Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

Formas normais e estabilidade de sistemas Hamiltonianos degenerados

por

Robson Andrade de Jesus

Mestrado Acadêmico em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Fábio dos Santos

Fevereiro de 2015

Robson Andrade de Jesus

Formas normais e estabilidade de sistemas Hamiltonianos degenerados

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Fábio dos Santos

São Cristóvão
2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Jesus, Robson Andrade de
J58f Formas normais e estabilidade de sistemas Hamiltonianos degenerados / Robson Andrade de Jesus; orientador Fábio dos Santos. - São Cristóvão, 2015.
83 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2015.
1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Formas (Matemática). 3. Sistemas lineares. 4. Sistemas - Equilíbrio. l. Santos, Fábio dos, orient. II. Título.
CDU 517.43

Dedicatória

A minha família.

Agradecimentos

- Agradeço, primeiramente a Deus pela sua presença constante em minha vida e por ter guiado meus passos na concretização deste objetivo.
- A minha família, a qual tenho suporte necessário para alcançar todos meus sonhos. Principalmente a minha tia Josefa Gilvânia, minha avó Roquina e minhas irmãs Tate e Tanise.
- Aos meus parceiros, em especial o Maurício, que me acompanhou estes dois últimos anos e me deu apoio sempre que precisei. Agradeço também a Ana Nery, Pablo, Paulo victor e Ecivaldo, amigos para toda hora.
- Aos meus colegas de classe, em especial Regivan, Clea e Makson. Nossos momentos foram únicos e inesquecíveis. Vou sentir muita falta.
- Ao meu Orientador Fábio dos Santos e minha co-orientadora Lúcia de Fátima.
- A CAPES pelo auxílio financeiro.
- Aos professores Jean e Lucas, por participarem da banca examinadora.
- A todos os meus colegas do DMA, que contribuíram para esta realização.
- Enfim, agradeço a todos que deram alguma contribuição no processo de minha formação.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a teoria de estabilidade em soluções de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade em casos degenerados. Concentramos o estudo especificamente em dois casos, a saber, quando há uma ressonância de primeira ordem e dupla ressonância de primeira ordem. Após abordarmos algoritmos de normalização da parte quadrática do Hamiltoniano, a técnica principal utilizada consiste em obter a forma normal de Lie do Hamiltoniano até uma ordem adequada e usando o teorema da Curva Invariante, fornecemos algumas condições para estabilidade a partir dos coeficientes do novo Hamiltoniano. Estudamos os teoremas clássicos de Chetaev, supondo que a origem do espaço de fase corresponde ao equilíbrio desse sistema. Como ilustração, resolvemos uma recíproca parcial do teorema de Dirichlet-Lagrange, com dois graus de liberdade, tecendo ainda alguns comentários a respeito desta recíproca para um grau de liberdade.

Palavras Chaves: Estabilidade, Sistemas Hamiltonianos, Formas Normais.

Abstract

In this thesis we studied the theory of stability in equilibrium solutions of autonomous Hamiltonian systems with two degrees of freedom in degenerate cases. We specifically focusedour study on two cases, namely, when there are a first-order single resonance and a first-orderdouble resonance. After approachingstandardization algorithms of the Hamiltonianquadratic part, the main technique used is to obtain the normal form of the Hamiltonian Lie up to a suitable order and,by using the theorem of Invariant Curve, we provided some conditions for stability of the new Hamiltonian coefficients. We studied the classical theorems of Chetaev, assuming that the origin of the phase space corresponds to the balance of that system. As an illustration, we resolved a partial reciprocal of Lagrange-Dirichlet theorem with two degrees of freedom, and made some comments regarding this reciprocal to one degree of freedom.

Key words: Stability, Hamiltonian Systems, Normal Form.

Sumário

Introdução

O objetivo principal desta dissertação é estudar a teoria de estabilidade de soluções de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos autônomos, com dois graus de liberdade, em casos degenerados. Com esta teoria, fornecemos resultados de estabilidade a partir dos coeficientes da função de Hamilton.

Em sistemas Hamiltonianos lineares, não é possível haver estabilidade assintótica, pois, o polinômio característico associado ao sistema é par. Este resultado se estende para o caso não-linear, pois, pelo teorema de Arnold-Liouville, o fluxo do Hamiltoniano preserva volume.

Da teoria básica de EDO, para obtermos resultados de estabilidade, faz-se necessário considerar os casos degenerados, isto é, a parte real do autovalor é nula. Aqui, vamos estudar dois casos: quando todos autovalores são nulos, isto é, quando há ressonância dupla de primeira ordem ou duas frequências nulas, em seguida, quando um par de autovalor é nulo e outro imaginário puro, chamado de ressonância de primeira ordem.

Quando estudamos o caso de uma frequência nula, a parte quadrática da função de Hamilton pode ser diagonalizável ou não diagonalizável. Já para duas frequências nulas, esta parte quadrática depende do posto da matriz linearizada do sistema. Em ambos os casos, obtemos um algoritmo de normalização desta parte quadrática.

Nos demais termos, a técnica principal utilizada consiste em obter a forma normal de Lie do Hamiltoniano até uma ordem adequada e usando o teorema da

Curva Invariante fornecemos algumas condições para estabilidade de equilíbrios. Além disso, fazemos uso dos teoremas Clássicos de Chetaev, os quais garantem instabilidade para o ponto de singularidade.

Como ilustração, aplicamos tais resultados em um problema clássico na literatura, a recíproca do Teorema de Dirichlet-Lagrange. Como principal referência, usamos dois artigos de Sokol'skii [27] e [28], os quais fornecem resultados relevantes para o entendimento do problema.

Este teorema foi enunciado, neste contexto, por Lagrange em 1788, o qual não apresentou uma demonstração (exceto quando a função potencial é quadrática). Uma das primeiras provas conhecidas foi exibida por Dirichlet em 1848. A demonstração é via função auxiliar de Lyapunov, lembrando que os teoremas de Lyapunov sobre estabilidade são de 1882.

Tendo em vista o problema, é indispensável a análise de sua recíproca, a qual ainda se encontra em aberto quando se trata de n graus de liberdade. Aqui, resolvemos uma recíproca parcial quando $n = 2$.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. O primeiro contém resultados preliminares. Nesse contexto, é importante que o leitor possua conhecimentos básicos de Álgebra Linear, Análise no $\mathbb{R}^n$ e Equações Diferenciais Ordinárias. Nele, além de definições, teoremas básicos de sistemas Hamiltonianos e Transformações Simpléticas, também é enunciado o Teorema da Curva Invariante.

No segundo capítulo, fornecemos um algoritmo de normalização da parte quadrática do Hamiltoniano quando os autovalores são nulos e no caso de uma frequência ser nula e a outra distinta de zero. Em seguida, desenvolvemos a teoria de Formas Normais de Lie, no intuito de aplicar o método de Deprit-Hori, que nos possibilita escrever o Hamiltoniano de forma particular.

A partir dos coeficientes do novo Hamiltoniano, no terceiro capítulo, exibimos alguns resultados de estabilidade de equilíbrio de sistemas Hamiltonianos degenerados com dois graus de liberdade, fundamentais para demonstração de uma recíproca parcial do teorema de Dirichlet-Lagrange.

Finalmente, no capítulo 4, fazemos uma ilustração dos resultados desenvolvidos neste trabalho, a recíproca do teorema de Dirichlet-Lagrange, com dois graus de liberdade, tecendo ainda alguns comentários a respeito desta recíproca para um grau de liberdade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, fornecemos a teoria básica de sistemas Hamiltonianos realizamos um estudo sobre a teoria qualitativa de equações diferenciais abordando conceitos de estabilidade e instabilidade, como principal referência adotamos o livro do Meyer [21]. *Outras referências são Sotomayor* [30] *e Vidal* ([31] *e* [32]). *Além disso, enunciamos o teorema das curvas invariantes* [22].

1.1 Sistemas Hamiltonianos

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias é objeto de intensa atividade de pesquisa, pois, apresenta aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações. Após a segunda lei de Newton, desperta-se um particular interesse pelos sistemas de equações diferenciais de segunda ordem em $\mathbb{R}^{2n}$. Um tipo específico desses sistemas são os chamados Sistemas Hamiltonianos.

Um **Sistema Hamiltoniano** em $\mathbb{R}^{2n}$ é um sistema com $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.1}$$

onde $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, chamada de Hamiltoniano, é uma função diferenciável definida em um aberto $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, as variáveis $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_n)$ são chamadas de posição e momento, respectivamente e o inteiro positivo n é dito **grau de liberdade** do sistema.

O conjunto onde as variáveis posição estão definidas é chamado de espaço das configurações, já o espaço que descreve a posição versos momento é chamado de espaço de fase. Fazendo

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

o sistema (1.1) torna-se

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\nabla H(\mathbf{z}, t) \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}\right)^T. \tag{1.2}$$

Claramente $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$, isto é, $\mathbf{J}$ é anti-simétrica e ortogonal. Note também que $\det \mathbf{J} = 1$.

Pelo teorema de existência e unicidade, um dos resultados básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias, para cada $(t_0, \mathbf{z}_0)$ em $\mathcal{O}$, existe uma única solução $\mathbf{z} = \varphi(t, t_0, \mathbf{z}_0)$ de (1.2) definida em t numa vizinhança de t_0 que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0, t_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$.

Quando a função H não depende de t, o sistema (1.1) é chamado autônomo e o sistema Hamiltoniano é dito conservativo. Daí, a equação (1.2) satisfaz

$$\varphi(t - t_0, 0, \mathbf{z}_0) = \varphi(t, t_0, \mathbf{z}_0).$$

Usualmente descarta-se a dependência de t_0, uma vez que $\varphi(t, \mathbf{z}_0)$ é uma solução de (1.2) tal que $\varphi(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$.

Vamos estudar o conceito de um operador chamado colchete de Poisson. Considere F, G e H funções diferenciáveis no aberto $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Definição 1.1.1. *O Colchete de Poisson de F e G é definido por*

$$\{F, G\} = \nabla F^T \mathbf{J} \nabla G = \frac{\partial F^T}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial F^T}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{1.3}$$

Claramente, $\{\bullet, \bullet\}$ é uma forma bilinear, anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \tag{1.4}$$

Se $\varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0)$ representa uma solução de (1.1) com a condição inicial $(t_0, \mathbf{z}_0)$ e incluindo a notação $F(t) = F(t, \varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0))$ então

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0)) + \{F, H\}(t, \varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0)). \tag{1.5}$$

Uma vez que o colchete de Poisson é anti-simétrico, ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano (1.1) vale que $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. Por isso, quando o sistema Hamiltoniano for autônomo a função H é constante ao longo de suas soluções, funções desta forma são chamadas de **Integrais Primeira** do sistema (1.2).

Teorema 1.1.2. *Sejam F, G e H como enunciadas acima e independente de t. Então,*

1. *H é uma integral primeira de* (1.1).

2. *F é uma integral primeira de* (1.1) *se, e somente se, $\{F, H\} = 0$.*

3. *Se F e G são integrais primeira de* (1.1) *então $\{F, G\}$ também é.*

Demonstração: Com os comentários acima podemos mostrar o item 1. O segundo item segue diretamente da equação (1.5) e, por fim, a identidade de Jacobi mostra facilmente o item 3. ∎

1.1.1 Redução do grau de liberdade

Algumas vezes faremos uso de sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade, por exemplo, na aplicação do Teorema da Curva Invariante. Como vamos fornecer resultados de estabilidade para sistemas Hamiltoniano com dois graus de liberdade, faz-se necessário o estudo de redução desse grau. Assim, considere o sistema Hamiltoniano autônomo cuja função Hamiltoniana é

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) \tag{1.6}$$

e seja $H = k \in \mathbb{R}$ fixo, uma superfície de energia. Assumiremos que $H_{p_n} \neq 0$, então podemos escrever

$$p_n = -K(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_{n-1}, k, \epsilon). \tag{1.7}$$

Como $\dot{q}_n = H_{p_n} \neq 0$, podemos tomar $q_n = \tau$ como a nova variável tempo na equação diferencial. Desta forma, as equações resultantes são:

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{H_{p_i}}{H_{p_n}} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{H_{q_i}}{H_{p_n}} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \tag{1.8}$$

onde $i = 1, \cdots, n-1$. Agora usamos o fato que

$$H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_{n-1}, -K, \epsilon) = k.$$

A análise acima é local, pois usamos o teorema da Função Implícita. O sistema (1.8) tem $n-1$ graus de liberdade, com a função Hamiltoniana K.

1.1.2 Sistema Hamiltoniano linear

Um caso particular de sistemas Hamiltonianos são os lineares. Seja $\mathbf{S}(t)$ uma matriz simétrica para cada t e suponha que o Hamiltoniano H seja uma forma quadrática em $\mathbf{z}$, mais precisamente admita que H seja escrito da seguinte forma:

$$H = H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{S}(t)\mathbf{z}, \tag{1.9}$$

então, obtemos o sistema associado

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{S}(t)\mathbf{z} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z} \tag{1.10}$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{S}(t)$. Quando isto ocorre, o sistema Hamiltoniano (1.10) é dito um sistema **Hamiltoniano Linear**.

Definição 1.1.3. *Uma matriz $\mathbf{A} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ é dita Hamiltoniana se satisfaz $\mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Denotaremos por $sp(n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes Hamiltonianas de ordem $2n$.*

É simpes verificar que a matriz $\mathbf{A}(t)$ do sistema (1.10) é Hamiltoniana. De fato,

$$\mathbf{J}\mathbf{A}(t) = \mathbf{J}^2\mathbf{S}(t) = -\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{J}^2 = \mathbf{S}(t)^T\mathbf{J}\mathbf{J} = -(\mathbf{J}\mathbf{S}(t))^T\mathbf{J} = -\mathbf{A}(t)^T\mathbf{J}.$$

Vejamos alguns resultados que caracterizam matrizes Hamiltonianas.

Teorema 1.1.4. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathbf{A}$ *é Hamiltoniana;*
2. $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}$*;*
3. $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{R}$*, com* $\mathbf{R}$ *simétrica;*
4. $\mathbf{J}\mathbf{A}$ *é simétrica.*

Demonstração:

(1. $\Rightarrow$ 2.) Basta notar que $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Então, pela definição 1.1.3 temos que $\mathbf{A}^T\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}$ e temos o desejado.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Tome $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T\mathbf{J}$ e observe que

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{J}^T\mathbf{A} = -\mathbf{J}(\mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}) = -\mathbf{J}^2(\mathbf{A}^T\mathbf{J}) = \mathbf{A}^T\mathbf{J} = \mathbf{R}.$$

(3. $\Rightarrow$ 4.) Suponha $\mathbf{A} = \mathbf{JR}$, com $\mathbf{R}$ simétrica. Então, $\mathbf{JA} = \mathbf{J}^2\mathbf{R} = -\mathbf{R}$. Logo, $\mathbf{JA}$ é simétrica.

(4. $\Rightarrow$ 1.) $\mathbf{JA}$ é simétrica $\Rightarrow \mathbf{JA} = (\mathbf{JA})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{J}^T = -\mathbf{A}^T\mathbf{J}$. Assim, $\mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{JA} = \mathbf{0}$ e pela definição 1.1.3. $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana. ∎

Além disso, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes Hamiltonianas, então $\mathbf{A}^T, \alpha\mathbf{A}\ \ (\alpha \in \mathbb{R}), \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ e $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ são matrizes Hamiltonianas.

Ainda neste capítulo vamos estudar o conceito de estabilidade linear no sentido Lyapunov, ao mesmo tempo, fazer associações com o sinal da parte real dos autovalores do polinômio característico da matriz associada ao sistema linear. O próximo resultado é fundamental para o estudo de sistemas Hamiltonianos lineares.

Teorema 1.1.5. *Seja $\mathbf{A}$ Hamiltoniana. Se λ é autovalor da matriz $\mathbf{A}$, então $-\lambda$ também vai ser autovalor desta matriz. Isto é, o polinômio característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ é par.*

Demonstração: Vejamos,

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{JS} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{JS} - \lambda\mathbf{I})^T \\ &= \det(\mathbf{S}^T\mathbf{J}^T - \lambda\mathbf{I}) = \det(-\mathbf{SJ} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{J}^2\mathbf{SJ} - \lambda\mathbf{IJJ}) \\ &= \det(\mathbf{J}(\mathbf{JS} + \lambda\mathbf{I})\mathbf{J}) = \det\mathbf{J}\det(\mathbf{J}(\mathbf{JS} + \lambda\mathbf{I}))\det\mathbf{J} \\ &= \det(\mathbf{JS} + \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}) \\ &= P_{\mathbf{A}}(-\lambda) \end{aligned}$$ ∎

Exemplo 1.1.6. Vejamos uma condição necessária e suficiente para que uma matriz 2×2 com entradas reais seja Hamiltoniana.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{JA} = \begin{bmatrix} 0 & a+d \\ -(a+d) & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, o traço de $\mathbf{A}$ for nulo.

Se escrevermos uma equação diferencial de segunda ordem como

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad q, p \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

o sistema associado a esta equação é da forma $\dot{x} = y$ e $\dot{y} = -py - qx$, ou simplesmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Pelo exemplo 1.1.6, o sistema é Hamiltoniano linear se, e somente se, $p \equiv 0$. O mesmo ocorre quando $p = p(t)$ e $q = q(t)$.

1.2 Transformações simpléticas

O estudo de transformação simplética é de grande valia, pois, uma mudança de coordenadas induzida por uma matriz simplética leva sistemas Hamiltonianos lineares em sistemas Hamiltonianos lineares. Por isso, nesta seção, vamos fornecer definições e resultados importantes a seu respeito.

Definição 1.2.1. *Uma matriz* $\mathbf{T} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ *satisfazendo a identidade*

$$\mathbf{T}^T\mathbf{J}\mathbf{T} = \mu\mathbf{J}, \ \ \mu \neq 0 \tag{1.12}$$

é dita uma matriz $\mu-$*simplética. Quando* $\mu = 1$*, dizemos que* $\mathbf{T}$ *é simplética. Vamos introduzir a notação* $Sp(2n, \mathbb{R})$ *para o conjunto das matrizes simpléticas.*

Vejamos alguns resultados quando uma matriz satisfaz a definição 1.2.1.

Teorema 1.2.2. *Seja* $\mathbf{T}$ *uma matriz* $\mu-$*simplética. Então,*

1. $\mathbf{T}$ *é invertível,* $\mathbf{T}^{-1}$ *é* $\mu^{-1}-$*simplética e* $\mathbf{T}^{-1} = -\mu\mathbf{J}\mathbf{T}^T\mathbf{T}$.
2. $\mathbf{T}^T$ *é* $\mu-$*simplética.*
3. *Se* $\mathbf{S}$ *é* $\upsilon-$*simplética, então* $\mathbf{TS}$ *é* $\mu\upsilon-$*simplética.*

Demonstração: Seja $\mathbf{T}$ $\mu-$simplética, isto é,

$$\mathbf{T}^T\mathbf{J}\mathbf{T} = \mu\mathbf{J} \Rightarrow \det(\mathbf{T}^T\mathbf{J}\mathbf{T}) = \mu \det \mathbf{J} = \mu \Rightarrow (\det \mathbf{T})^2 = \mu \neq 0.$$

Então, $\mathbf{T}$ é invertível. Os demais itens seguem diretamente da definição 1.2.1. ∎

O teorema acima nos diz que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é um grupo e ao mesmo tempo um subgrupo do conjunto das matrizes não-singulares $n \times n$ com entradas reais, denotada por $Gl(n, \mathbb{R})$.

Se $\mathbf{T}(t)$ é uma matriz não-singular, de ordem $2n$, isto é, invertível para todo t, a mudança de variáveis $\dot{\varsigma} = U(t)\mathbf{z}$ transforma o Hamiltoniano (1.10) em

$$\dot{\varsigma} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}})\varsigma, \tag{1.13}$$

onde $U(t) = \mathbf{T}^{-1}$. Vejamos quais condições sobre U para que (1.13) seja um sistema Hamiltoniano.

Teorema 1.2.3. *Se* $\mathbf{U}(t)$ *é uma transformação* $\mu-$*simplética, então* (1.13) *é um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Seja $\mathbf{U}(t)$ uma transformação $\mu-$simplética, isto é, $\mathbf{T}(t)$ é $\mu^{-1}-$simplética. Uma vez que $\mathbf{TJT}^T = \mu^{-1}\mathbf{J}$ para todo t, segue que $\dot{\mathbf{T}}\mathbf{JT}^T + \mathbf{TJ}(\dot{\mathbf{T}})^T = \mathbf{0}$. Assim, $(\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}})^T\mathbf{J} + \mathbf{J}(\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}}) = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}}$ é uma matriz Hamiltoniana. Por outro lado, o item 1 do teorema 1.1.2 nos garante que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J} = \mu\mathbf{JT}^T$, com isso,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{JST} \\ &= \mu\mathbf{JT}^T\mathbf{ST} \\ &= \mathbf{J}(\mu\mathbf{T}^T\mathbf{ST}) \end{aligned}$$

Assim, $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})^T\mathbf{J} + \mathbf{J}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}) = \mathbf{0}$. ∎

O último resultado nos diz que uma das importâncias das transformações simpléticas radica no fato de preservar a estrutura Hamiltoniana das equações.

Se a matriz $\mathbf{A}$ do sistema linear (1.10) é constante, com $t_0 = 0$, da teoria de equações diferenciais ordinárias, temos que a única solução para o sistema é

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!}, \tag{1.14}$$

com isso, vejamos os próximos resultados.

Teorema 1.2.4. *Uma matriz fundamental* $Z(t, t_0)$ *de um sistema linear Hamiltoniano é simplética, para todo* $t, t_0 \in \mathbb{I}$. *Reciprocamente, se* $Z(t, t_0)$ *é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então* Z *é a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [21].

Corolário 1.2.5. *A matriz constante* $\mathbf{A}$ *é Hamiltoniana se, e somente se, a matriz* $e^{\mathbf{A}t}$ *é simplética, para todo* t.

