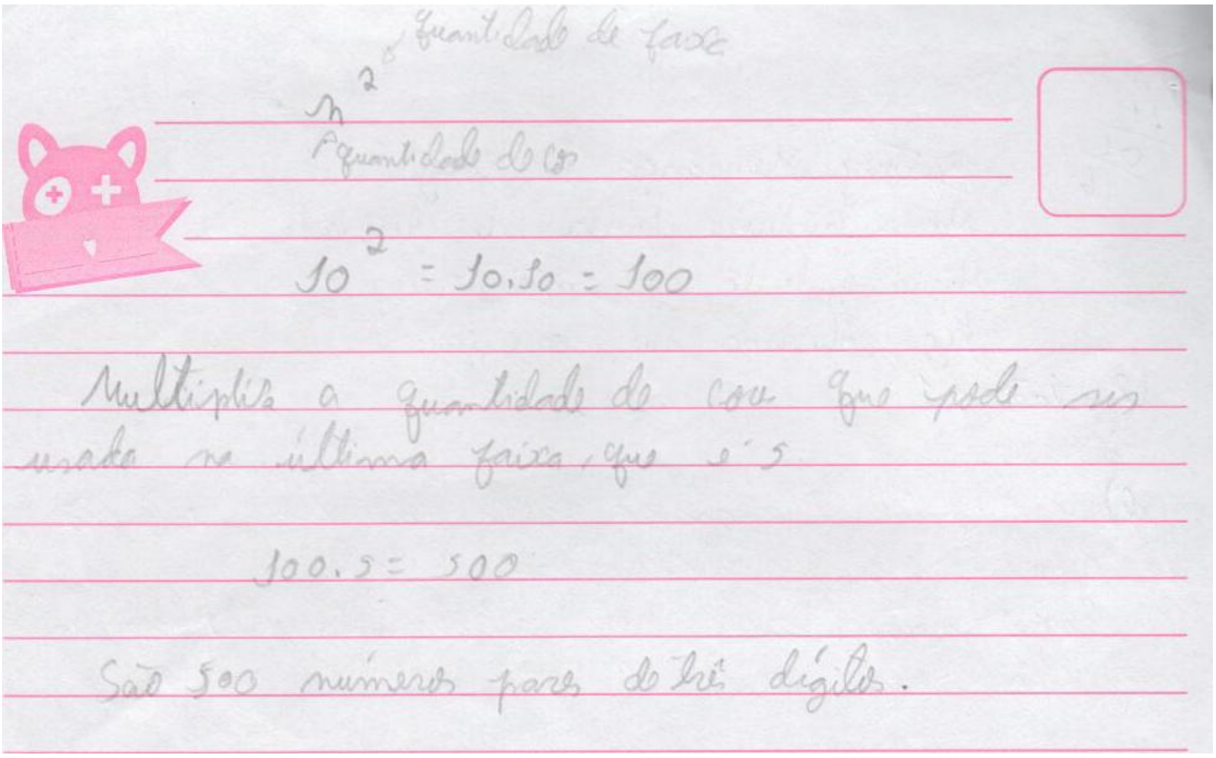

n^2 quantidade de faixa
quantidade de cor
$10^2 = 10.10 = 100$
Multiplica a quantidade de cor que pode ser usada na última faixa, que é 5.
$100.5 = 500$
São 500 números pares de três dígitos.

Figura 41: Resolução do G8 ao item e da questão 1 da Atividade 2

Como esperávamos o grupo associou a questão com a anterior, contudo, deixou de restringir os números que iniciam com o algarismo zero, esses números são considerados de dois algarismos.

4.2.5 Resultados apresentados na questão 1 (item f)

f) Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

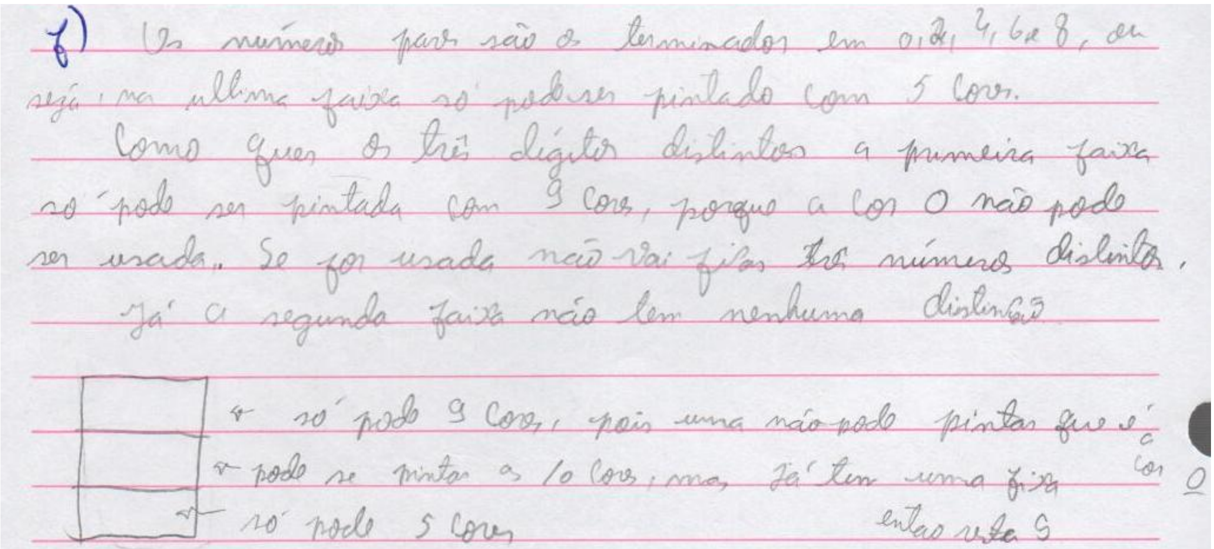

f) Os números pares são os terminados em 0, 2, 4, 6 e 8, ou seja, na última faixa só pode ser pintado com 5 cores.
Como quer os três dígitos distintos a primeira faixa só pode ser pintada com 9 cores, porque a cor 0 não pode ser usada. Se for usada não vai ficar três números distintos.
Já a segunda faixa não tem nenhuma distinção
→ só pode 9 cores, pois uma não pode pintar que é a cor 0
→ pode se pintar as 10 cores, mas já tem uma fixa então resta 9
→ só pode 5 cores

