

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

JOSÉ CLAUDEMIR DE MENEZES

ÁREAS E VOLUMES
UMA ABORDAGEM COMPLEMENTAR AO LIVRO
"A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO"
SBM - VOL 2, E. L. LIMA, et al.

ITABAIANA/SE
2015

JOSÉ CLAUDEMIR DE MENEZES

ÁREAS E VOLUMES
UMA ABORDAGEM COMPLEMENTAR AO LIVRO
"A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO"
SBM - VOL 2, E. L. LIMA, et al.

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

ORIENTADOR: Prof. Dr. ALEJANDRO CAICEDO ROQUE

ITABAIANA/SE
2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M543a Menezes, José Claudemir de
Áreas e volumes : uma abordagem complementar ao livro " a matemática do ensino médio" SBM – VOL 2, E. L. LIMA, et al. / José Claudemir de Menezes ; orientador Alejandro Caicedo Roque. – Itabaiana, 2015.
95 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional em matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Esfera. I. Roque, Alejandro Caicedo, orient. II. Título.

CDU 51:37.016



Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

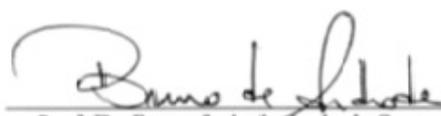
Áreas e volumes. Uma abordagem complementar ao livro: A matemática do ensino médio. SBM - Vol 2, E. L. Lima, et al.

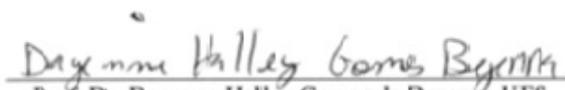
por

José Claudemir de Menezes

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque - UFS
Orientador


Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Dayenne Halley Gomes de Bezerra - UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 29 de Maio de 2015.

Agradecimentos

Ao ser Supremo: Deus, por te me concedido paciência, saúde, inteligência e o dom que me faz admirar a Matemática.

À minha família, por compreender a necessidade de minha ausência em certos momentos, ocasionada por consequência do compromisso e dedicação exigidos pelas atividades desenvolvidas durante o curso.

À minha esposa, Thaynara Santos de Oliveira, pela compreensão, pelas orientações, pelas palavras de apoio e por me encorajar todas as vezes que me senti cansado e com a esperança enfraquecida em concluir o curso.

Aos colegas Profmatianos-2013, assim denominados, por fazermos o curso no pólo de Itabaiana.

Às equipes diretivas, professores e alunos dos Colégios Estaduais São José, José Joaquim Cardoso, em Malhador-SE e do Murilo Braga, em Itabaiana, por terem entendido a necessidade de minhas ausências durante as aulas dos sábados letivos, em virtude das aulas do Mestrado ocorrerem aos sábados.

À Universidade Federal de Sergipe, através do corpo docente que ministrou as aulas do Curso no pólo de Itabaiana, passando suas experiências e transmitindo conhecimentos.

À Sociedade Brasileira de Matemática-SBM pela implantação do PROFMAT, o que me possibilitou a realização de um projeto pessoal: Fazer a Pós-graduação, no nível de mestrado; e à CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao professor doutor Alejandro Caicedo Roque, que de pronto me aceitou como seu orientando, mesmo sem conhecer meu perfil enquanto aluno da Instituição, a quem sou muito grato pelas suas Orientações e Ensinamentos.

Por fim, aos integrantes da Banca Examinadora desse Trabalho de Conclusão.

Resumo

Neste trabalho são tratados, de forma detalhada, três temas da Matemática que se relacionam entre si: Geometria Plana, Geometria Espacial e Sólidos de Revolução. Nessa abordagem, priorizou-se o cálculo da área das superfícies lateral e total do Prisma, da Pirâmide, do Cilindro, do Cone e da Esfera, bem como o cálculo de seus volumes, neste último, utilizando-se o princípio de Cavalieri na dedução de suas fórmulas. No estudo dos Sólidos de Revolução, destacam-se os Teoremas de Pappus, usados para deduzir as fórmulas das áreas das superfícies e dos volumes do Cilindro, do Cone e da Esfera de revolução.

Palavras-chave: áreas, volumes, prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, sólidos de revolução, princípio de Cavalieri, Teoremas de Pappus.

Abstract

In this work we are treated in detail, three subjects of mathematics that relate to each other: Plane Geometry, Geometry and Spatial Revolution Solid. In this approach, we prioritized the calculation of the area of the lateral surfaces and full of Prism, Pyramid, Cylinder, Cone and Sphere, and the calculation of its volumes in the latter, using the principle of the deduction Cavalieri their formulas. In the study of Revolution Solids, we highlight the theorems of Pappus, used to derive the formulas of surface areas and volumes of cylinder, cone and revolution sphere.

