UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Geometria fractal: da natureza para a sala de aula

Por:

José Roberto Ferreira Filho

Mestrado Profissional de Matemática - São Cristóvão - SE

São Cristóvão/2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Geometria fractal: da natureza para a sala de aula

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

JOSÉ ROBERTO FERREIRA FILHO

Orientador: Humberto Henrique de Barros Viglioni

São Cristóvão/2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Ferreira Filho, José Roberto
F383g Geometria fractal : da natureza para a sala de aula / José Roberto Ferreira Filho ; orientador Humberto Henrique de Barros Viglioni. – São Cristóvão, 2015.
80 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.

O
1. Geometria fractal. 2. Fractais naturais. 3. Fractais – Programas de computador. 4. Fractais. I. Mello, Luiz Adolfo de, orient. II. Título.

CDU: 514.8

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Geometria Fractal: da natureza para a sala de aula.

por

José Roberto Ferreira Filho

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni- UFS
Orientador

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos- UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Adriano Veiga de Oliveira - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 02 de Maio de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedico à memória de meu avô José Vicente, homem de muita fé que sempre esteve ao meu lado. Dedito também a duas guerreiras minha vozinha querida Olimpia e minha sogra Leolina, mulheres de pouco estudo, porém sábias, as quais tenho eterno carinho e gratidão.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, autor da minha existência, por realizar tantas graças em minha vida, tenho certeza Senhor que sem ti não sou nada.

Agradeço a meus Pai Senhor Roberto, homem de poucas palavras, porém de muitas habilidades e minha Mãe Dona Vera mulher guerreira que sempre admirei e a tenho como referência em minha vida, obrigado por valorizarem a minha educação. Vocês são responsáveis diretos por mais essa etapa de minha vida. Amo vocês.

Agradeço a minha amada esposa Suely, minha amiga certa das horas incertas, menina com postura de mulher, pessoa íntegra de personalidade forte porém de bom coração, obrigado por tudo, sem você meu amor, não saberia como enfrentar essa empreitada.

Agradeço ao meu amado filho Mateus razão do meu viver e combustível das minhas viagens, que passou os dois primeiros anos de sua vida vendo seu pai viajar 240 km todos os finais de semana em busca de um objetivo. Te peço desculpas pelo meu mau humor. Filho com você aprendi a viver a vida, um dia de cada vez, simplismente “Te amo”.

Agradeço a minha família e amigos por sempre acreditarem em mim, obrigado pelas palavras de apoio e orações.

Agradeço aos meus amigos Marcos, Marcelo e Epifanio, companheiros de estudos e de boas conversas, sem vocês o fardo seria muito mais pesado.

Agradeço a minha cunhada Ângela e seu esposo Agamenon (quem considero como irmãos), pelo acolhimento em seu lar durante essa jornada, sem esse apoio logístico a caminhada teria sido mais árdua.

Agradeço a todos os professores do DMA - UFS, em especial ao meu orientado Prof. Humberto Viglione que acreditaram, aceitaram e participaram deste desafio.

À agência financiadora Capes pelo apoio dado ao longo do curso.

"Deus não escolhe os capacitados capacita os escolhidos. Fazer ou não fazer algo só depende de nossa vontade e perseverança".
Albert Einstein.

RESUMO

Este trabalho trata do estudo da geometria fractal, enfatizando suas principais características compreendidas com base nos sistemas naturais que as motivam. Apresentamos alguns nomes que contribuiram para o surgimento e desenvolvimento dos fractais matemáticos, enfatizando os exemplos de fractais naturais e a contribuição do pioneiro Benoit B. Mandelbrot.

Palavras-chave: Fractal. Geometria Fractal. Fractais naturais. Dimensão fractal. Autossimilaridade.

ABSTRACT

This work deals with the study of fractal geometry, emphasizing its main features included on natural systems that motivate them. Here some names that contributed to the emergence and development of mathematical fractals, emphasizing examples of natural fractals and the pioneer of Benoit B. Mandelbrot contribution .

Keywords: Fractal. Fractal geometry. Natural fractals. Fractal dimension. Autossimilaridade.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de uma pesquisa bibliográfica sobre a geometria fractal, fazendo uma abordagem como um saber científico, estudando as características, classificações e suas princípais propriedades, nos possibilitando entender como pode ser trabalhada na perspectiva de um saber escolar.

Um dos objetivos é fornecer um material didático autoexplicativo que possa ser utilizado por professores da educação básica, bem como por alunos do ensino médio que queiram conhecer a geometria fractal. Servindo de base para quem pretende conhecer um pouco da história dos fractais e suas estruturas, bem como para enriquecer atividades na sala de aula explorando alguns conceitos matemáticos de forma diferente.

Um dos desafios do professor de matemática, antes mesmo de "ensinar"a matemática é fazer com que os alunos aprendam a gostar dela, com suas múltiplas características, entre elas: a lógica, a beleza e a diversidade de campos de aplicação. Conduzir o aluno a uma descoberta, abrindo novos horizontes e mostrando que a matemática não é uma ciência pronta, acabada.

A escolha do tema Geometria Fractal foi ao encontro desses pressupostos, pois, fascina pela beleza, é de fácil compreensão na sua essência, é notória na natureza e abre um leque de opções no que diz respeito a abordagem de conhecimentos matemáticos, além de estimular o uso das TIC's [1]. Sendo assim, o seu uso possibilita uma atuação diferente na sala de aula, transformando o aluno em sujeito ativo da sua aprendizagem.

O trabalho foi divido em 5 capítulos. A seguir, detalharemos cada um desses capítulos.

O capítulo 1, trata de toda a trajetória da evolução da geometria fractal desde Dürer, quando utilizava as formas geométricas tradicionais para criar estruturas com-

[1] São as Tecnologias da informação e comunicação.

plexas e com padrões específicos, passando por Peano, até chegar ao seu ápice, quando Mandelbrot trabalhando na IBM, conseguiu descobrir padrões de ruídos em sinais de linhas telefônicas e a partir daí consegue estruturar as teorias que administram tal geometria, tornando assim um objeto de estudo bastante pesquisado no último século.

No capítulo 2, abordamos aspectos pertinentes a geometria clássica (Euclidiana), bem como o seu esforço em tentar modelar a natureza. Abordamos também a irregularidade presente nas estruturas naturais, dessa forma, preparando o leitor para uma melhor compreensão do que venha ser a geometria fractal e suas característiras.

No capítulo 3, são apresentadas de forma sistemática as três principais características de um fractal, complexidade infinita, dimensão e auto similaridade em diferentes níveis. Além de apresentar sua classificação.

O capítulo 4, ficou destinado exclusivamente para relatar os procedimentos e resultados obtidos durante a realização das oficinas.

Finalmente, nas considerações finais apresentamos as aprendizagens adquiridas e dificuldades encontradas ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Capítulo 1

Fractal: Do anonimato ao apogeu.

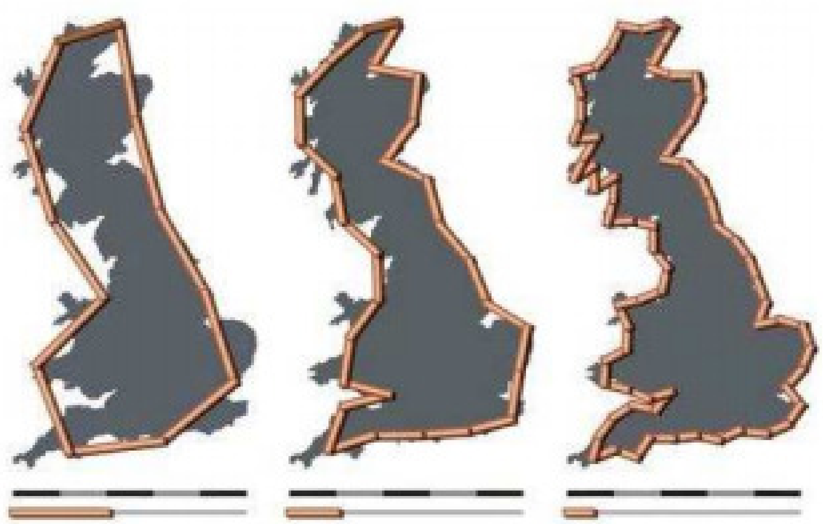
Irregularidade, palavra que faz parte da vida humana e sempre fará. Autores antigos escreveram sobre isso, eram situações incomensuráveis, e, de certo modo, de extrema complexidade, uma desordem. Durante algum tempo Mandelbrot [1] ficou envolvido em estudos que caracterizavam essa forma de complexidade e para sua surpresa encontrou vestígios de irregularidade nessas estruturas, onde posteriormente as classificou como rugosas. Mandelbrot prefere rugosidade à irregularidade, uma vez que o termo irregularidade está intimamente ligado a falta, falha, lacuna e o sentido empregado não é esse para ele o aspecto da maioria das coisas do mundo é áspero. Logo rugosidade se enquadra perfeitamente em sua definição.

Tentando medir a área da superfície de uma couve-flor, uma região bastante rugosa, Mandelbrot percebe que cada parte se assemelha ao todo, porém, em escala menor. O que ele fez foi estudar problemas dessa natureza e encontrou algo muito surpreendente: É possível medir a rugosidade através de um número e essa percepção é muito útil a humanidade, pois poucas coisas são extremamente lisas.

Então, retornando a questão inicial qual é a área da superfície de uma couve-flor? A resposta possível variará conforme a escala de medição. Cada vez que medimos com menores escala "régua", a superfície se torna maior. Em 1967, Benoit B. Mandelbrot publicou um artigo que se tornaria clássico, cujo título perguntava: "Qual o tamanho da costa da Grã Bretanha?" Lia-se logo no segundo parágrafo: "Uma costa selvagem é extremamente sinuosa, e, por conseguinte, seu comprimento final se mostrará de tal grandeza, que não haverá inconveniente prático em considerá-la infinita."

Podemos trazer esse questionamento para os dias atuais "Qual o comprimento

[1] Matemático responsável pela extruturação da geometria fractal.



Fonte:[11]

Figura 1.1: Costa da Grã-Bretanha

do Rio São Francisco?"o rio da integração nacional que passa por cinco estados brasileiros: Minas Gerais (nascente), Bahia, Pernambuco, Sergipe e Alagoas (foz).O comprimento do rio São Francisco não tem unanimidade: segundo a Delta Larousse[2] de 1972, ele tem 2.624 km; mas para a mesma Delta Larousse de 1986, sua extensão é de 3.161 km. Na Mirador[3], seu comprimento também é de 2.624 km; e para os sites oficiais da Codevasf[16], Chesf e Cemig o comprimento é de 2.700 km. Assim, vemos uma grande variação numérica nas dimensões do rio São Francisco, variações essas que são influenciadas por fatores naturais (erosão) e também por conta da irregularidade ou como Mandelbrot diz da rugosidade do seu curso, é possível chegar a esta segunda conclusão de diversas formas, mas em qualquer um dos casos descobre-se que o comprimento final é de tal maneira grande que se poderá considerar infinito. Porém, nesse trabalho vamos mostrar dois dos tantos métodos para chegar a essa conclusão. Esses metódos foram escolhidos levando-se em consideração a forma lúdica de apresentar aos alunos.

O primeiro método consiste em percorrer todo o curso do rio com um compasso de abertura fixa y, começando cada abertura no ponto onde terminou a anterior. O valor

[2]Enciclopédia tradicional, em forma de volumes publicada em 1972 pela Editora Delta, do Rio de Janeiro.

[3]Enciclopédia internacional.

de y multiplicado pelo número de aberturas, dará um comprimento aproximado $C(y)$. Se essa operação for realizada n vezes e a cada medição a abertura do compasso for cada vez menor, verificar-se-á que $C(y)$ tende a aumentar. O outro método é imaginar um homem que caminha ao longo da margem de todo o rio, percorrendo o caminho mais curto possível (próximo da água), garantindo, que nunca se afaste da margem do rio mais do que uma distância d. Em seguida substitui-se o cansado homem por um cachorro, depois por um gato, por um rato e finalmente por uma formiga. Dessa forma lúdica, fica claro que a trajetória feita por cada participante difere uma da outra devido: primeiro a rugosidade apresentada pela superfície e segundo, por conta do comprimento do passo de cada participante.

Figura 1.2: Comprimento do rio medido com régua de 1 *und*.

Figura 1.3: Comprimento do rio medido com régua de 9 *und*.

Nesse contexto, percebemos a essência do termo rugosidade, pois quanto mais rugosa for a superfície e menor a escala utilizada para medi-la, maior será seu comprimento. Mandelbrot com sua geometria reflete: "O mundo não é puro, macio e liso, mas, áspero, irregular e descontínuo. As formas clássicas, mais que pobres, eram impotentes para explicar as impurezas".

Cerca de 145 anos atrás, matemáticos começaram a manipular formas que desafiavam o bom senso. Os objetos que não se enquadravam na geometria euclidiana eram conhecidos como *monstros matemáticos*. Estes, são construídos desde o ano 1500, quando Albrecht Dürer matemático e grande artista da época, com seus desenhos geométricos gerou o que é chamado hoje de fractal tipo Dürer. Também foram objetos de estudo em 1883, quando Cantor publicou um trabalho construindo um conjunto, atualmente denominado de "conjunto de Cantor" (às vezes "polvo de Cantor" ou “poeira de Cantor”). Sete anos mais tarde, Giusepe Peano e Hilbert, discutiam a respeito de uma curva, questionando a sua percepção intuitiva, ou seja, dada uma parte de um plano (bidimensional) existe uma curva (unidimensional) que encontra pelo menos uma vez, todos os pontos desse plano durante o seu percurso. Uma curva capaz de preencher um plano era considerada impossível para a geometria clássica. Curva de Peano se tornou um objeto de interesse extraordinário.

A essas novas formas Mandelbrot chamou de fractais, baseando-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar. Podemos encontrar essas formas nas florestas tropicais, nas fronteiras da investigação médica, nos filmes, na comunicação sem fio, fazendo parte do estudo da biologia, se fazendo presente em nossos pulmões, rins e vasos sanguíneos, além de aparecem em flores, plantas, sistemas meteorológicos, no ritmo do coração. São inúmeros os exemplos destes objetos naturais cujas estruturas geométricas representam um grande desafio para serem representados e estudados matematicamente.

1.1 Importantes nomes na história da Geometria Fractal.

Nesta seção será explanado de forma breve alguns dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria fractal e/ou para sua divulgação.

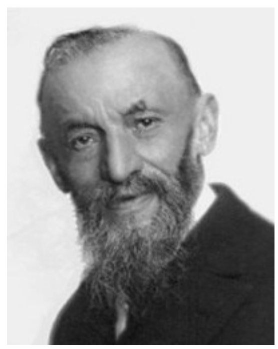
Sierpinski

Fonte:[11]

Figura 1.4: Waclaw Sierpinski
(Varsóvia (Polônia), 1882 - Varsóvia (Polônia), 1969)

Frequentou a escola em Varsóvia, onde seu talento para a matemática foi rapidamente percebido por seu primeiro professor de matemática, viveu um período difícil quando a Rússia ocupou a Polônia. Mesmo com as dificuldades, Sierpinski entrou no Departamento de Matemática e Física da Universidade de Varsóvia em 1899, concluindo a graduação no ano de 1904 e em 1908 o doutorado. Criador dos "monstros matemáticos": Triângulo e Tapete de Sierpinski e a Curva de Sierpinski; uma curva fechada iniciada por um quadrado, preenchendo toda área quadrangular, tendo aplicações em otimização de rotas.

Peano



Fonte:[11]

Figura 1.5: Giuseppe Peano
(Cuneo (Itália), 1858 - Turim (Itália), 1932)

Famoso por seus axiomas, Peano deu sua contribuição a diversas áreas: Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear, Cálculo Vetorial e em aplicações geométricas de Cálculo Infinitesimal. Contribuiu consideravelmente para a linguagem matemática na Teoria dos Conjuntos e Lógica Matemática, por sua precisão e rigor lógico utilizados em seus trabalhos, surpreendeu os matemáticos contemporâneos, sendo considerado por alguns como o pai da lógica.

Nasceu em uma fazenda a 5 km de Cuneo. Durante toda a sua infância escolar percorria esses 5 km a pé para frequentar a escola.