Com base na definição de sistema Hamiltoniano linear, vamos estudar o caso mais geral de transformações simpléticas.

Definição 1.2.6. *Seja a transformação de coordenadas* $E : \Omega \times I \to \mathbb{R}^{2n}$, *com* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^{2n}$. *Dizemos que* E *é uma transformação simplética se a matriz derivada* $D_{\mathbf{z}}(E(\mathbf{z}, t))$ *é simplética. Isto é,* E *é um difeomorfismo, para todo* t, *e*

$$(D_{\mathbf{z}}(E(\mathbf{z}, t)))^T \mathbf{J} D_{\mathbf{z}}(E(\mathbf{z}, t)) = \mathbf{J}. \tag{1.15}$$

Usaremos a notação $\zeta = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = E(\mathbf{z}, t) = E(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, com $Z(\zeta, t)$ para inversa de E. Uma transformação simplética preserva a forma do sistema Hamiltoniano. Defina a função transformada por

$$H^*(\zeta) = H^*(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H(Z(\zeta, t), t), \tag{1.16}$$

sendo $\mathcal{U} = E(\Omega \times I)$, então

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\dot{\mathbf{z}} \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\mathbf{J}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\right)^T \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\mathbf{J}\left(\frac{\partial H^*}{\partial \zeta}(\zeta, t)\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\right)^T \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{J}\frac{\partial (H^*)^T}{\partial \zeta}(\zeta, t) \\
&= \mathbf{J}\nabla_\zeta H^*(\zeta, t) + \frac{\partial E}{\partial t}\,|_{\mathbf{z}=Z(\zeta,t)}\ .
\end{aligned}$$

Na segunda parcela da expressão acima, usamos essa notação para representar a primeira derivada com respeito a t e aplicada em $\mathbf{z} = Z(\zeta, t)$. Daí, temos o próximo resultado.

Teorema 1.2.7. *A transformação de coordenadas simplética $\zeta = E(\mathbf{z})$, que independe de t, transforma o sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana $H = H(\mathbf{z})$ em um novo sistema, cuja função Hamiltoniana H^* é definida por*

$$H^*(\zeta) = H(E(\mathbf{z})). \tag{1.17}$$

Quando a equação (1.15) depende de t, sua análise é feita na hipótese do conjunto

$$\mathcal{U}_t = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} / (\zeta, t) \in \mathcal{U} \times I\} \tag{1.18}$$

ser uma bola de $\mathbb{R}^{2n}$ para cada t fixo. Nestas condições, é possível mostrar que existe uma função $R : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t)|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta,t)} = \mathbf{J}\nabla_\zeta R(\zeta, t). \tag{1.19}$$

Teorema 1.2.8. *Suponha que a transformação de coordenadas $(\zeta, t) = E(\mathbf{z}, t)$ é simplética e, além disso, o contra-domínio $\mathcal{U} = E(U \times I)$ satisfaz* (1.18)*, então E transforma o sistema Hamiltoniano com a função Hamiltoniana $H = H(\mathbf{z})$ num novo sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana é definida por*

$$H^*(\zeta, t) + R(\zeta, t). \tag{1.20}$$

Demonstração: Vamos demonstrar que a função diferenciável R é o gradiente de uma função diferenciável.

Como $\mathcal{U}_t$ é simplesmente conexo, basta mostrar [1] que a função

$$\Gamma(\zeta,t) = \mathbf{J}\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t)|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta,t)}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \zeta}(\zeta,t) \tag{1.21}$$

é simétrica, ou seja, $\Gamma = \Gamma^T$. Derive ambos os lados de (1.15)

$$\frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t)\mathbf{J}\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t)\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t) = 0 \tag{1.22}$$

donde

$$\frac{\partial E^{-T}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t)\frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t)\mathbf{J} + \mathbf{J}\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t)\frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},t) = 0. \tag{1.23}$$

Substitua $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\zeta,t)$ em (1.23) e, além disso, $\frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{Z}(\zeta,t),t) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \zeta}(\zeta,t)$. Assim, encontramos que $-\Gamma + \Gamma^T = 0$. ∎

Quando $\mathcal{U}_t$ não for uma bola, não podemos garantir a existência de R definida globalmente como única função a valores reais sobre todo $\mathcal{U}$. Mas, em cada ponto ζ de $\mathcal{U}$ existe uma função R como no teorema anterior sobre uma vizinhança de ζ tal que o teorema 1.2.8 é válido, isto é, se $\mathcal{U}_t$ não é uma bola, o teorema acima só é válido localmente.

Teorema 1.2.9. *Seja* $\mathbf{T}$ *uma matriz simplética. Se* λ *é autovalor de* $\mathbf{T}$*, então* λ^{-1} *também é.*

Demonstração: Seja $\mathbf{T}$ simplética, $\mathbf{T}^T = -\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}$ e $\det \mathbf{T} = \pm 1$. Notemos que

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{T}}(\lambda) &= \det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) \\
&= \det(\mathbf{T}^T - \lambda\mathbf{I}) \\
&= \det(-\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J} + \lambda\mathbf{J}\mathbf{J}) \\
&= \det(-\mathbf{T}^{-1} + \lambda\mathbf{I}) \\
&= \det(\lambda(\lambda^{-1}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{I})) \\
&= \lambda^{2n}\det(\mathbf{T}^{-1})\det(\mathbf{T} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) \\
&= \pm\lambda^{2n}P_{\mathbf{T}}(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

Donde temos o desejado. ∎

[1] Se $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^k$, onde $\mathcal{O}$ é simplesmente conexo, então $F = \nabla f$ se, e somente se, $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ é simétrica.

Sabemos, de Álgebra Linear, que o determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores, daí o determinante de uma matriz simplética é igual a 1. Por consequência, uma transformação simplética preserva volume. A seguir, faremos alguns exemplos, os quais nos ajudarão a entender algumas demonstrações de teoremas mais a diante.

Exemplo 1.2.10. Considere $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ e faça a mudança de coordenadas a qual não depende de t

$$E : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \tag{1.24}$$

definida por

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{q} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \beta \mathbf{p}, \tag{1.25}$$

onde α e β são constantes não nulas. Assim,

$$\mathbf{T} := \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta \mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{1.26}$$

com $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem n. Desta forma,

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \alpha \beta \mathbf{J} \tag{1.27}$$

Pela definição 1.2.1 a transformação de coordenadas E é $\alpha\beta-$simplética.

Exemplo 1.2.11. Considere um Hamiltoniano autônomo e analítico que possui um ponto crítico na origem, assim,

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} + K(\mathbf{z}) \tag{1.28}$$

onde $\mathbf{S}$ é matriz Hessiana em $\mathbf{z} = 0$ e K é tal que as derivadas parciais de primeira e segunda ordem anulam-se na origem. Façamos a mudança de coordenadas

$$E : \mathbf{z} \mapsto \mathbf{w} = \epsilon^{-1} \mathbf{z} \tag{1.29}$$

com $\epsilon \neq 0$. Tome $\alpha = \beta = \epsilon^{-1}$ do exemplo 1.2.9, então E é uma transformação $\epsilon^{-2}-$simplética. Assim, o novo Hamiltoniano satisfaz

$$\begin{aligned} H^*(\mathbf{w}) &= \frac{1}{\epsilon^2} H(E^{-1}(\mathbf{z})) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} H(\epsilon \mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} [\frac{1}{2} \epsilon^2 \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w} + K(\epsilon \mathbf{w})] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w} + \frac{1}{\epsilon^2} K(\epsilon \mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

Para entender o significado $\mathcal{O}(\epsilon) = \epsilon^{-2}K(\epsilon\mathbf{w})$ devemos lembrar que pelas hipóteses K começa ao menos com termos de terceira ordem do desenvolvimento da série de Taylor em torno da origem, isto é,

$$K(\mathbf{z}) = \sum_{i_1+\cdots+i_{2n}=3} a_{i_1}\cdots a_{1_{2n}} z_1^{i_1}\cdots z_{2n}^{i_{2n}} + \cdots \tag{1.30}$$

A reticência foi utilizada para denotar a existência de termos de ordem superior. Agora faça $\mathbf{z} = \epsilon\mathbf{w}$ e temos

$$K(\epsilon\mathbf{w}) = \epsilon^3 K(\mathbf{w}). \tag{1.31}$$

Como $\mathbf{z}$ está na vizinhança da origem, $\epsilon\mathbf{w}$ também está, com isso,

$$|\epsilon^{-2}K(\epsilon\mathbf{w})| \leq C\epsilon \tag{1.32}$$

para alguma constante $C \geq 0$, $\mathbf{w}$ próximo da origem e ϵ limitado.

Exemplo 1.2.12. Considere a mudança de coordenadas polares no plano dada por

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}.$$

Usando a notação $z = (r, \theta)$ e $\xi = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e definindo

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

É claro que Φ é um difeomorfismo e satisfaz

$$[D_z\Phi(z)]^T\mathbf{J}[D_z\Phi(z)] = r\mathbf{J},$$

onde $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, a transformação Φ não é simplética.

No entanto uma pequena alteração permite-nos conseguir uma transformação simplética a partir das coordenadas polares no plano. De fato, considere a transformação

$$\Psi(z) = (\sqrt{2r}\cos\theta, \sqrt{2r}\sin\theta).$$

Verifica-se neste caso que

$$[D_z\Phi(z)]^T\mathbf{J}[D_z\Phi(z)] = \mathbf{J}.$$

1.3 Estabilidade no sentido de Lyapunov

Nesta seção desenvolvemos o conceito de pontos de solução de equilíbrio no sistema de equações diferenciais ordinárias.

Considere

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \tag{1.33}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto.

Note que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ é solução de (1.33) se, e somente se, $f(\mathbf{x}^*, t) = 0$, para todo $t \geq 0$. Daí, dizemos que $\mathbf{x}^*$ é uma **solução de equilíbrio** ou simplesmente um equilíbrio de (1.33). Outro termo usado para o equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é **ponto de singularidade**.

Seja $\mathbf{x}^*$ uma solução de (1.33) e faça $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{x}^*(t)$, temos então que $\mathbf{x}(t)$ é solução de (1.33) se, e somente se, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$ é uma solução de

$$\dot{\mathbf{z}} = g(\mathbf{z}, t) \tag{1.34}$$

onde $g(\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{z}(t) + \mathbf{x}^*, t)$. A solução de equilíbrio da equação (1.34) corresponde a $\mathbf{z}^* = \mathbf{0}$. Assim, a menos de uma translação, podemos considerar a origem como o equilíbrio do sistema em questão.

Da teoria básica de EDO, podemos garantir que cada solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ depende continuamente de t e suas condições iniciais $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Duas soluções que iniciam próximas, permanecem próximas para um tempo suficientemente grande, mas finito.

O natural é pensar que se duas soluções começam próximas permanecem próximas por um tempo futuro. Ou será que existem soluções que se desviam, não importando o quão próximos elas iniciarem? Vejamos a próxima definição.

Definição 1.3.1. *Uma solução de equilíbrio* $\mathbf{x}^*$ *é* ***estável*** *se para todo* $\epsilon > 0$ *existir* $\delta > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$*, tem-se que a solução* $\varphi(t)$ *que satisfaz* $\varphi(t_0) = \mathbf{x}$ *está definida para todo* $t \geq 0$ *e* $\varphi(t) \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$*, para todo* $t \geq 0$*. Se além disso existir* $\delta_1 < \delta$ *tal que* $||\varphi(t_0) - \mathbf{x}(t_0)|| < \delta_1$ *implica* $\lim_{t\to\infty} ||\varphi(t) - \mathbf{x}(t)|| = 0$*, então* $\mathbf{x}^*$ *diz-se* ***assintoticamente estável****. Dizemos que o equilíbrio é* ***instável*** *se não for estável.*

A grosso modo um equilíbrio é estável se soluções que iniciam próximas a ele, permanecem próximas para um tempo futuro. Se além de estável a solução tender ao equilíbrio, então o equilíbrio é assintoticamente estável.

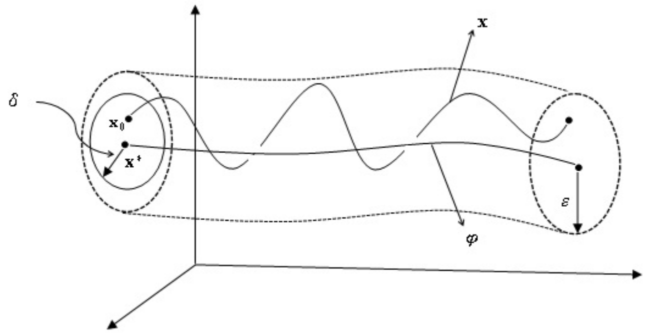

Figura 1.1: Estabilidade no sentido de Lyapunov

Lyapunov é conhecido por seu desenvolvimento da teoria da estabilidade de sistemas dinâmicos, bem como por suas diversas contribuições à física e matemática.

Faremos um estudo de estabilidade para o entendimento do teorema de Dirichlet-Lagrange, enunciado e demonstrado no último capítulo. Em sistemas conservativos, o Hamiltoniano é escrito como a soma da energia potencial com a cinética. Se a origem é um ponto de mínimo estrito para energia potencial, o teorema de Dirichlet-Lagrange nos garante que o equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov.

1.3.1 Sistemas lineares com coeficientes constantes

Consideremos o sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1.35}$$

em que $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Esta matriz constante pode ser vista como um operador linear no $\mathbb{R}^n$ que a cada $\mathbf{x}$ associa $\mathbf{A}\mathbf{x}$, o qual pode ser estendido a um operador linear $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ definido por $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}(x+iy) = \mathbf{A}x + i\mathbf{A}y$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ todos os autovalores distintos da matriz $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ e $\{z_{11}, \dots, z_{m_1 1}, \dots, z_{1k}, \dots, z_{m_k k}\}$ uma base de Jordan de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\mathbf{A}_{\mathbb{C}}(z_{ij}) = \begin{cases} \lambda_j z_{ij} + z_{i+1j}, & j = 1, \dots, k,\ \imath = 1, \dots, m_k - 1 \\ \lambda_j z_{ij}, & j = 1, \dots, k,\ \imath = m_k, \end{cases}$$

onde m_k é a dimensão do bloco de Jordan associado a λ_j.

Uma condição necessária e suficiente para que

$$z(t) = \zeta_{11}(t)z_{11} + \cdots + \zeta_{m_1 1}(t)z_{m_1 1} + \cdots + \zeta_{1k}(t)z_{1k} + \cdots + \zeta_{m_k k}(t)z_{m_k k}$$

seja uma solução da equação $\dot{z}(t) = A_{\mathbb{C}}z(t)$ é que

$$\dot{\zeta}_{1j} = \lambda_j\zeta_{1j}, \quad \dot{\zeta}_{2j} = \lambda_j\zeta_{2j} + \zeta_{1j}, \ldots, \quad \dot{\zeta}_{m_j j} = \lambda_j\zeta_{m_j} + \zeta_{m_j - 1}$$

para $j = 1, \ldots, k$. Assim, a solução fica

$$z(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}[\zeta_{1j}z_{1j} + (\zeta_{1j}t + \zeta_{2j})z_{2j} + \cdots + \frac{1}{m_j!}t^{m_j}\zeta_{1j} + \cdots + \frac{1}{1!}t\zeta_{m_j-1} + \zeta_{mj})z_{m_j j}].$$

É fácil ver que

$$\overline{z}(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\overline{\lambda}_j t}[\overline{\zeta}_{1j}\overline{z}_{1j} + (\overline{\zeta}_{1j}t + \overline{\zeta}_{2j})\overline{z}_{2j} + \cdots + (\frac{1}{m_j!}t^{m_j}\overline{\zeta}_{1j} + \cdots + \frac{1}{1!}t\overline{\zeta}_{m_j-1} + \overline{\zeta}_{mj})\overline{z}_{m_j j}]$$

também é uma solução de $\dot{z}(t) = A_{\mathbb{C}}z(t)$. Assim as partes real, $x(t) = \frac{z(t)+\overline{z}(t)}{2}$ e imaginária, $y(t) = \frac{z(t)-\overline{z}(t)}{2i}$ são soluções reais do sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Com o que foi feito está demonstrado o próximo teorema.

Teorema 1.3.2. *Uma solução geral do sistema* (1.35) *é da forma*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{m_j-1}(A_{lj}t^l e^{\alpha_j t}cos(b_j t) + B_{lj}t^l e^{\alpha_j t}sen(b_j t))$$

onde $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ são os autovalores de $\mathbf{A}$, m_j é a dimensão do bloco de Jordan associado ao autovalor λ_j, A_{lj} e B_{lj} são vetores fixos do $\mathbb{R}^n$ para $j = 1\ldots, k$ e $l = 1, \ldots, m_j$.

Pelo Teorema 1.3.2 visto acima temos:

Teorema 1.3.3. *Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ e suponha que J_λ é o bloco de Jordan em $\mathbb{C}$ associado a λ. Tem-se para a solução nula do sistema* (1.35) *as seguintes afirmações:*

1. *Se $\mathbf{A}$ é uma matriz não singular, o equilíbrio é:*

   (a) *assintoticamente estável no sentido de Lyapunov se, e somente se, $Re(\lambda_k) < 0$ para todo $k = 1, ..., n$;*

(b) *estável, mas não assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se, e somente se,* $\mathbf{A}$ *tem pelo menos um par de autovalores imaginários puros, cada bloco de Jordan* J_λ *(em* $\mathbb{C}$*) associado a cada autovalor imaginário puro* λ *é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*

(c) *instável nos demais casos.*

2. *Se* $\mathbf{A}$ *é uma matriz singular, o equilíbrio é:*

    (a) *estável no sentido de Lyapunov se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal;*

    (b) *estável no sentido de Lyapunov no caso em que* $\mathbf{A}$ *tem ao menos um par de autovalores imaginários puros, sempre que cada bloco de Jordan* J_λ *(em* $\mathbb{C}$*) associado a cada autovalor imaginário puro* λ *seja diagonal, o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*

    (c) *instável nos demais casos.*

Podemos exibir alguns resultados específicos de sistemas Hamiltonianos com coeficientes constantes. Pelo teorema 1.1.5 o polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é par. Assim, se λ é autovalor de $\mathbf{A}$ então $-\lambda$ também é autovalor desta matriz.

Então, em sistemas Hamiltonianos lineares, não é possível haver estabilidade assintótica, pois se a parte real de λ for negativa, a parte real de $-\lambda$ é positiva e vice-versa. Este resultado se estende para o caso não-linear, pois, pelo teorema de Arnold-Liouville [20], resultado de equações diferenciais ordinárias, o fluxo do sistema preserva volume.

Assim, faz-se necessário obter resultados nos casos degenerados, isto é, a parte real dos autovalores é nula. Considerando o sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, vamos estudar o caso em que todos autovalores são nulos ou *duas frequências nulas* e o caso em que há um par de autovalor nulo e outro imaginário puro ($\lambda = \pm\omega i, \omega \neq 0$), este é, somente *uma frequência nula*.

Contudo, podemos caracterizar a estabilidade de um sistema Hamiltoniano linear com coeficientes constantes, a partir do teorema (1.3.3).

Teorema 1.3.4. *Seja o sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$*, com* $\mathbf{A}$ *uma matriz Hamiltoniana constante. O equilíbrio nulo deste sistema é:*

1. *estável se, e somente se, todos autovalores são imaginários puros e a matriz* $\mathbf{A}$ *for diagonalizável, com* $\mathbf{A}$ *uma matriz não singular.*

2. *estável se, e somente se, a matriz* $\mathbf{A}$ *for diagonalizável, com* $\mathbf{A}$ *uma matriz singular.*

1.3.2 Sistemas Hamiltonianos quase lineares

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + g(\mathbf{z}, t) \tag{1.36}$$

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz Hamiltoniana e a função g é tal que

$$g(\mathbf{0}, t) \equiv 0 \text{ e } \lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{0}} \frac{g(\mathbf{z}, t)}{||\mathbf{z}||} = 0 \tag{1.37}$$

para cada $t \in I \subset \mathbb{R}$. Um sistema deste tipo é chamado **Quase Linear**. Podemos enunciar um teorema baseado em Hale [13], o qual nos garante a instabilidade para este tipo de sistema.

Teorema 1.3.5. *Consideremos o sistema* (1.36) *definido em*

$$\Omega_b = \{(\mathbf{z}, t) \in U \times I \ / \ ||\mathbf{z}|| < b\}$$

satisfazendo a propriedade (1.37)*, com* g *contínua, convergindo uniformemente em* t *e suponha ainda que o sistema* (1.36) *tenha soluções únicas em todo ponto. Então, se algum valor próprio de* $\mathbf{A}$ *tem parte real positiva, a solução de equilíbrio nula do sistema não linear* (1.36) *é instável.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18]. O mesmo resultado ocorre quando sistema é autônomo.

1.3.3 Os critérios de Lyapunov e os teoremas de Chetaev

O método direto de Lyapunov para estudo de estabilidade foi desenvolvido pelo matemático russo A. Lyapunov no final do século XIX. Tem este nome, método direto de Lyapunov, pois aplica-se diretamente nas equações de movimento, sem qualquer conhecimento das soluções.

Considere o sistema autônomo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{1.38}$$

onde f é de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, defina

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, f(\mathbf{x}) \right\rangle.$$

Isto é, $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(\varphi_{\mathbf{x}}(t))$, com $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ a solução de (1.38) passando por $\mathbf{x} \in \Omega$.

Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto de singularidade do sistema (1.38). Uma função de Lyapunov para $\mathbf{x}^*$ é uma função $V : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável definida em um aberto Ω ($\mathbf{x}^* \in \Omega$), satisfazendo às seguintes condições:

(a) $V(\mathbf{x}^*) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0, \forall\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$;

(b) $\dot{V} \leq 0$ em Ω;

A função de Lyapunov V diz-se *estrita* quando

(c) $\dot{V} < 0$ em $\Omega - \{\mathbf{x}^*\}$.