Figura 42: Resolução do G8 ao item f da questão 1 da Atividade 2

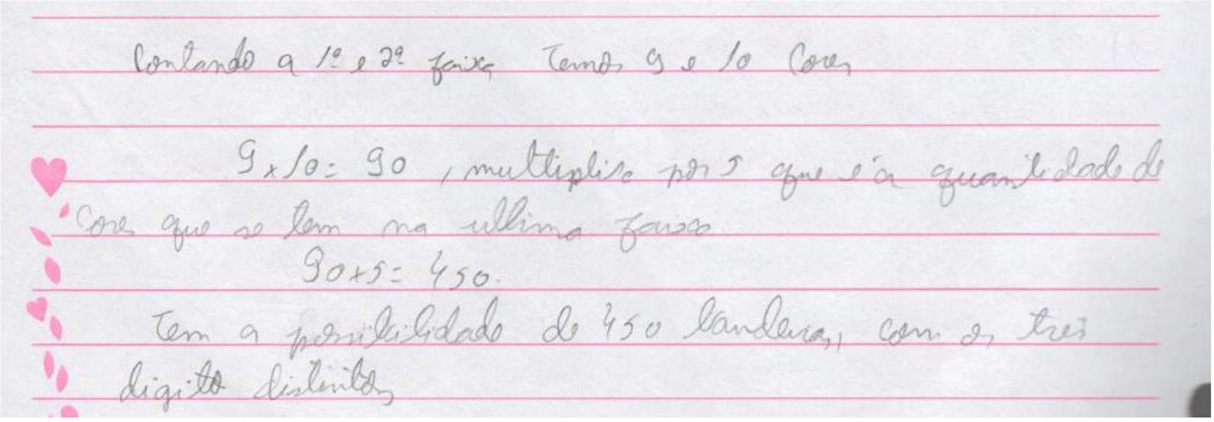
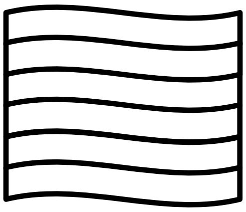

Contando a 1ª e 2ª faixa Temos 9 e 10 Cores
9x10= 90 , multiplico por 5 que é a quantidade de Cores que se tem na ultima faixa
90x5= 450.
Tem a possibilidade de 450 bandeiras, com os tres digitos distintos

Figura 43: Continuação da resolução do G8 ao item f da questão 1 da Atividade 2

Provavelmente os alunos entenderam o significado de “distintos” números que não se iniciam com zero, pois eles fizeram essa restrição e apresentaram a resposta que seria do item anterior.

4.2.7 Resultados apresentados na questão 2

De quantos modos diferentes podemos pintar a bandeira, sem repetição de cores, estando disponível 6 cores distintas



1 – preta	**3 – vermelha**	**5 – roxa**
2 – branca	**4 – amarela**	**6 – rosa**

Resposta do G3:

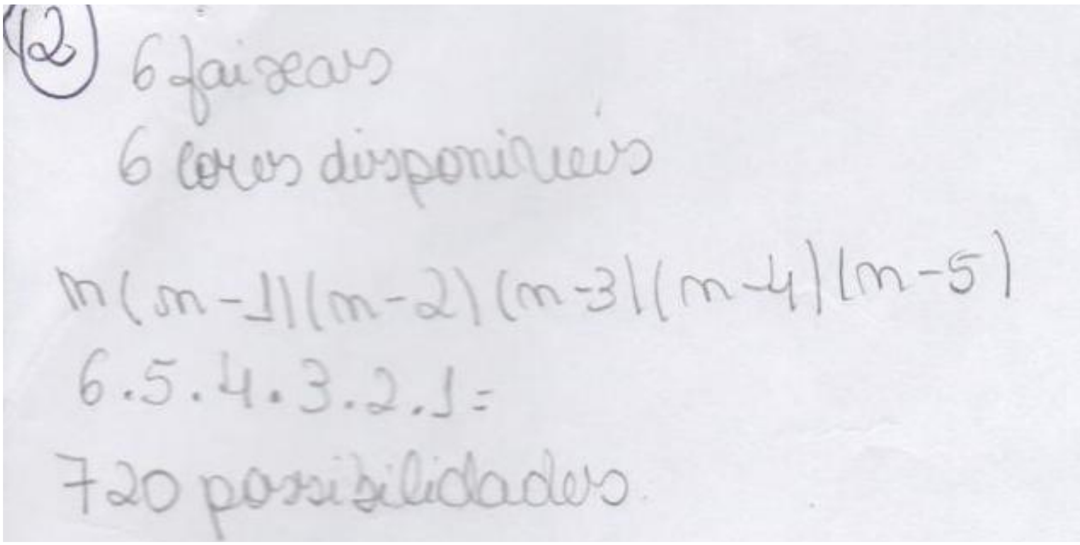
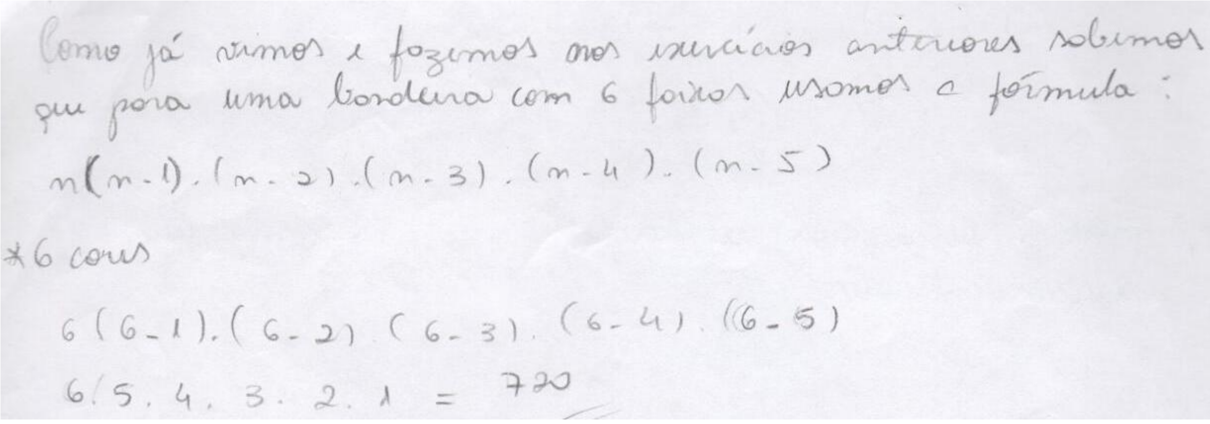

(2) 6 faixeas
6 cores disponiveis
$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
$6.5.4.3.2.1=$
720 possibilidades

Figura 44: Resolução do G3 da questão 2 da Atividade 2

Resposta do G2:


Como já vimos e fazemos nos exercícios anteriores sabemos que para uma bandeira com 6 faixas usamos a fórmula:

n(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)

*6 cores

6(6-1).(6-2)(6-3).(6-4).(6-5)

6.5.4.3.2.1 = 720

Figura 45: Resolução do G2 a questão 2 da Atividade 2

As respostas apresentadas estão dentro das expectativas.