Querendo dar continuidade aos estudos mudou-se para Turim, obtendo o grau de doutor em Matemática na Universidade de Turim em 1880 e neste mesmo ano começou a lecionar nesta universidade, além de ser professor na Academia Militar de Turim.

Dez anos mais tarde, em 1890, quando tratava do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, publica sua famosa curva, a Curva de Peano, um "monstro matemático" proposto para cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular.

Hilbert

Fonte:[11]

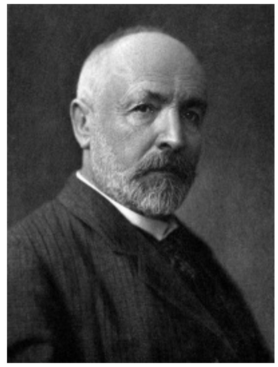
Figura 1.6: David Hilbert
(Königsberg (Alemanha), 1862 - Göttingen (Alemanha), 1943)

Contribuiu em várias áreas da Matemática, consolidou a Teoria dos Invariantes, abordagem axiomática da geometria euclidiana, teoria dos números algébricos, criação dos espaços de Hilbert que trata de equações integrais e formas quadráticas. Considerado um dos mais notáveis matemáticos cujos tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da matemática atual.

Hilbert, brilhantemente obteve seu doutorado em 1884. Foi professor da Universidade de Göttingen até aposentar-se em 1930.Em 1891, publica a Curva de Hilbert para cobertura de uma superfície quadrada sem interseção de pontos, um dos "monstros matemáticos" utilizado em técnicas de compressão de imagens.

Cantor

Conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos. Filho do comerciante dinamarquês, George Waldemar Cantor e de uma musicista russa, Maria Anna Böhm. Aos 11 anos mudou-se para a Alemanha, dando continuidade aos seus estudos. Estudou no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867.



Fonte:[11]

Figura 1.7: George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(São Petersburgo (Rússia), 1845 - Halle (Alemanha), 1918)

Sofreu várias crises de depressão associadas aos estudos excessivos em Matemática, provavelmente sua doença seria diagnosticada como Transtorno Bipolar. Morreu em um hospital psiquiátrico da cidade de Halle em 1918. Embora os conceitos matemáticos inovadores propostos por Cantor tenham enfrentado uma resistência significativa por parte da comunidade matemática da época, reconhece-se atualmente a grande contribuição dada por ele à Matemática. Dentre outras coisas, Cantor provou que os conjuntos infinitos não têm todos a mesma potência, diferenciando os conjuntos enumeráveis dos contínuos. Foi criador de um dos "monstros matemáticos" no ano de 1883, o Conjunto de Cantor, o qual demonstrou não ser um conjunto enumerável.

Lyapunov

Matemático e físico, é conhecido pelo desenvolvimento da Teoria da Estabilidade de Sistemas Dinâmicos e valiosas contribuições na distribuição potencial elétrica em superfícies, mecânica celeste, equações diferenciais e teoria das probabilidades. Filho de um conhecido astrônomo, professor da Universidade de Kazan [4], teve sua infância conturbada. Devido a motivos políticos, sua família mudou-se para uma pequena cidade. Aos 11 anos, após a morte do pai, é educado por um tio cuja filha Lyapunov casa-se. Conclui seus estudos básicos em 1876. Gradua-se em 1880 na Universidade de São Petersburgo, concluindo seu mestrado em 1884 e em 1892 seu doutorado, tendo recebido vários prêmios por trabalhos sobre física dos corpos celestes, hidroestática e estabilidade em sistemas dinâmicos. Foi professor na Universidade de Járkov, no

[4] Localizada em Kazan, na República do Tartaristão, Rússia.

Fonte:[7]

Figura 1.8: Aleksandr Mikhailovich Lyapunov
(Iaroslavl (Rússia), 1857 - Odessa (Rússia), 1918)

Instituto Politécnico de Járkov e na Universidade de São Petersburgo. Foi membro da Sociedade Matemática de Járkov e da Academia Russa de Ciências. Após a morte de sua esposa tenta suicídio dando um tiro, chegando a falecer 10 dias depois. É dele a criação do Conjunto de Lyapunov , objeto fractal gerado por recorrências, aplicável em sistemas dinâmicos.

Menger

Fonte:[11]

Figura 1.9: Karl Menger
(Viena (Austria), 1902 - Illinois (EUA), 1985)

Teve várias contribuições nas áreas de Álgebra, Geometria Hiperbólica, dimensão topológica, teoria dos jogos e nas ciências sociais. Filho do famoso economista Carl Menger. Quando jovem desenvolveu seus talentos em literatura, mas em 1920 ingressou na Universidade de Viena para estudar Física. Interessou-se na área de Matemática em estudos topológicos. Em 1921, contraiu tuberculose e durante o tempo de dois anos de isolamento para tratamento dedicou-se aos estudos, ao retornar pouco tempo depois, em 1924, concluiu seu doutorado em Espaço Topológico.

Foi professor nas Universidades de Amsterdam e Viena, no Instituto Tecnológico de Illinois e na Universidade de Notre Dame. Em 1926, apresentou a Esponja de Menger explorando o conceito de dimensão topológica. Como cada face da Esponja de Menger apresenta o Tapete de Sierpinski cuja linha central representa o Conjunto de Cantor, é considerado uma expansão tridimensional desses outros objetos fractais.

Koch

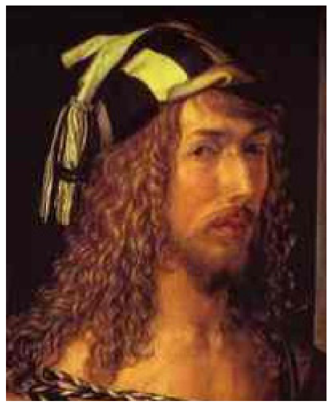
Fonte:[11]

Figura 1.10: Niels Fabian Helge von Koch
(Estocolmo (Suécia), 1870 - Estocolmo (Suécia), 1924)

Seu trabalho foi desenvolvido principalmente nas áreas de teoria dos números e Equações diferenciais, obteve a graduação em Matemática na Universidade de Estocolmo, onde posteriormente recebeu o título de Doutor, chegando a ocupar uma cadeira de professor nesta Universidade.

Koch criou um dos "monstros matemáticos" mais conhecidos, a famosa curva de Kock, que aplicada aos lados de um triângulo equilátero gera a Ilha de Koch ou popularmente conhecido como floco de neve, recebendo esse nome, devido à semelhança que tem com os flocos de neve encontrados na natureza. Koch define sua curva como um exemplo de curva contínua em todo o intervalo, porém, não diferenciável em parte alguma. Uma aplicação da curva de Koch foi proposta por Mandelbrot para o dimensionamento fractal de uma linha costeira.

Dürer



Fonte:[11]

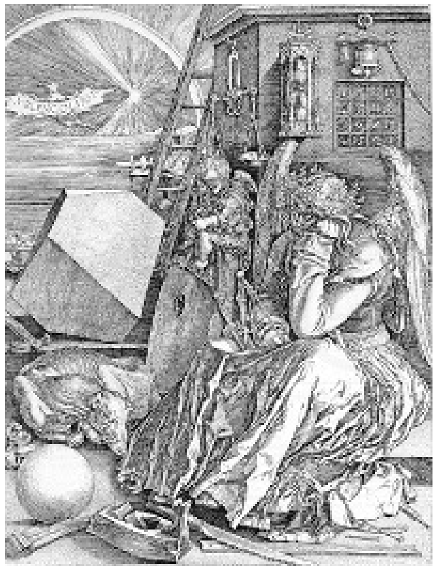
Figura 1.11: Albrecht Dürer
(Nuremberg (Alemanha), 1471 - Nuremberg (Alemanha), 1528)

Dürer foi o pioneiro na arte de representação gráfica em três dimensões, ou seja, foi um dos primeiros artistas a introduzir perspectiva nas suas pinturas, além de ter sido matemático, físico, botânico, zoólogo, desenhista, sendo considerado a figura principal da arte alemã do século XVI. A imagem (figura 1.11) é um auto-retrato.

Dürer, dentre outras profissões e habilidades, era professor de matemática e explorava conceitos de geometria. Entre os seus desenhos geométricos gerou os atuais fractais tipo Dürer. As construções geométricas dos polígonos feitas por Dürer apresentavam resultados bastante precisos.

Em 1508, começa a colecionar material para um dos seus trabalhos, uma das mais famosas gravuras "Melancolia" no ano de 1514. Do ponto de vista matemático, o poliedro existente na imagem se destaca, pois aparenta consistir em dois triângulos equiláteros e seis pentágonos regulares. Com similar encanto, mostra-se interessante o quadrado mágico[5].

Hausdorf



Fonte:[15]

Figura 1.12: Melancolia, obra de Albrecht Dürer

Fonte:[11]

Figura 1.13: Felix Hausdorff
(Breslau (Alemanha), atual Wroclaw (Polônia), 1868 - Bonn (Alemanha), 1942)

Desenvolveu vários estudos em Matemática Aplicada a Astronomia, Teoria dos Conjuntos, Topologia e Análise. Filho de judeus, teve forte incentivo dos pais para os estudos. Desde a infância mostrava facilidade em matemática, mas tinha fascínio pelas áreas de literatura e música e teria seguido a carreira de compositor caso não fosse pressionado pelos pais para a escolha de sua profissão. Graduou-se em Matemática

[5]É um arranjo de números inteiros, em linhas e colunas, de tal maneira que os números em cada linha, em cada coluna e em diagonal têm sempre igual soma.

em 1891 pela Universidade de Leipzig, onde também concluiu seu doutorado em 1895.

Foi professor nas Universidades de Leipzig, Bonn e Greifswald. Em 1935 foi obrigado a abandonar a universidade por ser judeu, passou por várias dificuldades e em 1942 seria mandado a um campo de concentração, no entanto, suicidou-se junto à mulher e cunhada. Além da carreira de matemático, manteve em seu círculo de amigos, escritores e artistas de várias áreas, sendo escritor sob o pseudônimo de Paul Mongré, publicando vários trabalhos literários e filosóficos. Em 1919 desenvolveu conceitos sobre dimensão topológica, criando a Dimensão de Hausdorff ou como iremos tratar, Dimensão Fractal pelo método de Hausdorff.

Julia

Fonte:[11]

Figura 1.14: Gaston Maurice Julia
(Sidi bel Abbès (Algeria), 1893 - Paris (França), 1978)

Conhecido pelo desenvolvimento do Conjunto de Julia. Desde criança já demonstrava sua facilidade para os estudos e, em especial, para matemática. Quando jovem ao servir na primeira guerra foi gravemente ferido, perdendo o nariz. Provavelmente produziu grande parte do seu trabalho no longo período de internação. Foi submetido à várias cirurgias, mas não conseguiu livrar-se da máscara de couro a qual foi condenado a usar pelo resto da vida.

1.2 Benoit Mandelbrot

Destinaremos a ele esta seção do trabalho, pois foi Mandelbrot que organizou e difundio a geometria Fractal.

Fonte:[11]

Figura 1.15: Benoit Mandelbrot
Varsóvia (Polônia), 1924 - Massachusetts (EUA), 2010)

Fosse ele um homem mais fácil de classificar, poderíamos chama-ló de "o matemático Benoit Mandelbrot", porém, os matemáticos de sua época não o considerava como tal.

Muitas coisas, de fato ele foi. O texto que o apresentou como conferencista de um seminário dizia: "Lecionou economia em Harvard, engenharia em Yale, fisiologia na Faculdade Albert Einstein de Medicina..." Aventurou-se na linguística e estudou a oscilação dos preços do trigo. Escreveu sobre a distribuição espacial entre cidades grandes e pequenas. Decifrou o mistério do ruído aparentemente aleatório das ligações telefônicas, provando que eram inevitáveis e, ao contrário do que pensavam os engenheiros, regulares. Identificou padrões entre terremotos e frequências cardíacas. Terminou a vida como catedrático de matemática em Yale, aos 85 anos, sem jamais ter provado um teorema relevante. Tudo isso retrata uma célebre frase: "Muitas vezes, quando vejo a lista dos cargos que já ocupei, fico pensando se existo de fato. A intersecção desses conjuntos deve ser vazia."

Nascido em Varsóvia - Polônia em 20 de novembro de 1924 é um "matemático" francês de origem judaico-polonesa. Criou-se em Paris, onde foi aluno da célebre École Polytechnique. Em 1948, foi para os Estados Unidos e lá estudou ciência aeroespacial no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Desde então, dedicou-se aos mais variados ramos do conhecimento: geologia, economia, comunicação, biologia, termodinâmica, meteorologia e computação.

Professor Marcelo Viana[6]: " A contribuição de Mandelbrot para a matemática

[6]Pesquisador titular do Impa, o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

não foi o seu trabalho mais importante. O principal é que ele mudou a nossa maneira de pensar, pois percebeu que as formas puras não explicam o mundo natural, sua ânsia era explicar o mundo."

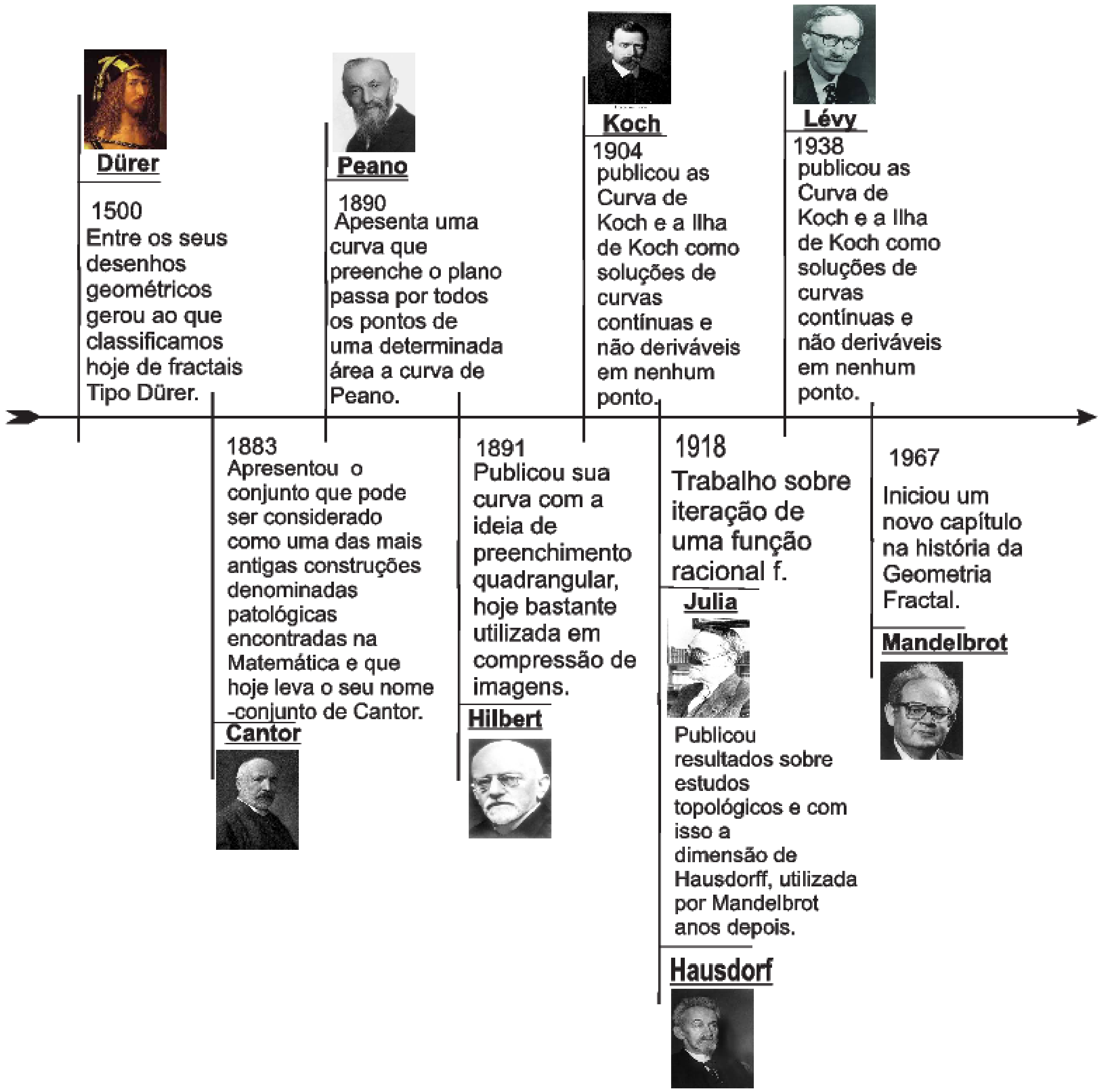
O termo fractal provém da palavra fractus, que significa quebrado, irregular ou descontínuo. Foi essa a palavra escolhida por Mandelbrot para rotular a descoberta que o levou a publicar o livro "Les Objects Fractales: Forme, Hasard et Dimension", sendo reescrito em 1977 com o nome alterado para "The Fractal Geometry os Nature". Conta a história que certa tarde de inverno de 1975 Benoit Mandelbrot encontrou no dicionário de latim do filho pequeno, um nome para a sua abstração. Escolheu o termo fractus do verbo frangere (fraturar, quebrar), que depois se tornaria fractal.