Teorema 1.3.6 (**Lyapunov - Caso Autônomo**). *Seja* $\mathbf{x}^*$ *um ponto de equilíbrio de* (1.38). *Se existe uma função de Lyapunov para* $\mathbf{x}^*$, *então o mesmo é estável. Se a função for estrita,* $\mathbf{x}^*$ *é assintoticamente estável.*

Demonstração: Seja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para $\mathbf{x}^*$. Dado $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|| \leq \delta\} \subset \Omega$, o número $m = \min\{V(x); ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|| = \delta\}$ é positivo. Mas, a função V é contínua, então existe um aberto $\Omega_1 \subset B(\mathbf{x}^* \in \Omega_1)$ tal que $V(\mathbf{x}) < m$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega_1$. Logo, $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ permanece no interior de B para todo $t \geq 0$, uma vez que V não cresce ao longo das soluções de (1.38). Pela definição 1.3.1, $\mathbf{x}^*$ é estável.

Suponhamos agora que $\dot{V} < 0$ em $\Omega - \{\mathbf{x}^*\}$. Sejam $\mathbf{x} \in \Omega_1$ e $\{t_n\}$ uma sequência crescente de números reais positivos tal que $\varphi_{\mathbf{x}}(t_n) \to \mathbf{y} \in B$. Temos $V(\varphi_{\mathbf{x}}(t_n)) \to V(\mathbf{y})$ e $V(\varphi_{\mathbf{x}}(t > V(\mathbf{y})), \forall\ t \geq 0$. Tomemos $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$, então $V(\varphi_{\mathbf{y}}(t)) < V(\mathbf{y})$ e para todo $\mathbf{z}$ suficientemente próximo de $\mathbf{y}$, $V(\varphi_{\mathbf{z}}(1)) < V(\mathbf{y})$. Para n suficientemente grande, $V(\varphi_{\mathbf{x}}(t_n + 1)) < V(\varphi(\mathbf{y}))$, o que é um absurdo. Daí, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$. Como B é compacto, segue que $\mathbf{x}^*$ é assintoticamente estável. ∎

Esta função de Lyapunov nos garante estabilidade ou estabilidade assintótica para o sistema. Mas, na seção anterior, já vimos que em sistema Hamiltonianos com coeficientes constantes, não é possível o equilíbrio ser assintoticamente estável no sentido de Lyapunov.

Teorema 1.3.7 (**Chetaev - Caso Autônomo**). *Considere o sistema autônomo* (1.38) *e seja* $\mathbf{x}^*$ *um ponto de equilíbrio. Seja* D *um domínio em* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $\mathbf{x}^* \in \partial D$. *Suponhamos que exista uma função de classe* C^1, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $V > 0$ *com* $\dot{V} > 0$ *em* D *e* $V \equiv 0$ *em* ∂D. *Então* $\mathbf{x}^*$ *é instável.*

Demonstração: Considere B uma bola fechada com centro no equilíbrio $\mathbf{x}^*$ e contida em Ω. Seja $\mathbf{x} \in D \cap \text{int}B$ e suponhamos $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ esteja definida nesta bola para todo $t \geq 0$. Note que V cresce ao longo das soluções de (1.38) em seu domínio D, desta forma, $V(\varphi_{\mathbf{x}}(t)) \geq V(\mathbf{x}) > 0$ para todo $t \geq 0$ tal que $\varphi_{\mathbf{x}}(t) \in D$. Para cada compacto Ω disjunto de ∂D, $\varphi_{\mathbf{x}}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$.

Por V ser contínua, existe $\delta > 0$ tal que $d(\varphi_{\mathbf{x}}(t), \partial\Omega) \geq \delta$, para todo $t \geq 0$. Mas, f e V não de classe C^1, daí, existe $m > 0$ para o qual $\dot{V}(\varphi_{\mathbf{x}}(t)) \geq m, \forall\ t \geq 0$. Logo,

$$V(\varphi_{\mathbf{x}}(t)) > V(\mathbf{x}) + \int_0^t m\text{d}s = V(\mathbf{x}) + mt, \forall\ t \geq 0.$$

Sabemos que V é limitada em B, absurdo. Então, para algum t, a solução $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ deve sair de B, ou seja, $\mathbf{x}^*$ é instável. ∎

Um dos teoremas fundamentais enunciado nesta dissertação foi o Teorema da Curva Invariante. Porém, para aplicá-lo, precisamos de sistemas com um grau de liberdade. Desta forma, é necessário a redução deste grau do sistema Hamiltoniano autônomo. Contudo, após a redução, obtemos um sistema não autônomo e periódico.

Portanto, considere o sistema não autônomo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \tag{1.39}$$

onde $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, com Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, é uma função de classe C^1.

Teorema 1.3.8 (**Instabilidade de Lyapunov - Caso Não Autônomo**). *Suponha que o equilíbrio* $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ *é uma solução do sistema* (1.39). *Suponha que exista uma função real* V *de classe* C^1 *tal que*

1. $V(\mathbf{x}, t) \to 0$ *quando* $||\mathbf{x}|| \to 0$ *uniformemente em* t;

2. $\dot{V}$ *é definida positiva numa vizinhança da origem;*

3. *A partir de certos valores de t, $V(\mathbf{x}, t)$ assume valores positivos em cada vizinhança suficientemente pequena da origem.*

Então o equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é instável.

Demonstração: A prova deste teorema pode ser encontrada em [18]. ∎

A seguir, veremos uma versão do teorema de Chetaev para o caso não autônomo. Mas antes, é necessário uma definição de função $\frac{dV}{dt}$ positiva definida.

Definição 1.3.9. *Seja $V(\mathbf{x}, t)$ uma função definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Chamaremos a função $\frac{dV}{dt}$ positiva definida na região $V > 0$ (para $\mathbf{x} \in \Omega, V(\mathbf{x}, t) > \delta$) desde que para todo número positivo $\epsilon > 0$, exista $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $\frac{dV}{dt} > \epsilon$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega, V(\mathbf{x}, t) > \delta$.*

Mostrar que $\frac{dV}{dt}$ tem a propriedade da definição 1.3.9 não é trivial. Por isso, demonstramos o próximo resultado.

Proposição 1.3.10. *Seja (r, ϕ) coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$, $V(r, \phi) = r^l h(r)\Omega(\phi)$ $(l > 0)$, $0 < h(r) < 1$, h é C^1 numa vizinhança do equilíbrio para $r > 0$ e $\Omega(\phi)$ é C^1. Suponha que a região $V > 0$ é definida para $a < \phi < b$ e*

1. *A condição $\Omega(\phi) < 1$ é satisfeita;*

2. *$\frac{dV}{dt} = Ar^\alpha h(r)g(\phi) + \mathcal{O}(\eta)$, com η suficientimente pequeno, $A > 0, \alpha > 1$ e g contínua, $g(\phi) > 0, \forall\ \phi \in [a, b]$.*

Então, $\frac{dV}{dt}$ é positiva definida na região $V > 0$.

Demonstração: Desde que g é contínua, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, g assume um valor de mínimo $m > 0$, isto é, $g(\phi) \geq m$. Na região $V > 0$, temos $0 < \Omega(\phi), h(r) < 1$. Assim, se $V > \epsilon > 0$ temos $r > \epsilon^{\frac{1}{l}}$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= Ar^\alpha h(r)g(\phi) + \mathcal{O}(\eta) \\ &\geq A\epsilon^{\frac{\alpha}{l}} m + \mathcal{O}(\eta) \\ &> \frac{A\epsilon^{\frac{\alpha}{l}} m}{2} = \delta \end{aligned}$$

Com η suficientemente pequeno, tome $|\mathcal{O}(\eta)| < \frac{A\epsilon^{\frac{\alpha}{l}} m}{2}$. ∎

Teorema 1.3.11 (Chetaev - Caso Não Autônomo). *Considere a função $V(\mathbf{x}, t)$ definida para todo $t \geq 0$. Suponha que para toda norma arbitrária, a derivada $\frac{dV}{dt}$ ao longo das trajetórias da equação $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$, com $f(\mathbf{0}, t) = 0, \forall\, t$, é positiva definida na região $V > 0$. Então, a solução de equilíbrio $\mathbf{x}^*(t) = 0$ é instável.*

Demonstração: A prova deste teorema se encontra em [6]. ∎

1.4 O teorema da Curva Invariante

Nosso principal objetivo é enunciar o Teorema da Curva Invariante, tomamos como base o livro do Meyer [21]. Considere

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{x}) \tag{1.40}$$

onde a função f está definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. A partir de agora o ponto de equilíbrio será a origem, considere o difeomorfismo

$$F(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + f(\mathbf{z}) \tag{1.41}$$

numa vizinhança do ponto fixo origem de $\mathbb{R}^n$; $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\partial f(\mathbf{0})/\partial \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Chamaremos de *multiplicadores* do ponto fixo os autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

Definição 1.4.1. *Um ponto fixo ζ de f é dito positivamente estável se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||F^k(\mathbf{x}) - \zeta|| < \epsilon$ para todo $||\mathbf{x} - \zeta|| < \delta$ e $k > 0$. Da mesma forma, para $k < 0$, define-se ponto fixo negativamente estável. O ponto fixo é estável se for negativamente e positivamente estável. Se não for estável, o mesmo será instável. O ponto fixo é dito assintoticamente estável se existe $\eta > 0$ tal que $F^k(\mathbf{x}) \to 0$ quando $k \to \infty$ para todo $||\mathbf{x} - \zeta|| < \eta$.*

Observação 1.4.2. Note que existem semelhanças nas definições já vistas anteriormente. Da mesma forma, existem analogias aos critérios de equações diferenciais vistas a seguir.

- O ponto fixo é assintoticamente estável se todos os multiplicadores tem módulo menor que 1.
- Se existe um multiplicador com módulo maior que 1, então o ponto fixo é instável.

- Se, em (1.41), $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ e se todos os multiplicadores tem módulo 1, então o ponto fixo é estável, mas não assintoticamente estável.

- Se o difeomorfismo for simplético (simplectomorfismo), então o primeiro item não se aplica, pois se λ é um autovalor, então λ^{-1} também é autovalor de $\mathbf{A}$. De fato, basta notar que se $\lambda = a + bi$ é autovalor de $\mathbf{A}$ cujo módulo é menor que 1, então o módulo de λ^{-1} é maior do que 1.

- No caso planar, onde o difeomorfismo (1.41) tema origem como ponto fixo, a aplicação em questão preserva área. Quando, além disso, a origem é um ponto fixo elíptico, ou seja, os autovalores de $\mathbf{A}$, $\lambda, \bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ e $|\lambda| = 1$. Se λ é uma raiz da unidade, então a origem é estável.

- Ainda no caso planar, se λ não é uma $m-$ésima raiz da unidade, a aplicação pode ser colocada na forma normal até termos de ordem três. Isto é, existe uma mudança de coordenadas simpléticas nas variáveis ação-ângulo (I, φ) tal que nestas coordenadas

$$F : (I, \varphi) \to (I', \varphi') \tag{1.42}$$

  com $I' = I + c(I, \varphi)$ e $\varphi' = \varphi + \omega + \alpha I + d(I, \varphi)$, $\lambda = e^{\omega i}$, a e d são funções de ordem $\mathcal{O}(I^{\frac{3}{2}})$. Por enquanto, vamos assumir c e d nulos. A aplicação (1.42) leva o círculo $I = I_0$ nele mesmo. Se $\alpha \neq 0$, cada círculo é rotacionado num ângulo $\theta = \omega + \alpha I_0$.

  Se $\theta = 2\pi \frac{p}{q}$, com p e q primos relativos entre si, então cada ponto sobre o círculo é um ponto de período q.

  Se $\theta = 2\pi\delta$, com δ um número irracional, então as órbitas de um ponto sobre o círculo $I = I_0$ são densas.

  Muitos destes círculos persistem como curvas invariantes nos teoremas de Mecânica Hamiltoniana.

Dados $\epsilon > 0$ e $\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existem inteiros p e q, primos entre si, tais que

$$\left| \delta - \frac{p}{q} \right| < \frac{\epsilon}{q}. \tag{1.43}$$

A fórmula (1.43) nos diz quando um número irracional pode ser aproximado para um número racional e, além disso, quão boa é esta aproximação.

Teorema 1.4.3. *Seja U qualquer intervalo fechado e $K > 0$ uma constante fixa. Então, o conjunto*

$$U(K) = \left\{ \delta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U \ / \ \left| \delta - \frac{p}{q} \right| > \frac{K}{q^3}, p, q \in \mathbb{Z} \ e \ q \neq 0 \right\} \tag{1.44}$$

é denso em U e tem medida positiva. A medida de $U(K)$ tende a zero quando K tende a zero. Além disso, todos os números algébricos irracionais, como $\sqrt{2}$, pertencem a $U(K)$, para algum $K > 0$.

A demonstração pode ser encontrada em Arnald [1]. Por fim, vamos enunciar o Teorema da Curva Invariante.

Teorema 1.4.4 (Teorema da Curva Invariante de Moser). *Considere a aplicação*

$$F : (r, \varphi) \to (r', \varphi')$$

dada por:

$$r' = r + \epsilon^{r+s} c(r, \varphi, \epsilon) \quad e \quad \varphi' = \varphi + \omega + \epsilon^s h(r) + \epsilon^{r+s} d(r, \varphi, \epsilon) \tag{1.45}$$

onde

1. *c e d são funções diferenciáveis, $0 \leq a \leq r \leq b \leq \infty$ e $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$;*
2. *para todo φ, c e d são funções $2\pi-$periódicas em φ;*
3. *$r \geq 1$ e $s \geq 0$ são inteiros;*
4. *h é uma função diferenciável $0 \leq a \leq r \leq b \leq \infty$;*
5. *$\frac{dh}{dr} \neq 0$, para todo $0 \leq a \leq r \leq b \leq \infty$;*
6. *se E é qualquer curva fechada contínua da forma*

   $$E = \{(r, \varphi)/r = \Theta(\varphi), \Theta : \mathbb{R} \to [a, b] \ \textit{contínua e } 2\pi \ \textit{periódica}\}$$

   então, $E \cap F(E) \neq \emptyset$.

Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe uma curva contínua, Γ, $F-$invariante da forma

$$\Gamma = \{(r, \varphi)/r = \Phi(\varphi), \Phi : \mathbb{R} \to [a, b] \ \textit{contínua e } 2\pi \ \textit{periódica}\}.$$

O número de rotação de F sobre Γ é irracional o qual é defeituosamente aproximado por números racionais no sentido do teorema anterior.

A demonstração é bastante técnica pode ser encontrada em Siegel [26].

Capítulo 2

Formas normais

Nosso objetivo neste capítulo é obter uma transformação simplética tal que o Hamiltoniano assuma uma forma particular, em alguns casos, esta forma possui menos fatores que o Hamiltoniano original. Para este fim, tomaremos como base o Markeev [19] *no caso de somente uma frequência nula e Sokol'skll* [29] *quando duas frequências forem nulas em sistemas autônomos com dois graus de liberdade. Além disso, será abordado a forma normal de Lie, como principal referência o Meyer* [21]*, com intuito de entender o método de Deprit-Hori.*

2.1 Introdução

Considere um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade e suponha que a origem do espaço de fase corresponda a um equilíbrio desse sistema. Assuma que a função Hamiltoniana é analítica numa vizinhança desse ponto de singularidade e escrevamos

$$H = H_2(\mathbf{q},\mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q},\mathbf{p}) + \cdots + H_m(\mathbf{q},\mathbf{p}) + \cdots \,, \tag{2.1}$$

onde cada H_m é um polinômio homogêneo de grau m cuja expressão nas coordenadas posição $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ e momento $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ é dada por:

$$H_m = \sum_{l_1+l_2+k_1+k_2=m} h_{l_1l_2k_1k_2} q_1^{l_1} q_2^{l_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2}. \tag{2.2}$$

Pensando em simplificá-la, vamos desenvolver o método de Deprit-Hori no intuito de encontrarmos a forma normal de Lie dos termos de ordem três e, se possível, os demais termos. Em outras palavras, mostraremos que existe uma mudança formal de coordenadas simplética a qual simplificará os fatores $H_m, m \geq 3$, da função (2.1).

Mas antes, com uma mudança de coordenadas simplética, faremos algoritmos para normalização da parte quadrática do Hamiltoniano (2.1) em duas situações distintas, a primeira quando temos apenas uma frequência nula e a segunda para duas frequências nulas.

2.2 Forma normal de sistemas Hamiltonianos lineares

Considere o sistema Hamiltoniano linear autônomo real

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Az}, \quad \mathbf{z}^T = (\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{2.3}$$

em que $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$, onde a matriz $\mathbf{S}$ é simétrica real de ordem $2n$ e a matiz $\mathbf{J}$, de mesma ordem, já foi definida nos preliminares ($\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T, \mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}_{2n}, \det \mathbf{J} = 1$). Então considerando a mudança de coordenadas induzida por uma matriz $\mathbf{P} \in Sp(n, \mathbb{R})$, da forma $\mathbf{z} = \mathbf{Pw}$, obtemos

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z} \Rightarrow \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Az} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APw} = \mathbf{Bw}$$

com $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. Afirmamos que a matriz $\mathbf{B}$ é Hamiltoniana. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^T\mathbf{J} + \mathbf{JB} &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^T\mathbf{J} + \mathbf{J}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) \\
&= \mathbf{P}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}^{-T}\mathbf{J} + \mathbf{JP}^{-1}\mathbf{AP} \\
&= \mathbf{P}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}^{-T}\mathbf{P}^T\mathbf{JP} + \mathbf{P}^T\mathbf{JPP}^{-1}\mathbf{AP} \\
&= \mathbf{P}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{JA})\mathbf{P} \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Desta forma provamos que uma mudança de coordenadas induzida por uma matriz simplética leva o sistema (2.3) no sistema linear real $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Bw}$. A matriz $\mathbf{B}$ pode assumir uma forma particularmente simples, chamada de forma normal. Para isso, em alguns problemas, basta encontrar a matriz simplética real $\mathbf{P}$.

Defina uma relação $\sim$ entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ pertencentes ao conjunto de todas as matrizes Hamiltonianas em $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ da seguinte forma

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Leftrightarrow \exists\, \mathbf{P} \in Sp(n, \mathbb{R}) / \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}. \tag{2.4}$$

É fácil verificar que a relação definida em (2.4) é de equivalência. Para encontrar uma forma normal de $\mathbf{A} \in sp(n, \mathbb{R})$ basta encontrar um elemento $\mathbf{B}$ da classe de $\mathbf{A}$ que tenha expressões mais simples. Do ponto de vista da função Hamiltoniana, queremos obter uma transformação simplética tal que o novo Hamiltoninano tenha menos termos.

Para a normalização da parte quadrática do Hamiltoniano (2.3) façamos uma análise nos autovalores da matriz $\mathbf{JS}$. Para isso, considere a equação característica

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JS} - \lambda \mathbf{I}_{2n}). \tag{2.5}$$

Vimos, no capítulo anterior, que o polinômio $p(\lambda)$ é par, isto é, $p(\lambda) = p(-\lambda)$. Por conseguinte, se λ é uma raiz de (2.5) com parte real positiva, $-\lambda$ é outra raiz da equação característica com parte real negativa e vice-versa. Por isso, para estabilidade do sistema (2.3), é necessário que todas as raízes da equação (2.5) sejam imaginárias puras.

Temos intenção de fornecer alguns resultados de estabilidade de equilíbrio em sistemas Hamiltonianos degenerados com dois graus de liberdade ($n = 2$), para isso, vamos detalhar os processos de normalização da parte quadrática da função Hamiltoniana em dois casos. O primeiro, quando um par de raízes de (2.5) é nulo e a outro imaginário puro, ou seja, uma frequência nula, em seguida quando duas frequências são nulas.

2.2.1 Caso de uma frequência nula

Considere que a equação característica (2.5) tem duas raízes imaginárias puras e duas raízes nulas e, com isso, vamos descrever o algoritmo de construção da normalização da parte quadrática do sistema Hamiltoniano.

Seja $H_2 = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ essa função quadrática real, onde $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^4$ e $\mathbf{S}$ uma matriz simétrica tal que

$$H_2(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z}, \;\; \mathbf{z}^T = (\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Faremos uma mudança de variável por meio de uma matriz $\mathbf{N}$, a qual garante uma forma particular da parte quadrática do Hamiltoniano (2.1).

Chamaremos ω a frequência em questão, lembre-se que estamos no caso em que a equação característica da matriz associada ao termo H_2 tem duas raízes nulas e duas raízes imaginárias puras, isto é, $\lambda = \pm\omega i$.

Conforme o livro do Arnold [1], mostraremos que existe uma mudança canônica de coordenadas simplética $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ tal que a forma normal de H_2 do Hamiltoniano de acordo com forma canônica de Jordan da matriz **JS** é, sem perda de generalidade,

$$H_2^* = h_2 + \frac{1}{2}\delta_2\omega(Q_2^2 + P_2^2) \quad (\delta_2 = \pm 1) \tag{2.6}$$

com h_2 uma função dependendo de Q_1 e P_1. Assim, se $h_2 = 0$, temos o caso diagonalizável:

$$H_2^* = \frac{1}{2}\delta_2\omega(Q_2^2 + P_2^2). \tag{2.7}$$

Para o caso não diagonalizável, (2.1) em sua forma normal truncada é

$$H_2^* = \frac{1}{2}\delta_1\omega(Q_2^2 + P_2^2) + \frac{1}{2}\delta_2\omega P_1^2. \tag{2.8}$$

com δ_1 e δ_2 podendo assumir os valores 1 ou -1.