4.2.8 Resultados apresentados na questão 3

De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

Resposta do G3:

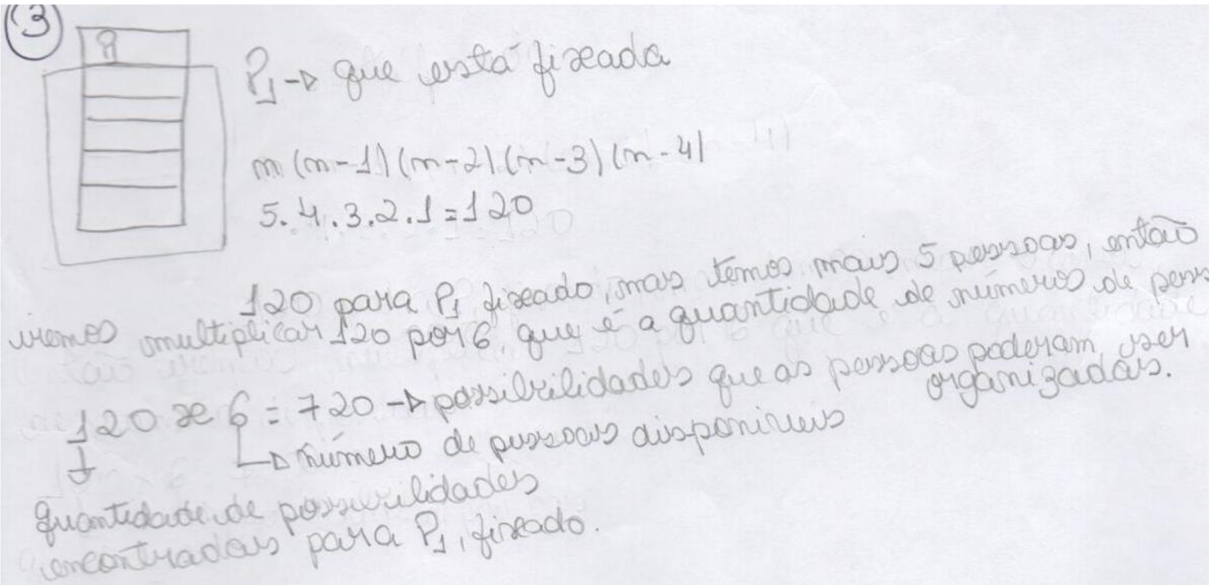
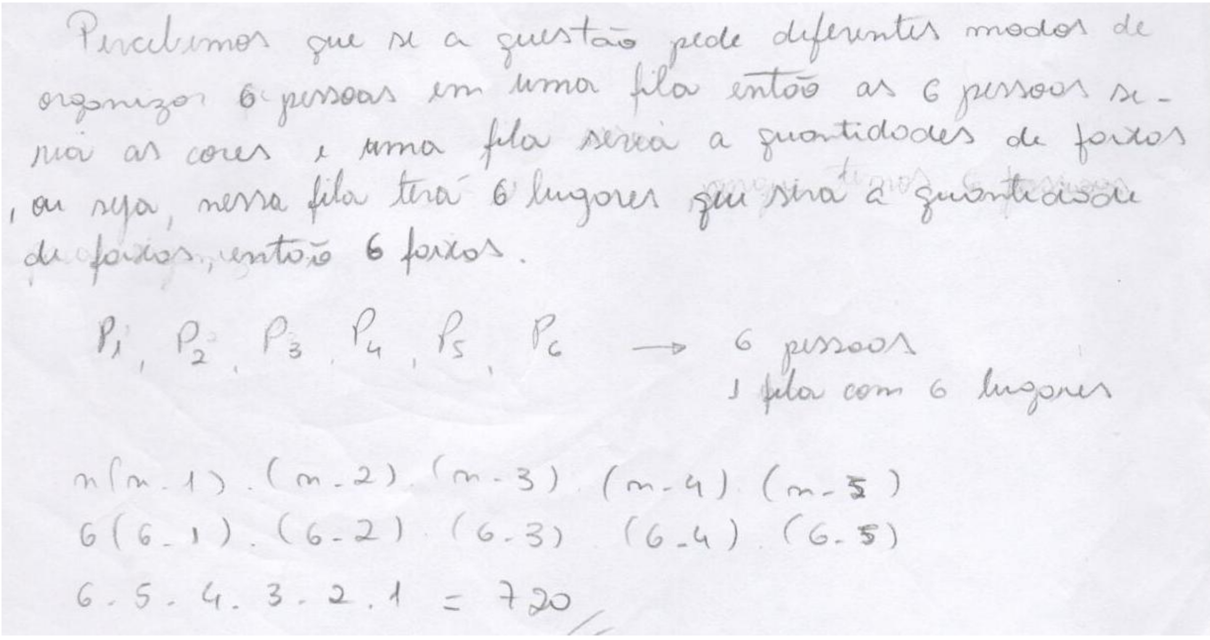


Figura 46: Resolução do G3 a questão 3 da Atividade 2

Resposta do G2:


Percebemos que se a questão pede diferentes modos de organizar 6 pessoas em uma fila então as 6 pessoas serão as cores e uma fila será a quantidades de faixas, ou seja, nessa fila terá 6 lugares que será a quantidade de faixas, então 6 faixas.

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \rightarrow$ 6 pessoas
1 fila com 6 lugares

$n(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)$
$6(6-1).(6-2).(6-3).(6-4).(6-5)$
$6.5.4.3.2.1 = 720$

Figura 47: Resolução do G2 a questão 3 da Atividade 2

Os grupos fizeram comparação entre uma fila de pessoas e uma bandeira com faixas e chegaram no resultado que esperávamos.

4.2.9 Resultados apresentados na questão 4

De quantos modos pode-se ordenar *n* objetos?