Um traço importante de sua vida estava representada naquela expressão. Este prodigioso e ilustre observador contemporâneo ficou conhecido mundialmente como o único responsável pelo enorme interesse nos chamados objetos fractais. Hoje em dia sua geometria é conhecida através de bonitas gravuras coloridas que enriqueceram tanto a matemática moderna como a arte.

1.3 Breve linha do tempo

Embora os fractais não foram descobertos nem criados inicialmente por Mandelbrot, ele os agregou em torno de caracteristicas comuns a todos esses entes matemáticos, visto que estes já eram conhecidos antes de sua descoberta. Há indícios de que eles existiam antes do século XX e eram conhecidos como "monstros matemáticos" na Grécia Homérica, Índia e China.

Mandelbrot se apoiou em estudos de outros matemáticos para definir os fractais. Dessa forma, apresentaremos em ordem cronológica alguns fatos relacionados com a história da geometria fractal.



Fonte:autor

Figura 1.16: Linha do tempo: evolução dos fractais. (Evolução dos fractais contada de forma cronológica)

Capítulo 2

A Geometria Clássica e a Natureza

A palavra geometria é composta de duas terminologias de origem gregas: geos (terra) e metron (medida). Esta nomenclatura deve sua origem à necessidade que o homem tinha de medir terrenos desde os tempos remotos.

O que pode ter em comum a Matemática e a Biologia? Desde muito tempo, as duas trabalham juntas para compreender os fenômenos da natureza. Um bom exemplo é a taxonomia, ciência que classifica os seres vivos segundo suas características, incluindo as formas de cada um. Ela procura nos animais e plantas, formas, simetrias, números (de patas, de asas, de pétalas etc.). Em resumo, é a busca da geometria dentro da natureza.

2.1 Euclides e seu best Seller: Os elementos

A história da origem da geometria está entrelaçada a origem da civilização egípcia que teve início há aproximadamente 5 mil anos. Para o desenvolvimento da agricultura, em uma área de deserto, o Egito foi dependente do ciclo de um rio, o famoso rio Nilo, com suas cheias e vazantes. Nas fases de cheias, as águas levavam consigo uma grande quantidade de sedimentos que eram distribuídos ao longo de suas margens, assim, quando chegava a época da vazão, as águas baixavam e deixavam no solo uma enorme quantidade de nutrientes importantes para sua fertilidade. Observando esses eventos naturais, a sociedade pôde desenvolver o cultivo de cereais que compunham a alimentação e dessa forma fortalecendo a comunidade. Foi nesse senário que surgiram os "puxadores de corda"ou "harpedonaptas", homens que tinham como obrigação fazer demarcações nas terras, pois, durante as inundações fazia desaparecer os marcos de delimitação entre os campos.

Os "puxadores de corda", baseavam sua arte essencialmente no conhecimento de que o triângulo de lados 3, 4, 5 é retângulo. Contudo, muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, desde a Babiloônia à China, passando pela civilização Hindu.

A Geometria como ciência dedutiva apenas tem início na Grécia Antiga, cerca de sete séculos antes de Cristo, graças aos esforços de muitos notáveis predecessores de Euclides, como Tales de Mileto (640 - 546 a.C.), Pitágoras (580 - 500 a.C.) e Eudoxio (408 - 355 a.C.).

Da vida de Euclides pouco se sabe, exceto o que o filósofo grego Proclus[1] relata em seu "resumo"dos matemáticos gregos famosos. De acordo com ele, Euclides ensinava em Alexandria na época de Ptolomeu I Soter , que governou o Egito de 323 a.C.- 285 a.C. Dessa forma, Proclus define Euclides de Alexandria como sendo, mestre, escritor de origem provavelmente grega, matemático da escola platônica, conhecido como o Pai da Geometria. Nasceu na Síria aproximadamente em 330 a.C. e realizou seus estudos em Atenas.

Fonte: http://www.infoescola.com/biografias/euclides

Figura 2.1: Euclides de Alexandria

Euclides é até hoje, na história da Matemática, considerado como um dos mais significativos estudiosos deste campo, dando uma grande contribuição para a geometria ao escrever o livro "Elementos"que é constituído por 13 volumes. Compilou nos Elementos toda a geometria conhecida na sua época. Mas, não se limitou a reunir todo o conhecimento geométrico, ordenou-o e estruturou-o como ciência. Isto é, a partir de alguns axiomas desenvolveu e demonstrou os teoremas e proposições geométricas, dando novas demonstrações quando as antigas não se adaptavam à nova ordem que havia dado às proposições. Além disso, esmiuçou a fundo as propriedades das figuras

[1]Filósofo neoplatônico grego do século V.

geométricas, das áreas e dos volumes e estabeleceu o conceito de lugar geométrico. Este livro estabeleceu um método de demonstração rigorosa e só muito recentemente superado.

Os 4 primeiros livros, atualmente pensandos como capítulos, tratam da Geometria Plana conhecida da época, enquanto os demais tratam da teoria dos números, dos incomensuráveis e da geometria espacial. No livro 1 dos Elementos de Euclides, inicia-se o estudo da geometria plana, hoje conhecida como Geometria Euclidiana Plana em sua homenagem. Inicialmente ele define os objetos geométricos cujas propriedades deseja-se estudar. São 23 definições, dentre as quais encontramos as definições de ponto, reta, círculo, triângulo, retas paralelas, etc. Em seguida ele enuncia 5 noções comuns, que são afirmações admitidas como verdades óbvias.

O livro V apresenta a teoria das proporções na sua forma puramente geométrica. O livro VI trata sobre semelhanças de figuras planas. Há uma retomada sobre o teorema de Pitágoras e a razão áurea (livro VI, proposições 30 e 31), mas agora como teoremas respeitantes à razões de grandezas. E na proposição 27 do livro VI tem-se o teorema que contém o primeiro problema de maximização que chegou até nós, com a prova de que o quadrado é de todos os retângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima.

Já os livros de VII a IX tratam da teoria dos números tais como a divisibilidade de inteiros, a adição de séries geométricas, algumas propriedades dos números primos e a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. O livro X, o mais extenso de todos e muitas vezes considerado o mais difícil, contém a classificação geométrica de irracionais quadráticos e as suas raízes quadráticas. Os livros de XI a XIII tratam sobre geometria espacial, e conduzem, pela via dos ângulos poliédricos, aos volumes dos paralelepípedos, do prisma e da pirâmide, à esfera e concluem com a prova de que existem somente cinco poliedros de Platão (tetraedro de faces triangulares, hexaedro de faces quadrangulares, octaedro de faces triangulares, dodecaedro de faces pentagonais e icosaedro de faces triangulares).

Os elementos de Euclides destacam-se pelo fato de que com apenas 5 postulados ele foi capaz de deduzir 465 proposições. A seguir, apresentamos os 5 postulados de Euclides:

Postulado 1. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

Postulado 2. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Postulado 3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

Postulado 4. Todos os ângulos retos são iguais.

Postulado 5. Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r : Se a soma dos ângulos formados é menor do que 180 graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que 180 graus.

O conteúdo dos Elementos de Euclides sofreu modificações e não foram poucas, entretanto como fora dito por Borsuk (1905 - 1982) e Szmielew (Foundations of geometry, 1960):

> "Se o valor de um trabalho científico pode ser medido pelo tempo durante o qual ele mantém a sua importância, então os Elementos de Euclides são a obra científica mais válida de todos os tempos."

Euclides definiu linha como aquilo que tem comprimento sem largura e ponto como aquilo que não tem parte. Duas definições não muito úteis. Para entendê-las é necessário ter em mente uma linha e um ponto. Consideraremos alguns termos, chamados de primitivos ou elementares, sem precisar defini-los. São eles:

1. Ponto;
2. Reta;
3. Pertencer a (Exemplo: dois pontos pertencem a uma única reta);
4. Está entre (Exemplo: o ponto C está entre A e B);

Resumidamente os três conceitos fundamentais, o de ponto, o de reta e o de círculo e os cincos postulados a eles referentes, servem de base para toda a geometria euclidiana.

Porém, os postulados de Euclides não são suficientes para demonstrar todos os resultados da geometria plana. No estudo dos Elementos de Euclides existem lacunas que não são possíveis de responder somente com o conteúdo dos Elementos. Dessa forma, iremos usar um conjunto de axiomas que incentivaram a reformulação dos axiomas de Euclides, em sua maioria feita por Moritz Pasch [2] (1843 - 1930) e David Hilbert.

Julgamos desnecessário continuar falando sobre os postulados de Euclides, axiomas e proposições, uma vez que o foco deste capítulo é mostrar que a geometria Euclidiana não consegue de forma individual representar, ou melhor, descrever toda

[2] Matemático alemão, especializado nos fundamentos da geometria.

a matemática encontrada na natureza. Deixamos a título de sugestão a referência [1], uma vez que a mesma trata de forma didática a Geometria Euclidiana.

2.2 A Geometria na Natureza

Muitas formas observadas na natureza podem estar relacionadas à geometria. Por exemplo, as abelhas construir células hexagonais [3] para manter o seu mel. Outra utilização que a natureza faz da geometria, é das aspirais logarítmicas que possuem a propriedade de manter a forma em qualquer escala, mesmo com o espaço compreendido entre sucessivas voltas, aumentando sempre. O mais intrigante é que esta forma de espiral é muito abundante na natureza, por exemplo, as espirais logarítmicas podem descrever o arranjo de sementes de girassol ou na configuração da couve-flor. Essa curva fascina os matemáticos desde o século XVII quando Jacob Bernoulli se dedicou a um estudo de várias curvas planas.

Quando procuramos identificar a geometria na natureza, uma das primeiras características geométricas que deparamos é a simetria, encontrada com facilidade no mundo animal. Quando, por exemplo, olhamos o dorso de uma borboleta, é possível observar uma simetria bilateral relativamente a um eixo vertical imaginário que, passando pelo tórax do inseto, divide suas asas anteriores e posteriores em duas metades simétricas; o mesmo sucede quando olhamos de cima para o corpo de uma aranha verifica-se que a metade esquerda é como uma imagem espelhada da metade direita. Porém, existem diferentes formas de simetria, seja a radial[4], presente na maçã, a pentagonal, bastante comum entre as plantas e relativamente rara entre os animais, ressalvando-se, exemplos como a conhecida estrela-do-mar.

Muitas mais formas geométricas existem em abundância no mundo a nossa volta, embora nem sempre visíveis a olho nú. Entre os minerais, a geometria está particularmente presente, sobretudo em elementos que tendem a cristalizar, podemos verificar sempre que observamos flocos de neve e gelo. Todos eles exibem um padrão que poderá ser mais ou menos complexo, mas sempre de base hexagonal. E entre os cristais de minério, as formas e figuras geométricas encontram-se profudamente representadas.

---

[3] O favo de mel é uma massa de células hexagonais feitas de cera, e é usado para armazenar as larvas, o pólen e o mel.

[4] É aquela em que um eixo, e não apenas um plano, passa através do objeto, e as partes se repetem em volta desse eixo.

Fonte:Autor

Figura 2.2: Simetria bilateral, onde os pontos A e B são marcas naturais nas asas da borboleta que são simétricas em relação ao dorso.

Por último, mencionaremos apenas outro tipo de estrutura geométrica, invisível, porém, presente sempre que nos encontramos perante qualquer manifestação de vida, tal como a conhecemos: a dupla hélice de Ácido Desoxirribonucleico, mais conhecido por DNA, existente no núcleo de todas as células vivas.

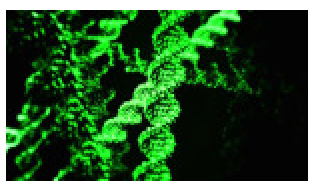


Figura 2.3: Imagem do DNA humana, capturada por microscópio.

2.3 Rugosidade e Irregularidade na Natureza

Ao contemplar a natureza é possível perceber que a maioria dos objetos apresentam uma diversidade estrutural. As formas da natureza são em geral irregulares, retorcidas, asperas e entrelaçadas. Uma paisagem natural surge do agrupamento de detalhes irregulares e casuais às formas geométricas dominantes. Com a simples observação de fenômenos naturais descobre-se estruturas irregulares de extrema beleza, fugindo dos padrões tradicionais da geometria Euclidiana. Dessa maneira, utilizamos a Geometria para dar respostas às necessidades que o homem sentiu de produzir registos gráficos rigorosos.

Encontramos no meio natural vários objetos que aparentam ser lisas como pedras, árvores, folhas de plantas, porém, ao aumentarmos a escala de visualização, percebemos que elas não são. A medida que aumenta a potência de visualização (ampliação da superfície), começamos a ver deformações na superfície que são as rugosidades do objeto observado. O formato que estas rugosidades apresentam define como deve ser a superfície do objeto. O estudo da formação da superfície está relacionado com a teoria de fractais.

Esses objetos, ou melhor, estas obras de arte encontram-se em toda a natureza abrangendo uma enorme gama de escalas. Encontramos a representação de padrões no abacaxi, tronco de uma mangueira, samambaia, ramificações de árvores, sistema arterial, redes fluviais dentre outros. Independentemente de escala, estes padrões são formados pela repetição simples de um processo de ramificação.

Se olhar-mos a natureza em nossa volta com um olhar de Mandelbrot, perceberemos que o tronco de uma árvore não é um cilindro, suas folhas não são retângulos, suas flores não são pontos e nem seus frutos círculos. Então que forma tem? Mais importante que responder essa pergunta é saber calcular seus perímetros, áreas e volumes. As formas que observamos na natureza e as formas geométricas Euclidianas quase nunca são semelhantes. Na maior parte dos casos a comparação entre objetos da geometria Euclidiana e a natureza não passa de uma comparação grosseira, pois a natureza consegue sempre surpreender.

Na contra mão dessa realidade, o mundo tecnológico permaneceu Euclidiano, porém, utilizando cada vez mais características dessas estruturas naturais para potencializá-lo. Nessa captação de informações que entra o fractal, pois é um conceito estritamente matemático, contudo, inúmeras formas encontradas na natureza satisfazem as condições necessárias para que sejam representados a partir de uma linguagem matemática adequada.

Rugosidade é o conjunto de irregularidades, isto é, pequenas saliências e reentrâncias que caracterizam uma superfície.Dessa forma, devemos usar o termo rugosidade ou irregularidade? Depende do ponto de vista e da necessidade, aqui no estudo da geometria fractal vamos adodar o termo rugosidade. Por que rugosidade? De acordo com Mandelbrot, nem todas as superfícies são lisas, alias quando nos referimos a natureza poucas superfícies são lisas, dessa forma, segundo as gramáticas o contrário de liso é rugoso e não irregular.

2.4 A geometria Euclidiana e sua limitação na modelagem da natureza

Principais aspectos da geometria surgiu a partir de três vertentes da atividade humana sendo que parecem ter ocorrido na maioria das culturas: Arte/ padrões, estruturas de construção e navegação/ observar as estrelas. Estas vertentes desenvolvidas mais ou menos independentes em variados estudos e práticas que, eventualmente, foram tecidas chegado a chamada geometria atual.

Arte

Para produzir decorações para a sua tecelagem, cerâmica e outros objetos, os primeiros artistas experimentaram com simetrias e padrões repetitivos. Mais tarde, o estudo de simetrias de padrões levou a pavimentações, a teoria do grupo, cristalografia e nos tempos modernos para códigos de segurança. Os primeiros artistas também exploraram vários métodos de representação de objetos existentes e as coisas vivas. Essas explorações levaram ao estudo de perspectiva e, em seguida, geometria projetiva e geometria descritiva.