Em ambos os casos, fixe a notação

$$\mathbf{y}^T = (Q_1, Q_2, P_1, P_2).$$

Então, vemos que a forma normal do sistema linear (2.3) pode ser escrita na forma do seguinte sistema:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{JS}^*\mathbf{y} \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{S}^*$ é uma matriz diagonal real, cujos elementos na diagonal são definidos por $h_{11}^* = h_{33}^* = \delta_1\omega, h_{22}^* = 0, h_{44}^* = \delta_2$. A mudança da variável $\mathbf{z}$ para variável $\mathbf{y}$ é determinada por meio da matriz $\mathbf{N}$ sob a forma da equação

$$\mathbf{z} = \mathbf{N}\mathbf{y}. \tag{2.10}$$

Desta forma,

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{N}\frac{d\mathbf{y}}{dt}$$

$$\mathbf{JSz} = \mathbf{NJS}^*\mathbf{y}$$

$$\mathbf{JSNy} = \mathbf{NJS}^*\mathbf{y}$$

$$\mathbf{JSN} = \mathbf{NJS}^* \tag{2.11}$$

Além disso, a transformação que fizemos, por ser simplética,

$$\mathbf{N}^T\mathbf{JN} = \mathbf{J}. \tag{2.12}$$

A solução da equação (2.11) não é única. A fim de encontrar a transformação de normalização é preciso escolher, das infinitas soluções, aquela que satisfaça também (2.12). Faça $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$, com

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -i\mathbf{P} \\ -i\mathbf{P} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$ em (2.11) temos $\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{JSN}_1 = \mathbf{N}_2\mathbf{JS}^*\mathbf{N}_2^{-1} = \mathbf{G}$, cujos elementos da diagonal principal satisfazem a equação

$$\mathbf{g}_{kk} = -\mathbf{g}_{n+k,n+k} = i\delta_k\omega, (k = 1, 2).$$

Donde concluímos que a matriz $\mathbf{G}$ é a forma canônica de Jordan da matriz $\mathbf{JS}$. Daí obtemos,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} i\delta_1\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & -i\delta_1\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

A primeira e a terceira coluna são os autovetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$, associados aos autovalores $i\delta_1\omega$ e $-i\delta_2\omega$, respectivamente. As demais colunas desta matriz são compostas pelo autovetor $\mathbf{e}_2$ e o vetor nulo.

Sejam $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{r}_1^* + i\mathbf{s}_1^*$ autovetores arbitrários da matriz $\mathbf{JS}$ correspondente aos autovalores $i\omega$ e $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{g}_2^*$ o vetor associado ao autovetor nulo. Então

$$\mathbf{JSe}_1^* = i\omega\mathbf{e}_1^*, \quad \mathbf{JSe}_2^* = 0, \quad \mathbf{JSg}_2^* = \mathbf{e}_2^*. \tag{2.14}$$

com

$$\mathbf{e}_1 = c_1(\delta_1\mathbf{r}_1^* + i\mathbf{s}_1^*), \quad \mathbf{e}_2 = c_2\delta_2\mathbf{e}_2^*, \quad \mathbf{e}_3 = ic_1(\delta_1\mathbf{r}_1^* - i\mathbf{s}_1^*), \quad \mathbf{g}_2 = c_2\mathbf{g}_2^*. \tag{2.15}$$

onde c_1 e c_2 são números reais. De acordo com as equações (2.14) e (2.15) podemos construir a matriz $\mathbf{N}_1$ como desejado e obtemos

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}c_1\delta_1\mathbf{r}_1^* & c_2\delta_2\mathbf{e}_2^* & \sqrt{2}c_1\mathbf{s}_1^* & c_2\mathbf{g}_2 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

As constantes $c_i, \delta_i (i = 1, 2)$ são determinadas pela equação (2.12). De fato, usando (2.16) temos

$$\mathbf{N}^T\mathbf{JN} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal de segunda ordem cujas entradas são

$$d_{11} = 2c_1^2\delta_1 < \mathbf{r}_1^*, \mathbf{J}\mathbf{s}_1^* >= 1 \quad \text{e} \quad d_{22} = 2c_2^2\delta_2 < \mathbf{e}_2^*, \mathbf{J}\mathbf{g}_2^* >= 1.$$

Por isso, as matrizes $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$, consequentemente $\mathbf{N}$, são matrizes não nulas. Temos ainda

$$\delta_1 = sign < \mathbf{r}_1^*, \mathbf{J}\mathbf{s}_1^* >, \quad \delta_2 = sign < \mathbf{e}_2^*, \mathbf{J}\mathbf{g}_2^* > \tag{2.17}$$

e as constantes $c_1 = \sqrt{2}\kappa_1/2$ e $c_2 = \kappa_2$, com

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{| < \mathbf{r}_1^*, \mathbf{J}\mathbf{s}_1^* > |}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{| < \mathbf{e}_2^*, \mathbf{J}\mathbf{g}_2^* > |}} \tag{2.18}$$

A partir das equações (2.18) temos outra expressão para as entradas da matriz (2.16) de quarta ordem:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \delta_1\kappa_1\mathbf{r}_1^* & \delta_2\kappa_2\mathbf{e}_2^* & \kappa_1\mathbf{s}_1^* & \kappa_2\mathbf{g}_2^* \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

2.2.2 Caso de duas frequências nulas

Suponha que a equação característica (2.5) tenha todas suas raízes nulas. Este é o caso em que têm duas frequências nulas ou, simplesmente, dupla ressonância de primeira ordem. Primeiro vamos analisar a normalização do sistema linearizado, correspondendo a parte quadrática da função Hamiltonaina.

Para esta finalidade, considere o sistema linearizado (2.3) com dois graus de liberdade. O problema da normalização se reduz em encontrar uma matriz simplética real, tal que a transformação

$$\mathbf{z} = \mathbf{N}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}^T = (Q_1, Q_2, P_1, P_2) \tag{2.20}$$

como anteriormente, se reduz no sistema linear da forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{S}^*\mathbf{y}, \quad \mathbf{S}^* = \left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial \mathbf{y}^2}\right). \tag{2.21}$$

Neste caso, em que os autovalores da matriz $\mathbf{JS}$ são nulos, dependendo do posto da matriz $\mathbf{S}$, o qual denotaremos por $rg(\mathbf{S})$, pode surgir as seguintes expressões:

$$H_2^* = \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1Q_2 \quad (\delta = \pm 1), \quad rg(\mathbf{S}) = 3 \tag{2.22}$$

$$H_2^* = \frac{1}{2}\delta_1 P_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 P_2^2 \quad (\delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 1), \quad rg(\mathbf{S}) = 2 \tag{2.23}$$

$$H_2^* = \frac{1}{2}\delta P_1^2 \quad (\delta = \pm 1), \quad rg(\mathbf{S}) = 1 \tag{2.24}$$

$$H_2^* = 0, \quad rg(\mathbf{S}) = 0 \tag{2.25}$$

Propomos aqui um algoritmo construtivo baseado em Sokol'skii [29] que vai ser usado para encontrar matrizes de normalização para todos os casos acima. A matriz $\mathbf{N}$ deve primeiro reduzir $\mathbf{JS}$ em $\mathbf{JS}^*$, isto é

$$\mathbf{JSN} = \mathbf{NJS}^* \Leftrightarrow \mathbf{N}^{-1}\mathbf{JSN} = \mathbf{JS}^*, \tag{2.26}$$

ou seja, a primeira equação existe se, e somente se, $\mathbf{JS}$ é semelhante a $\mathbf{JS}^*$ e $\mathbf{N}$ deve ser simplética, então

$$\mathbf{N}^T\mathbf{JN} = \mathbf{J}. \tag{2.27}$$

Seja $\mathbf{G}$ uma forma normal de Jordan para esta matriz. Claramente a matriz que reduz $\mathbf{JS}$ na forma normal de Jordan não vai, em geral, ser simplética. Contudo, o produto de matrizes não simpléticas pode ser uma matriz simplética. Nesse sentido, buscamos a matriz normalizadora $\mathbf{N} = \mathbf{AB}$.

Aqui a matriz $\mathbf{A}$ é arbitrária e reduz $\mathbf{JS}$ na forma normal de Jordan, isto é, uma solução não degenerada de $\mathbf{JSA} = \mathbf{AG}$, composta de autovetores e vetores adjuntos $\mathbf{a}_j$ da matriz $\mathbf{JS}$.

A matriz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$, onde $\mathbf{C}$ reduz $\mathbf{JS}^*$ na forma de $\mathbf{G}$. Vejamos,

$$\mathbf{JS}^*\mathbf{C} = \mathbf{CG} \quad \therefore \quad \mathbf{JS}^* = \mathbf{CGB}. \tag{2.28}$$

Por (2.27) obtemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{N}^T\mathbf{JN} \\ &= (\mathbf{AB})^T\mathbf{JAB} \\ &= \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{JA})\mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}^T\mathbf{FB} \end{aligned} \tag{2.29}$$

fazendo $\mathbf{F} = \mathbf{A}^T\mathbf{JA}$ uma matriz anti-simétrica, cujas entradas são da forma $\mathbf{f}_{jn} =< \mathbf{a}, \mathbf{Ja}_n >$. De fato, $\mathbf{F}^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{JA})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{J}^T\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\mathbf{JA} = -\mathbf{F}$.

Um estudo mais detalhado da matriz $\mathbf{F}$ é realizado de acordo com o posto da matriz $\mathbf{JS}$. Faremos cada caso relacionado com as equações (2.22) à (2.25). Essas informações levam a obter $\mathbf{N}$ simplética.

No caso em que $rg(\mathbf{S}) = 0$ a equação (2.25) é óbvia, pois esta condição nos garante que todos os coeficientes da parte quadrática do Hamiltoniano são nulos. Quando $rg(\mathbf{S}) = 1$ sejam

$$\begin{aligned}\mathbf{JSa}_1 &= 0,\\ \mathbf{JSa}_2 &= \mathbf{a}_1,\\ \mathbf{JSa}_3 &= 0,\\ \mathbf{JSa}_4 &= 0.\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta b_1 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} \\ 0 & 0 & -f_{34} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sempre que citados, b_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ se referem a números reais arbitrários; nesta situação tome $b_1 \neq 0$ e como $-f_{34}^2 f_{12} = \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{A})^2 \neq 0$, resta-nos f_{12} e f_{34} serem diferentes de zero. Calculando a equação (2.29) determinamos algumas condições para estas constantes. Mais ainda,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1} & \frac{-b_2}{\delta b_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta b_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando (2.29) temos,

$$\mathbf{B}^T\mathbf{FB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta b_1^2 f_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 b_4 f_{34} \\ -\delta b_1^2 f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_3 b_4 f_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}$$

daí temos as seguintes igualdades:

$$\delta b_1^2 f_{12} = 1 \Rightarrow b_1 = [< \mathbf{a}_1, \mathbf{Ja}_2 >]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{com} \quad \delta = sign(< \mathbf{a}_1, \mathbf{Ja}_2 >) \quad \text{e}$$

$$b_3 b_4 f_{34} = 1 \Rightarrow b_3 = [< \mathbf{a}_3, \mathbf{Ja}_4 >]^{-1}, b_4 = 1 \quad \text{e} \quad b_2 = 0.$$

Por fim, obtemos a matriz

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_1\mathbf{a}_1 & b_3\mathbf{a}_3 & \delta b_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}.$$

De maneira semelhante vamos calcular a matriz $\mathbf{N}$ simplética nas demais situações. Suponhamos o posto da matriz $\mathbf{S}$ igual a 2, isto é, $rg(\mathbf{S}) = 2$. Temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{JSa}_1 &= 0, \\ \mathbf{JSa}_2 &= \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{JSa}_3 &= 0, \\ \mathbf{JSa}_4 &= \mathbf{a}_3. \end{aligned}$$

Sejam, também,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 b_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} \\ 0 & 0 & -f_{34} & 0 \end{bmatrix}.$$

com $f_{12} \neq 0, f_{34} \neq 0$, pois $f_{12}^2 f_{34}^2 = \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{A})^2 \neq 0$. E, pela equação (2.29), temos

$$\mathbf{B}^T\mathbf{F}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta_1 b_1^2 f_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 b_2^2 f_{34} \\ -\delta_1 b_1^2 f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 b_2^2 f_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

Para finalizar, por simplicidade, tomaremos $b_3 = b_4 = 0$ e as expressões ficam

$$\delta_1 b_1^2 f_{12} = 1 \Rightarrow b_1 = |<\mathbf{a}_1, \mathbf{Ja}_2>|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{com} \quad \delta_1 = sign(<\mathbf{a}_1, \mathbf{Ja}_2>) \quad \text{e}$$

$$\delta_2 b_2^2 f_{34} = 1 \Rightarrow b_2 = |<\mathbf{a}_3, \mathbf{Ja}_4>|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{com} \quad \delta_2 = sign(<\mathbf{a}_3, \mathbf{Ja}_4>) \quad \text{e}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_1\mathbf{a}_1 & b_2\mathbf{a}_3 & \delta_1 b_1\mathbf{a}_2 & \delta_2 b_2\mathbf{a}_4 \end{bmatrix}.$$

Faremos o último caso, para isso, considere $rg(\mathbf{S}) = 3$. Temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{JSa}_1 &= 0, \\ \mathbf{JSa}_2 &= \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{JSa}_3 &= \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{JSa}_4 &= \mathbf{a}_3. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta b_2 & b_4 & b_3 & \delta b_1 \\ \delta b_1 & b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{14} \\ 0 & 0 & -f_{14} & 0 \\ 0 & f_{14} & 0 & f_{24} \\ -f_{14} & 0 & -f_{34} & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $f_{14}^4 = \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{A})^2 \neq 0$, resta-nos que $f_{14} \neq 0$. Calculando a equação (2.29) determinamos algumas condições para estas constantes. Obtemos também

$$\mathbf{B}^T\mathbf{F}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta b_1^2 f_{14} & 0 \\ 0 & 0 & -2b_1b_3f_{14} - b_1^2 f_{34} + b_2^2 f_{14} & -\delta b_1^2 f_{14} \\ \delta b_1^2 f_{14} & 2b_1b_3f_{14} + b_1^2 f_{34} - b_2^2 f_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \delta b_1^2 f_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim temos,

$$b_1 = [< \mathbf{a}_1, \mathbf{J}\mathbf{a}_4 >]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{com} \quad \delta = -sign(< \mathbf{a}_1, \mathbf{J}\mathbf{a}_4 >)$$

$$-2b_1b_3f_{14} - b_1^2 f_{34} + b_2^2 f_{14} = 0 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{2}\delta b_1^2 < \mathbf{a}_3, \mathbf{J}\mathbf{a}_4 >$$

tomando $b_2 = b_4 = 0$, por questão de simplicidade.

E, por fim,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \delta b_1 \mathbf{a}_2 & b_2\mathbf{a}_2 + b_1\mathbf{a}_4 & b_3\mathbf{a}_1 + b_1\mathbf{a}_3 & \delta b_1\mathbf{a}_1 \end{bmatrix}.$$

Agora podemos considerar, nos casos de uma frequência nula ou duas frequências nulas, que a parte quadrática da função Hamiltoniana está normalizada.

A seguir, será abordado a forma normal de Lie com intuito de estudarmos o método de Deprit-Hori. Com ele, vamos garantir a existência de uma função geradora $W(\mathbf{z}, \epsilon)$ de tal forma que a expressão do novo Hamiltoniano tenha uma forma particular.

2.3 Forma normal de Lie e método de Deprit-Hori

Considere $H = H(\mathbf{z}, \epsilon)$ uma função Hamiltoniana que depende de um pequeno parâmetro ϵ. Use uma função $W = W(\mathbf{z}, \epsilon)$ de classe C^1 como uma função

Hamiltoniana tendo o parâmetro ϵ como tempo, ou seja,

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\epsilon} = \mathbf{J}\nabla W(\mathbf{z}, \epsilon) \tag{2.30}$$

e considere a solução $\varphi(\mathbf{Z}, \epsilon)$ de (2.30) tal que $\varphi(\mathbf{Z}, 0) = \mathbf{Z}$. Façamos a mudança de variáveis $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{Z}, \epsilon)$ a qual define uma transformação simplética próxima da identidade. A mesma leva $H = H(\mathbf{z}, \epsilon)$ em $H^*(\mathbf{Z}, \epsilon) = H(\varphi(\mathbf{Z}, \epsilon), \epsilon)$.

A função H^* é chamada de transformada de Lie de H gerada por W e a denotaremos por $\mathcal{L}_W H$. Na obtenção de um algoritmo para transformada de Lie, suponhamos que a expansão de H, W, H^* em séries de potências de ϵ sejam

$$H(\mathbf{z}, \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{z}) \tag{2.31}$$

$$W(\mathbf{z}, \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} W_{i+1}(\mathbf{z}) \tag{2.32}$$

$$\mathcal{L}_W H(\mathbf{Z}, \epsilon) = H^*(\mathbf{Z}, \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{z}) \tag{2.33}$$

e vejamos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1. *As funções $\{H_j^i\}$ com $i \in \mathbb{Z}_+^*$ e $j \in \mathbb{Z}_+$ definidas acima satisfazem as identidades recursivas*

$$H_j^i = H_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{k+1}\}, \tag{2.34}$$

onde $\{\bullet, \bullet\}$ representa o colchete de Poisson.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{D} = \mathcal{D}_W$ por

$$\mathcal{D}F(\mathbf{z}, \epsilon) = \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(\mathbf{z}, \epsilon) + \{F, W\}(\mathbf{z}, \epsilon). \tag{2.35}$$

Note que

$$\mathcal{D}F(\mathbf{z}, \epsilon)_{\mathbf{z}=\varphi(\mathbf{Z},\epsilon)} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(\mathbf{z}, \epsilon)_{\mathbf{z}=\varphi(\mathbf{Z},\epsilon)} \tag{2.36}$$

Defina indutivamente a sequência de funções $H^0 = H, H^i = \mathcal{D}H^{i-1}, i \geq 1$, cuja expansão em série de potências é

$$
\begin{aligned}
H^i(\mathbf{z}, \epsilon) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} H^i_j(\mathbf{z}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} D(\frac{\epsilon^j}{j!} H^{i-1}_j(\mathbf{z}, \epsilon)) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\epsilon^j}{j!} \{H^{i-1}_j, W\} + \frac{\epsilon^{j-1}}{(j-1)!} H^{i-1}_j \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \left[H^{i-1}_{j+1} + \{H^{i-1}_j, W\} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} H^{i-1}_{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \{H^{i-1}_j, W\}
\end{aligned}
$$

Faça $l = j + k$, em seguida, substitua j por l na soma que envolve o colchete de Poisson.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \{H^{i-1}_j, W\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \{H^{i-1}_j, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} W_{k+1}\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{j+k}}{j!k!} \{H^{i-1}_j, W_{k+1}\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{(l-k)!k!} \frac{\epsilon^l}{l!} \{H^{i-1}_{l-k}, W_{k+1}\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \{H^{i-1}_{j-k}, W_{k+1}\}
\end{aligned}
$$

Veja que as funções H^i_j tem a expressão (2.34). Resta-nos mostrar que H^* é dada por (2.33).

$$
\begin{aligned}
H^*(\mathbf{Z}, \epsilon) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \epsilon^i} H^*(\mathbf{Z}, \epsilon)_{\epsilon=0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \epsilon^i} (H(\mathbf{z}, \epsilon)_{\mathbf{z}=\varphi(\mathbf{Z},\epsilon)})_{\epsilon=0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \epsilon^i} (\mathcal{D}^i H(\mathbf{z}, \epsilon)_{\mathbf{z}=\varphi(\mathbf{Z},\epsilon)})_{\epsilon=0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H^i_0(\mathbf{z}).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Como $\mathcal{L}_W \mathbf{I}(\mathbf{Z}, \epsilon) = \varphi(\mathbf{Z}, \epsilon)$, onde $\mathbf{I}$ é a aplicação identidade, podemos construir a mudança de coordenadas simplética $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{Z}, \epsilon)$. As funções $\{H_j^i\}$ podem ser entendidas considerando o triângulo de Lie, devido ao teorema 2.3.1.

$$\begin{array}{lllll} H_0^0 & & & & \\ \downarrow & & & & \\ H_1^0 & \rightarrow & H_0^1 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2^0 & \rightarrow & H_1^1 & \rightarrow & H_0^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Os coeficientes da expansão do antigo Hamiltoniano H, estão na coluna à esquerda e os coeficientes do novo Hamiltoniano estão sobre a diagonal. A fórmula recursiva que vimos no teorema 2.3.1 nos diz como calcular cada elemento no triângulo de Lie, basta termos os elementos da coluna imediatamente à esquerda. Desta forma,

$$H^*(\mathbf{Z}, \epsilon) = H_0^0(\mathbf{Z}) + \epsilon H_0^1(\mathbf{Z}) + \frac{\epsilon^2}{2} H_0^2(\mathbf{Z}) + ...$$

O teorema da perturbação, enunciado e demonstrado abaixo, nos garante a existência e obtenção da função W de tal forma que a transformada de Lie seja a mais simples.

Teorema 2.3.2 (Teorema da Perturbação Geral). *Sejam $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^{\infty}$ e $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^{\infty}$ sequências de espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas sobre um domínio comum $\mathcal{O}$ em $\mathbb{R}^{2n}$ com as seguintes propriedades:*

i) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i, i = 1, 2, \cdots$

ii) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i, i = 1, 2, \cdots$

iii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}, i, j = 0, 1, \cdots$

iv) para qualquer $D \in \mathcal{P}_i, i = 1, 2, \cdots$, existe $B \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ tal que

$$B = D + \{H_0^0, C\}. \tag{2.37}$$

Então existe W, como em (2.32), com $W_i \in \mathcal{R}_i, i = 1, 2, ...$, que gera uma mudança de variável simplética próxima da identidade, $\mathbf{z} \rightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $\mathcal{L}_W H$ tenha uma expansão como a série (2.33), com $H_0^i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2, \cdots$.