Resposta do G2:

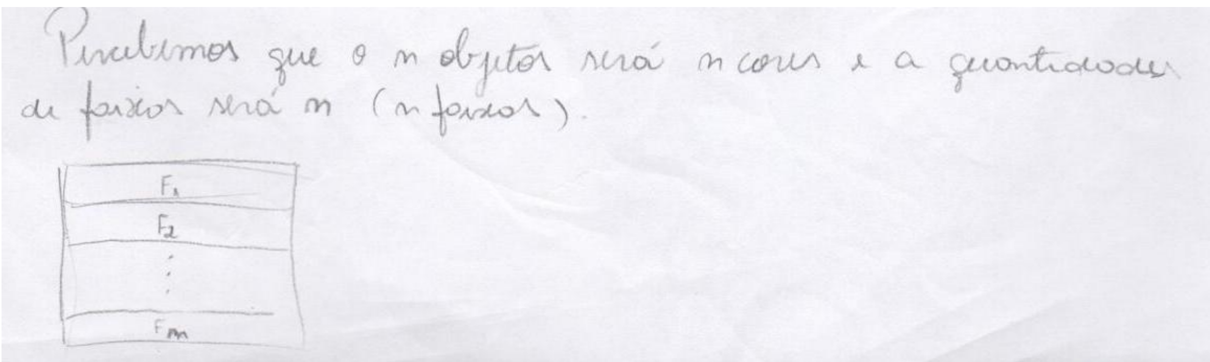
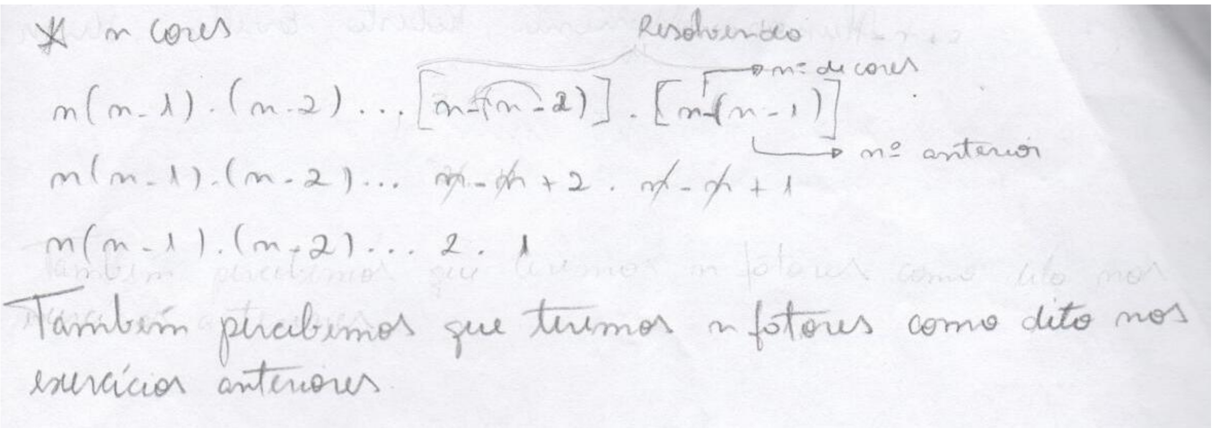

Percebemos que o n objetos será n cores e a quantidade de faixas será n (n faixas).

Figura 48: Resolução do G2 a questão 4 da Atividade 2


* n cores — Resolvendo

$n(n-1).(n-2)\ldots[n-(n-2)].[n-(n-1)]$ → nº de cores → nº anterior

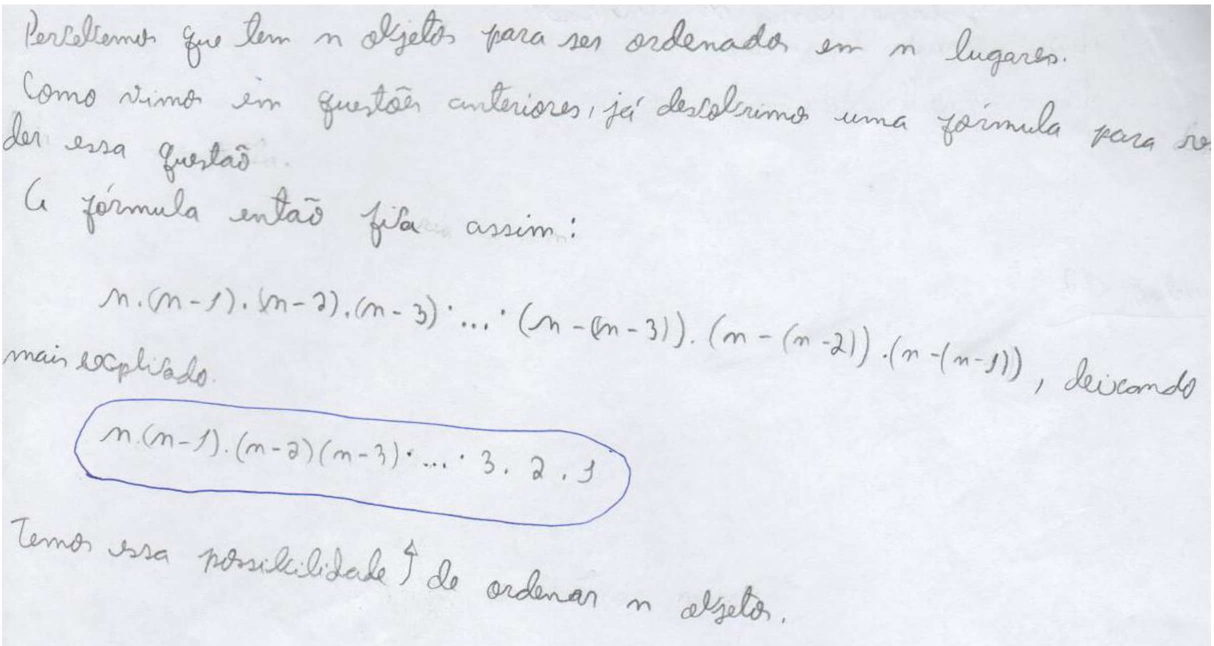
$n(n-1).(n-2)\ldots \cancel{n}-\cancel{n}+2 . \cancel{n}-\cancel{n}+1$

$n(n-1).(n-2)\ldots 2 . 1$

Também percebemos que teremos n fatores como dito nos exercícios anteriores

Figura 49: Continuação da resolução do G2 a questão 4 da Atividade 2

Resposta do G8:


Percebemos que tem n objetos para ser ordenados em n lugares.
Como vimos em questões anteriores, já descobrimos uma fórmula para resolver essa questão.
A fórmula então fica assim:

$n.(n-1).(n-2).(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-(n-3)).(n-(n-2)).(n-(n-1))$, deixando mais explicado.