Key Words: areas, volumes, prism, pyramid, cylinder, cone, sphere, revolution solids, Cavalieri principle, theorems of Pappus.

Lista de Figuras

1.1	Quadrado de lado $a + b$	17
1.2	Paralelogramo	17
1.3	Triângulo ABC	18
1.4	Paralelogramo dividido em triângulos	18
1.5	Trapézio	19
1.6	Losango	20
1.7	Polígono regular	21
1.8	Comprimento da circunferência de raio r	21
1.9	Hexágonos regulares inscrito e circunscrito	22
1.10	Polígono regular de lado a inscrito na circunferência	22
1.11	Coroa ou anel circular	23
1.12	Material dourado	24
2.1	Princípio de Cavalieri para área	26
2.2	Princípio de Cavalieri para volume	26
2.3	Região plana	27
2.4	Sólido geométrico: esfera	28
2.5	Elipse inscrita na circunferência	29
3.1	Prisma	31
3.2	Prisma reto	32
3.3	Prisma oblíquo	32
3.4	Prisma regular	32
3.5	Secção transversal do prisma	33
3.6	Secção reta do prisma	33
3.7	Prismas	34

3.8	Área lateral do prisma	34
3.9	Paralelepípedo reto-retângulo	35
3.10	Diagonal do paralelepípedo	36
3.11	Paralelepípedo	37
3.12	Paralelepípedos justapostos	37
3.13	Cubo	38
3.14	Secção transversal do paralelepípedo e do prisma	39
3.15	Pirâmide	39
3.16	Pirâmides	40
3.17	Pirâmide regular	41
3.18	Pirâmide quadrangular regular	41
3.19	Triângulo retângulo	42
3.20	Secção da pirâmide	43
3.21	Triângulos semelhantes	43
3.22	Pirâmides seccionadas	44
3.23	Secção do prisma em pirâmides triangulares	45
3.24	Volume da pirâmide	46
3.25	Cubo de aresta a	46
3.26	Cilindro	47
3.27	Cilindro oblíquo	48
3.28	Cilindro reto	48
3.29	Secções do cilindro	49
3.30	Cilindro equilátero	49
3.31	Cilindro de altura h e raio R	50
3.32	Superfície lateral do cilindro	50
3.33	Planificação do cilindro	50
3.34	Secção do prisma e do cilindro	51
3.35	Cone	52
3.36	Cone reto	52
3.37	Cone oblíquo	53
3.38	Cone reto de geratriz g e altura h	53
3.39	Secções do cone	54

3.40	Secção meridiana no cone reto	54
3.41	Cone equilátero	54
3.42	Planificação do cone	55
3.43	Superfície lateral do cone	55
3.44	Área lateral do cone	56
3.45	Secção do cone e da pirâmide	57
3.46	Esfera	58
3.47	Secção da esfera	58
3.48	Triângulo retângulo	58
3.49	Círculo máximo da esfera	59
3.50	Anticlepsidra	59
3.51	Secção da esfera e do cilindro	60
3.52	Coroa circular	60
3.53	Esferas concêntricas	61
3.54	Esfera dividida em pirâmides	62
3.55	Hemisfério e cilindro	63
3.56	Triângulo retângulo	64
3.57	Triângulos retângulos semelhantes	64
3.58	Coroa circular	65
4.1	Tronco de cone	66
4.2	Esfera de revolução	67
4.3	Segmento de reta	67
4.4	Poligonal	68
4.5	Centro de gravidade do triângulo	70
4.6	Alavanca em equilíbrio	71
4.7	Alavanca sobre o eixo x	71
4.8	Sistema de partículas	72
4.9	Centro de gravidade de uma região plana	73
4.10	Partições da região R	74
4.11	Centro de gravidade de região plana limitada por duas funções	75
4.12	Sólido de revolução	76

4.13 Casca cilíndrica	77
4.14 Tronco de cone	78
4.15 Triângulo retângulo ACO_1	78
4.16 Centro de gravidade	79
4.17 Gráfico da função $f(x)$	80
4.18 Partições do gráfico de uma função	80
4.19 Gráfico de $y = f(x)$	81
4.20 Sólido obtido pela rotação de $f(x)$	82
4.21 Rotação de uma poligonal	83
4.22 Rotação do retângulo	84
4.23 Invólucro cilíndrico	85
4.24 Cilindro de revolução	87
4.25 Cone de revolução	88
4.26 Esfera de revolução	89