Demonstração: A prova será feita por indução sobre H_j^i, W_i e H_0^i que aparecem no triângulo de Lie, na seguinte hipótese:

$$(I_n) \quad H_j^i \in \mathcal{P}_{i+j} \quad \text{para} \quad 1 \leq i+j \leq n \quad \text{e} \quad W_i \in \mathcal{R}_i, H_0^i \in \mathcal{L}_i \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Se $n = 0$, (I_0) é verdadeiro, $H_0^0 \in \mathcal{P}_0$ com $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{L}_0$ conjuntos vazios. Suponha que (I_{n-1}) seja verdadeiro. Pela equação (2.34)

$$H_{n-1}^1 = H_n^0 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} + \{H_0^0, W_n\} \tag{2.38}$$

pelo item $ii)$ temos que $H_n^0 \in \mathcal{P}_n, H_{n-1-k}^0 \in \mathcal{P}_{n-1-k}$ $(k = 0, 1, 2, ..., n-2)$ e $H_0^0 \in \mathcal{P}_0$. Usando a hipótese de indução $W_{k+1} \in \mathcal{R}_{k+1}(k+1 \leq n-1)$, por $iii)$ $\{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} \subset \mathcal{P}_n$. De (2.38) temos

$$\begin{aligned} H_{n-1}^1 &= \underbrace{H_n^0 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\}}_{L^1 \in \mathcal{P}_n} + \{H_0^0, W_n\} \\ &= L^1 + \{H_0^0, W_n\} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Seguindo a mesma lógica,

$$\begin{aligned} H_{n-2}^2 &= H_{n-1}^1 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} \\ &= L^1 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} + \{H_0^0, W_n\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

e portanto $H_{n-2}^2 = L^2 + \{H_0^0, W_n\}$, com $L^2 \in \mathcal{P}_n$. Indutivamente,

$$H_{n-s}^s = L^s + \{H_0^0, W_n\} \tag{2.41}$$

em que $L^s \in \mathcal{P}_n$ para $s = 1, 2, \cdots, n$. Em particular tome $s = n$, segue que

$$H_0^n = L^n + \{H_0^0, W_n\}. \tag{2.42}$$

O item $iv)$ nos garante que para quaisquer $D = L^n \in \mathcal{P}_n$ existem $B = H_n^0 \in \mathcal{L}_n$ e $C = W_n \in \mathcal{R}_n$ que satisfaz (2.42). Segue de (2.41) e da hipótese $ii)$ que $H_{n-s}^s \in \mathcal{P}_n$ para $s = 1, 2, \cdots, n$ e temos o desejado. ∎

A equação de Lie (2.37) justifica o nome do teorema anterior. O termo H_0^0 define um sistema não perturbado quando $\epsilon = 0$. A aplicação $L = \{H_0^0, \bullet\}$ define um operador linear chamado operador de Lie. Note que $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$; leva-nos a entender que os termos H_0^i do Hamiltoniano (2.33), por pertencerem aos espaços $\mathcal{L}'s$ são mais simples que os coeficientes $H_i^0 \in \mathcal{P}_i$. Desta forma, dizemos que $H^*(\mathbf{Z}, \epsilon)$ é a forma normal de Lie de $H(\mathbf{z}, \epsilon)$, D é o termo antigo, B é o novo termo do Hamiltoniano e C é chamado de gerador.

Nada foi dito a respeito da convergência da série em questão. O próximo resultado mostra que podemos parar o processo em qualquer ordem, digamos N, para obter uma mudança simplética a qual é um polinômio em ϵ e logo é convergente.

Corolário 2.3.3. *Seja $N \geq 1$ dado, e sejam $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^N$, $\{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^N$ e $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^N$ sequências de espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas sobre um domínio comum $\mathcal{O}$ em $\mathbb{R}^{2n}$ com as seguintes propriedades:*

i) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i, i = 1, 2, ..., N$;

ii) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i, i = 1, 2, ..., N$;

iii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}, i, j = 0, 1, ..., N$;

iv) para qualquer $D \in \mathcal{P}_i, i = 1, 2, ..., N$, existe $B \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ tal que

$$B = D + \{H_0^0, C\}.$$

Então existe um polinômio

$$W(\mathbf{z}, \epsilon) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\epsilon^i}{i!} W_{i+1}(\mathbf{z}), \tag{2.43}$$

com $W_i \in \mathcal{R}_i, i = 1, 2, ..., N$, tal que a mudança de variáveis $\mathbf{z} = \varphi(\boldsymbol{Z}, \epsilon)$, onde $\varphi(\boldsymbol{Z}, \epsilon)$ é a solução geral de (2.30), transforma o Hamiltoniano convergente

$$H(\mathbf{z}, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{z}), \tag{2.44}$$

no Hamiltoniano convergente

$$H^*(\boldsymbol{Z}, \epsilon) = \sum_{i=0}^{N} \frac{\epsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^{N+1}). \tag{2.45}$$

Observe que na demonstração do teorema anterior os termos de ordem superior a N na série de H^* não são afetados pelo truncamento de H.

2.3.1 Unicidade da forma normal de Lie

Seja $\{\mathcal{P}\}_{i=0}^{\infty}$ uma família de espaços vetoriais cujos elementos são funções diferenciáveis definidas numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{2n}$.

Definição 2.3.4. *Suponhamos que $\{H_0^0, f\} \in \mathcal{P}_i(i = 0, 1, \cdots)$ e considere o operador linear*

$$L_i : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_i, \quad f \mapsto \{H_0^0, f\} \quad (i = 0, 1, \cdots) \tag{2.46}$$

Dizemos que L_i é simples (diagonalizável) se $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{R}_i$ com $\mathcal{L}_i = \ker L_i$ e $\mathcal{R}_i = \mathrm{Im}(L_i)$.

Da forma que foi definido o operador acima, o teorema da pertubação geral garante a unicidade de solução da equação de Lie (2.37), mas ainda não garantimos a unicidade da forma normal de Lie. Para isso, vejamos os próximos resultados.

Lema 2.3.5. *Se L_i é simples então, para todo $D \in \mathcal{P}_i$ existe $B \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ tal que $B = D + \{H_0^0, C\}$. Além disso, B e C são únicos.*

Demonstração: Dado $D \in \mathcal{P}_i$ existem $B \in \mathcal{L}_i$ e $D' \in \mathcal{R}_i$ tal que $D = B + D'$. Tomando $\bar{C} \in \mathcal{P}_i$ de forma que $L_i(\bar{C}) = -D'$, existem $C' \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ com $\bar{C} = C' + C$ donde $B = D + L_i(C)$. Provamos, assim, a existência de B e C. Para a unicidade, suponha que $B_1 \in \mathcal{L}_i$ e $C_1 \in \mathcal{R}_i$ satisfazem a equação de Lie, ou seja, $B_1 = D + \{H_0^0, C_1\}$, então $B_1 = B + L_1(C_1 - C)$ o que implica $B_1 - B = L_1(C_1 - C)$, então, $B_1 - B$ e $C_1 - C$ pertencem a $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{R}_i = \{0\}$. ∎

Precisamos de uma hipótese a mais em relação aos resultados anteriores para a unicidade dos termos da forma normal de Lie.

Teorema 2.3.6. *Sejam $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^{\infty}$ e $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^{\infty}$ sequências de espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas sobre um domínio comum $\mathcal{O}$ em $\mathbb{R}^{2n}$ com as seguintes propriedades:*

i) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i, i = 1, 2, \cdots;$

ii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}, i = 0, 1, \cdots; j = 1, 2, \cdots$

Então existe W, como em (2.32), com $W_i \in \mathcal{R}_i, i = 1, 2, \cdots$, que gera uma mudança de coordenada simplética, $\mathbf{z} = \varphi(\boldsymbol{Z}, \epsilon)$, próxima da identidade, que transforma o Hamiltoniano (2.31) $H(\mathbf{z}, \epsilon)$ no Hamiltoniano $H^*(\boldsymbol{Z}, \epsilon)$ dado por (2.33) com $H_0^i \in \mathcal{L}_i$.

Além disso, se

iii) $\{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j\} = 0$ *com* $i, j = 1, 2, \cdots,$

então os termos da forma normal são únicos.

A priori, os subespaços $\mathcal{L}_i$ são mais simples que $\mathcal{P}_i$, porque $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$, desta forma, o teorema anterior diz que podemos obter um Hamiltoniano particular, pois, os coeficientes H_0^i podem ser mais simples que os coeficientes H_i^0.

2.3.2 Forma Normal de Lie na Vizinhança de um Equilíbrio

Seja H um Hamiltoniano analítico com solução de equilíbrio na origem de $\mathbb{R}^{2n}$. Assim, podemos escrever a série de Taylor em torno da origem

$$H(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(\mathbf{z}) \tag{2.47}$$

em que $H_i's$ são polinômios homogêneos de grau $i+2$, por isso, $H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{S}\mathbf{z}$, onde $\mathbf{S} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ é simétrica. Fazendo $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$, obtemos a equação linearizada do sistema (2.47) em torno da origem $\mathbf{z} = 0$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{J}\nabla H_0(\mathbf{z}). \tag{2.48}$$

A solução geral de (2.48) é o fluxo $\varphi(\mathbf{z}, t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}$, mas, para o estudo das soluções de (2.47) próximo da solução de equilíbrio faremos a normalização da mesma.

Vamos fixar algumas notações. Chamaremos $\mathcal{Z} = \{m = (m_1, ..., m_{2n})/m_i \in \mathbb{Z}^+\}$ e $|m| = m_1 + ... + m_{2n}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ e $m \in \mathcal{Z}$ definimos $\mathbf{z}^m = z_1^{m_1}...z_{2n}^{m_{2n}}$ e $k_m = k_{m_1}...k_{m_{2n}}$.

Podemos caracterizar a forma normal de Lie no caso em que a matriz $\mathbf{A}$ da parte linear do sistema é simples, vejamos o próximo resultado.

Teorema 2.3.7. *Se* $\mathbf{A} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ *é simples, então existe uma mudança formal de coordenadas simpléticas,* $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{z})$ *a qual transforma o Hamiltoniano* (2.47) *no Hamiltoniano*

$$H^*(\boldsymbol{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\boldsymbol{Z}), \tag{2.49}$$

onde H^i é um polinômio homogêneo de grau $i+2$ tal que

$$\{H^i, H_0\} = 0, i = 0, 1, ... \tag{2.50}$$

isto é, H^i é uma integral primeira para o sistema linearizado (2.48)*.*

Demonstração: Seja ϵ um número real não nulo, definamos uma mudança de coordenadas $\mathbf{z} = \epsilon\mathbf{u}$. Note que esta mudança é ϵ^{-2}-simplética, de fato, façamos $\mathbf{T} = \epsilon^{-1}\mathbf{I}$, em que $\mathbf{I}$ é a identidade. Então, $\mathbf{T}^T\mathbf{J}\mathbf{T} = \epsilon^{-2}\mathbf{J}$.

O novo Hamiltoniano é

$$\tilde{H}(\mathbf{u}, \epsilon) = \epsilon^{-2}H(\epsilon\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{u}), \tag{2.51}$$

onde $H_i^0(\mathbf{u}) = i!H_i(\mathbf{u})$. Seja $L_i : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_i$ definido por $L_i(G) = \{H_0^0, G\}$, sendo $\mathcal{P}_i$ o espaço linear de todos os polinômios homogêneos de grau $i+2$. Considere $\mathcal{L}_i = \ker\{L_i\}$ e $\mathcal{R}_i = \mathrm{Im}\{L_i\}$.

Por Hipótese, a matriz $\mathbf{A}$ do sistema linearizado é simples, isto é, diagonalizável. Sejam $\{v_1, ..., v_{2n}\}$ uma base de autovetores de $\mathbf{A}$ associados aos autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}$. Qualquer $K \in \mathcal{P}_i$ pode ser escrito na forma

$$K(\mathbf{u}) = \sum_{|m|=i} k_m \mathbf{u}^m = \sum_{m_1+\cdots+m_{2n}=i+2} k_{m_1,\cdots,m_{2n}} u_1^{m_1} \cdots u_{2n}^{m_{2n}} \tag{2.52}$$

em que $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{2n} u_j v_j$ e $m \in \mathbb{Z}$. Isto significa que o conjunto dos monômios

$$\beta = \{\mathbf{u}^m = u_1^{m_1} \cdots u_{2n}^{m_{2n}}; |m| = i+2\}$$

forma uma base para o espaço $\mathcal{P}_i$. Note ainda que

$$\begin{aligned} L_i(G)(\mathbf{u}) &= -(\nabla G)^T(\mathbf{u})\mathbf{J}\nabla H_0^0(\mathbf{u}) \\ &= -(\nabla G)^T(\mathbf{u})\mathbf{J}(-\mathbf{J}\mathbf{A})(\mathbf{u}) \\ &= -(\nabla G)^T(\mathbf{u})\mathbf{I}\mathbf{A}(\mathbf{u}) \\ &= -(\nabla G)^T(\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{u}) \\ &= -DG(\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{u} \end{aligned}$$

com $DG(\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{u} = \langle DG(\mathbf{u}), \mathbf{A}\mathbf{u}\rangle$. Desde que $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 u_1 v_1 + ... + \lambda_{2n} u_{2n} v_{2n}$ e $L_i(G)(\mathbf{u}) = -DG(\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{u}$, temos

$$L_i(\mathbf{u}^m) = - < \lambda, m > \mathbf{u}^m,$$

em que usamos a notação $< \lambda, m >= m_1\lambda_1 + \cdots + m_{2n}\lambda_{2n}$. Então, os elementos da base β são autovetores de L_i com autovalores $- < \lambda, m >$ associados. Podemos assim, escrever $\mathcal{L}_i = \ker\{L_i\}$ e $\mathcal{R}_i = \mathrm{Im}\{L_i\}$ da seguinte maneira

$$\mathcal{L}_i = \{\mathbf{u}^m / |m| = i + 2 \ \text{ e } \ < \lambda, m >= 0\},$$
$$\mathcal{R}_i = \{\mathbf{u}^m / |m| = i + 2 \ \text{ e } \ < \lambda, m >\neq 0\}.$$

Aplica-se o teorema anterior, pois $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{R}_i$, o qual garante a existência da função geradora $W(\mathbf{u}, \epsilon)$, com o Hamiltoniano transformado

$$\tilde{H}(\mathbf{v}, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{v})$$

tem termos $H_0^i \in \mathcal{L}_i$, isto é, $\{H_0^i, H_0\} = L_i(H_0^i) = 0, i = 0, 1, \cdots$. Conseguimos um novo Hamiltoniano H^* fazendo mudança de coordenadas $\mathbf{Z} = \epsilon \mathbf{v}$ que é ϵ^{-2}-simplética com expressão

$$H^*(\mathbf{Z}, \epsilon) = \epsilon^2 \tilde{H}(\epsilon^{-1}\mathbf{Z}, \epsilon) = \epsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \epsilon^{-i-2} H_0^i(\mathbf{z}).$$

Desde que a composição

$$\mathbf{z} \to \mathbf{u} = \epsilon^{-1}\mathbf{z} \to \mathbf{v} \to \mathbf{Z} = \epsilon \mathbf{v}$$

é simplética, sua inversa $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{z})$ define uma transformação simplética da forma $\mathbf{z} = \mathbf{Z} + \cdots$ de tal forma que o Hamiltoniano transformado $H^*(\mathbf{Z}) = H^*(\mathbf{Z}, \epsilon)$ tem a expansão

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i+0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}),$$

onde $H^i = \frac{1}{i!} H_0^i$, satisfaz a equação de Lie $\{H^i, H_0\} = 0$ para $i = 0, 1, \cdots$. ∎

Surge com frequência a necessidade de resolver sistemas de equações diferenciais não-lineares nos estudos de diversos problemas em sistemas dinâmicos. Sabemos que em geral, não é possível achar soluções exatas a partir de métodos clássicos de integração. Por isso, torna-se necessário o estudo qualitativo, isto é, uma análise via métodos analíticos para estas soluções. De certa forma, já temos um pouco desta teoria no capítulo anterior.

Para esta investigação, vamos manejar os métodos de perturbação baseadas na teoria de Lie. O método referido ao caso de sistemas Hamiltonianos dependentes de um pequeno parâmetro, foi desenvolvido por Hori e Deprit [7]. Em seguida, foi estendido por Kamel [17] e Henrard ([14] - [15] - [16]) generalizando os sistemas arbitrários de equações diferenciais.

Para compatibilizar notações, o termo H_0 corresponde a parte quadrática (H_2) do Hamiltoniano (2.1), os quais foram feitos algoritmos de normalização e obtemos uma expressão particular para cada caso estudado.

Definição 2.3.8. *Seja* $\mathbf{A}$ *a matriz associada ao termo* H_2 *de* (2.1). *Denotaremos* H_2^T *a função Hamiltoniana do sistema* $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T\mathbf{z}$, *de modo que exista uma matriz simétrica* $\mathbf{R}$ *tal que*

$$H_2^T = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{R}\mathbf{z} \quad com \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{J}\mathbf{R}. \tag{2.53}$$

O método de Deprit-Hori consiste em obter a função $W(\mathbf{z}, \epsilon)$ de tal forma que o novo Hamiltoniano H^* tenha uma expressão particular. O método será aplicado após garantir a existência de uma mudança formal de coordenada simplética, tal que $\{H_2^T, H^j\} = 0, j = 3, 4, \cdots$, com H_2^T a parte quadrática normalizada e satisfazendo a definição 2.3.8 . Dizemos que o termo H^j está na forma normal de Lie.

A partir de agora, será abordado a forma normal de Lie no caso autônomo não diagonalizável, ou seja, quando as equações de movimento não dependem explicitamente da variável t. Trazemos um lema de Álgebra Linear conhecido como método alternativo de Fredholm.

Lema 2.3.9. *Considere* V *um espaço vetorial munido com produto interno e dimensão finita. Seja* $A : V \to V$ *uma transformação linear e* A^* *sua adjunta. Então* $V = \ker\{A^*\} \oplus \operatorname{Im}\{A\}$.

Demonstração: Tome $\mathbf{z} \in \ker\{A^*\} \cap \operatorname{Im}\{A\}$, daí $A^*\mathbf{z} = 0$ e existe $\mathbf{u} \in V$ tal que $A\mathbf{u} = \mathbf{z}$. Donde

$$0 =< \mathbf{u}, A^*\mathbf{z} >=< A\mathbf{u}, \mathbf{z} >=< \mathbf{z}, \mathbf{z} >= ||\mathbf{z}||^2$$

portanto $\mathbf{z} = 0$, com isso, $\ker\{A^*\} \cap \operatorname{Im}\{A\} = \{0\}$. Pelo teorema do núcleo e da imagem

$$\dim V = \dim\ker\{A\} + \dim\operatorname{Im}\{A\}.$$

Mas, $\dim\ker\{A\} = \dim\ker\{A^*\}$ e $\dim[\ker\{A^*\} \cap \operatorname{Im}\{A\}] = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim\ker\{A^*\} + \dim\operatorname{Im}\{A\} \\ &= \dim[\ker\{A^*\} + \operatorname{Im}\{A\}] \end{aligned}$$

Logo, $V = \ker\{A^*\} \oplus \operatorname{Im}\{A\}$ ∎

Como antes, chamaremos $\mathcal{P}_i$ o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau i na variável $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$. Tome $P \in \mathcal{P}_i$, tem-se

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{|m|=i} k_m\mathbf{z}^m = \sum_{m_1+\ldots+m_{2n}=i+2} k_{m_1,\ldots,m_{2n}} z_1^{m_1} \ldots z_{2n}^{m_{2n}} \tag{2.54}$$

e defina o operador diferencial

$$P(\partial) = \sum_{|m|=i} k_m \frac{\partial^m}{\partial \mathbf{z}^m} \tag{2.55}$$

em que

$$\frac{\partial^m}{\partial \mathbf{z}^m} = \frac{\partial^{m_1}}{\partial z^{m_1}} . \frac{\partial^{m_2}}{\partial z^{m_2}} ... \frac{\partial^{m_{2n}}}{\partial z^{m_{2n}}} \tag{2.56}$$

Seja $Q = \sum_{|\tilde{m}|=i} \tilde{k}_{\tilde{m}} \mathbf{z}^{\tilde{m}} \in \mathcal{P}$ e defina o seguinte produto interno sobre $\mathcal{P}$

$$< P, Q >= P(\partial) Q(\mathbf{z}) \tag{2.57}$$

Para mostrar que (2.57) define um produto interno basta notar que

$$< P, Q >= P(\partial) Q(\mathbf{z}) = \sum_{|m|=i} k_m \frac{\partial^m Q(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^m}$$

onde

$$\frac{\partial^m Q(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^m} = \frac{\partial^m}{\partial \mathbf{z}^m} \sum_{|\tilde{m}|=i} \tilde{k}_{\tilde{m}} \mathbf{z}^{\tilde{m}}$$

e

$$\frac{\partial^m \mathbf{z}^{\tilde{m}}}{\partial \mathbf{z}^m} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq \tilde{m}, \\ m! = m_1 ... m_{2n}!, & \text{se} \quad m = \tilde{m}. \end{cases}$$

Portanto,

$$< P, Q >= \sum_{|m|=i} m! k_m \tilde{k}_{\tilde{m}}.$$

Seja o operador linear $L_{\mathbf{A}} : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_i$, definido por

$$L_{\mathbf{A}}(P) = \{H_0^0, P\} = -D_x P(\mathbf{z}) \mathbf{A} \mathbf{z} = -\frac{d}{dt} P(e^{\mathbf{A}t})_{t=0}$$

em que $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$ é uma matriz Hamiltoniana e $\mathbf{S}$ simétrica do Hamiltoniano quadrático H_2, assim, $H_2(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z}$.

Lema 2.3.10. *Seja* $\mathbf{A} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *definido acima. O adjunto de* $L_{\mathbf{A}}$ *com respeito ao produto interno* (2.57) *é* $L_{\mathbf{A}^T}$.

Demonstração: Usaremos a definição, isto é,

$$< P, L_{\mathbf{A}}(Q) >=< L_{\mathbf{A}^T}(P), Q >, \tag{2.58}$$

para todo $P, Q \in \mathcal{P}_i$. Mas antes, observe que se $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ então

$$\frac{\partial F(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^j} = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial F(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{y}^i}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{y}^i}{\partial \mathbf{z}^j}\right) = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial F(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{y}^i}\right) B_{ij}, \tag{2.59}$$

então, $\partial_{\mathbf{z}} = B^T \partial_{\mathbf{y}}$. Daí,

$$\langle P, Q \circ B \rangle = P(\partial_{\mathbf{x}})Q(B\mathbf{x}) = P(B^T\partial_{\mathbf{y}})Q(\mathbf{z}) = \left\langle P \circ B^T, Q \right\rangle, \tag{2.60}$$

para qualquer que seja $B \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$, em particular vale para $B = e^{\mathbf{A}t}$ e concluímos que

$$\left\langle P, Q \circ e^{\mathbf{A}t} \right\rangle = \left\langle P \circ e^{\mathbf{A}^T t}, Q \right\rangle. \tag{2.61}$$

Basta derivar (2.61) com respeito a t e fazer $t = 0$ para obtermos o desejado. ∎

O teorema seguinte caracteriza o método de Deprit-Hori no caso autônomo. O mesmo nos garante a existência de uma mudança formal de coordenadas simpléticas, a qual transforma o Hamiltoniano (2.47) em uma expressão cujos termos podem ser mais simples.