Navegação

Para fins astrológicos, teológicos, agrícolas e outros, seres humanos antigos tentaram entender o movimento dos corpos celestes (estrelas, planetas, sol e lua) no céu aparentemente hemisférica. Os primeiros seres humanos usaram as estrelas e planetas como uma forma de orientação para navegar em longas distâncias; e eles usaram esse entendimento para resolver problemas na navegação e em tentativas de entender a forma da Terra. Idéias de trigonometria aparentemente foram inicialmente desenvolvidos pelos babilônios em seus estudos sobre os movimentos dos corpos celestes. Mesmo Euclides escreveu um trabalho astronômico, Phaenomena, em que ele estudou as propriedades de curvas em uma esfera. Navegação e levantamentos em larga escala desenvolvida ao longo dos séculos em todo o mundo e junto com ele a cartografia, a trigonometria, a geometria esférica, a geometria diferencial, seguindo para muitas teorias espaciais modernas da física e da cosmologia.

Estruturas de construções

Como seres humanos construíram abrigos, altares, pontes e outras estruturas, eles descobriram maneiras de fazer círculos de diversos raios, e várias estruturas poligonais / poliédricas. Nesse processo, eles inventaram um sistema de medição e ferramentas de medição.

Aproveitando o conhecimento geométrico dos babilônicos, egípcios, construtores gregos e estudiosos. Euclides (325-265 aC) escreveu seus elementos, que se tornou o livro didático de matemática mais utilizado no mundo para os próximos 2300 anos e os codificou chegando ao que chamamos de geometria euclidiana. Usando elementos como base no período de 300 antes de Cristo a cerca de 1000 depois de Cristo, gregos e matemáticos islâmicos estenderam seus resultados, refinaram seus postulados e desenvolveram o estudo de seções cônicas e álgebra geométrica, o que hoje chamamos de "álgebra". Dentro da geometria euclidiana, não mais tarde desenvolveu a geometria analítica, geometria vetorial (geometria e álgebra linear afim) e geometria algébrica.

Como já vimos no início do captítulo, a essência da geometria que conhecíamos era aquela fundada pelo grego Euclides por volta de 300 a.C., a das linhas, pontos, esferas, cones... Enfim, tudo aquilo que as escolas ensinam. O problema é que essas formas euclidianas são artificiais. Funcionam para traduzir a harmonia da matemática, mas não estão na natureza. De modo geral, muitos padrões da natureza são tão irregulares e fragmentados que não podem ser mensurados com os parâmetros da geometria de Euclides, não é que essas estruturas estejam em um patamar mais elevado, mas em um nível completamente diferente de complexidade. Não existe uma montanha em forma de cone ou cilindro, nuvens triangulares ou circulares, animais cúbicos.

Dessa forma, durante séculos os conceitos da Geometria Euclidiana e de toda filosofia que envolve a matemática, foram os que melhor descreviam o mundo, porém, esses conceitos sempre esbarravam em situações que a geometria clássica não conseguia mensurar. Só com o advento da Geometria de Mandelbrot é que foi possível estruturar objetos que até então estavam à margem da geometria Euclidiana. No capitulo 3, iremos mostrar como essa geometria está estruturada, bem como sua utilização.

Capítulo 3

Geometria Fractal: Um universo pouco conhecido.

Fractais são objetos geométricos incapazes de serem classificados nos moldes da geometria tradicional (geometria euclidiana) devido principalmente, a três características que os destinguem das demais formas, são elas: auto semelhança em diferentes níveis de escala, complexidade infinita e a mais marcante que é a dimensão.

Como fala o próprio (MANDELBROT, 1998, p.175) em seu livro Objetos Fractais:

> É necessário justificar a opção, tomada no texto, de caracterizar os objetos fractais de uma forma intuitiva e laboriosa, evitando sempre definí-los matematicamente de forma compacta, através de figuras ou conjuntos. Se assim procedi, foi por receio de me envolver nos pormenores sem obter contrapartida concreta.

O seu significado ainda é intuitivo. Há mais de 100 anos que os matemáticos se ocupam de muitos conjuntos com tais características, apesar de não terem construído qualquer teoria em torno deles. Não sentiram conveniência de um termo para os definí-los. Além disso, vale a pena salientar que a utilização do termo "fractal"não faz qualquer distinção entre conjuntos matemáticos (a teoria) e os objetos naturais (a realidade); simplesmente houve uma distinção chamando-os de fractais matemáticos e fractais naturais, respectivamente.

3.1 Classificação dos Fractais

A classificação aqui abordada não é apresentada nos trabalhos de Mandelbrot, sendo feita para fins didáticos, seguindo as classificações utilizadas em [5] e [18], facilitando a compreensão das características e propriedades relacionadas a cada grupo. Dessa forma, podemos agrupar os fractais em três grandes grupos de acordo com a **forma de geração** e o **grau de autossimilaridade** observada:

- *Linear* - Fractais definidos por sistemas de funções iteradas.
- *Não- linear* - Fractais definidos por uma relação de recorrência.
- *Objetos Fractais* - Fractais aleatórios mais conhecidos como fractais naturais.

3.1.1 Fractais Lineares

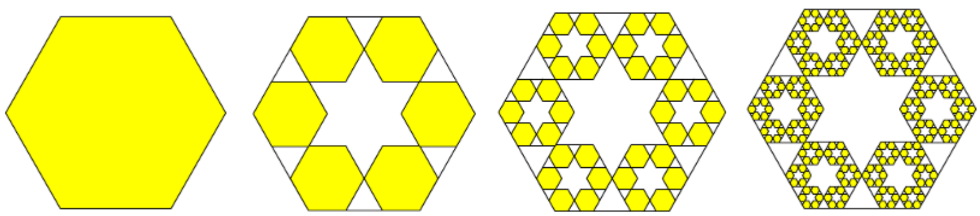
São também conhecidos como, fractais “clássicos”, “geométricos”ou “determinísticos”. Por sua vez, são **exatamente autossimilares**, ou seja, se olharmos para uma parte muito pequena de forma geral de um fractal, parece exatamente com o fractal original, só que menor. Chamamos essa diferença de tamanho de “escala”. Esses fractais começam com uma ”semente”, um conjunto de linhas que formam uma estrutura básica. Em seguida, são feitas cópias da semente e posteriormente serão usadas para substituir as linhas encontradas na semente original. Continuando este processo em níveis maiores, substituindo a forma estrutural inicial pelas sementes, assim por diante e assim por diante para sempre. Segundo (FUZZO, 2009 p.3),[18]: São subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, os que possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicadas a cada iteração. Dessa forma, o fractal é *idêntico em diferentes escalas.*

Alguns fractais que fazem parte desse grupo, são bastante conhecidos, são eles: Conjunto de Cantor, a Curva de Peano, a Curva e a Ilha de Koch, o Tapete e o Triângulo de Sierpinski, a Curva e a Ilha de Koch, a Curva do Dragão de Harter-Heighway, a Esponja de Menger e a Curva de Hilbert, muitos desses fractais serão melhores apresentados na seção 3.4. Para fins didáticos e melhor compreensão dos fractais lineares segue a seguinte classificação segundo (BARBOSA, 2002) [5] .

- **Fractais pela Fronteira**: Seu processo de iteração é definido a partir da substituição de uma determinada parte pelo seu gerador, aumentando assim seu comprimento ou área. Um bom exemplo é a curva de Koch (figura 3.11).

- **Fractais por Remoção**: Objetos em que são removidos as partes de tal forma que continuem a sua estrutura inicial repetindo o processo de iteração infinitas vezes. Exemplo fractal linha (figura 3.13).

- **Fractais tipo Dürer**: Seu processo de iteração é definido a partir de figuras planas regulares.



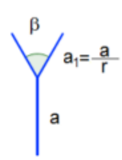
Fonte: Autor.

Figura 3.1: Fractal Hexagonal tipo Dürer com 3 interações, obedecendo a lei de iteração (cada ângulo do novo hexágono regular deve coincidir com o ângulo do hexágono regular inicial) utilizando Fractal too -Illuminations.

O Illuminations em português iluminação é um projeto do conselho nacional de professores de matemática dos Estados Unidos, que contribui para o ensino e aprendizagem da matemática. Ver site www.illuminations.nctm.org.

- **Fractais tipo árvore**: Como o nome sugere, os fractais gerados por funções interativas tipo ramificações se assemelham a uma árvore.

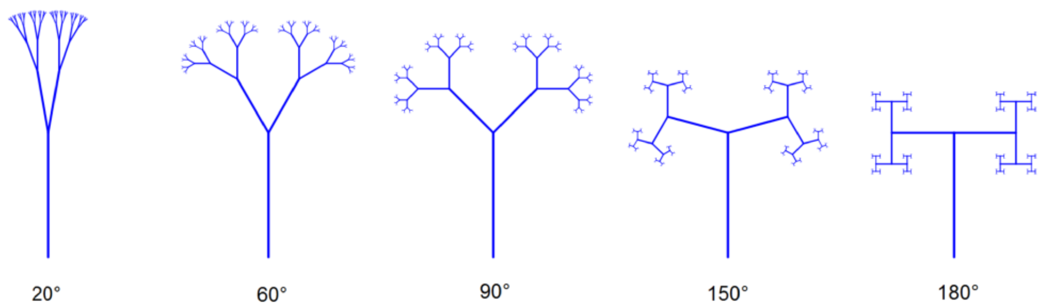
  Na figura 3.1.1, apresentamos uma estrutura de iteração para a construção de um fractal tipo árvore com ângulo de bifurcação β e fator de redução r.



Fonte: [11]

Figura 3.2: Estrutura do fractal tipo árvore.

Como muitos desses fractais pode ser facilmente construídos, eles foram os principais tipos de fractais gerados antes dos computadores.



Fonte: [11]

Figura 3.3: Exemplos de fractais tipo árvore, com 7 interações, fator de redução $r = 2$ e vários ângulos de bifurcação.

3.1.2 Não-lineares

São estruturas geradas a partir de equações com auxílio de computadores não produzindo segmentos de reta. Também, são chamadas de **fractais de fuga**. Esses fractais exibem uma estrutura de auto-semelhança, mas **não são exatamente auto-similar**. O aspecto geral de um fractal não linear estreitamente se parece com algumas das suas partes mais pequenas, mas sempre com alguma variação. Em determinadas situações, as partes menores podem parecer bastante semelhantes ao fractal como um todo e ajudar a definir a forma geral do fractal, em outros casos diferentes regiões parecem cópias escala como torcidas ou distorcidas do original, enquanto ainda outras regiões têm formas que não têm qualquer semelhança com o original. Como exemplos desse grupo de fractais podemos citar os conjuntos de Mandelbrot e Julia e o fractal de Lyapunov. Sendo o conjunto de Mandelbrot, o fractal mais popular e um dos objetos da matemática contemporânea mais conhecido.

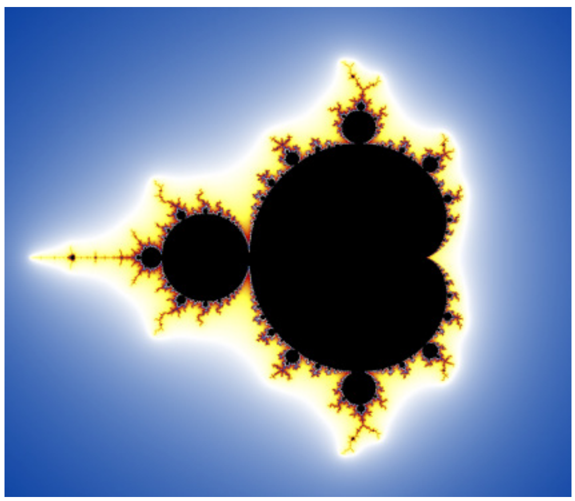
Esses fractais são utilizados em modelagem de sistemas dinâmicos com o objetivo de prever o seu comportamento para determinadas condições. Um exemplo simples e de fácil compreensão de um sistema dinâmico pode ser: um pêndulo cujo atrator[1] é a posição de repouso na vertical. Todo o conjunto de movimentos que oscilam até o repouso é definido como o conjunto atrator do pêndulo, que dependerá da condição inicial: a altura que soltamos o pêndulo[11].

Apesar de não estarmos interessados nesse grupo de fractais, primeiro por conto de sua complexidade de construção e compreensão e segundo por não utilizar softwa-

[1] O valor (ou conjunto de valores) para o qual ele converge (ou região limitada de convergência)

res educacionais, nesse sentido, o nosso objeivo é abordar a geometria fractal para educação básica, no entanto, vamos mostrar de forma concisa como o fractal de Mandelbrot é construído.

O que há de tão especial no fractal de Mandelbrot? Embora o conjunto de Mandelbrot seja semelhante a si próprio em diferentes escalas, os detalhes em escala pequena não são idênticos ao todo. Além disso, o conjunto de Mandelbrot é infinitamente complexo, ainda assim o seu processo de geração é baseado em uma equação simples que envolve números complexos, apresenta uma beleza única, até mesmo partes da imagem que parecem bastante homogêneas mostram um contorno farpado que consiste em muitas cópias minúsculas do conjunto de Mandelbrot. E como é criado o conjunto de Mandelbrot?



Fonte: Autor

Figura 3.4: Imagem do Fractal de Mandelbrot utilizando o softwere Qfractalnow[2]

Para criar o conjunto de Mandelbrot (figura 3.4), temos de escolher um ponto no conjunto dos complexos. O número complexo correspondente a este ponto tem a forma: $c = a + bi$ e a relação de recorrência $Z_n : C \to C$ definida por $z_0 = 0$ e $z_{n+1} = {Z_n}^2 + c$, com $n \in N$, $c \in C$ e $z = x + yi$. Isso significa que o conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os números complexos que satisfazem as condições descritas anteriormente.

$z_0 = 0$
$z_1 = {z_0}^2 + c = c$

$z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c$
$z_3 = z_2^2 + c = (c^2 + c)^2 + c$
$z_4 = z_3^2 + c = ((c^2 + c) + c)^2 + c$
...

Mandelbrot determina que se o argumento $\wp$ [3] do complexo Z_n for maior que 2, a função vai virar infinita (escapa) [6], caso contrário o ponto c está no conjunto de Mandelbrot.

Tendo conhecimento que o conjunto de Mandelbrot é um conjunto de números complexos, agora analisaremos como gerar uma imagem de Mandelbrot. Inicialmente temos que encontrar os números que fazem parte do conjunto a partir de um teste que determinará se um dado número está dentro ou fora do conjunto. O teste é aplicado a números complexos z_n calculados como $z_{n+1} = {Z_n}^2 + c$. A constante c não muda durante o processo de teste e é o ponto do plano complexo que será colocado quando o teste for completado. Essa colocação será feita em uma cor que depende do resultado do teste. Para algum valor n_{Max} (Número máximo de recursões executadas para cada c), digamos 30, começamos calculando z_1, z_2, ... até que tenhamos calculado z_n para $n = n_{Max}$ ou que tenhamos encontrado um ponto z_n $(n \leq n_{Max})$ cujo $\wp$ seja maior que 2. No primeiro caso, tendo calculado n_{Max} elementos da sequência, nenhum dos quais está mais longe do que uma distância 2, nesse caso, dizemos que o ponto c pertence ao conjunto de Mandelbrot e convencionalmente colocamos em preto. No segundo, como $\wp > 2$, colocamos o ponto c em uma cor que depende do valor de n.

Fonte: Autor.

Figura 3.5: Conjunto de Mandelbrot com n_{Max}: $n = 6$, $n = 10$ e $n = 30$, respectivamente. Utilizando o softwere QFractalNow.

Antes de terminarmos essa seção, é preciso resolver alguns problemas os quais têm a ver com o infinito. Como Mandelbrot testou todos os pontos? Primeiro devemos

[3]O argumento de um número complexo é determinado por $\wp = \sqrt{a^2 + b^2}$

ver que no plano complexo, há um número infinito de pontos. Obviamente não pode ser testado todos os pontos. Então, ele escolheu um subconjunto de pontos, sempre definido pelos cantos de sua área de visão e só considerava os pontos dentro dessa caixa. Mesmo dentro da caixa, há uma infinidade de pontos possíveis para teste. A partir desse momento, a IBM [4], foi fundamental para limitar esse grupo de pontos testes, pois a resolução do monitor do computador foi usada para resolver o problema. Como a imagem é formada por pequenos pontos chamados pixels, então Mandelbrot sabiamente, escolheu os pontos do plano internos ao círculo de raio 2 que correspondem às localizações dos pixels e testa apenas esses pontos.