$n.(n-1).(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 3 . 2 . 1$

Temos essa possibilidade de ordenar n objetos.

Figura 50: Resolução do G8 a questão 4 da Atividade 2

Alguns grupos não apresentaram solução para essa questão. As respostas acima demonstram o entendimento do grupo em relação a questão.

ANÁLISE DA ATIVIDADE 3

Para aplicação da atividade 3 retiramos a questões 2 e 5. A questão 3 foi respondida pelo professor junto com os alunos. Isso foi necessário para otimizar o tempo de abordagem do conteúdo, tendo em vista que alguns alunos estavam preocupados com o Exame Nacional do Ensino Médio e mostraram preocupação quanto a abordagem dos outros conteúdos.

4.3.1 Resultados apresentados na questão 1 (item a)

Na turma de Astrogildo, foi criada uma loteria diferente. Cada cartela possui 5 números conforme abaixo.

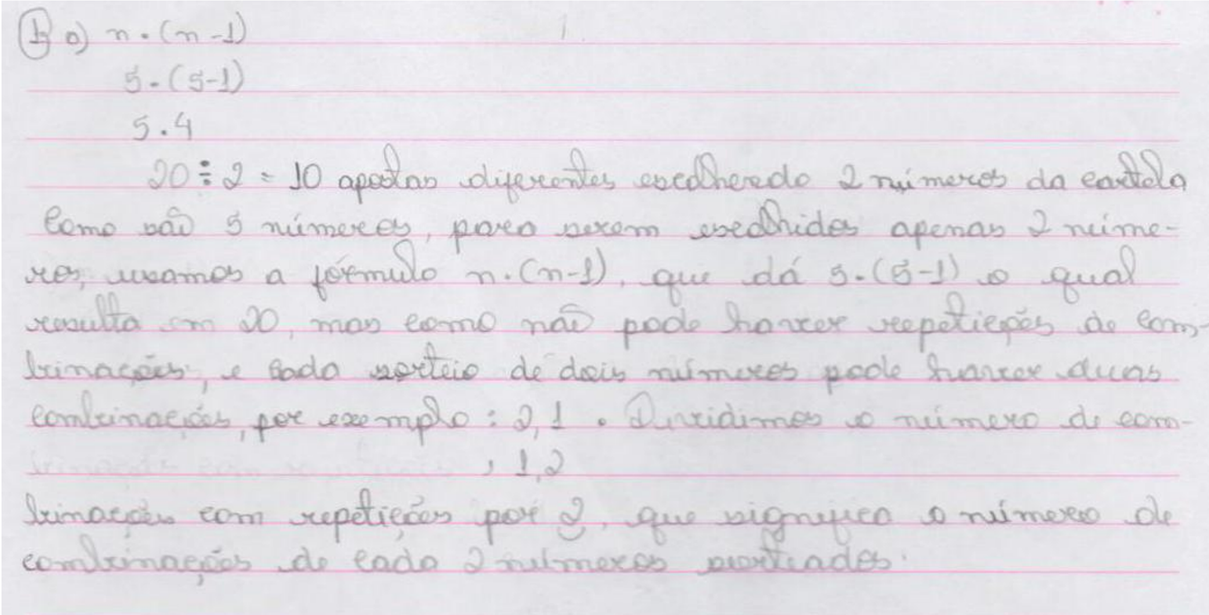
a) Quantas apostas diferentes podem ser feitas escolhendo 2 números da cartela?

Nesse item os alunos apresentaram dúvidas:

- os números escolhidos podem se repetir?
- os números escolhidos é para formar outros números?

Essas dúvidas deixaram explícitos que alguns alunos não conheciam as regras dos jogos de apostas das loterias. Então, expliquei para a turma como funciona um desses jogos, a mega-sena, dei um exemplo e disse que a Loteria Sorte Sorte funciona de maneira análoga. O principal dessa questão é que os alunos observassem as repetições e uma forma de eliminá-las e isso a maioria dos grupos conseguiu.

Resposta do G5:



1) a) $n \cdot (n-1)$

$5 \cdot (5-1)$

$5 \cdot 4$

$20 \div 2 = 10$ apostas diferentes escolhendo 2 números da cartela

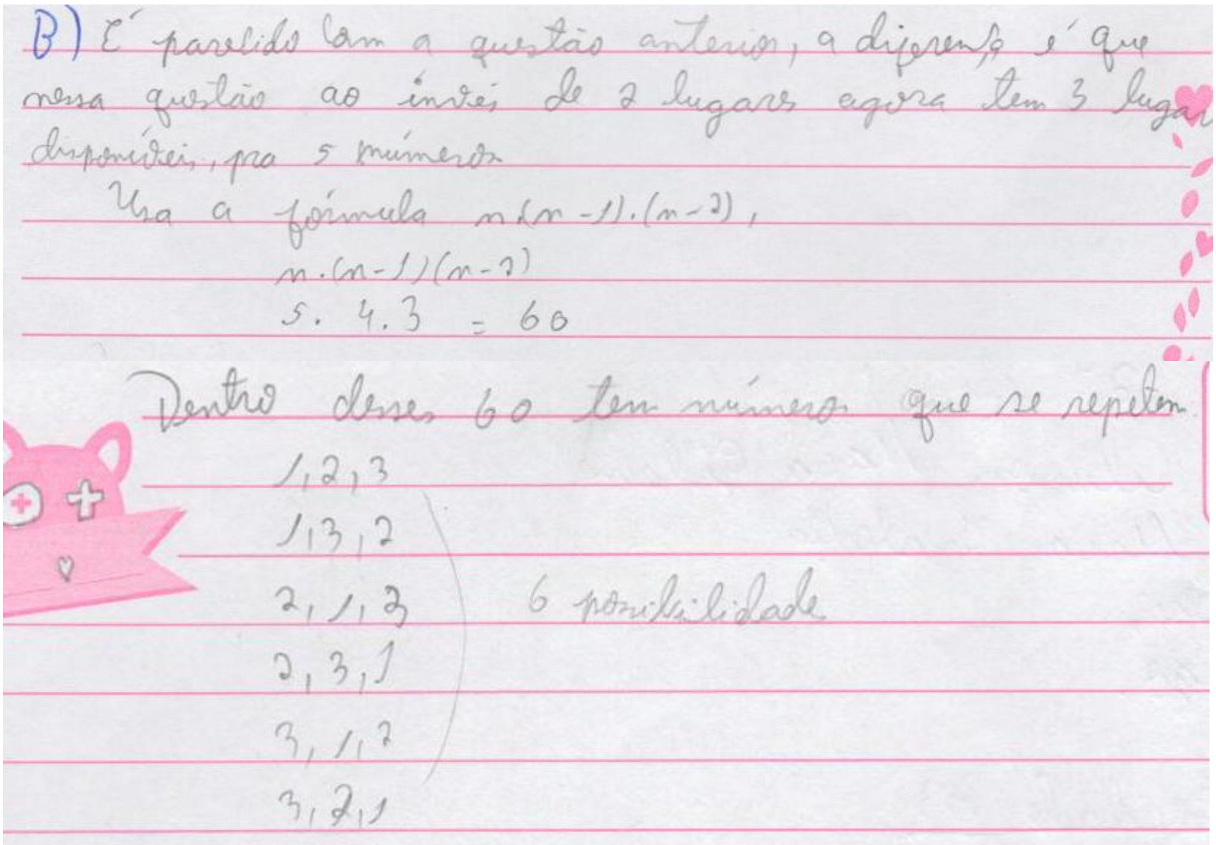
Como são 5 números, para serem escolhidos apenas 2 números, usamos a fórmula $n \cdot (n-1)$, que dá $5 \cdot (5-1)$ o qual resulta em 20, mas como não pode haver repetições de combinações, e cada sorteio de dois números pode haver duas combinações, por exemplo: 2,1 ; 1,2. Dividimos o número de combinações com repetições por 2, que significa o número de combinações de cada 2 números sorteados.