Teorema 2.3.11. *Existe uma mudança formal de coordenadas simplética,* $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{z}) = \boldsymbol{Z} + ...$ *a qual transforma o Hamiltoniano* (2.47) *em*

$$H^* = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\boldsymbol{Z}) \tag{2.62}$$

onde H^i *é um polinômio homogêneo de grau* i *tal que*

$$\{H_2^T, H^i\} = 0 \tag{2.63}$$

para todo $i = 3, 4, \cdots$ *com* H_2^T *o Hamiltoniano dos sistema* $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T\mathbf{z}$*, sendo* $\mathbf{A}$ *a matriz do sistema linearizado associado a* H*.*

Demonstração: Seja ϵ um número real não nulo, defina uma mudança de coordenadas $\mathbf{z} = \epsilon\mathbf{u}$. Note que esta mudança é ϵ^{-2}-simplética. O novo Hamiltoniano é

$$\tilde{H}(\mathbf{u}, \epsilon) = \epsilon^{-2}H(\epsilon\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H_i(\mathbf{u}), \tag{2.64}$$

onde $H_i(\mathbf{u}) = i!H_i(\mathbf{u})$. Considere $L_A : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_i$ definida por $L_A(G) = \{H_0^0, G\}$, com $\mathcal{P}_i$ sendo o espaço de todos os polinômios homogênios de grau i. Desta forma, $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{R}_i$, para $\mathcal{R}_i = \mathrm{Im}(L_{A^T})$ e $\mathcal{L}_i = \ker(L_{A^T})$. Se $D \in \mathcal{P}_i$, existem $B \in \mathcal{L}_i$ e

$C' \in \mathcal{R}_i$ tal que $D = B + C'$. Por outro lado, se $\bar{C} \in \mathcal{P}_i$ tal que $L_{A^T}(\bar{C}) = -C'$, existem $C \in \mathcal{R}_i$ e $C'' \in \mathcal{L}_i$ tal que $\bar{C} = C + C''$. Então, $L_{A^T}(\bar{C}) = L_{A^T}(C)$, donde concluímos que $B = D + L_{A^T}(C)$. A condição $iv)$ do teorema da perturbação geral é satisfeita. As outras hipóteses são facilmente verificadas, por isso, existe uma mudança formal de coordenadas simpléticas, $\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{v}$, tal que o Hamiltoniano nas novas coordenadas é

$$\tilde{H}(\mathbf{v}, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} H^i(\mathbf{v})$$

cujos termos $H^i \in \mathcal{L}_i$, ou seja, $\{H_2^T, H^i\} = L_{A^T}(H^i) = 0, i = 3, 4, \cdots$.

A aplicação $\mathbf{Z} = \epsilon\mathbf{v}$ que é ϵ^{-2}-simplética, o novo Hamiltoniano dado tem expressão

$$H^*(\mathbf{Z}, \epsilon) = \epsilon^2 \tilde{H}(\epsilon^{-1}\mathbf{Z}, \epsilon) = \epsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \epsilon^{-i-2} H^i(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} H^i(\mathbf{z}).$$

Desde que a composição

$$\mathbf{z} \to \mathbf{u} = \epsilon^{-1}\mathbf{z} \to \mathbf{v} \to \mathbf{Z} = \epsilon\mathbf{v}$$

é simplética, sua inversa $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{z})$ define uma transformação simplética da forma $\mathbf{z} = \mathbf{Z} + \cdots$ de tal forma que o Hamiltoniano transformado $H^*(Z) = H^*(\mathbf{Z}, \epsilon)$ tem a expansão

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i+0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}),$$

onde $H^i = \frac{1}{i!} H_0^i$, satisfaz a equação de Lie $\{H_2^T, H^i\} = 0$ para $i = 3, 4, \cdots$. Aqui finalizamos a demonstração do teorema. ∎

Este último teorema é geral (inclue os casos diagnalizável e não diagonalizável) para sistema Hamiltoniano autônomo. Desta forma, o teorema 2.3.7 pode ser enunciado como corolário do teorema 2.3.11 e tomar $H_2^T = H_2$, quando tratar do caso diagonalizável.

Todos os casos discutidos têm por finalidade fundamentar os argumentos utilizados nos resultados de estabilidade do sistema Hamiltoniano, após a normalização estudada no próximo capítulo.

2.3.3 Formas normais: Caso de uma frequência nula

O método de Deprit-Hori será utilizado nesta seção para encontrar certas restrições nos coeficientes do Hamiltoniano autônomo original, com o grau de liberdade igual a dois.

Para isso, considere a função (2.1), vista na primeira seção deste capítulo,

$$H = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \cdots + H_s(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \cdots$$

onde H_s é um polinômio homogêneo de grau s, cuja expressão nas coordenadas posição $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ e momento $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ é dado por (2.2). Suponha também, que dois dos autovalores da matriz do sistema linearizado associado a H sejam nulos e os demais imaginários puros.

Pelo teorema 2.3.11, existe uma mudança de coordenadas simplética tal que

$$\{H_2^T, H^s\} = 0, \quad s \geq 3, \tag{2.65}$$

e obtemos a equação de Lie

$$\frac{\partial H_2^T}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial H^s}{\partial p_1} + \frac{\partial H_2^T}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial H^s}{\partial p_2} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial H^s}{\partial q_1} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial H^s}{\partial q_2} = 0.$$

Temos dois casos a analisar, a depender da matriz do sistema linearizado ser diagonalizável ou não. No caso diagonalizável, suponha, sem perda de generalidade, que a parte quadrática da função Hamiltoniana já está na forma normal, conforme a seção 2.2.1, consideraremos

$$H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\delta_2\omega(q_2^2 + p_2^2) \quad \text{com} \quad \delta_2 = \pm 1. \tag{2.66}$$

Sendo assim,

$$\nabla H_2^T \mathbf{J} \nabla H^s = 0 \quad \therefore \quad q_2 \frac{\partial H^s}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial H^s}{\partial q_2} = 0. \tag{2.67}$$

Mas, no caso diagonalizável, o Hamiltoninano $H_2^T = H_2$. Para simplificação de termos, faremos a mudança de variáveis simplética

$$p_1 = y_1, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + i\delta_2 x_2),$$
$$q_1 = x_1, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\delta_2 y_2 + x_2).$$

Essas equações nos conduz a seguinte identidade

$$H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = i\omega x_2 y_2 \tag{2.68}$$

e a equação de Lie (2.67) torna-se

$$y_2 \frac{\partial H^s}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial H^s}{\partial y_2} = 0. \tag{2.69}$$

Daí, vemos que se $k_2 = l_2 = 0$, os termos correspondentes do novo Hamiltoniano, o qual denotaremos por H^*, são anulados. Desta forma, vamos fazer uma transformação canônica

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (Q_1, Q_2, P_1, P_2) \tag{2.70}$$

de modo a simplificar ao máximo os termos $H_3, H_4, \cdots$. Com isso, obtemos:

$$H^* = \delta_2\omega(Q_2^2 + P_2^2) + \sum_{s=3}^{M}\sum_{k=0}^{[s/2]} h_{s-2k}^{k}(P_2^2 + Q_2^2)^k + H^{(M+1)} + \cdots \tag{2.71}$$

onde $h_{s-2k}^{(k)}$ são polinômios homogêneos de grau $s-2k$ nas variáveis P_1 e Q_1.

Por exemplo, seja $s = 3$, a forma normal de Lie da expressão H_3 é:

$$\begin{aligned}
H^3(Q_1, Q_2, P_1, P_2) &= h^*_{3000}Q_1^3 + h^*_{0030}P_1^3 + h^*_{2010}Q_1^2P_1 + h^*_{1200}Q_1Q_2^2 + \\
&\quad h^*_{0012}Q_2^2P_1 + h^*_{1020}Q_1P_1^2 + h^*_{1200}Q_1P_2^2 + h^*_{0012}P_1P_2^2 \\
&= h^*_{3000}Q_1^3 + h^*_{0030}P_1^3 + h^*_{2010}Q_1^2P_1 + h^*_{1020}Q_1P_1^2 + \\
&\quad (h^*_{1200}Q_1 + h^*_{0012}P_1)(Q_2^2 + P_2^2) \\
&= h_3^{(0)}(Q_1, P_1) + h_1^{(1)}(Q_1, P_1)(Q_2^2 + P_2^2)
\end{aligned}$$

com $h_3^{(0)}$ e $h_1^{(1)}$ polinômios homogêneos de grau 3 e 1, respectivamente.

Quando a matriz do sistema linearizado não for diagonalizável, podemos assumir, sem perda de generalidade,

$$H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\delta_1 q_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2\omega(q_2^2 + p_2^2), \tag{2.72}$$

com δ_1 e δ_2 podendo assumir os valores ± 1.

Façamos a mudança de coordenadas simplética

$$\begin{aligned}
p_1 = \sqrt{-i\delta_1}x_1, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + i\delta_2 y_2), \\
q_1 = \sqrt{i\delta_1}y_1, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\delta_2 x_2 + y_2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{1}{2}ix_1^2 + i\omega x_2 y_2, \tag{2.73}$$

então,

$$H_2^T(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}iy_1^2 + i\omega x_2 y_2. \tag{2.74}$$

Seja H_s como em (2.2) nas variáveis x_1, x_2, y_1 e y_2 o termo de grau s do Hamiltoniano, temos

$$\{H_2^T, H^s\} = 0 \Rightarrow \nabla H_2^T \mathbf{J} \nabla H_s = 0, \quad s \geq 3. \tag{2.75}$$

Donde a equação de Lie

$$y_1 \frac{\partial H^s}{\partial x_1} + \omega \left[x_2 \frac{\partial H^s}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial H^s}{\partial y_2} \right] = 0$$

nos possibilita concluir que $l_2 = k_2$ e $l_1 = 0$. Mais uma vez, podemos escrever o novo Hamiltoniano com menos termos ($l_2 = k_2 = k$ e $k_1 = l$).

$$\begin{aligned} H^s &= \sum_{2k+l=s} h_{0klk} y_1^l [x_2 y_2]^k \\ &= \sum_{2k+l=s} h_{0klk} p_1^l (q_2^2 + p_2^2)^k, \\ &= \sum_{j=0}^{[s/2]} h_{0,j,s-2j,j} p_1^{s-2j} (q_2^2 + p_2^2)^j, \quad s \geq 3. \end{aligned}$$

Após aplicarmos a mudança de coordenadas canônica (2.70), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} H^* = \frac{1}{2}\delta_2 Q_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 \omega_2 (Q_2^2 + Q_2^2) + \\ \sum_{s=3}^{M} \sum_{j=0}^{[s/2]} \mathbf{a}_{s-2j,j} P_1^{s-2j} (Q_2^2 + P_2^2)^j + H^{(M+1)} + \cdots . \end{aligned} \tag{2.76}$$

onde $\mathbf{a}_{s-2j,j}$ são constantes reais. A normalização deve ser realizada até ordem M tal que $\mathbf{a}_{M,0}$ é distinto de zero.

Todas essas igualdades serão fundamentais para o entendimento das demonstrações de resultados explorados no próximo capítulo, os quais veremos alguns critérios para ocorrer estabilidade ou instabilidade de equilíbrios em sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade.

2.3.4 Formas normais: caso de duas frequências nulas

Consideremos agora o caso de duas frequências nulas, isto é, a equação (2.5) tem todas suas raízes nulas. A ideia geral é obter uma expressão mais simples para os termos H_s, $s \geq 3$, da função Hamiltoniana autônoma (2.1).

Lembremos que quando todas as frequências são nulas, a parte quadrática deste Hamiltoniano depende do posto da matriz simétrica **S**. Tendo em vista o problema, vamos exibir a forma normal de Lie para os quatro casos estudados na seção 2.2.

Suponha, sem perda de generalidade, que a parte quadrática da função Hamiltoniana já está na forma normal. Pelo teorema 2.3.11 existe uma mudança formal de coordenadas simplética, $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{Z} + \cdots$, tal que

$$\{H_2^T, H^s\} = 0, \ s \geq 3, \tag{2.77}$$

com H_2 a parte quadrática do Hamiltoniano em questão que satisfaz as equações (2.22) a (2.25).

Feita a mudança de coordenadas canônicas convenientes, como em (2.70), e após aplicar o método de Deprit-Hori, obtemos a forma normal de Lie até termos de terceira ordem via equação de Lie, a qual tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial H_2^T}{\partial Q_1} \cdot \frac{\partial H^3}{\partial P_1} + \frac{\partial H_2^T}{\partial Q_2} \cdot \frac{\partial H^3}{\partial P_2} - \frac{\partial H_2^T}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H^3}{\partial Q_1} - \frac{\partial H_2^T}{\partial P_2} \cdot \frac{\partial H^3}{\partial Q_2} = 0.$$

Considere o problema de estabilidade para o sistema não linear no caso que $rg(\mathbf{S}) = 3$. A parte quadrática da função Hamiltoniana, vista em (2.22), é

$$H_2 = \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1 Q_2 \Rightarrow H_2^T = P_1 P_2 - \frac{1}{2}\delta Q_1 \quad (\delta = \pm 1).$$

Verifica-se que podemos escrever o novo Hamiltoniano H^* da seguinte maneira:

$$H^* = H^{(0)} + H^{(1)} \tag{2.78}$$
$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1 Q_2 + h_{0003}^* P_2^3 \ \ (h_{0003}^* = h_{0003}) \tag{2.79}$$
$$H^{(1)} = h_{0102}^* Q_2 P_2^2 + h_{0012}^* P_1 P_2^2 + H_4 + \cdots$$

Todas estas contas também foram verificadas em um sistema algébrico computacional de uso genérico, o software matemático Maple 12.

Se o posto da matriz **S** for igual a dois, a parte quadrática da função Hamiltoniana, vista em (2.23), sem perda de generalidade, é:

$$H_2 = \frac{1}{2}\delta_1 P_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 P_2^2 \Rightarrow H_2^T = -\frac{1}{2}\delta_1 Q_1^2 - \frac{1}{2}\delta_2 Q_2^2 \quad (\delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 1).$$

E a nova expressão para o Hamiltoniano, na forma normal de Lie, até termos de ordem três, é:

$$H^* = H^{(0)} + H^{(1)},\ H^{(0)} = H_2^* + H_3^{(0)},\ H^{(1)} = H_3^{(1)} + H_4 + \cdots \tag{2.80}$$
$$H_3^{(0)} = h_{3000}^* Q_1^3 + h_{2100}^* Q_1^2 Q_2 + h_{1200}^* Q_1 Q_2^2 + h_{0300}^* Q_2^3 \tag{2.81}$$
$$H_3^{(1)} = h_{1110}^* Q_1 Q_2 P_1 + h_{1101}^* Q_1 Q_2 P_2. \tag{2.82}$$

Escrevemos estas expressões de forma conveniente a entender as demonstrações dos teoremas contidos no próximo capítulo. Tais resultados serão fornecidos a partir dos coeficientes da função de Hamilton após a normalização até termos de terceira ordem, nos casos estudados até o momento.

Quando o posto da matriz $\mathbf{S}$ é igual a um, apesar de não obtermos resultados de estabilidade para este caso, exibimos uma nova função de Hamilton, após a normalização até termos de ordem três.

Neste caso, de acordo com a equação (2.24), sem perda de generalidade,

$$H_2 = \frac{1}{2}\delta P_1^2 \Rightarrow H_2^T = -\delta Q_1^2 \quad (\delta = \pm 1).$$

De forma análoga aos casos anteriores, obtemos a forma normal de Lie, a partir do método de Deprit-Hori, para expressão do termo de ordem três no Hamiltoniano (2.1) e encontramos:

$$\begin{aligned} H^3 = {} & h_{3000}^* Q_1^3 + h_{0300}^* Q_2^3 + h_{3000}^* P_2^3 + h_{2100}^* Q_1^2 Q_2 + h_{2001}^* Q_1^2 P_2 + \\ & h_{1200}^* Q_1 Q_2^2 + h_{0201}^* Q_2^2 P_2 + h_{1002}^* Q_1 P_2^2 + h_{0102}^* Q_2 P_2^2 + h_{1101}^* Q_1 Q_2 P_2. \end{aligned}$$

Note que o sistema correspondente a função Hamiltoniana truncada até ordem três se torna complexo, quando $rg(\mathbf{S}) = 1$, pois, sua expressão contém vários fatores, o que dificulta uma análise minuciosa em seus termos.

Capítulo 3

Estabilidade de equilíbrio de sistemas Hamiltonianos degenerados com dois graus de liberdade

Neste capítulo, vamos fornecer alguns resultados de estabilidade em Sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade, quando as raízes da equação fundamental do sistema linearizado apresenta ressonância de primeira ordem e quando todos os autovalores são nulos. A estabilidade do equilíbrio é estudada a partir dos coeficientes da função Hamiltoniana. Para isso, temos como principal referência de Sokol'Skii ([28] – [29]).

3.1 Introdução

Seja H uma função Hamiltoniana analítica numa vizinhança da origem do espaço de fase, o qual corresponde ao equilíbrio do sistema associado a H,

$$H = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \cdots + H_s(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \cdots \tag{3.1}$$

em que H_s é um polinômio homogêneo de grau s cuja expressão nas coordenadas posição $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ e momento $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ é

$$H_s(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2}. \tag{3.2}$$

Vamos exibir alguns resultados importantes na literatura, tomando referência Sokol'Skii ([28] − [29]) e Cabral [5], além de aplicar os teoremas clássicos de Chetaev [6] quando diz respeito a instabilidade do equilíbrio.

O problema da estabilidade para sistema de funções Hamiltonianas autônomas com dois graus de liberdade é obtido nos casos em que a equação fundamental do sistema linearizado tem todas suas raízes nulas e quando um par é nula e as demais são não nulas com parte real nula.

3.2 Caso de uma frequência nula

O próximo resultado é uma aplicação do teorema das Curvas Invariantes de Moser [22] no que diz respeito a estabilidade do equilíbrio de sistemas Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade, o qual usaremos para estabelecer resultados de estabilidade em sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade. Isto é feito por meio de uma redução do número de grau de liberdade, escrevendo $H = H^0$ constante.

Teorema 3.2.1. *Seja a função Hamiltoniana de um sistema com um grau de liberdade,*

$$\begin{aligned} K(r,\varphi,t) &= r^n\Psi(\varphi) + K^*(r,\varphi,t,H^0) \qquad (3.3) \\ K^* &= \mathcal{O}(r^{n+\frac{1}{2}}) \ \textit{ e com } \ n > 1. \end{aligned}$$

Suponha que K seja uma função analítica em r,φ,t, τ-periódica em φ e T-periódica em t. Se $\Psi(\varphi) \neq 0$, para todo φ, então a origem $r = 0$ é um equilíbrio estável no sentido de Lyapunov. Se o número φ^* existe tal que $\Psi(\varphi^*) = 0$ e $\Psi'(\varphi^*) \neq 0$, então o equilíbrio é instável.

Demonstração: Para demonstração da estabilidade, suponha que $\Psi(\varphi) \neq 0$, para todo φ, com $\Psi(\varphi) > 0$. Considere o Hamiltoniano $K = \Psi(\varphi)r^n$ e defina, para $k > 0$, a variável

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^\tau r(K,\varphi)d\varphi$$

onde, $r(K,\varphi) = \frac{k^{\frac{1}{n}}}{\Psi(\varphi)^{\frac{1}{n}}}$. Considere a função definida por

$$S(I,\varphi) = \int_0^\varphi r(K,\theta)d\theta = \int_0^\varphi \frac{k^{\frac{1}{n}}}{\Psi(\varphi)^{\frac{1}{n}}}d\theta.$$

Para eliminar $K^{\frac{1}{n}}$, faça $S(I,\varphi) = \beta I G(\varphi)$ com

$$\beta = \frac{2\pi}{\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\Psi(\varphi)^{\frac{1}{n}}}} \quad \text{e} \quad G(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\Psi(\varphi)^{\frac{1}{n}}}.$$

Agora, S define uma transformação simplética $(r,\varphi) \to (I,W)$ pelas relações

$$W = \frac{\partial S}{\partial I} = \beta G(\varphi) \quad \text{e} \quad r = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \beta I G'(\varphi).$$

E o Hamiltoniano original (3.3) é transformado no novo Hamiltoniano:

$$K = \beta^n I^n + \mathcal{O}(r^{n+\frac{1}{2}})$$

desde que $G'(\varphi) = \Psi(\varphi)^{\frac{1}{n}}$. Sabemos que $\Psi(\varphi)$ é τ-periódica, de fato,

$$\begin{aligned}
W(r,\varphi+\tau) &= \beta G(\varphi+\tau) \\
&= \beta \int_0^{\varphi+\tau} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{\frac{1}{n}}} \\
&= \beta \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{\frac{1}{n}}} + \beta \int_0^{\tau} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{\frac{1}{n}}} \\
&= 2\pi + \beta G(\varphi) \\
&= 2\pi + W(r,\varphi).
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$K(I,W,t) = K(I, 2\pi + W, t)$$

e, com isso, $K(I,W,t)$ é 2π periódica em W e T-periódica em t. Considere a mudança de variáveis $(I,W) \to (J,\xi)$, $\sigma\gamma$-simplética, definida por

$$I = \sigma\gamma J \quad \text{e} \quad W = \xi$$

onde $r > 0$ é um parâmetro pequeno, $1 \leq J \leq 2$ e γ é escolhido de tal forma que $\beta^n \gamma^{n-1} = \frac{1}{n}$. Obtemos, assim, o novo Hamiltoniano

$$K(J,\xi,t) = \frac{1}{n}\sigma^{n-1} J^n + \mathcal{O}(r^{n-\frac{1}{2}}).$$

O sistema correspondente se torna

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \xi} = \mathcal{O}(r^{n-\frac{1}{2}})$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial J} = -\gamma^{n-1} J^{n-1} + \mathcal{O}(r^{n-\frac{1}{2}})$$

Integrando entre $t = 0$ e $t = T$, basta denominar J, ξ os valores iniciais e J_1, ξ_1 os finais, obtemos as funções

$$J_1 - J = \sigma^{n-\frac{1}{2}} F_1(J, \xi, \sigma)$$

$$\xi_1 - \xi = -\sigma^{n-1} T J^{n-1} + \sigma^{n-\frac{1}{2}} F_2(J, \xi, \sigma)$$

analíticas na região $1 \leq J \leq 2$, $\xi \in \mathbb{R}$, $|\sigma| < \sigma_0$ e F_1, F_2 periódicas em ξ. Estas funções, em virtude de equações diferenciais de Hamilton, preservam área, pelo teorema das curvas invariantes de Moser, estudada no primeiro capítulo, existem curvas invariantes $J = J(\xi) = J(\xi + 2\pi)$, para σ suficientemente pequeno. Desde que $I = \sigma\gamma J$, a curva correspondente $I = I(\xi)$ podem ser tomadas numa pequena vizinhança da origem. Qualquer solução $(I(t), \xi(t))$ que começa dentro da região limitada pela curva $I = I(\xi)$ permanece dentro dela para todo t. Como a solução permanece em um conjunto compacto para todo tempo, está demonstrado a estabilidade.