3.1.3 Objetos Fractais

De acordo com Mandelbrot [8], o termo objeto fractal substitui o termo fractal sempre que se trate de um objeto natural, uma vez que seja razoável e útil representá-lo matematicamente por intermédio de um fractal.

Existem muitos objetos naturais que são considerados fractais naturais devido ao seu comportamento ou estrutura, mas estes são tipo de fractais finitos o que os distingue dos fractais matemáticos criado por interações e recursões. Citamos como exemplo, as nuvens e árvores, pois possuem autossimilaridade estatística sendo a forma menos evidente de autossimilaridade. A similaridade desse grupo de fractal está nas medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas tendo como consequência a preservação da dimensão fractal. Porém o estudo dos objetos fractais é utilizado em larga escala para modelagem em diversas áreas como, medicina, biologia, mercado financeiro, geologia, entre outras.

Há algumas coisas a notar sobre a estrutura fractal de uma árvore. Em primeiro lugar, uma árvore é aproximadamente auto-similar, ou seja, um pequeno pedaço da árvore parece um pouco como uma árvore inteira. Em segundo lugar, enquanto a árvore é um objeto grande e complexo que é formado pela repetição de um processo simples e repetitivo. Este é um princípio básico que vamos encontrar em todos os fractais, seja na natureza, em papel, ou em um computador.

O processo essencial básico pelo qual a árvore cresce é o seguinte:

Um pequeno broto sai do chão e então se divide em ramos. Cada um desses ramos se divide novamente em novos ramos e cada um desses ramos se divide novamente em

[4]International Business Machines (Máquina de Negócio Internacional) - Empresa Americana voltada para a área de informática onde Benoit Mandelbrot trabalhou e desenvolvel pesquisas durante 35 anos

Fonte: Autor

Figura 3.6: Árvore em Gararu-SE

novos ramos. Em cada ponto deste processo é como se outras novas pequenas árvores emergissem e os novos ramos podem ser pensado como os troncos da geração seguinte de plantas. Assim, uma grande árvore pode ser vista como uma coleção de muitas árvores de vários tamanhos. Assim, a repetição de ramificação que forma a árvore também gera autossimilaridade da árvore. Na botânica, os pontos de ramificação são chamados de "nós". Em termos matemáticos, referimo-nos aos pontos de ramificação como "bifurcações"e os entrenós como "ramos". Exemplo de bifurcação (figura 3.7).

Um outro exemplo de autossimilaridade finita é a *Davalia Fejeensis* popularmente conhecida como renda-portuguesa (figura 3.8) que em algum ponto a repetição fractal se encerra em padrões naturais e elas deixam de ser fractais.

Fonte: Autor

Figura 3.7: Bifurcações em tronco de árvore gerando dois novos ramos.

Fonte: Autor

Figura 3.8: Renda-portuguesa

Fonte: Autor

Figura 3.9: Padrão de autossimilaridade finita encontrado na planta renda-portuguesa em 5 níveis diferentes.

3.2 Complexidade Infinita

Dentre as propriedades dos fractais, destaque a complexidade infinita, ao qual retrata toda a beleza das estruturas do fractal. Dentro de tamanha beleza a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores, isto é, o detalhamento do fractal não diminui mesmo quando observamos uma parte arbitrariamente pequena.

É importante destacar que se torna impossível representar graficamente um fractal matemático, pois a sua representação gráfica está limitada pela resolução do computador ou pela limitação física da escrita. Sendo assim o que tentamos fazer é conceber mentalmente a ideia de um fractal e sua complexidade.

A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como fractal decorre da mesma figura encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado. Vale esclarecer que no caso da construção iterativa de um fractal matematicamente definido, dispõe-se de um número infinito de procedimentos a serem executados gerando-se assim uma estrutura infinitamente complexa.

3.3 A homotetia interna: semelhança em diferentes níveis de escala.

Em termos matemáticos, os fractais são figuras geométricas que normalmente exibem padrões auto-similares. O termo "autossimilaridade" pode ser mais facilmente compreendido pelo pensamento de uma câmera que amplia uma imagem. Normalmente, quando você aumenta o zoom em uma foto você vê pontos mais delicados, detalhes diferentes e novas estruturas. Não é assim com fractais. Quando você aumenta o zoom em um verdadeiro fractal não aparece nenhum detalhe novo [4] como pode ser visto na (figura 3.14). Nada muda.

A literatura fractal e em especial nesse trabalho as referências [13] e [4] nos apresenta os seguintes tipos de autosimilaridade:

Autossimilaridade exata: É a forma em que a autossimilaridade é mais marcante, evidente, o fractal é idêntico em diferentes escalas. Fractais gerados por sistemas de funções iterativas (fractais lineares) geralmente apresentam autossimilaridade exata.

Autossimilaridade parcial: É uma forma mais solta de autossimilaridade. O fractal apresenta ser aproximadamente, mas não exatamente idêntico em escalas diferentes. Fractais gerados por computadores (fractais não-lineares) são geralmente quase auto-similares.

Autossimilaridade estatística: É a forma menos evidente de autossimilaridade. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. Fractais aleatórios (fractais naturais) são exemplos de fractais que possuem autossimilaridade estatística não sendo exatamente nem quase auto-similares.

No entanto, é necessário compreender que nem todos os objetos auto-similares são fractais. Uma linha Euclidiana, por exemplo, é exatamente autossimilar, porém não apresenta argumento fractal (complexidade infinita, regra de iteração e determinação da dimensão de Hausdorff) em sua construção.

Fonte: Autor

Figura 3.10: Exemplo de autossimilaridade estatística em objeto fractal (planta renda-portuguesa).

3.4 Dimensão fractal a partir da dimensão de Hausdorff

Das características que definem um fractal, a mais importante é a Dimensão Fractal. Ao contrário do que é observado na Geometria Euclidiana onde o valor da dimensão representa a dimensionalidade do espaço em que dado objeto está inserido a dimensão fractal (ou Dimensão dos Fractais) representa o nível de rugosidade de um fractal.

Segundo Mandelbrot (1998, pag.172), Dimensão Fractal:

> Significado genérico: número que quantifica o grau de irregularidade e de fragmentação de um conjunto geométrico ou de um objeto natural e que se reduz, no caso dos objetos da geometria normal de Euclides, às suas dimensões usuais. Significado específico: foi frequentemente aplicada à dimensão de Hausdorff e Besicovitch.

No mundo contemporâneo, a geometria fractal, e, em especial a dimensão fractal vem sendo utilizada em diversas áreas do conhecimento, como o estudo de sistemas caóticos, padrões de formações de nuvens, caracterização de objetos, análise de texturas e medição de comprimento de curvas. Devido às diversas aplicações da Dimensão Fractal vários são os métodos encontrados na literatura, porém iremos apresenta um estudo do método de determinação da dimensão de um fractal apresentado por Mandelbrot que é o método comparativo dos principais métodos de estimativa da Dimensão Fractal.

> Em certas obras matemáticas, diversas figuras conhecidas que eu incorporo entre os fractais são chamadas "figuras de dimensão fracionária". Essa expressão é, porém, desagradável, pois não é costume chamar por exemplo, a π uma fração. Existe entre os fractais diversos objetos irregulares ou quebrados para os quais a dimensão é 1 ou 2, mas que de forma nenhuma se assemelha a retas ou planos. O termo fractal elimina todas as dificuldades associadas ao termo fracionário. (MANDELBROT, 1996 P.14).

Determinar a dimensão fractal de objetos como, plantas, troncos, relâmpagos, etc, está relacionada com a questão da métrica usada na determinação do tamanho destes objetos. De forma axiomatica é possível entender as dimensões da geometria euclidiana e dos objetos que a compõem, baseando-se nas construções fundamentais de ponto, reta, plano e espaço desta geometria sem ter a preocupação exagerada de como é possível medir a dimensão destes elementos. Porém, no caso de objetos fractais isso não é acessível porque não se encontra uma construção elementar única assim como as da geometria euclidiana, com uma dimensão compatível com o objeto fractal estudado. Isto acontece, pois no caso de fractais o tamanho do objeto depende do tamanho da régua utilizada na medida ou da dimensão da unidade de medida utilizada. Portanto, na Geometria Fractal, a ideia inicial é: como medir a dimensão de determinadas figuras, a partir das ideias intuitivas fornecida pela geometria euclidiana?

Da Geometria Euclidiana (convencional) temos que, um ponto tem dimensão zero, uma reta tem dimensão um , um plano tem dimensão dois, e um espaço tem dimensão três. Se pegarmos uma reta r e dividirmos em m partes iguais, cada parte representará $\frac{1}{m}$, dessa forma a reta dividida em m partes irá se transformar em $n's$ retas, logo n partes $= m^1$ novas retas. Por outro lado, se pegarmos um quadrado de lado l

e dividirmos os lados desse quadrado em m partes iguais, iremos obter m^2 novos quadrados por fim, ao dividir as arestas de um cubo em m partes iguais, teremos m^3 novos cubos de lados medindo $\frac{l}{m}$. Generalizando, ao dividir cada aresta de um hipercubo em m partes iguais, este ficará dividido em m^d partes iguais.

Exemplos:

Um segmento de reta dividido em 3 segmentos, temos:

$n = m^D$

$n = 3^1$

$n = 3$

Um quadrado onde cada lado é dividido por 5, temos:

$n = m^2$

$n = 5^2$

$n = 25$

Em geral, o número n de novas peças geradas é dado por: $n = m^D$, onde m é o fator de aumento ou redução e D é a dimensão. Barbosa [5] define dimensão fractal, demonstrando a equação para o seu cálculo a partir da comparação com objetos de 1, 2 e 3 dimensões, repartindo-os em objetos autossimilares como foi feito acima, determinando assim a fórmula para o cálculo da Dimensão Fractal. Com isso, temos ferramentas para calcular a dimensão D. Quando fazemos isso, achamos que:

$$D = \frac{\log n}{\log m} \tag{3.1}$$

...

E essa dimensão D é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

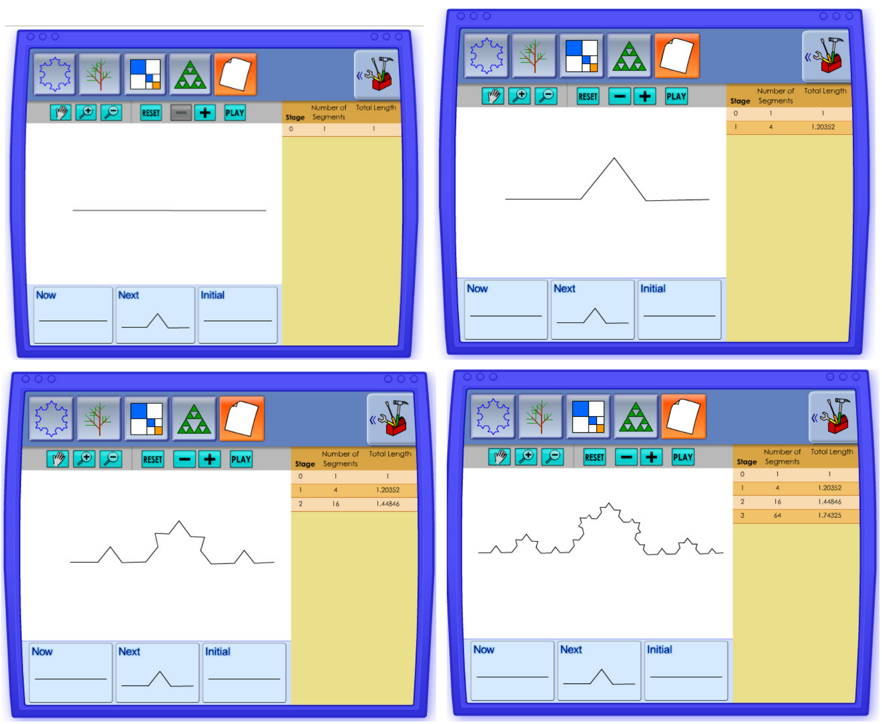
A dimensão fractal é um conceito relativamente fácil quando aplicamos aos fractais geométricos perfeitos como o Triângulo de Sierpinski, floco de neve e esponja de Menger por exemplo. Porém quando se trata em estimar a dimensão fractal de um objeto real como tronco de uma árvore ou até mesmo de uma planta o procedimento não é tão simples assim.

Conforme MANDELBROT (1991):

> Um número útil para caracterizar fractais é a dimensão fractal D. Esse número quantifica o grau de irregularidade ou de fragmentação de um conjunto geométrico de uma figura ou de um objeto natural e assume

no caso dos objetos da geometria clássica de Euclides, as suas dimensões usuais inteiras.

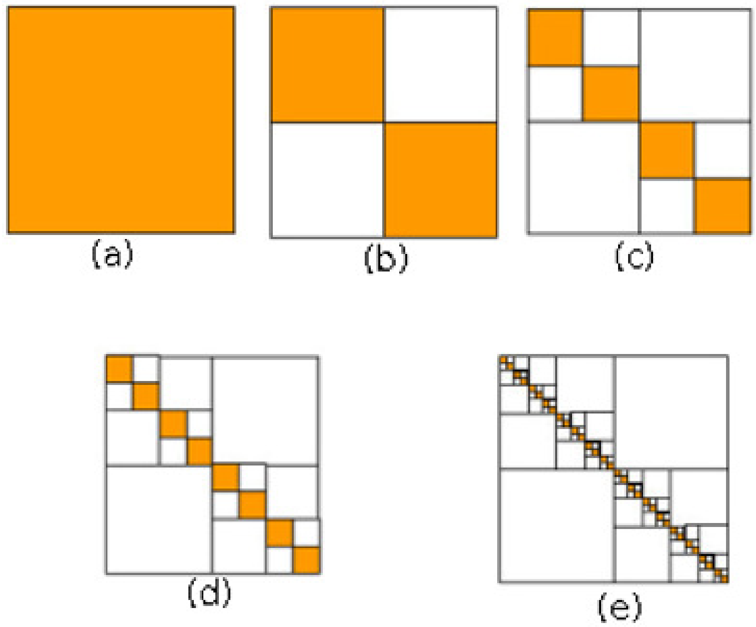
Mandelbrot descobriu que existe uma dimensão que não é inteira localizada entre as dimensões euclidianas, e essa dimensão inclui um conjunto infinito de dimensões fracionais que se encontram entre o zero e primeira dimensão ; a primeira e segunda dimensão e a segunda e terceira dimensão . Ele chamou esse conjunto de "dimensão fractal", mostrando matematicamente e graficamente como a natureza utiliza as dimensões fractais e como construir as formas complexas e irregulares do mundo real. Essa ideia fica clara quando observamos a curva de Koch e percebemos que ocupa "mais espaço"que uma linha no plano, mas com toda a certeza ela não é uma superfície, isto é, uma figura plana cuja área pode ser medida em metros quadrados. Dessa forma, sua dimensão assume algum valor entre um e dois e sendo chamada de dimensão fractal.



Fonte: Autor.

Figura 3.11: Curva de Koch com três interações utilizando Fractal too-Illuminations.[5]

Para melhor exemplificar a dimensão fractal iremos determinar a dimensão de



Fonte:Autor

Figura 3.12: Representação geométrica das interações na construção do fractal.

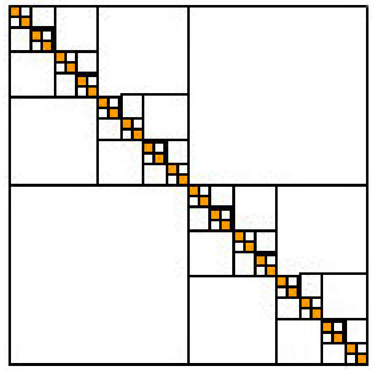
alguns fractais matemáticos **linear** e **não-linear** .