Figura 51: Resolução do G5 ao item a da questão 1 da Atividade 3

4.3.2 Resultados apresentados na questão 1 (item b)

b) Quantas apostas diferentes podem ser feitas escolhendo 3 números da cartela?

Resposta do G8:



B) É parecido com a questão anterior, a diferença é que nessa questão ao invés de 2 lugares agora tem 3 lugares disponíveis, pra 5 números

Usa a fórmula $n(n-1) \cdot (n-2)$,

$n \cdot (n-1)(n-2)$

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Dentro desses 60 tem números que se repetem

1,2,3

1,3,2

2,1,3 6 possibilidade

2,3,1

3,1,2

3,2,1

Figura 52: Resolução do G8 ao item b da questão 1 da Atividade 3

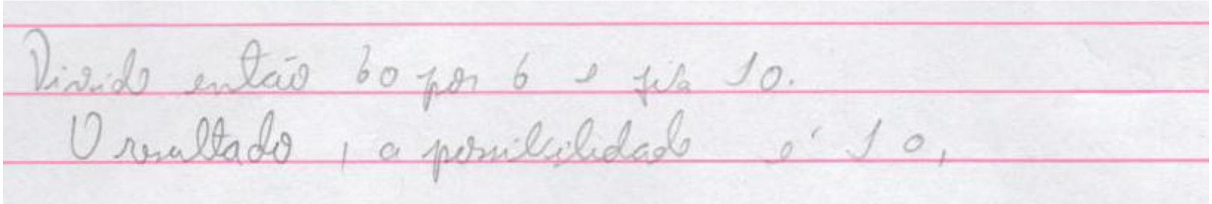

Divido então 60 por 6 e fica 10.
O resultado, a possibilidade é 10,

Figura 53: Continuação da resolução do G8 ao item b da questão 1 da Atividade 3

O G8 apresentou argumentos válidos e sem equívocos.

4.3.3 Resultados apresentados na questão 4

O valor da aposta mínima na mega-sena é R$3,50. Por quê numa aposta de 7 números o apostador deve pagar R$24,50?

Resposta do G8:

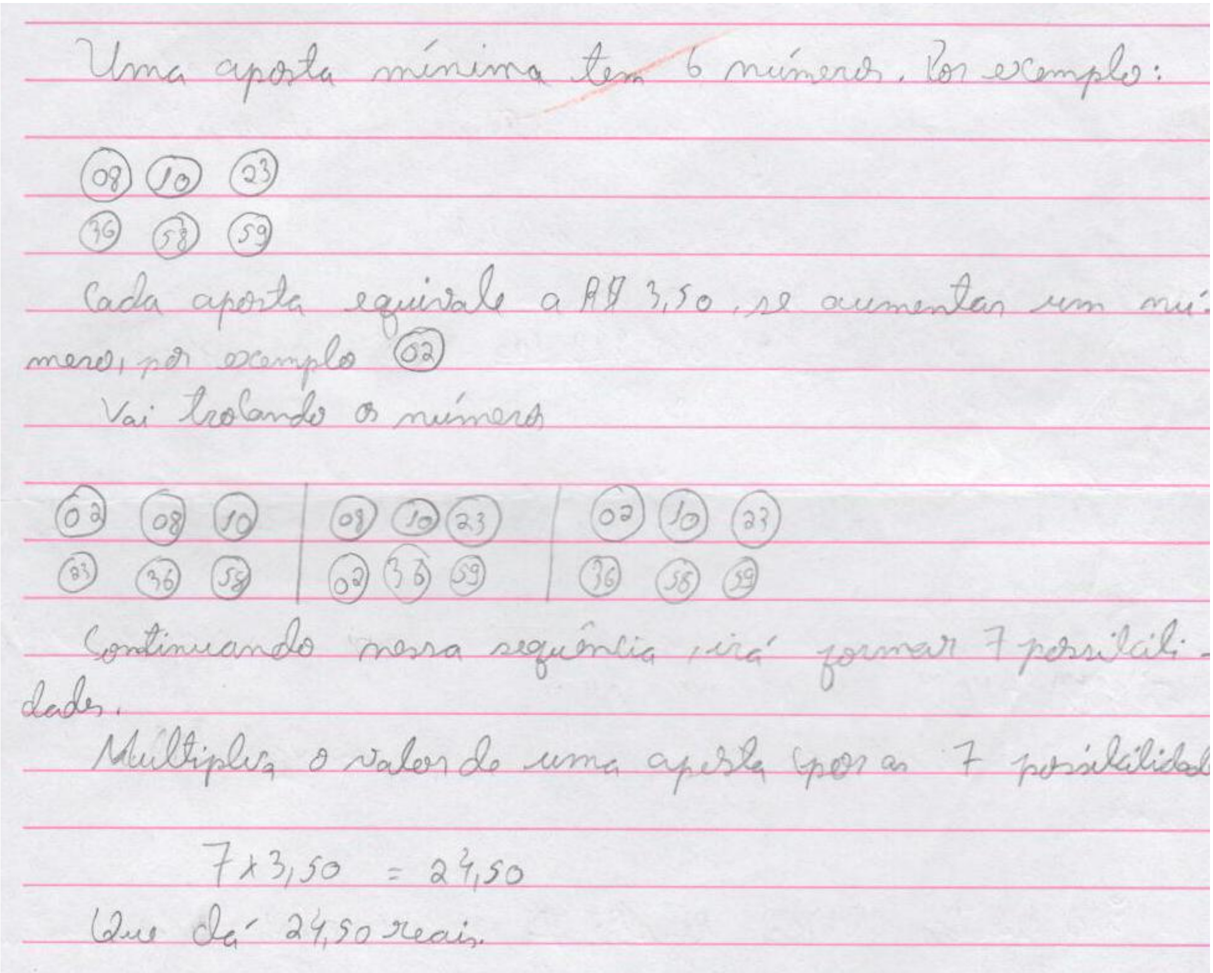

Uma aposta mínima tem 6 números. Por exemplo:
08 10 23
36 58 59
Cada aposta equivale a R$ 3,50, se aumentar um número, por exemplo 02
Vai trocando os números
02 08 10 | 08 10 23 | 02 10 23
23 36 58 | 02 36 59 | 36 58 59
Continuando nessa sequência, irá formar 7 possibilidades.
Multiplica o valor de uma aposta por as 7 possibilidad
7x3,50 = 24,50
Que dá 24,50 reais.

Figura 54: Resolução do G8 a questão 4 da Atividade 3

Agora, com 8 números, qual é ~~quantidade~~ valor da aposta.

27/01/16

Para fazer uma aposta na mega-sena, encontramos isso:

Tem 60 números, para 6 lugares

$m.(m-1)\ m-2\ .(m-3).(m-4).(m-5)$

$60.\ 59.\ 58\ .\ 57.\ 56.\ 55$

Para achar os números repetidos, é só organizar 6 números em 6 lugares, usando a fórmula anterior dá o resultado:

$6.5.4.3.2.1$ ou $6!$

dentro desse resultado estão as possibilidades repetidas, ou seja, com números iguais

$$\frac{60.59.58.57.56.55}{6.5.4.3.2.1} = \frac{36\ 045\ 979\ 200}{720} = 50\ 063\ 860$$

Esse resultado é para separar as possibilidades, ou seja, o resultado é 720, esses 720 são as possibilidades com os 6 números se repetindo

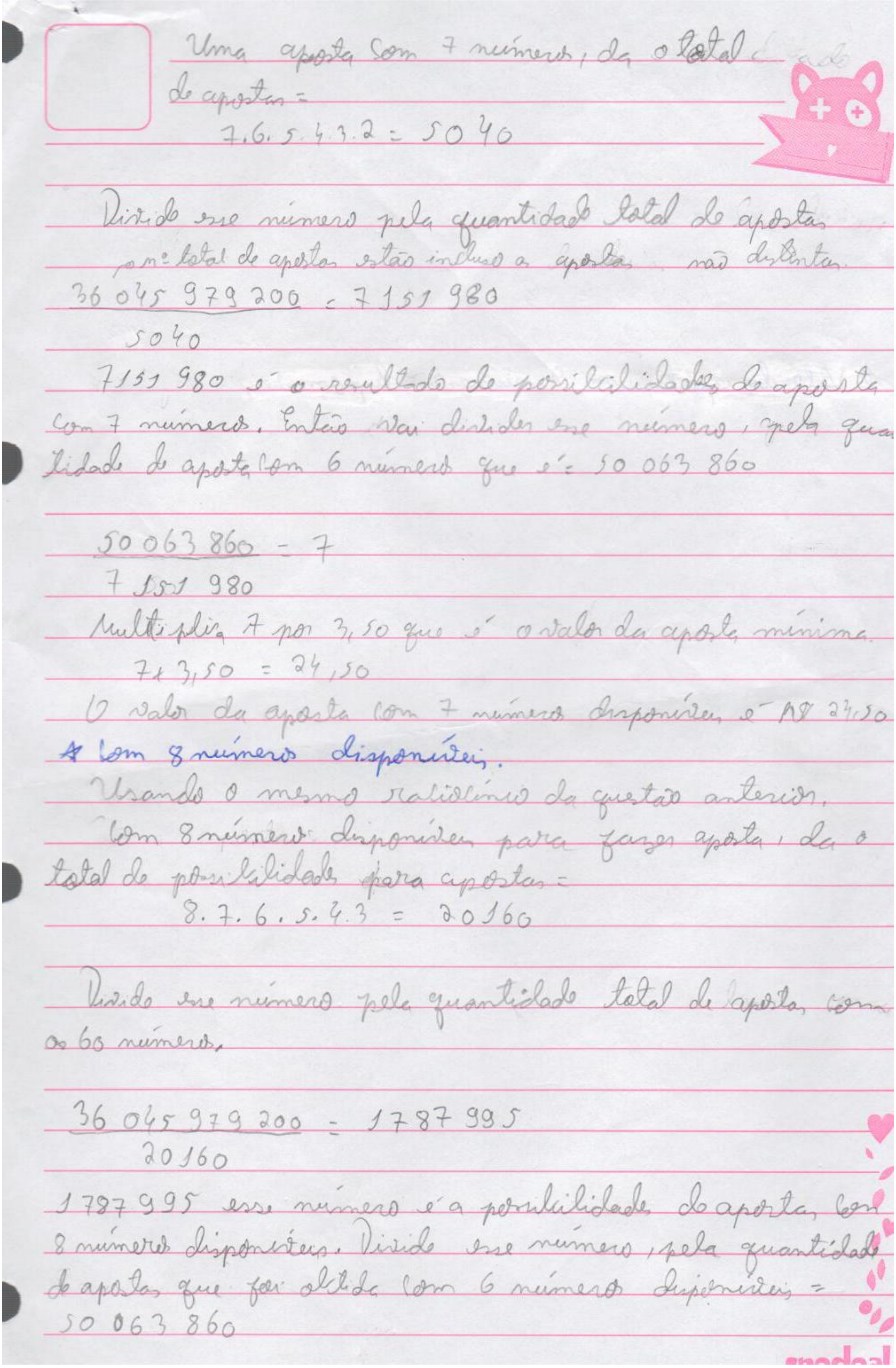
Divide, para que assim sejam retiradas as possibilidades não distintas (iguais)

E o resultado 50 063 860, são as possibilidades de apostas.