Para demonstração da instabilidade, assuma que $\Psi(\varphi^*) = 0$ com $\Psi'(\varphi^*) > 0$ (o caso em que $\Psi'(\varphi^*) < 0$ segue de forma análoga). Tome a suficientemente pequeno e considere a função de Chetaev para sistema não autônomo,

$$V = r^n \sin \Phi, \tag{3.4}$$

com $\Phi = \frac{\pi}{2a}(\varphi - \varphi^* + a)$ e para $0 < |\varphi - \varphi^*| < a$. O objetivo é escrever a função (3.4) da forma $V = r^l h(r) \Omega(\Phi)$ no intuito de usarmos o teorema 1.3.11. Para isso, basta tomar

- $l = n - \frac{1}{2} > 0$;
- $0 < h(r) = \sqrt{r} < 1$;
- $h(r)$ é C^1 numa vizinhança da origem;
- $\Omega(\Phi) = \sin(\Phi)$.

Em geral, $-1 \leq \sin \Phi \leq 1$. Mas, $0 < |\varphi - \varphi^*| < a$, então $0 < \Phi < \pi$. Com isso, $\sin \Phi < 1$. Obtemos também,

$$\dot{r} = \frac{\partial K}{\partial \varphi} = r^n \Psi'(\varphi) + \mathcal{O}(r^{n+\frac{1}{2}})$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial K}{\partial r} = -n r^{n-1} \Psi'(\varphi) + \mathcal{O}(r^{n-\frac{1}{2}})$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial t} \\
&= nr^{2n-1}[\Psi'(\varphi)\sin\Phi - \frac{\pi}{2a}\Psi(\varphi)\cos\Phi] + \mathcal{O}(r^{2n-\frac{1}{2}}) \\
&= Ar^{\alpha}h(r)g(\varphi) + \mathcal{O}(r^{2n-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Basta tomar

- $A = n > 0$;
- $\alpha = 2n - \frac{3}{2} > 1$;
- $h(r) = r^{\frac{1}{2}}$;
- $g(\varphi) = \Psi'(\varphi)\sin\Phi - \frac{\pi}{2a}\Psi(\varphi)\cos\Phi$.

Para $0 < \varphi - \varphi^* < a$, então $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2a}(\varphi - \varphi^* + a) < \pi$ e, com isso, a função $\cos\Phi$ é menor que zero. Quando $-a < \varphi - \varphi^* < 0$, obtemos que $\cos\Phi > 0$, então

$$\Psi(\varphi)\cos\Phi < 0 \quad \text{com} \quad 0 < |\varphi - \varphi^*| < a.$$

donde a função $g(\varphi)$ é positiva para $0 < |\varphi - \varphi^*| < a$. Pelo teorema de Chetaev para função Hamiltoniana autônoma, o equilíbrio é instável. ∎

O teorema 3.2.1 é uma simples generalização do teorema 2.1 de [27], basta tomar $n = 2$ e $\tau = 2\pi$. Quando toda raiz φ^{**} da equação $\Phi(\varphi) = 0$ é ponto crítico de Φ, a estabilidade é resolvida para termos de maior ordem.

Quando uma frequência é nula, conforme o capítulo anterior, temos dois casos a analisar. Considere, inicialmente, que a parte quadrática do Hamiltoniano seja diagonalizável. Então, existe uma mudança de coordenadas simplética, tal que o Hamiltoniano normalizado é da forma

$$H^* = \delta_2\omega_2(Q_2^2 + P_2^2) + \sum_{m=3}^{M}\sum_{k=0}^{[s/2]} h_{s-2k}^{(k)}(P_2^2 + Q_2^2)^k + H^{(M+1)} + \cdots \tag{3.5}$$

onde $h_{s-2k}^{(k)}$ são polinômios homogêneos de grau $s - 2k$ nas variáveis P_1 e Q_1.

Teorema 3.2.2. *Considere o sistema Hamiltoniano associado à função* (3.5) *com dois graus de liberdade e frequências nulas* (*caso diagonalizável*). *Se $h_M^{(0)}$ tem sinal definido nas variáveis Q_1 e P_1 o equilíbrio é estável segundo Lyapunov. Se $h_M^{(0)}$ é uma função que varia de sinal, então o equilíbrio é instável.*

Demonstração: Façamos a mudança de coordenadas simplética

$$Q_j = \sqrt{2r_j}\sin(\varphi_j) \quad \text{e} \quad P_j = \sqrt{2r_j}\cos(\varphi_j).$$

Assim, a função Hamiltoniana (3.5) torna-se

$$H^* = \delta_2\omega_2 r_2 - \delta_2\omega_2 r_1^{\frac{M}{2}}\Phi(\varphi_1) + \sum_{s=2}^{M}\sum_{k=1}^{[s/2]}\Phi_{s,k}(\varphi_1) r_1^{\frac{s}{2}-k} r_2^k + H^{(M+1)} + \cdots \quad (3.6)$$

a função $-\delta_2\omega_2 r_1^{\frac{M}{2}}$ é obtida por $h_M^{(0)}$ se ao em vez de Q_1 e P_1 substituirmos pelas funções $\sqrt{2}\sin(\varphi_1)$ e $\sqrt{2}\cos(\varphi_1)$, respectivamente. A função $\Phi_{s,k}$ é obtida similarmente. $H^{(M+1)}$ são termos cujas ordens em relação a $\sqrt{r_j}$ são maiores que M e são 2π-periódicas em φ_1 e φ_2. Fixe o nível de energia $H = H^0 = 0$, assim, $r_2 = K(r_1, \varphi_1, \varphi_2)$, e as equações de movimento são:

$$\dot{r}_1 = \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial H}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial K}{\partial \varphi_1}$$

$$\dot{r}_2 = \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = 0$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial r_1}$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial r_2} = -\frac{\partial H}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial r_2} = 0$$

Donde, φ_2 é constante no nível de energia $\dot{r}_2 = 0$, ou seja, r_2 é uma integral primeira para o sistema Hamiltoninao associado a H. Podemos, assim, reduzir o sistema associado a H ao sistema com um grau de liberdade não autônomo. O novo Hamiltoniano $K = r_2$ é 2π-periódico na variável φ_2. Sendo assim,

$$K = r_2 = r_1^{\frac{M}{2}}\Phi(\varphi_1) - \mathcal{O}(r^{n+\frac{1}{2}}).$$

Agora tome $n = \frac{M}{2} > 1$, $\varphi_1 = \varphi$, $\tau = 2\pi$ e $r = r_1$. Aplique o teorema 3.2.1 e finalizamos a demonstração. ∎

Um resultado imediato do teorema 3.2.2 é o próximo corolário.

Corolário 3.2.3. *O equilíbrio em questão é instável se M é um número ímpar.*

Consideremos o caso não diagonalizável. Vimos a existência de uma mudança simplética de coordenada, a qual podemos escrever

$$H^s = h_{00s0}P_1^s + \sum_{j=1}^{[s/2]} h_{0,j,s-2j,j}P_1^{s-2j}(Q_2^2 + P_2^2)^j + \cdots, s \geq 3. \quad (3.7)$$

Com isso, o novo Hamiltoniano é da seguinte maneira:

$$H^* = \frac{1}{2}\delta_1 Q_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2\omega_2(Q_2^2 + P_2^2) + \sum_{s=3}^{M}\sum_{j=0}^{[s/2]} \mathbf{a}_{s-2j,j} P_1^{s-2j}(Q_2^2 + P_2^2)^j + H^{(M+1)} + \cdots . \tag{3.8}$$

com $\mathbf{a}_{s-2j,j}$ constantes reais. A normalização ocorre até ordem M tal que $\mathbf{a}_{M,0} \neq 0$, ou simplesmente, M é o menor inteiro tal que $h_{00M0} \neq 0$.

Teorema 3.2.4. *Se M é ímpar, então a origem é uma solução instável para o sistema associado a H. No caso de M ser par, temos que o equilíbrio é estável se $\delta_1 \boldsymbol{a}_{M,0} > 0$ e instável se $\delta_1 \boldsymbol{a}_{M,0} < 0$.*

Demonstração: Considere a equação (3.8) e faça a seguinte mudança de coordenadas simplética:

$$P_1 = P_1, \quad P_2 = \sqrt{2r_2}\cos(\varphi_2)$$
$$Q_1 = Q_1, \quad Q_2 = \sqrt{2r_2}\sin(\varphi_2)$$

e obtemos

$$H^*(Q_1, P_1, r_2) = \frac{\delta_1}{2}Q_1^2 + \delta_2\omega_2 r_2 + \sum_{s=3}^{M}\sum_{j=1}^{[s/2]} \mathbf{a}_{s-2j,j} P_1^{s-2j}(2r_2)^j + \cdots . \tag{3.9}$$

Observe na equação (3.9) que H^* não depende de φ_2, e portanto, $\dot{r}_2 = 0$. Ou seja, r_2 é uma integral primeira do sistema associado a H. Podemos reduzir o sistema associado a H ao sistema com um grau de liberdade associado a

$$K(Q_1, P_1) = \frac{1}{\delta_1\omega_2}\left[\frac{\delta_1}{2}Q_1^2 + \mathbf{a}_{M,0}P_1^M + K^{(M)} + K^{(M+1)}\right] \tag{3.10}$$

$$K^{(M)} = K^{(M)}(Q_1, P_1) = \sum_{s=3}^{M}\sum_{j=0}^{[s/2]} \mathbf{a}^*_{s-2j,0} P_1^{s-2j} Q_1^{2j} \tag{3.11}$$

$$K^{(M+1)}(Q_1, P_1, \varphi_2, H^0) = \mathcal{O}((Q_1^2 + P_1^2)^{\frac{M+1}{2}}).$$

Na expressão $K^{(M)}$, dada por (3.11), $\mathbf{a}^*_{s-2j,0}$ são obtidos a partir de $\mathbf{a}_{s-2j,0}$. Para o sistema associado temos φ_2 como nova variável independente (tempo). Para demonstrar a primeira afirmação, considere a função auxiliar de Lyapunov,

$$V = \delta_2\omega_2(Q_1 - M\delta_1\mathbf{a}_{M,0}P_1). \tag{3.12}$$

É possível determinarmos as equações de movimento do Hamiltoniano (3.10),

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{d\varphi_2} &= \frac{\partial K}{\partial P_1} = \frac{M}{\delta_2\omega_2}\mathbf{a}_{M,0}P_1^{M-1} + \cdots \\ \frac{dQ_2}{d\varphi_2} &= -\frac{\partial K}{\partial Q_1} = -\frac{\delta_1}{\delta_2\omega_2}Q_1 + \cdots .\end{aligned}$$

Daí, a derivada da função (3.12) relativa a estas equações é:

$$\frac{dV}{d\varphi_2} = M\mathbf{a}_{M,0}(Q_1^2 + P_1^{M-1}) + V^* \tag{3.13}$$

em que V^* denota termos da forma $Q_1^sP_1^k$, com $3 \leq s+k \leq M-1$ e $s \neq 0$. Numa vizinhança suficientemente pequena da origem a função (3.13) não varia o sinal. Se M é ímpar, o sinal da função (3.13) coincide com o sinal de $\mathbf{a}_{M,0}$. Assim, pelo teorema 1.3.8, fica provado a instabilidade do equilíbrio.

Seja M par. Para mostrar a instabilidade, faremos uma mudança de coordenadas simplética $(q_1, q_2) \mapsto (r, \varphi)$ dada por

$$Q_1 = \sqrt{2}r^{\frac{M}{M+2}}S(\varphi) \qquad P_1 = \frac{M+2}{2\sqrt{2}}r^{\frac{2}{M+2}}C(\varphi)$$

com

$$C'(\varphi) = -S(\varphi), \quad S'(\varphi) = C^{M-1}(\varphi), \quad C(0) = 1, \quad S(0) = 1. \tag{3.14}$$

Além disso, $C^M(\varphi) + \frac{1}{2}MS^2(\varphi) = 1$. Da equação (3.10) temos

$$K(r,\varphi) = r^{\frac{2M}{M+2}}\left[\frac{\delta_1}{\delta_2\omega_2}S^2(\varphi) + \frac{\mathbf{a}_{M,0}}{\delta_2\omega_2}\left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}}\right)^M C^M(\varphi)\right]. \tag{3.15}$$

A expressão (3.15) é semelhante a (3.3). De fato, basta tomar $n = \frac{2M}{M+2} > 1$, $\Psi(\varphi) = \frac{\delta_1}{\delta_2\omega_2}[S^2(\varphi) + AC^M(\varphi)]$, sendo $A = \delta_1\mathbf{a}_{M,0}(\frac{M+2}{2\sqrt{2}})^M$.

Se $\delta_1\mathbf{a}_{M,0} > 0$, temos $\Psi(\varphi)$ nunca se anula. Assim, garantimos, pelo teorema 3.2.1 a estabilidade. Se $\delta_1\mathbf{a}_{M,0} < 0$, então conseguimos φ^* de tal forma que $\Psi(\varphi^*) = 0$ e

$$S(\varphi^*) = -\delta_1\delta_2\left[-\left(1 - \frac{AM}{2}\right)/A\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad C(\varphi^*) = \left(1 - \frac{AM}{2}\right)^{-\frac{1}{M}}$$

$$\Psi(\varphi^*) = -\frac{2}{\omega_2}\sqrt{-A}\left(1 - \frac{AM}{2}\right)^{\frac{2-M}{2M}} \neq 0,$$

mais uma vez, pelo teorema 3.2.1, o equilíbrio é instável. ∎

3.3 Caso de duas frequências nulos

O caso de autovalores nulos é distinguido pelo posto da matriz $\mathbf{S}$. Se tal posto for zero, a forma normal de H_2 é $H_2 = 0$. Neste caso, quaisquer que sejam $H_3, H_4, \cdots$ a função Hamiltoniana (2.1) estará na forma normal de Lie. Sendo assim, o processo de normalização não fornecerá uma forma particular para a função Hamiltoniana que possa ser usada para analisar sua estabilidade.

Quando o posto da matriz $\mathbf{S}$ é igual a um, com a função Hamiltoniana truncada até ordem três, o sistema correspondente se torna complexo, pois, sua expressão contém vários termos, o que dificulta uma análise minuciosa em seus termos. Com isso, faremos a análise dos casos $rg(\mathbf{S}) = 3$ e $rg(\mathbf{S}) = 2$, seguindo o tratamento dos artigos de Sokol'Skii [29].

Considere o problema de estabilidade para o sistema não-linear quando o posto da matriz $\mathbf{S}$ for igual a 3. Após aplicar o método de Depree-Hori, suponhamos que

$$H^* = H^{(0)} + H^{(1)} \tag{3.16}$$
$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1 Q_2 + h^*_{0003} P_2^3 \quad (h^*_{0003} = h_{0003}) \tag{3.17}$$
$$H^{(1)} = h^*_{0102} Q_2 P_2^2 + h^*_{0012} P_1 P_2^2 + H_4 + \cdots$$

Teorema 3.3.1 (Sokol'skii 1). *Se $h^*_{0003} \neq 0$, o equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é instável.*

Demonstração: Para a prova deste teorema, vamos considerar o sistema Hamiltoniano truncado (3.17). Ele tem a solução particular instável

$$Q_1 = a \cdot P_2^{\frac{5}{4}}, \quad P_1 = b \cdot P_2^{\frac{6}{4}}, \quad Q_2 = c \cdot P_2^{\frac{7}{4}}, \quad P_2 = P_2(0)[1 - At]^{-4}. \tag{3.18}$$

$$a = 4A[P_2(0)]^{-\frac{1}{4}}, \quad b = 20\delta A^2 [P_2(0)]^{-\frac{2}{4}}, c = 120\delta A^3 [P_2(0)]^{\frac{3}{4}},$$
$$A = [\delta h^*_{0003} P_2(0)/280]^{\frac{1}{4}}.$$

Esta solução encontrada é para o sistema truncado (3.17), sob a condição inicial $P_2(0)$ arbitrariamente pequeno. Usando esta solução particular para o sistema truncado, exibimos uma função de Chetaev, a qual prova a instabilidade do sistema completo:

$$V = P_2^{210} - \left[\left(\frac{Q_1}{a}\right)^4 - P_2^5\right]^{42} - \left[\left(\frac{P_1}{b}\right)^2 - P_2^3\right]^{70} - \left[\left(\frac{Q_2}{c}\right)^4 - P_2^7\right]^{30} \tag{3.19}$$

Na região $V > 0$ são satisfeitas as seguintes estimativas:

$$Q_1 = a(1+\alpha^5)^{\frac{1}{4}} P_2^{\frac{5}{4}}, P_1 = |b|(1+\beta^3)^{\frac{1}{2}} P_2^{\frac{6}{4}}, Q_2 = |c|(1+\gamma^7)^{\frac{1}{4}} P_2^{\frac{7}{4}}$$
$$P_2 > 0,\ 0\ < \alpha^{210} + \beta^{210} + \gamma^{210} <\ 1,\quad \alpha > 0,\quad \beta > 0,\quad \gamma > 0.$$

A partir da solução particular (3.18), na região $V > 0$, determinamos que a função (3.19) é positiva. De fato, observe que são satisfeitas as seguintes igualdades:

$$\left[\left(\frac{Q_1}{a}\right)^4 - P_2^5\right]^{42} = \alpha^{210} P_2^{210}, \tag{3.20}$$

$$\left[\left(\frac{P_1}{b}\right)^2 - P_2^3\right]^{70} = \beta^{210} P_2^{210}, \tag{3.21}$$

$$\left[\left(\frac{Q_2}{c}\right)^4 - P_2^7\right]^{30} = \gamma^{210} P_2^{210}. \tag{3.22}$$

Daí,

$$\begin{aligned} V &= p_2^{210} - \alpha^{210} p_2^{210} - \beta^{210} p_2^{210} - \gamma^{210} p_2^{210} \\ &= (1 - (\alpha^{210} + \beta^{210} + \gamma^{210})) p_2^{210} > 0. \end{aligned}$$

Além disso, pode-se verificar que a derivada da função V, gerada por meio da equação de movimento, é definida positiva na região $V > 0$, pelo teorema de Chetaev para o caso autônomo, o equilíbrio é instável. ∎

Se a hipótese do teorema 3.3.1 não for satisfeita, isto é, se $h^*_{0003} = 0$, precisamos fazer normalização dos termos de ordem quatro. Neste caso, podemos escrever (3.16) de modo que

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1 Q_2 + h^*_{0012} P_1 P_2^2 + h^*_{0004} P_2^4 \\ H^{(1)} &= h^*_{0102} Q_2 P_2^2 + h^*_{0103} Q_2 P_2^3 + h^*_{0022} P_1^2 P_2^2 + h^*_{0013} P_1 P_2^3 + H_5 + \cdots \end{aligned} \tag{3.23}$$

Quando $d = (h^*_{0012})^2 + 6\delta h^*_{0004} > 0$, o sistema truncado (3.23) tem uma solução particular instável, análoga a de (3.18),

$$\begin{aligned} &Q_1 = a \cdot P_2^{\frac{3}{2}},\quad P_1 = b \cdot P_2^{\frac{4}{2}},\quad Q_2 = c \cdot P_2^{\frac{5}{2}},\quad P_2 = P_2(0)[1 - At]^{-2}. \\ &a = 2A[P_2(0)]^{-\frac{1}{2}},\quad b = \frac{1}{3}\delta[-h^*_{0012} \pm \sqrt{d}], c = 4b \cdot A[P_2(0)]^{\frac{1}{2}}, \\ &A = P_2(0)[2h^*_{0012} \pm \sqrt{d}/6]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daí, é possível construir uma função de Chetaev, como (3.19), de modo a mostrar a instabilidade do equilíbrio para o sistema completo. No entanto, se d for negativo, não existe uma analogia ao que estamos fazendo.