Exemplo 3.4.1. *Ao olhar a curva de Koch (figura 3.11), fica claro que uma linha na curva se divide em quatro partes menores. Cada uma dessas peças são* $\frac{1}{3}$ *do comprimento do segmento original. Portanto,* $n = 4$ *e* $m = 3$ *aplicando essas informações na função 3.1. O que nos dá uma dimensão fractal de* $1,261...$ *Observando que este não é um número inteiro. Assim, é conveniente dizer, a respeito dessa curva plana muito irregular que sua dimensão fractal está entre 1 e 2 (MANDELBROT, 1996 P.14), a curva de koch é consequentemente, um fractal.*

Saindo dos exemplos clássicos de cálculo de dimensão fractal vamos determinar a dimensão de um fractal criado pelo autor utilizando o software online e livre (Fractal Too) [14]. Antes de determinar sua dimensão vamos mostrar suas primeiras iterações de construção de forma sistemática, possibilitando ao leitor compreender na prática todo o processo. Temos como referência para o processo de construção a (figura 3.12).

Passos da construção

Antes de iniciarmos o passo a passo, vamos referênciar os quadrados que aparecem na figura3.12, como (a), (b), (c), (d) e (e). Ou seja, onde tiver (a), deve-se entender que estamos nos referindo ao quadrado (a) da referida figura e assim sucessivamente.



Fonte:Autor

Figura 3.13: Fractal linha com 5 iterações.

1º Construir o quadrado (a) de lado medindo l. Esse quadrado será o início do fractal (base), tendo perímetro $4l$ e área $A = l^2$;

2º O quadrado (b) é construido dividindo os lados de (a) ao meio, logo termos 4 quadrados de lado medindo $\frac{l}{2}$. Nesse momento temos o padrão de iteração que nesse caso é dividir o quadrado em quatro novos quadrados e excluir sempre o do canto superior direito e o inferior esquerdo, sendo assim a área de (b) é $\frac{l^2}{2}$

3º (c) é determinado pela segunda iteração, toma o (b), divide cada quadrado de (b) em quatro partes iguais, exclui o superior direito e o inferior esquerdo, ficando com 4 quadrados de lado medindo $\frac{l}{4}$ e área total $\frac{l^2}{4}$.

4º Fazendo esse procedimento mais três vezes com os quadrados que ficam, caracterizamos o fractal com cinco iteraçõs, representado na (figura 3.13), tendo o lado de cada "quadradinho"medindo $\frac{l}{32}$ e área total $\frac{l^2}{32}$.

Antes de determinar sua dimensão, podemos ainda citar algumas características:

- Auto-semelhança: a cada nova iteração podemos visualizar miniaturas do nível anterior, sucessivamente;

- Estrutura fina (complexidade infinita): a curva pode ser ampliada não importando o fator de ampliação sem alterar os detalhes que ela possui;

- Fácil construção: o processo de construção da curva é simples, sendo que o mesmo procedimento é repetido infinitamente.

Além dessas características, existem questionamentos que podem ser levantados. Quanto mede o perímetro do fractal linha? E a sua área? São perguntas pertinentes, principalmente aos fractais que fazem parte do grupo dos lineares. Propositalmente, o fractal linha faz parte desse grupo. Então vamos a primeira pergunta. Quanto mede o perímetro do fractal linha? Para responder a essa pergunta vamos utilizar a tabela abaixo.

Iteração (n)	0	1	2	3	4	...	n
Nº de segmentos	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	$32 = 2^5$	$64 = 2^6$	...	2^{n+2}
Comprimento de cada segmento	$\frac{l}{2^0}$	$\frac{l}{2^1}$	$\frac{l}{2^2}$	$\frac{l}{2^3}$	$\frac{l}{2^4}$	...	$\frac{l}{2^n}$
Perímetro da estrutura $2p$ = nº de segmentos x comprimento do segmento	$4l$	$4l$	$4l$	$4l$	$4l$	...	$4l$

Fonte: Autor

Tabela 3.1: Perímetro do fractal linha a cada iteração.

Iteração	0	1	2	3	4	...	n
Nº de quadrados retirados	0	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	...	2^n
Medida do lado do quadrado retirado	0	$\frac{l}{2^1}$	$\frac{l}{2^2}$	$\frac{l}{2^3}$	$\frac{l}{2^4}$	...	$\frac{l}{2^n}$
Área de cada quadrado retirado	0	$\frac{l^2}{2^2}$	$\frac{l^2}{2^4}$	$\frac{l^2}{2^6}$	$\frac{l^2}{2^8}$	...	$\frac{l^2}{2^{n^2}}$
Área total retira da S_n	0	$\frac{l^2}{2}$	$\frac{l^2}{2^2}$	$\frac{l^2}{2^3}$	$\frac{l^2}{2^4}$	...	$\frac{l^2}{2^n}$

Fonte: Autor

Tabela 3.2: Área retirada a cada iteração

Vamos agora verificar para quais valores a área e o perímetro do fractal linha tendem quando n vai para o infinito.

Podemos verificar na tabela 3.1 o perímetro $2P$ é dado por

$$2P_n = 4l \tag{3.2}$$

... onde n é a quantidade de iterações feitas. Dessa forma,

$$\lim_{n\to+\infty} 2P_n = \lim_{n\to+\infty} 4l = 4l. \tag{3.3}$$

...

Segunda pergunta. E a sua área? Para tornar o procedimento mais didático, utilizaremos o mesmo sistema ver (tabela 3.2), onde a cada iteração será calculada a área da região retirada.

A partir da tabela 3.2, temos,

$$S_n = 0 + \frac{l^2}{2^1} + \frac{l^2}{2^2} + \frac{l^2}{2^3} + \frac{l^2}{2^4} + \cdots + \frac{l^2}{2^n} \tag{3.4}$$

... sendo assim, a área retirada será a soma dos termos de uma P.G. de razão $q = \dfrac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = \dfrac{l^2}{2}$.

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{3.5}$$

$$S_n = \frac{\frac{l^2}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{l^2}{2}.2 = l^2 \tag{3.6}$$

Subtraindo do quadrado (a) inicial, obtemos

$$\text{Área}_{(fractal)} = A - S_n = l^2 - l^2 = 0 \tag{3.7}$$

Dessa forma, o fractal linha tem perímetro constante $4l$ e $\text{Área}_{(fractal)} = 0$ independentemente do número de iterações. Voltando a motivação inicial. Quanto vale a dimensão fractal do fractal linha?

Cada quadrado de um nível é repartido para o nível seguinte em 2 quadrados (desde que o superior direito e inferior esquerdo sejam removidos) então $n = 2$; e cada um pode ser ampliado para se igualar ao anterior quadruplicando-o. Logo, o fator de aumento é $m = 2$.

Dessa forma

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

$$D = \frac{\log 2}{\log 2} = 1 \tag{3.8}$$

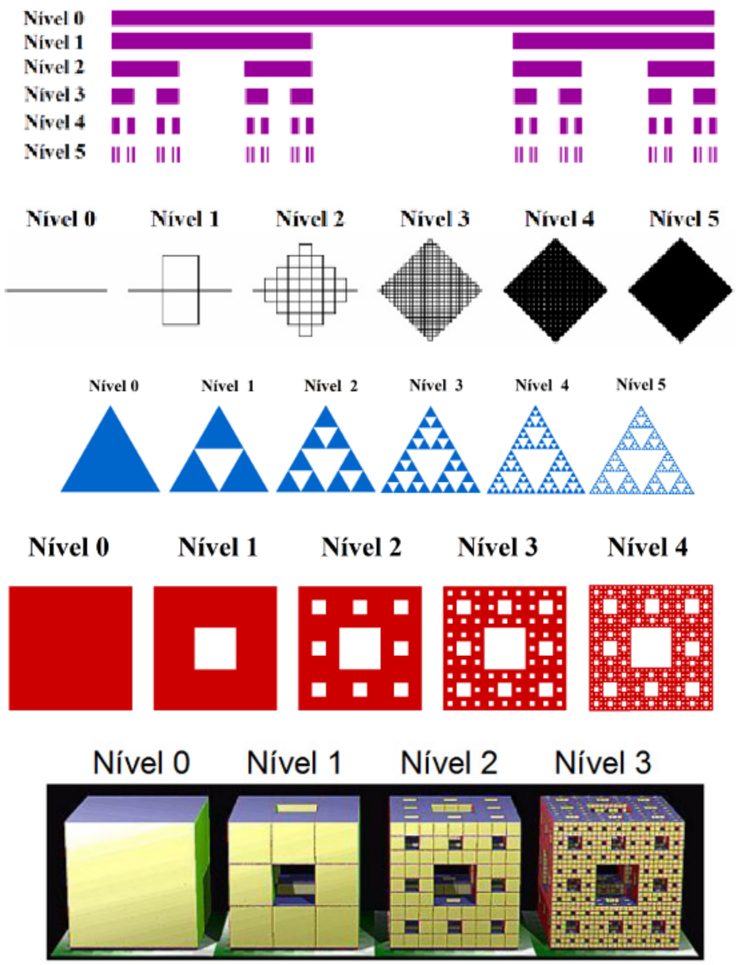
Diremos então que a dimensão do fractal linha é 1.

Vamos através da tabela 3.3 mostrar a dimensão fractal de alguns fractais lineares utilizando o médolo de Hausdorff, bem como suas representações geométricas nas figuras 3.14, 3.15 e 3.16.

Fractal	Peças geradas (n)	Fator (m)	dimensão fractal (D) $D = \frac{\log n}{\log m}$
Conjunto de Cantor	2	3	$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,631...$
Curva de Peano	9	3	$D = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$
Triângulo de Sierpinski	3	2	$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585...$
Tapete de Sierpinski	8	3	$D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,893...$
Fractal em X	5	3	$D = \frac{5}{3} = 1,46...$
Esponja de Menger	20	3	$D = \frac{\log 20}{3} = 2,726...$
Curva de Minkowski	8	4	$D = \log 8 \log 4 = 1,5$

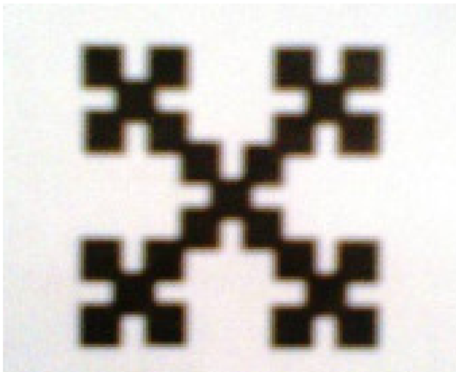
Fonte: Autor

Tabela 3.3: Dimensão de alguns fractais lineares.



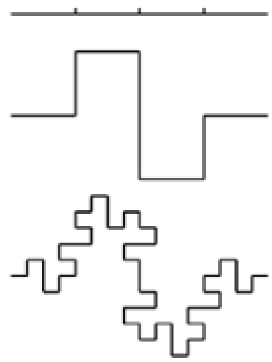
Fonte:[11].

Figura 3.14: Conjunto de Cantor, curva de Peano, triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e esponja de Menger respectivamente de cima para baixo.



Fonte: [5]

Figura 3.15: Fractal tipo X com 3 iterações.



Fonte: [12]

Figura 3.16: Curva de Minkowski.

No entanto, podemos dizer que a dimensão fractal determinada pelo algorítmo de Hausdorff é perfeitamente acessível para os fractais matemáticos no caso os verdadeiros fractais, porém, algumas formas encontradas na natureza apresentam algumas características fractais e se aproximam do conceito em alguns aspectos (apresentam auto-semelhança em vários níveis de escala e são altamente complexas sendo que essas características não tendem ao infinito), tornando questionável relacionar a eles uma Dimensão Fractal. Então o que fazer?

Pode-se adaptar a técnica de estimativa da dimensão fractal utilizando o algorítmo de Hausdorff para trabalhar com as limitações físicas de escala e autossimilaridade dos objetos e dessa forma tornando a técnica aplicável para objetos fractais.

3.4.1 Fractais naturais e Box-counting

Vários são os métodos de estimativa da dimensão fractal de objetos ou imagens existentes na literatura atual. No entanto, nem todos os métodos podem ser aplicados a qualquer tipo de estrutura, no entanto, a grande maioria se baseia na Dimensão de Hausdorff. O método que vamos adotar é o **Box-Counting** ou popularmente conhecido com contagem de caixas. Como o próprio nome sugere, o processo consiste em contar caixas (quadrados) que envolvem o objeto fractal.

A determinação da dimensão por meio da contagem de caixas pode ser compeendida da seguinte maneira:

> [...] divide-se a área do conjunto analisado em um certo número de caixas iguais. Conta-se o número de caixas em que existe pelo menos um ponto do conjunto. Repete-se o procedimento para vários tamanhos de caixas. Os dados (tamanho de caixas versus número de células ocupadas) são lançados num gráfico logarítmico (neste gráfico a lei de potência é convertida em função linear sendo possível medir o expoente da função, que corresponde a inclinação da reta resultante após uma regressão linear). A dimensão fractal, neste caso, equivale à inclinação do gráfico (SOBREIRA, 2003, p. 65-66).

Antes de vermos como o processo é feito, precisamos compreender pelo menos na teoria em que consiste esse método de regressão linear uma vez que não estamos interessados em seu processo, mas em seus resultados e dessa forma, optamos por fazer a regressão linear utilizando o **GeoGebra**.

A **regressão linear** consiste em realizar uma análise estatística com objetivo de identificar uma relação entre as variáveis (dependente (X) e independente (Y)) envolvidas. Em outras palavras consiste na obtenção de uma equação que tenta explicar a variação das variáveis envolvidas. Na tentativa de estabelecer a equação pode-se fazer um gráfico em um sistema de coordenadas retangulares chamado de **diagrama de dispersão**, ficando os pontos correspondentes aos pares de (x, y) para verificar como se comportam os valores da variável dependente em função da variação da variável independente e a partir desses valores é traçada uma reta que melhor represente a **verdadeira** relação entre essas variáveis.

A função escolhida será aquela que for sugerida pelo conjunto de pontos dispostos no diagrama. A reta ajustada é representada por $y = \alpha x + \beta$, onde α e β são os parâmetros do modelo: β é o ponto donde a reta ajustada corta o eixo da variável y, e α é a tangente do ângulo que a reta forma com uma paralela ao eixo da variável X [6].

O que vai nos interesser nesse processo é exatamente o valor de α que é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta. De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = \alpha x_0 + \beta$ e $y_1 = \alpha x_1 + \beta$, então [2]:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(\alpha x_1 + \beta) - (\alpha x_0 + \beta)}{x_1 - x_0} = \frac{\alpha(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \alpha. \tag{3.9}$$

[6]Para maiores informações a respeito das referidas abordagens no que diz respeito a Geometria Analítica, sugerimos a referência [2].

Para ver como o método contagem de caixa funciona na prática, vamos tomar como exemplo, (figura 3.4.1) e determinar a sua dimensão fractal. Se a planta fosse um fractal matemático como triângulo de Sierpinski, poderíamos identificar cópias reduzidas exatas ao longo de sua estrutura e assim sua dimensão seria determinada pela equação 3.1. No entanto, a planta é um fractal natural e suas folhas são cópias estatisticamente semelhantes (figura 3.9). Portanto, **na média**, cada redução da folha da renda-portuguesa são muito parecidas com a folha toda. Nesse caso, vamos usar o método de "contagem de caixas", ou melhor contagem de quadradinhos.

Fonte: Autor

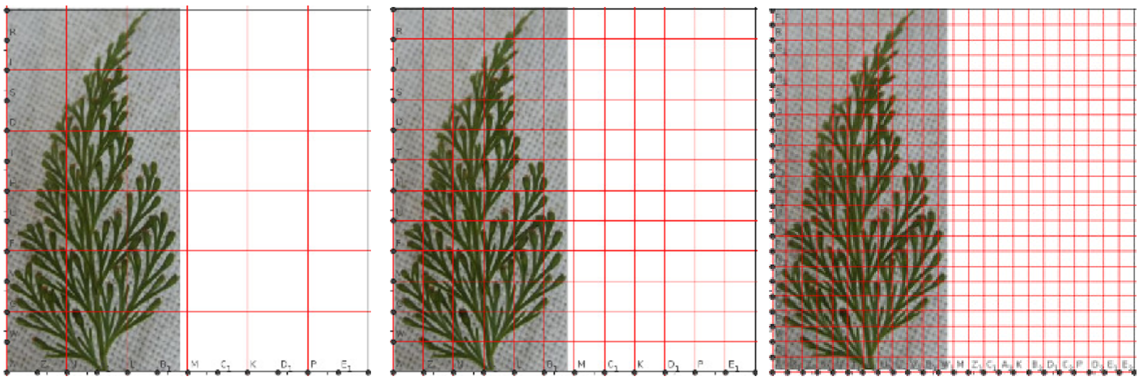
Figura 3.17: Parte da folha da planta renda-portuguesa.