Essa questão que foi resolvida, irá ajudar a encontrar o resultado das apostas com 8 números, sendo que a aposta mínima equivale a R$ 3,50.

Vou responder primeiro com 7 números.

Figura 55: Continuação da resolução do G8 a questão 4 da Atividade 3



Uma aposta com 7 números, da o total de apostas =

7.6.5.4.3.2 = 5040

Divido esse número pela quantidade total de apostas

no total de apostas estão incluso a aposta não distintas

$$\frac{36\,045\,979\,200}{5040} = 7\,151\,980$$

7 151 980 é o resultado de possibilidades de aposta com 7 números. Então vai dividir esse número, pela quantidade de aposta com 6 números que é: 50 063 860

$$\frac{50\,063\,860}{7\,151\,980} = 7$$

Multiplica 7 por 3,50 que é o valor da aposta mínima.

7x3,50 = 24,50

O valor da aposta com 7 números disponíveis é R$ 24,50

* Com 8 números disponíveis.

Usando o mesmo raciocínio da questão anterior.

Com 8 números disponíveis para fazer aposta, da o total de possibilidades para apostas =

8.7.6.5.4.3 = 20160

Divido esse número pela quantidade total de aposta, com os 60 números.

$$\frac{36\,045\,979\,200}{20160} = 1\,787\,995$$

1 787 995 esse número é a possibilidade de aposta, com 8 números disponíveis. Divido esse número, pela quantidade de apostas que foi obtida com 6 números disponíveis =

50 063 860

Figura 56: Continuação da resolução do G8 a questão 4 da Atividade 3

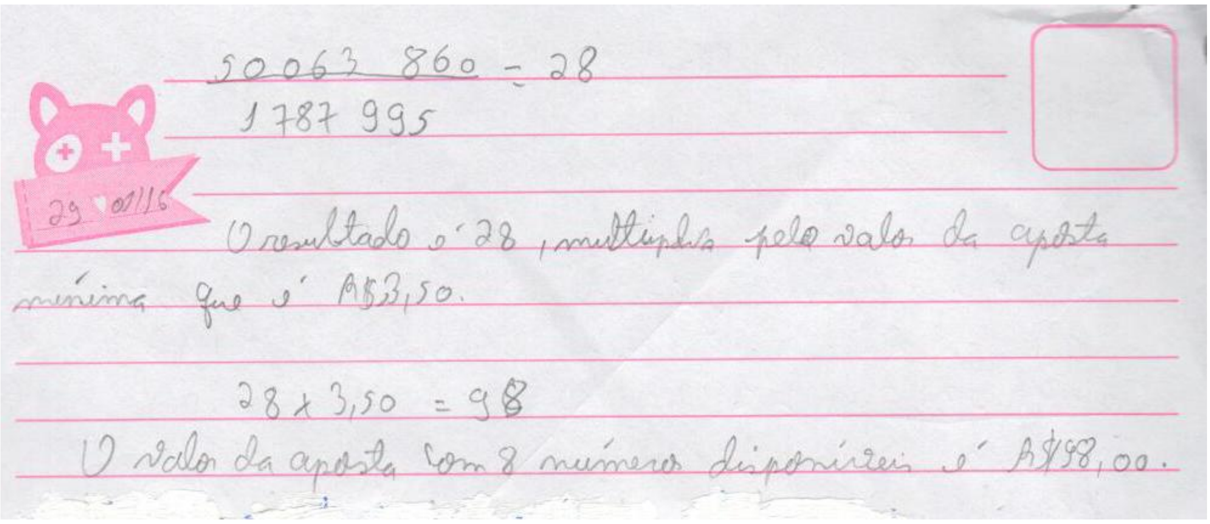


Figura 57: Continuação da resolução do G8 a questão 4 da Atividade 3

Além do valor da aposta com sete números, solicitei, oralmente, que os grupos analisassem o valor da aposta com outros números: 8, 9, ... O G8 apresentou duas soluções para o valor da aposta com 7 números. A primeira solução com um exemplo de uma aposta com 6 números e depois eles acrescentaram o número 2, daí observaram que com esses números podiam fazer 7 apostas diferentes de 6 números.

Em seguida eles detalharam a solução da questão 3 e usaram a notação de fatorial. A segunda solução para o valor com uma aposta de 7 números é feita seguindo os passos:

- calculam primeiro as permutações de 7 (7!)
- dividem o número de arranjos $(36\,045\,979\,200)$ que encontraram anteriormente por $7! = 5\,040$ obtendo como quociente 7 151 980
- dividem o total de possibilidades de apostas com 6 números por esse valor:

$$\frac{50\,063\,860}{7\,151\,980} = 7$$

- por último multiplicam 7 por R$ 3,50.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

A Educação Matemática contribui de maneira relevante para um ensino e aprendizado mais eficaz da matemática. O desenvolvimento de aulas com investigações matemáticas enriquece a aprendizagem dos discentes em virtude de sua postura ativa, necessária nesse tipo de abordagem.

A abordagem investigativa não pode ser usada em todas as aulas com todos os conteúdos, pois requer um tempo maior. Esse trabalho exigiu uma postura que não é comum aos alunos nas aulas de matemática: escrever. A escrita foi necessária para expressar de que forma os discentes chegaram a determinados resultados.

Aulas diferentes exigem planejamentos diferentes. Professores da educação básica do Brasil cumprem longas jornadas de trabalho em sala de aula, fato que restringe seu tempo de planejamento. Boas aulas devem ser planejadas e em outro momento avaliadas pelo próprio professor o que melhorará as aulas seguintes. No atual cenário da educação brasileira, apesar dos avanços nas pesquisas em Educação Matemática, professores da educação básica não possuem condições de contribuir o quanto poderiam para um ensino mais produtivo.

Para desenvolver as atividades que foram apresentadas nesse trabalho necessitei de um longo período de planejamento. As atividades não foram copiadas do livro didático, foram pesquisadas e criadas num modelo investigativo. Precisei estudar de forma mais aprofundada o conteúdo abordado e a nova metodologia que apliquei. Esses são aspectos dispensados em aulas tradicionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**.Volume 2. Segunda edição. São Paulo: Ática, 2013.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. e ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações**, volume 2. 7ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. e MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. e MORGADO, A. C. **Temas e Problemas Elementares**. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

PONTE, J. P., BROCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.