Agora considere o problema de estabilidade quando $rg(\mathbf{S}) = 2$. Suponha que a forma normal de Lie dos termos de terceira ordem da equação (3.2) seja:

$$H = H^{(0)} + H^{(1)}, \quad H^{(0)} = H_2 + H_3^{(0)}, \quad H^{(1)} = H_3^{(1)} + H_4 + \cdots \tag{3.24}$$

$$H_3^{(0)} = h^*_{3000}Q_1^3 + h^*_{2100}Q_1^2Q_2 + h^*_{1200}Q_1Q_2^2 + h^*_{0300}Q_2^3 \tag{3.25}$$

$$H_3^{(1)} = h^*_{1110}Q_1Q_2P_1 + h^*_{1101}Q_1Q_2P_2. \tag{3.26}$$

Teorema 3.3.2 (Sokol'skii 2). *Se* $(h^*_{3000})^2 + (h^*_{2100})^2 + (h^*_{1200})^2 + (h^*_{0300})^2 \neq 0$, *o equilíbrio* $\mathbf{x}^*$ *é instável.*

Demonstração: A prova deste teorema é análogo a anterior. Note que $H^{(0)}$ admite uma solução particular

$$Q_1 = \frac{Q_1(0)}{(1-At)^2}, \quad Q_2 = \frac{Q_2(0)}{(1-At)^3}, \quad P_1 = \frac{2\delta_1 A Q_1(0)}{(1-At)^2}, \tag{3.27}$$

$$P_2 = \frac{2\delta_2 A Q_2(0)}{(1-At)^3}$$

$$A = \{-\delta_1[3h^*_{3000}Q_1^2(0) + 2h^*_{2100}Q_1(0)Q_2(0) + h^*_{1200}Q_2^2(0)]/[6Q_2(0)]\}^{\frac{1}{2}} \text{ ou}$$

$$A = \{-\delta_2[h^*_{2100}Q_1^2(0) + 2h^*_{1200}Q_1(0)Q_2(0) + 3h^*_{0300}Q_2^2(0)]/[6Q_2(0)]\}^{\frac{1}{2}}$$

onde $Q_1(0), Q_2(0)$ são números reais diferentes de zero. Estas constantes sempre existem; se, por exemplo, $h^*_{2100} = 0$, teremos $q_2(0)$ e $q_1(0)$ arbitrários não nulos. Além disso, estas constantes satisfaz a seguinte relação:

$$\delta_1 h^*_{1200}Q_2^3(0) + [2\delta_1 h^*_{2100} - 3h^*_{0300}]Q_2^2(0)Q_1(0) -$$
$$[2\delta_2 h^*_{1200} - 3\delta_1 h^*_{3000}]Q_2(0)Q_1^2(0) - \delta_2 h^*_{2100}Q_1^3(0) = 0$$

Para finalizar, é possível construir uma função de Chetaev como em (3.19), a partir desta solução do sistema truncado, a qual garante instabilidade do sistema completo. ∎

Capítulo 4

A recíproca do teorema de Dirichlet-Lagrange

Como ilustração dos resultados fornecidos nos capítulos anteriores, vamos resolver uma recíproca parcial do Teorema clássico de Dirichlet-Lagrange para sistemas conservativos em dois graus de liberdade. As principais referências são: Garcia [10] *e Sokol'skii* [29].

4.1 Introdução

Para formular o problema, considere a energia potencial $\pi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e a energia cinética

$$T = T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}||\mathbf{p}||^2. \tag{4.1}$$

Para descrever o movimento do sistema, podemos utilizar a função Hamiltoniana. Desta forma, denotando por H esta função, obtemos

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + \pi(\mathbf{q}), \tag{4.2}$$

uma vez que estamos querendo estudar a estabilidade de sistemas mecânicos conservativos. Assim, as equações do movimento são, de acordo com a seção 1.1,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \tag{4.3}$$

A proposição abaixo nos mostra que há uma perfeita correspondência entre os pontos críticos da energia potencial π e os pontos de equilíbrio do sistema mecânico considerado.

Proposição 4.1.1. *Um ponto* $\mathbf{x}^* = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ *é de equilíbrio de* (4.3) *se, e somente se,*

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{0} \quad e \quad \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \pi'(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$$

Demonstração: Se $\mathbf{x}^*$ é o equilíbrio de (4.3) temos,

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{p}_0 = \mathbf{0} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \pi'(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \pi'(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}.$$

Logo, temos o desejado. ∎

A proposição (4.1.1) justifica o abuso de notação quando $\mathbf{q}_0$ é mencionado como ponto de equilíbrio do sistema ao em vez de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$. Mas, como feito anteriormente, iremos considerar o equilíbrio sendo a origem do plano de fase.

4.2 O Teorema de Dirichlet-Lagrange

O próximo resultado foi enunciado por Lagrange em 1788, o qual não apresentou uma demonstração, exceto no caso em que π é uma função quadrática. A primeira prova conhecida foi apresentado por Dirichlet em 1848, lembrando que os teoremas de Lyapunov sobre estabilidade são de 1882.

Teorema 4.2.1 (Dirichlet-Lagrange). *Considere um sistema Hamiltoniano com energia potencial* π *e energia cinética* T*. Se* $\mathbf{q}_0$ *é um ponto de mínimo local estrito de* π*, então este equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov.*

Demonstração: Considere $\mathbf{q}_0$ mínimo estrito de π, então $\pi(\mathbf{q}) > \pi(\mathbf{q}_0), \forall\ \mathbf{q} \in \Omega - \{\mathbf{q}_0\}$. Defina

$$V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \pi(\mathbf{q}_0).$$

Mostraremos que V é uma função de Lyapunov e satisfaz as hipóteses do teorema 1.3.6. Como T é uma forma quadrática definida positiva e $\pi(\mathbf{q}) - \pi(\mathbf{q}_0) > 0$, concluímos que $V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > 0, \forall\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega - \{\mathbf{q}_0\}$.

Note ainda que

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) &= H(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) - \pi(\mathbf{q}_0) \\ &= T(\mathbf{0}) + \pi(\mathbf{q}_0) - \pi(\mathbf{q}_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como H é uma integral primeira para o sistema (4.3), temos $\dot{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0 \leq 0$. Assim, o equilíbrio $\mathbf{q}_0$ é estável. ∎

A pergunta natural é se a recíproca do teorema 4.2.1 é verdadeira. Vejamos a seguir um contra-exemplo exibido em 1904 por Painlevé, o qual mostra que para um grau de liberdade a recíproca deste teorema não é válida. Considere o sistema Hamiltoniano com a energia cinética definida por

$$T(q, p) = \frac{1}{2}p^2$$

e a energia potencial $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\pi(q) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{q^2}} \sin(\frac{1}{q}), & \text{se} \quad q \neq 0, \\ \quad 0 \quad , & \text{se} \quad q = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

A origem é um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov das equações (4.3), neste caso, se resumem a $\ddot{q} = -\pi'(q)$, mas a origem não é um ponto de mínimo de π.

Exemplo similar a este, com dois graus de liberdade, é obtido considerando $T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ e

$$\pi(q_1, q_2) = \begin{cases} e^{q_1^{-\frac{1}{2}}} \cos(\frac{1}{q_1}) - e^{q_2^{-\frac{1}{2}}}[q_2 + \cos(\frac{1}{q_2})], & \text{se} \quad q_1 q_2 \neq 0, \\ \quad 0 \quad , & \text{se} \quad q_1 q_2 = 0. \end{cases}$$

Note que o equilíbrio $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ do sistema (4.3) é estável, mas na reta $q_2 = q_1$, tem-se para $q_1 \neq 0$, $\pi(q_1, q_1) = -q_1^2 e^{\frac{-1}{q_1^2}} < 0$.

Ambos os casos, mostram que a recíproca do teorema de Dirichlet-Lagrange é falsa. Algo nos chama atenção, as funções exibidas acima são de classe C^∞, mas não são analíticas numa vizinhança da origem.

Quando se trata da recíproca do teorema 4.2.1 para n graus de liberdade, obtemos um problema em aberto. O mesmo é apresentado no livro *Arnold's Problems* [2] como o problema 29 - 1976.

Desde então, um problema que tem merecido a atenção de diversos matemáticos tem sido em obter recíprocas parciais desse teorema. Uma recíproca parcial, no caso de dois graus de liberdade, é resolvida por Sokol'skii [29] considerando a energia potencial analítica, o que vamos ver na próxima seção.

4.3 Uma Recíproca Parcial do Teorema de Dirichlet-Lagrange

Considere a recíproca do teorema de Dirichlet-Lagrange para sistemas conservativos e com dois graus de liberdade. Alguns resultados mais completos, como em [11], [12] e [25], já foram estudados por meios, por exemplo, de topologia, o qual não tem um significado mecânico explícito, isto é, usando métodos exclusivamente de mecânica analítica.

Sob a hipótese do sistema mecânico conservativo ter dois graus de liberdade em $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ coordenadas posição e $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ coordenadas momento, a origem como o equilíbrio do espaço de fase, faremos a energia cinética

$$T = \frac{1}{2}||\mathbf{p}||^2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 \tag{4.5}$$

uma forma quadrática definida positiva. Já a energia potencial, analítica numa vizinhança do equilíbrio, tem a seguinte expressão:

$$\pi(q_1, q_2) = \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_m + \cdots \tag{4.6}$$

onde π_m é um polinômio homogêneo de grau $m \in \{2, 3, \cdots\}$, cuja expressão nas coordenadas q_1, q_2 é:

$$\pi_m = \sum_{j+k=m} u_{jk} q_1^j q_2^j. \tag{4.7}$$

Vejamos uma maneira equivalente de enunciar o teorema 4.2.1:

Se um equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é instável no sentido de Lyapunov, então o mesmo não é um ponto de mínimo local estrito para energia potencial π.

Portanto, as condições dos resultados do capítulo anterior serão verificadas para comprovação do próximo teorema.

Teorema 4.3.1 (Recíproca Parcial). *O equilíbrio* $\mathbf{x}^* = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *do sistema* (4.3) *é instável se, e somente se, a energia potencial* $\pi(q_1, q_2)$ *analítica não tem mínimo estrito neste equilíbrio* (*quando* π *tem mínimo estrito na origem, ela é uma função definida positiva nas variáveis* q_1, q_2 *em uma vizinhança da origem*).

Demonstração: Note que se um equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é instável no sentido de Lyapunov, o teorema de Dirichlet-Lagrange já garante que a energia potencial π não tem mínimo estrito neste equilíbrio.

Reciprocamente, considere a parte linear do sistema (4.3). Sem perda de generalidade, a parte quadrática associada a este Hamiltoniano tem a seguinte forma:

$$H_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}C_1q_1^2 + \frac{1}{2}C_2q_2^2 \quad \left(\pi_2 = \frac{1}{2}C_1q_1^2 + \frac{1}{2}C_2q_2^2,\ C_1 \geq C_2\right). \quad (4.8)$$

Daí, é possível obtermos as equações de movimento e em seguida escrever a matriz associada ao sistema. Vejamos,

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_1 = -C_1q_1, \quad \dot{p}_2 = -C_2q_2 \quad \text{ou}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Com o polinômio característico $P(\lambda)$ da matriz associada a este sistema linear e extraindo suas raízes, será possível uma análise minuciosa nos sinais das constantes C_1 e C_2.

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (C_1 + C_2)\lambda^2 + C_1C_2 \quad (4.9)$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-C_1} \quad \text{ou} \quad \lambda = \pm\sqrt{-C_2}$$

Quando $C_2 < 0$, pelo menos um autovalor será real e positivo, então, pelo teorema (1.3.5), o equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é instável para o sistema completo. Além disso, a solução geral apresenta termos que crescem exponencialmente quando o tempo t tende a infinito, isto é, o sistema completo é instável.

Se $C_1 \geq C_2 > 0$ o potencial é positivo, onde garantimos que a origem é um mínimo local estrito de π_2, donde o equilíbrio é estável.

Resta-nos o caso em que $C_1 \geq C_2 = 0$, ou seja, $C_1 = C_2 = 0$ e $C_1 > C_2 = 0$. Basta introduzir a notação $C_k = \omega_k^2$, $(k = 1, 2)$, sendo ω_k as frequências das oscilações lineares e notar que são os casos já estudados neste trabalho.

Se uma frequência for nula e outra diferente de zero, ou seja, $\omega_1 \neq 0$ e $\omega_2 = 0$, como vimos, o Hamiltoniano após normalizado é, sem perda de generalidade,

$$H^* = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \mathbf{a}_{0,M} q_2^M + H^{(M)} + \cdots \tag{4.10}$$

com $\mathbf{a}_{0,M} \neq 0$, enquanto a expressão $H^{(M)}$ denota os termos de ordem M distintos de $\mathbf{a}_{0,M}$. Pelo teorema 3.2.4, podemos afirmar que só vai haver estabilidade para o equilíbrio se M for um número par e $\mathbf{a}_{0,M} > 0$. Mas, se M é ímpar ou se M é par e $\mathbf{a}_{0,M} < 0$, o equilíbrio é instável no sentido de Lyapunov.

Finalmente, quando $\omega_1 = \omega_2 = 0$, isto é, todas os autovalores nulos, a matriz linearizada do sistema acima terá posto dois. Claramente, o teorema 3.3.2 está inteiramente de acordo com as afirmações do teorema de Dirichlet-Lagrange considerado, desde que os termos de terceira ordem tenham sinal alternados.

De fato, sem perda de generalidade, os termos de terceira ordem após normalizados ficam da seguinte forma:

$$\pi_3 = u_{30}q_1^3 + u_{21}q_1^2 q_2 + u_{12}q_1 q_2^2 + u_{03}q_2^3, \quad (u_{jk} = h_{jk00}^*) \tag{4.11}$$

Se π_3 não é identicamente nulo, a origem não é mínimo estrito de (4.11) e pelo teorema 3.3.2 o equilíbrio é instável.

Considere então $m = \min\{K \geq 3\ ;\ \pi_K \text{ não é indenticamente nula}\}$, ou seja, faremos a normalização dos termos π_m até uma determinada ordem de modo que $\pi_m \neq 0$. Neste caso, $\pi = \pi_2 + \pi_3 + \cdots$ já está na forma normal de Lie.

Se m for ímpar, segue de maneira análoga ao caso $m = 3$. Se m for par, é possível encontrarmos uma solução particular instável como em (3.18) e construir uma função de Chetaev como em (3.19), a qual garante instabilidade para o sistema completo. ∎

Por fim, está provada uma recíproca parcial para o teorema de Dirichlet-Lagrange, em dois graus de liberdade e quando a energia potencial é analítica numa vizinhança do equilíbrio. No início deste capítulo, o problema pode ser formulado em coordenadas generalizadas $\mathbf{q} \in \Omega$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ como faz Garcia e Barros [10] e, mesmo assim, os resultados obtidos serão válidos.

Referências Bibliográficas

[1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechamics.* New York: Springer-Verlag, 1978.

[2] ARNOLD, V. I. *Arnold's Problems.* Moscow, Russia: Springer-Verlag, 2000.

[3] ARNOLD, V. I. Characteristic class appearing in the quantization condition. *Funkts. Anal. Primen.*, 1, n. 1, p.1-14, 1967.

[4] BREZIS, H. *Analyse Foncteonelle - Theorie at Aplications*, Paris, 1987.

[5] CABRAL. H. E., MEYER. K. R. *Stability of Equilibria and Fixed Points of Conservative Systems*, p. 1351 - 1362, 1999.

[6] CHETAEV, N.G. *Stability of motion.* English translation. Pergamon Press, Book No. 090505.1961.

[7] DEPRIT, A. *Canonical Transformations Depending on a Small Parameter.* Celestial Machanics, [Netherlands], v. 72, p. 173-179, 1969.

[8] DOS SANTOS, F. *Formas Normais e Estabilidade de Equilíbrios para Sistemas Hamiltonianos.*211f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

[9] DOS SANTOS, F. *Stability Of Equilibrium Positions Of Periodic Hamiltonian Systems*, Universidade Federal de Sergipe, 2005.

[10] GARCIA, M.V.P., BARROS, I.Q. *Mecânica Analítica Clássica.* Edgard Blucher. São Paulo, 1995.

[11] HAGEDORN, P., *Uber Die Instabilitat Konservative Systeme Mit Gyroskopischen Kraften.* Arch. Ration. Mech. Analysis, Vol.58, No.1, 1975.

[12] HAGEDORN, P., *Die Umkehrung Der Stabilitatssatze Von Lagrange-Dirichlet Und Routh.* Arch. Ration. Mech. Analysis, Vol.42, No.4, 1971.

[13] HALE, J.K., *Ordinary Differential Equations.* [S.1.]: Wiley - interscience, 1969.

[14] HENRARD, J. *Concerning The Genealogy Of Long Period Families At L_4.* Astronom. Astrophys., [S.1.], v.5, p. 45-52, 1970.

[15] HENRARD, J. *On Pertubation Theory Using Lie Transforms.* Celestial Mechamics., [S.1.], v. 3, p. 107-120, 1970.

[16] HENRARD, J. *Periodic Orbits Emanating From a Resonant Equilibrium.* Celestial Mechamics., [S.1.], v. 1, p. 437-466, 1970.

[17] KAMEL, A. *Pertubation Method in the Theory or Nonlinear Oscilations.*Celestial Machanics, [S.1.], v. 3, p. 90-99, 1970.

[18] LYAPUNOV. A. M. *General Problem of Stability of Motion.* Gostekhizdat: Obshchaya Zadacha ob Ustoichrvosti Dvizheniya. 1950.

[19] MARKEEV, A. P. *Linear Hamiltonian Systems and some applications to the problem of stability of motion of satellites relative to the center of mass.* Moscow-Izhe, 2009.

[20] MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems.* Second Edition. Springer, 1999.

[21] MEYER, Kenneth R., Glen R. Hall, Daniel Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* Springer, 2009.

[22] MOSER, J. K. *On invariant curves of area-preserving mappaing of an annulus.* Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys.,[S.1.],1962.

[23] OFFIN, D. Variational Structure of the Zones of Instability, *Differential Integral Equations.* V. 14, 2001, n. 9, p. 1111-1127.

[24] OLIVEIRA, Elisânia Santana de. *Formas Normais de Matrizes Hamiltonianas Degeneradas.* 2009.

[25] PALAMODOV, V.P., *On Stability Of Equilibrium In a Potential Field.* Funktsional'nyi analizi ego prilozheniya, Vol.11, No.4, 1977.

[26] SIEGEL, G.L., MOSER, J.K. *Lectures on Celestial Mechamics.* Now York: Springer-Verlog, 1971.

[27] SOKOL'SKII, A. G., *On the Stability of an Autonomous Hamiltonian System With Two Degrees of Freedom in the Case of Equal Frequencies*. PMM vol. 38, N^o 5, 1974.

[28] SOKOL'SKII, A.G. *On Stability of An Autonomous Hamiltonian System With Two Degrees Of Freedom Under First-Order Resonance*. Moscow, 1976.

[29] SOKOL'SKII, A.G. *On Stability of Self-Contained Hamiltonian System With Two Degrees Of Freedom In The Case Of Zero Frequencies*. Moscow, 1982.

[30] SOTOMAYOR, Jorge. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo:Editora Livraria da Física, 2011.

[31] VIDAL, C. *Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos*. Recife, 2003. (Notas de curso).

[32] VIDAL, C. *Transformações Simpléticas, Formas Normais e Sistemas Hamiltonianos*. Recife, 2001. (Notas de curso).

Anexos

A forma geral para função geradora quando o posto da matriz $\mathbf{S}$ é igual a três (no caso de duas frequências nulas, isto é, quando todas a raízes da equação fundamental são nulas) é:

$$W_3 = a_{3000}Q_1^3 + a_{0300}Q_2^3 + a_{0030}P_1^3 + a_{0003}P_2^3 + a_{2100}Q_1^2Q_2 + a_{2010} * Q_1^2P_1 + a_{2001}Q_1^2P_2 +$$

$$a_{1200}Q_1Q_2^2 + a_{0210}Q_2^2P_1 + a_{0201}Q_2^2P_2 + a_{1020}Q_1P_1^2 + a_{0120}Q_2P_1^2 + a_{0021}P_1^2P_2 +$$

$$+ a_{1002}Q_1P_2^2 + a_{0102}Q_2P_2^2 + a_{0012}P_1P_2^2 + a_{1110}Q_1Q_2P_1 + a_{1101}Q_1Q_2P_2 +$$

$$a_{0111}Q_1P_1P_2 + a_{1011}Q_1P_1P_2.$$

Mas, conseguimos algumas restrições para os coeficientes desta função. A saber algumas destas,

$$a_{0012} = a_{1002} = 0$$

$$a_{0210} = h_{0300}$$

$$a_{1020} = -\frac{1}{\delta}h_{0030}$$

$$a_{2010} = -a_{1101}$$

$$a_{2001} = -\frac{1}{2\delta}h_{1011}$$

$$a_{0111} = h_{0210}$$

$$a_{0003} = \frac{1}{3}h_{1002}$$

$$a_{1011} = h_{0021}$$

Além disso, ainda quando $rg(\mathbf{S}) = 3$ garantimos que se $h_{0003} \neq 0$ então o equilíbrio origem é instável no sentido de Lyapunov. Na demonstração deste resultado exibimos uma função de Chetaev, a qual garante instabilidade para o sistema completo via uma solução instável particular do sistema truncado (página 69). A derivada da função (3.19) é:

$$\dot{V} = X + Y + Z + W + T,$$

onde,

$$X = 210P_2^{209}(-Q_1 - h_{0102}P_2^2)$$

$$Y = -42\left[\left(\frac{Q_1}{a}\right)^4 - P_2^5\right]^{41}\left\{4\left(\frac{Q_1}{a}\right)^3\left(\delta P_1 + h_{0012}P_2^2\right) - 5P_2^4\left(Q_1 - h_{0102}P_2^2\right)\right\}$$

$$Z = -70\left[\left(\frac{P_1}{b}\right)^2 - P_2^3\right]^{69}\left\{2\frac{P_1Q_2}{b} - 3P_2^2\left(Q_1 - h_{0102}P_2^2\right)\right\}$$

$$W = -30\left[\left(\frac{Q_2}{c}\right)^4 - P_2^7\right]^{29}\left\{4\left(\frac{Q_2}{c}\right)^3\left(3h_{0003}P_2^2 + 2h_{0102}Q_2P_2 + 2h_{0012}P_1P_2\right)\right\}$$

$$T = -7P_2^6(Q_1 - h_{0102}P_2^2)$$