Partimos da ideia inicial do cálculo da dimensão dos fractais matemáticos:

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

...

Para contar os quadrados, inserimos o objeto que queremos estimar a sua dimensão (no caso a imagem da folha da planta) em um quadrículo formado por quadrados de lados iguais a s. Escolhemos posteriormente um novo tamanho s para os lados dos novos "quadradinhos"e contamos o número n de quadradinhos necessários para cobrir todo o objeto (figura 3.4.1).



$s_1 = 1$ e $n_1 = 16$ $\quad$ $s_2 = \frac{1}{2}$ e $n_2 = 50$ $\quad$ $s_3 = \frac{1}{4}$ e $n_3 = 167$

Figura 3.18: Reticulo quadricular construída com auxílio do software Geobebra.

Depois vamos diminuindo o tamanho dos quadrados (s_1, s_2, s_3, ...) e contando os respectivos números de quadradinhos utilizados para cobrir o objeto a cada nível (n_1, n_2, n_3, ...). Afim de utilizar a (equação 3.1) como base para determinar também a dimensão dos fractais naturais, precisamos, fazer uma relação entre a medida s e o valor de m da referida equação. O valor de s é a medida do lado do quadrado que forma o quadriculo (para facilitar os cálculos, tomamos s inicial como unitário), e m por sua vez é a forma como o objeto (nesse caso o quadro) está sendo dividido, por exemplo:

- Quando $s = 1$, temos $m = 1$.
- Quando $s = \frac{1}{2}$, temos $m = 2$
- Quando $s = \frac{1}{4}$, temos $m = 4$

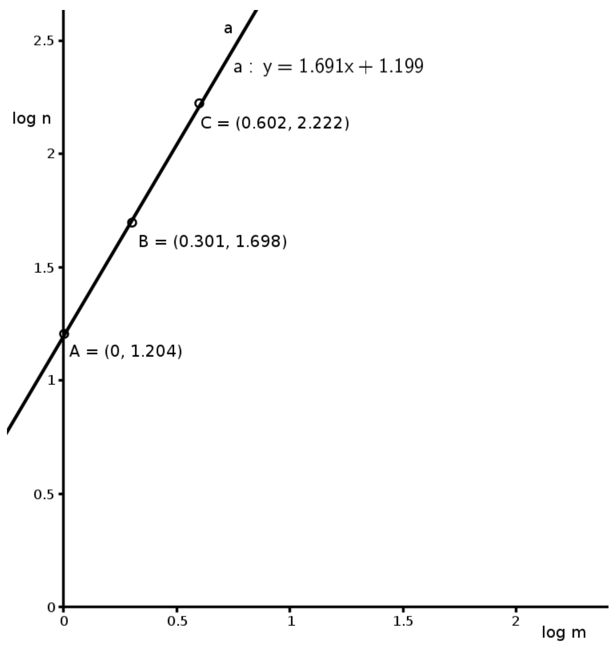
Dessa forma, m continua sendo utilizado como na (equação 3.1).

Com essas informações, podemos construir a tabela 3.4 e o (gráfico 3.19) $\log \mathbf{m}$ x $\log \mathbf{n}$ utilizando pontos de coordenadas $(\log m, \log n)$.

n	$\log n$	s	$\log m$
16	$\log 16 = 1,204$	1	$\log 1 = 0$
50	$\log 50 = 1,698$	$\frac{1}{2}$	$\log 2 = 0,301$
167	$\log 167 = 2,222$	$\frac{1}{4}$	$\log 4 = 0,602$

Fonte: Autor

Tabela 3.4: Tabela construída a partir das informações da (figura 3.4.1).



Fonte: Autor.

Figura 3.19: Gráfico diagrama de dispersão $\log m$ **x** $\log n$ construído no Softwere Geogebra usando a ferramenta (reta de regressão linear).

Linearizando o trecho entre os pontos do (gráfico 3.19), obtemos a reta a de inclinação

$$\alpha = \frac{\log n}{\log m} = D \tag{3.10}$$

e equação reduzida[7] $y = 1,691x + 1,199$. Logo, a reta a tem coeficiente angular $\alpha = 1,691$ e consequentimente pela igualdede 3.10, o objeto fractal tem dimensão fractal $D = 1,691$.

Sendo assim, podemos dizer que a dimensão fractal indica o grau de detalhe do

[7]Equação determinada utilizando a ferramenta reta de regressão linear do softwere Geogebra

objeto e quanto de espaço que ocupa entre as dimensões euclidianas.

Capítulo 4

Fractal em sala de aula: Uma proposta didática.

Porque trazer a geometria fractal para a educação básica, em especial, ao ensino médio? Poderíamos pensar nessa pergunta como sendo: Para que trazer a geometria fractal para dentro da sala de aula? Pois a primeira pergunta pode ter respostas que não conduz o aluno a uma visão de novos horizontes. Bom, o nosso objetivo é conduzir o aluno a uma nova percepção das coisas que o rodeia até então cobertas por conceitos extremamente euclidianos.

> A geometria fractal fará com que você veja as coisas diferentes. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma. (BARNSLEY, em seu livro Fractals Everywhere. 1993).

As atividades aqui propostas e realizadas teve como um dos objetivos fazer com que os alunos observassem as coisas de forma diferente, conduzindo-os a uma **dimensão** ainda não conhecida. O estudo dos fractais pode propiciar conhecimento para o estudante e vão ao encontro do que o PCN [1] Ensino Médio (1999, p. 251) cita:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando

[1] Parâmetros Curiculares Nacionais.

> hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Embora as pesquisas de Barbosa (2002) [5] e Janos (2008, 2009) [13], [4] recomendam explorar os fractais em sala de aula, isso quase não ocorre, pois são poucos os professores que tiveram oportunidade de estudar o tema no curso de licenciatura ou mesmo em cursos de formação continuada. No entanto, não é nosso interesse no momento discutir a geometria fractal no processo de formação do docente.

Para o desenvolvimento das atividades, foram aplicadas no mês de Março do corrente ano, três sequências didáticas em uma turma de 3º ano de Ensino médio da Escola Estadual Alcides Andrade, localizada na cidade de Penedo-AL.

4.1 Sequências didáticas aplicadas

Antes de aplicarmos as sequências didáticas, apresentamos a geometria fractal a turma, utilizando uma breve apresentação de slides. Nesse momento, mostramos suas características, bem como alguns dos seus precursores, em especial Mandelbrot. Aproveitamos o momento para de forma informal fazer questionamentos refente a dimensão, formas geométricas e cálculo de área e perímetro, porém, o feedback não foi dos melhores, mais de 80% da turma não apresentou domínio em conceitos geométricos básicos, como: diferenciar quadriláteros, distinguir a dimensionalidade das formas Euclidianas, paralelismos e perpendicularidade, além de apresentarem claramente insegurança no que tange a aritmética básica.

Fonte: Autor

Figura 4.1: Turma 3° Escola Est. Alcides Andrade, Penedo- Al, 2015.

Essas observações duraram aproximadamente 30 minutos, visto que tínhamos destinado 15 minutos para essa breve introdução, foi nesse momento que decidimos mudar a estratégia de abordagem durante as realizações das oficinas, decidimos não mais abordar conceitos como limite, distância entre pontos e aprofundamento dos temas: progressões aritmética e geométrica.

Apresentaremos a seguir, algumas atividades que acreditamos ser importantes para a construção de determinados conceitos e carregam consigo um aspecto lúdico que acreditamos tornar a aula de matemática mais participativa, dessa forma, tentando recuperar ou pelo menos preencher lacunas deixadas durante o processo de ensino e aprendizagem.

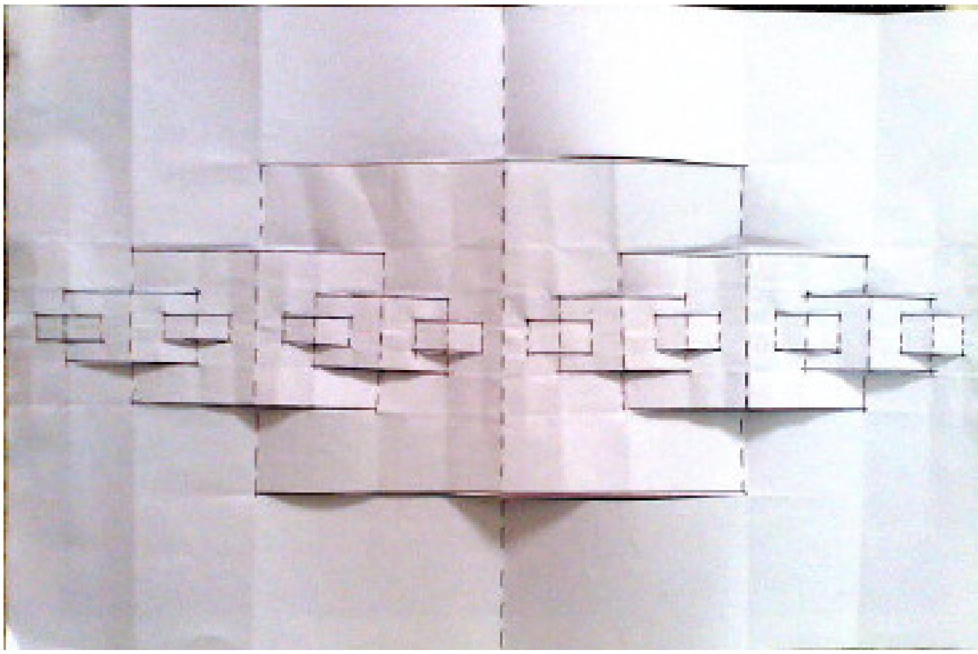
Destacamos a relevância de pensar tais atividades em vários contextos e séries escolares, de forma que possamos abordar diferentes conteúdos em diferentes graus de dificuldades com as mesmas atividades.

4.1.1 1ª Oficina: Cartão Fractal Tridimensional

Atividade adaptada de [11].

Nesta atividade, mostramos a construção de um fractal a partir de dobras e cortes em papel. O objetivo é discutir duas das características de um fractal **auto-similaridade** e **complexidade infinita**, porém, como pano de fundo discutimos as ideias iniciais de sequências. Utilizamos para o desenvolvimento da atividade: folha de papel A4 e A3, lápis de cor, régua, tesoura e calculadora.

Os cartões resultam de uma sequência de cortes (linhas cheias) e dobraduras (linhas pontilhadas) (figura 4.2). As etapas a seguir mostram sua construção.



Fonte: Autor

Figura 4.2: Fractal cartão planificado.

Antes de iniciarmos a oficina, mostramos a turma um cartão fractal já feito e pedimos a eles que fizessem um igual, deixamos o material disponível e determinamos durante 5 minutos para que pensassem. Ao final do tempo proposto, nenhum aluno tinha conseguido fazer o cartão, porém, nosso objetivo foi alcançado, pois a turma queria saber como aquilo foi construído.

A seguir listamos os procedimentos de costrução do cartão, solicitamos aos alunos que seguissem os seguintes passos:

1. Pegar uma folha de papel A4 e dobrar ao meio(largura = A).

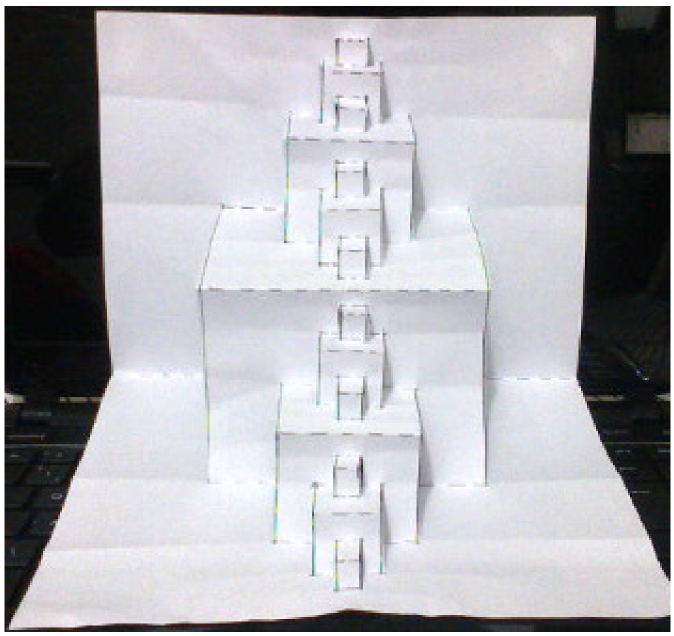
2. Fazer cortes de comprimento = A/2, a uma distância de 1/4 de cada canto.

3. Fazer uma dobradura ao longo do segmento produzido pelas extremidades dos dois cortes.

4. As gerações seguintes serão obtidas seguindo os mesmos passos de 1 a 3, porém, em uma escala menor, pois o procedimento será sempre realizado na região dobrada.

5. Repetir os cortes e as dobraduras enquanto a largura do papel permitir.

6. Por fim, desdobre todos os recortes e puxe as figuras em relevo. A (figura 4.3) mostra um cartão fractal obtido pelo processo descrito.



Fonte: Autor

Figura 4.3: Fractal cartão 3D com quatro iterações.

Posteriormente, levantamos a seguite questão: Existe outra maneira de costruir tal objeto sem utiliza régua? Qual? 80% da turma responderam que não, ou seja essa é a única maneira de fazer o fractal, porém, apresentamos uma forma alternativa de construção utilizando dobraduras sem régua.

Fonte: Autor

Figura 4.4: Alunos construindo fractal cartão.

Diante da turma e tendo como referência as observações feitas durante o processo de construção do fractal. Fizemos alguns questionamentos:

1. Existe um padrão para o tamanho dos cortes a cada nível? Que padrão é esse?

Observação:

De forma quase que unânime, os alunos responderam que **sim**, existe um padrão para o tamanho do corte a cada nível e esse padrão é cortar no nível seguinte a metade do que foi cortado no nível anterior.

2. Qual seria o tamanho do corte no 10° nível ?

Observação: Os alunos foram fazendo nível a nível o processo descrito na questão 1, chegando a resposta correta $\dfrac{1}{1024}$.

3. Como podemos generalizar o tamanho desse corte?

Observação:

Os alunos não conseguiram formalizar matematicamente aquilo que conseguiram fazer durante a construção do fractal. Dessa forma, construimos junto aos alunos uma tabela semelhante a (tabela 4.1) para assim chegar-mos a generalização.

Observamos a falta de rítmo e de atenção dos alunos, visto que para uma parte deles foi necessário tentar mais de três vezes até conseguir obter o fractal esperado. Sobre o preenchimento da tabela foi possível perceber a dificuldade dos alunos em traduzir suas conclusões em expressões algébricas, bem como a falta de intimidade com frações e suas propriedades.

Apesar de terem encontrado dificuldades, houve grande participação e colaboração por parte dos discentes.

Nível	Tamanho do corte	Representação em potência
0	Não tinha corte, logo podemos dizer que mede a unidade = 1und.	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$
1	$\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	$\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\cdots.\frac{1}{2}}_{\text{10 vezes}} = \frac{1}{1024}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\cdots.\frac{1}{2}.\cdots}_{n \text{ vezes}}$	$\left(\mathbf{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{n}}$

Fonte: Autor

Tabela 4.1: Quadro de análise do fractal cartão.

4.1.2 2ª Oficina: Fractal tipo árvore

Para a realização dessa oficina, utilizamos: cartolina, lápis de cor, régua e transferidor. A oficina tinha sido inicialmente planejada para ser realizada em uma hora, porém, como 90% da turma não sabia utilizar o transferidor, essa atividade foi prolongada por mais de 30 minutos.

Os conteúdos abordados durante a realização da oficina foram: Fractal e progressão geométrica. O objetivo da atividade foi reconhecer se uma sequência numérica era uma P.A. ou P.G. utilizando a visão geométrica da construção da árvore bifurcada.

Dividimos a turma em três blocos, cada bloco utilizou um ângulo de bifurcação diferente, porém, foi mantida a escala de redução [2] em $\frac{1}{2}$, o bloco A ângulo de 60°, bloco B trabalhou com ângulo de 90° e o bloco C com ângulos de 120°.

Construção:

1. Iniciamos a curva, pedindo aos alunos que traçassem na cartolina um segmento vertical de 16 cm.

[2] Quanto cada nova cópia representa da anterior.

2. Pedimos que aplicassem sobre este segmento inicial um fator de redução $\frac{1}{2}$.

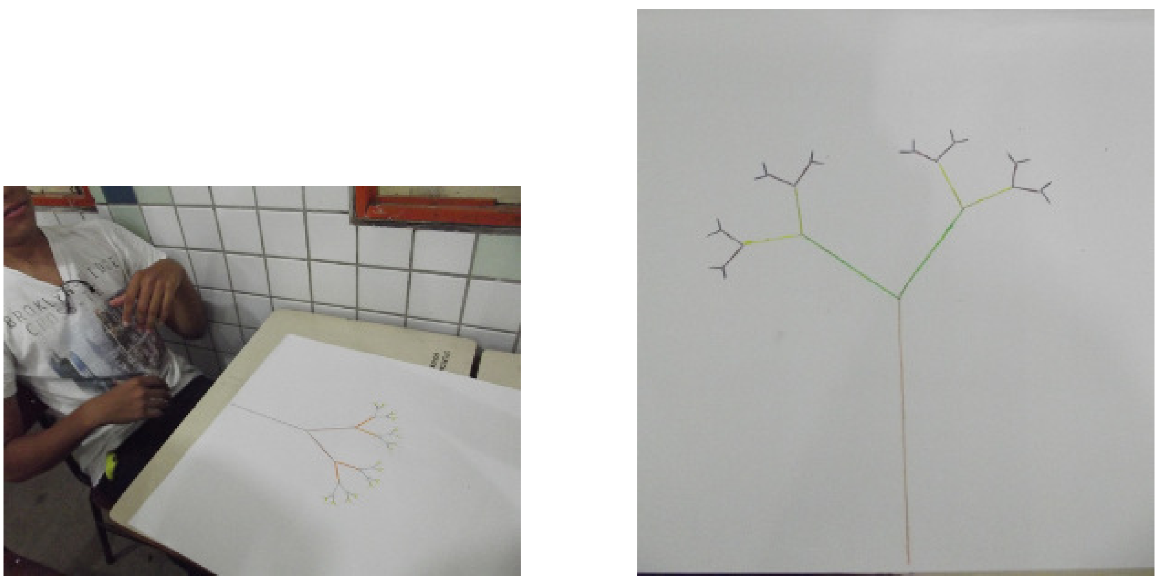
Obs.: Percebemos nesse momento que 80% da turma não sabe trabalhar com conceitos de razão e proporção, destinamos 10 minutos para fazer os devidos esclarecimentos.

3. Pedimos que os alunos inserissem dois segmentos de forma bifurcada junto a extremidade superior do segmento inicial, com ângulo de bifurcação específico de cada grupo formado e com o tamanho obtido na redução do nível anterior;

4. Repetir indefinidamente os passos 2 e 3 em cada um dos novos segmentos.

Comentário: *Durante a realização das etapas da construção do fractal, parte da turma, percebeu nível a nível, o surgimento do padrão da auto-similaridade presente na estrutura.*

Aproveitamos esse momento para mostrar, nível a nível, o surgimento de várias sequências relacionando número de segmentos e comprimento. Essas sequências são típicos exemplos de progressões geométricas.



Fonte: Autor

Figura 4.5: Alunos construindo fractal tipo árvore.

Baseando-se nessas observações, realizamos uma atividade com o objetivo de fixar o conceito de progressão geométrica e para melhor compreensão, montamos com os alunos uma tabela semelhante a descrita na (tabela 4.2).

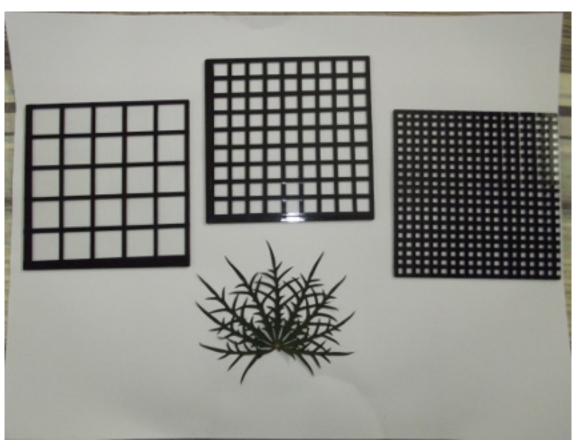
Iteração	Nível (n)	Números de segmentos ao final da iteração	Comprimento do segmento
0	0	$1 = 2^0$	$16cm$
1	1	$3 = 2^0 + 2^1$	$8 = \frac{1}{2}.16$
2	2	$7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$	$4 = \frac{1}{2}.8 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.16 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.16$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n	$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n}_{n+1 \text{ vezes}} = 2^{n+1} - 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n.16$

Fonte: Autor

Tabela 4.2: Quadro de análise do fractal tipo árvore.

4.1.3 3ª Oficina: Dimensão Fractal

Para realizar essa atividade, utilizamos três malhas quadriculadas feitas em vidros de 20 cm x 20 cm, e uma folhas da planta merthiolate [3].



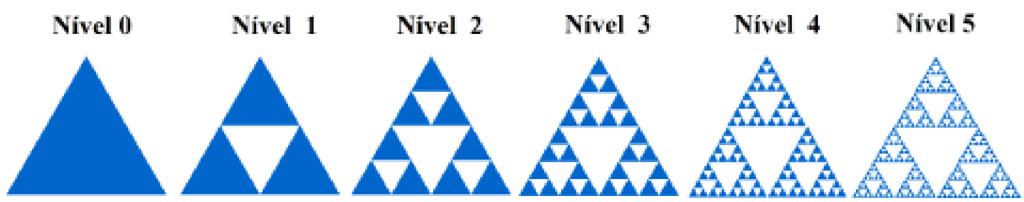
Fonte: Autor.

Figura 4.6: Material utilizado para a realização da 3° oficina.

[3]Nome científico Jatropha multifida.

O objetivo dessa oficina é mostrar para os alunos a existência de dimensões diferentes das quais estão acostumados a identificar. Para isso, foi fundamental reforçar as definições das dimensões Euclidianas, bem como identificar na prática e em seu redor objetos que fazem parte desse seleto grupo.

Iniciamos a atividade, com algumas perguntas tradicionas, do tipo: Qual é a dimensão de um ponto? E de uma reta? De uma folha de papel A4?. Os alunos responderam dentro do esperado. Posteriormente, tentamos mostrar a existência de dimensões entre as dimensões 0, 1, 2 e 3. Para isso utilizamos o fractal triângulo de Sierpinski em seu processo de iteração.



Fonte: [11]

Figura 4.7: Triangulo de Sierpinski com 5 iterações.

Então fizemos a seguinte pergunta: Qual é a dimensão do triângulo de Sierpinski? Para responder essa pergunta utilizamos a dimensão de Hausdorff (ver capítulo 3.4).

A parti desse ponto, o que fizemos foi uma adaptação, para o ensino médio do exemplo utilizado no (capítulo 3.4.1), onde utilizando o geogebra para determinar a dimensão da folha da planta (renda-portuguesa (figura 3.4.1)) utilizando o método de contagem de quadrados.

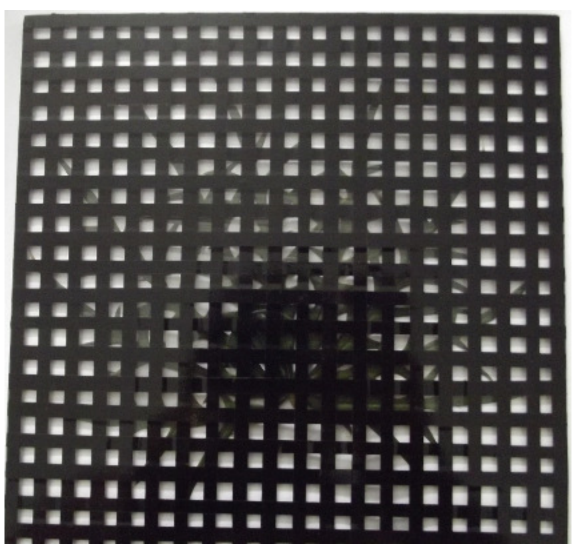
Partimos da seguinte indagação: Qual é a dimensão fractal da folha (ver figura 4.6)? **Procedimentos adotados:**

1. Para contar quadrados, colocamos sobre a folha da planta merthiolate a primeira malha quadriculada de lado 1 e contamos quantos quadradinhos da malha foram necessários para cobrir toda a folha na ocasião, contamos 22 quadradinhos (ver figura 4.1.3).

Fonte: Autor.

Figura 4.8:

2. Depois diminuimos o tamanho dos lados dos quadrados para $\frac{1}{4}$ e contamos o número de quadradinhos que preenche toda a folha, nesse caso 145, (ver figura 4.1.3).



Fonte: Autor.

Figura 4.9:

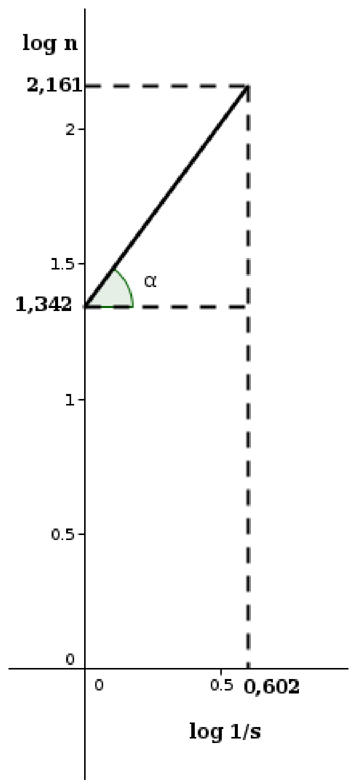
3. Preenchemos uma tabela semelhante a (tabela 4.3).

n	$\log n$	s	$\log \frac{1}{s}$
22	$\log 22 = 1,342$	1	$\log 1 = 0$
145	$\log 145 = 2,161$	$\frac{1}{4}$	$\log \frac{1}{\frac{1}{4}} = 0,602$

Fonte: Autor

Tabela 4.3: Tabela construída a partir das informações das (figuras 4.1.3 e 4.1.3).

4. Traçamos um gráfico ($\log \frac{1}{s}$ x $\log n$)



Fonte: Autor.

Figura 4.10: Gráfico ($\log n$ x $\log \frac{1}{s}$), semelhante ao construído durante a realização da oficina 3.

Obtemos uma reta de inclinação d, igual a

$$d = \frac{\log n}{\log \frac{1}{s}} \tag{4.1}$$

que é a dimensão do objeto.

Verificamos então que a inclinação da reta (figura 4.1.3), ou seja, a dimensão da folha da planta merthiolate, é:

$$d = \frac{(2,161 - 1,342)}{(0,602 - 0)} = 1,36. \tag{4.2}$$

Observações feitas durante a realização da oficina:

Os alunos apresentaram muita dificuldade em trabalhar com: números decimais, logaritmo e sistema cartesiano. Sem falar na parte que diz respeito a inclinação da reta,visto que esse conteúdo só será visto pela turma no segundo semestre no estudo da geometria analítica.

Os alunos ficaram muito surpresos ao descobrirem que existem outras dimensões além das que já são conhecidas por eles. A empolgação era notável, acreditamos que o nosso objetivo foi cumprido, uma vez que, conseguimos fazer os alunos enchergarem a natureza com um olhar além da geometria euclidiana.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um apanhado de forma sucinta, porém, coerente da geometria fractal, levando sempre em consideração os aspectos determinados por Mandelbrot. Tendo como objetivo, mostrar a geometria fractal a partir de uma perspectiva didática e mais elementar possível, visto que, entendemos que a Geometria fractal a pesar de ter uma ampla aplicação em vários viés das ciências modernas, ainda é algo longe de ser compreendido pelos docentes e discentes em especial da educação básica.

Poder aplicar a geometria fractal a conteúdos tradicionais do ensino médio, como por exemplo, progressão geométrica e estudo dos logarítmos, foi de muita importância, pois durante as ofinicas, utilizamos a geometria fractal para abordar conteúdos que até então tinham sido explorados de forma tradicional, possibilitando os alunos compreender estruturas naturais a partir de tais conteúdos, além de conduzir os alunos a questionamentos que até então eram despercebidos. Acreditamos que o nosso trabalho, trouxe uma contribuição impar para o estudo da geometria, em especial da geometria que rege a natureza.

Uma das dificuldades encontradas na pesquisa foi relacionada com o material a ser utilizado. Encontra-se facilmente na internet sites que abordam o tema, uma quantidade razoável de dissertações e teses recentes sobre o tema apresentando, na sua maioria, abordando quase que de forma exclusiva os fractais matemáticos e deixando de lado a essência da geometria fractal, que são os objetos fractais, além de ser escasso os trabalhos que abordem a dimensão fractal de fractais naturais fora de um grupo preestabelecido. Dessa forma, necessitamos de mais material publicado no que diz respeito aos fractais naturais e suas propriedades.

Por fim, ter estudado a geometria fractal me fez de fato perder a visão infantil da geometria e acredito nunca mais ver os objetos como via antes. Espero seguir pesquisando novas aplicações para utilizar em sala de aula nesse apaixonante, atraente e deslumbrante mundo da geometria fractal.

Referências Bibliográficas

[1] SANTOS, A R S.VIGLIONE, H H DE B Geometria euclidiana plana. UFS, 2011 disponível em <http://w3.impa.br/ arss/cursos/GEP/Geometria%20Euclidiana%20Plana.pdf>

[2] DELGADO J.; FRENSEL K.; CRISSAFF L. Geometria Analítica.(coleção PROFMAT). SBM, 2013.

[3] INFOESCOLA.Euclides. Disponível em <http://www.infoescola.com/biografias/euclides/>. Acesso em 17/12/2014.

[4] JANOS, Michel. Matemática e natures. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[5] BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[6] AMMERAAL, Leen. Computação Gráfica para Programadores Java. Tradução Acauan Fernandes. Rio de Janeiro: LTC, 2008, 2ª ed.

[7] WIKIPÉDIA. Wikipédia Enciclopédia Livre. Fractal. Disponível http//:pt.wikipedia.org/wiki/ Geometria_dos_fractais. Acesso em 17/10/2014.

[8] MANDELBROT, B. P. Objetos Fractais. Lisboa:Gradiva, 1998.

[9] MANDELBROT, B.The Fractal Geometry of Nature. 3. ed. New York: W.HFreeman, 1983.

[10] MORAIS, Leonardo. Equações de diferença, Caos e Fractais. 2014. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis- SC, 2014. Disponível em http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/

123456789/1283/2012_01072_LEONARDO_MORAIS.pdf? sequence=1. Acesso em 27/02/2015.

[11] SILVIA, y. F. R. Estudo e aplicação da geometria fractal. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa-PB, 2013. Disponível em http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/436 /. Acesso em 10/08/2014.

[12] SEDRAZ, Maycon Ricardo. Forma Fractal no ensino de projeto arquitetônico assistido por computador. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.

[13] JANOS, Michel. Geometria fractal. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

[14] ILLUMINATIONS, Fractal Too (ferramenta fractal), Construção de fractais. Disponível em < http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id= 3513 >. Acesso em 04/02/15.

[15] Universidade de Lisboa - Portugual.Artistas Matemáticos, Matemáticos Artistas. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/ icm33/Durer2.htm>. Acesso em 20/12/14.

[16] CODEVASF,Companhia de Desenvolvimento dos Vales do São Francisco e do Parnaíba. Rio são Francisco. Disponível http://www.codevasf.gov.br/ DeSaTiVaDo_ osvales/vale-do-sao-francisco/recordes-do-vale. Acesso em 17/11/14.

[17] SÉRIE DETETIVES DA CIÊNCIA. As formas da natureza. programa 4. Disponível em < http://www.multirio.rj.gov.br/index.php? option=com_content&view=article& id=158:para-usar-em-sala-de-aula-as-formas-da-natureza& catid=19:ciencia-a-tecnologia& Itemid=114 >. Acesso em: 12 de dezembro 2014.

[18] EPCT, IV. 2009,Campo Mourão-PR.Fractais: Algumas caracteristicas e propriedades. Fuzzo, Regis Alessandro. NUPEM, p.13.