Sumário

Introdução	14
1 Ideias Intuitivas de Área e Volume	16
1.1 Ideia Intuitiva de Área	16
1.1.1 Área do Retângulo	16
1.1.2 Área do Paralelogramo	17
1.1.3 Área da Região Triangular	18
1.1.4 Área Limitada pelo Trapézio	19
1.1.5 Área Limitada pelo Losango	19
1.1.6 Área de um Polígono Regular	20
1.1.7 Comprimento da Circunferência	21
1.1.8 Área do Círculo	22
1.1.9 Área da Coroa (ou anel) Circular	23
1.2 Ideia Intuitiva de Volume	24
1.2.1 Sugestão de Atividade Didática	24
2 Princípios de Cavalieri	25
2.1 Histórico	25
2.2 Princípio de Cavalieri para Área	25
2.3 Princípio de Cavalieri para Volume	26
2.4 Teorema de Cavalieri para Área	27
2.5 Teorema de Cavalieri para Volume	28
2.6 Aplicação do Princípio de Cavalieri sobre Área	29
2.6.1 Área da Elipse	29
3 Sólidos Geométricos	31

3.1	Prisma	31
3.1.1	Elementos do Prisma	31
3.1.2	Classificação dos Prismas	32
3.1.3	Secção de um Prisma	33
3.1.4	Natureza de um Prisma	33
3.1.5	Área da Superfície do Prisma	34
3.1.6	Volume do Prisma	38
3.2	Pirâmide	39
3.2.1	Elementos de uma Pirâmide	40
3.2.2	Classificação ou Natureza de uma Pirâmide	40
3.2.3	Área da Superfície da Pirâmide	41
3.2.4	Secção de uma Pirâmide	42
3.2.5	Volume de uma Pirâmide	43
3.3	Cilindro	47
3.3.1	Elementos do Cilindro	47
3.3.2	Classificação dos Cilindros	48
3.3.3	Secção de um Cilindro	49
3.3.4	Área da Superfície de um Cilindro	49
3.3.5	Volume do Cilindro	51
3.4	Cone	51
3.4.1	Elementos do Cone	52
3.4.2	Classificação dos Cones	52
3.4.3	Secção de Cone	53
3.4.4	Área da Superfície de um Cone	54
3.4.5	Volume do Cone	56
3.5	Esfera	57
3.5.1	Secção da Esfera	58
3.5.2	Volume da Esfera	59
3.5.3	Área da Superfície Esférica	61
3.5.4	Aplicação do Princípio de Cavalieri: Volume da Esfera	63

4.1	Superfície de Revolução	66
4.2	Sólido de Revolução	66
4.3	Conhecimentos Preliminares	67
4.3.1	Centro de Gravidade $G(\bar{x}, \bar{y})$	67
4.3.2	Centro de Gravidade de uma Poligonal	68
4.3.3	Centro de Gravidade de um Arco	69
4.3.4	Centro de Gravidade de um Polígono	69
4.3.5	Cálculo de Volume de Sólidos de Revolução Via Integral	76
4.4	Teoremas de Pappus	78
4.5	Cilindro de Revolução	87
4.6	Cone de Revolução	88
4.7	Esfera de Revolução	89

Referências

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar de forma criteriosa dois temas da Matemática que se relacionam entre si, Área e Volume. Tais temas exercem papel relevante na vida acadêmica e social de todos os educandos em Matemática, tanto da educação básica quanto da superior. A Geometria Plana e Espacial são parte essencial do universo físico e servem de ferramenta para que o homem, através de seus conceitos, desenvolva o raciocínio lógico e visual, compreenda o mundo e participe ativamente em sociedade resolvendo problemas das diversas áreas do conhecimento.

O cálculo de área de região plana teve origem principalmente na necessidade de demarcar terras devastadas pelas enchentes do Rio Nilo, o que era feito pelos sacerdotes com interesse de coletarem impostos dos agricultores pela utilização das terras localizadas às margens do rio. Como o imposto era proporcional à área utilizada, esse trabalho era feito para calcular o imposto devido.

No caso do volume de sólido, o primeiro registro data de 300 a.c. quando Euclides em sua obra “Os Elementos” livro XII, apresenta como calcular o volume do prisma, do cilindro, do cone e da pirâmide. Por volta de 200 a.c., Arquimedes foi o primeiro a tratar com rigor e elegância uma expressão do volume da esfera no livro “Superfície e volume do Cilindro e da Esfera”.

Intuitivamente, a área de uma figura plana é a parte do plano ocupada por ela, já o volume de um sólido geométrico representa a quantidade de espaço que ele ocupa. Esse modo intuitivo de definir área e volume é aceito desde os primórdios, haja vista a sua praticidade e facilidade em entendê-los. Neste contexto, calcula-se a área de uma figura plana comparando-a com uma unidade de área pré-estabelecida, o resultado dessa comparação é um número que expressa a área da figura plana. De modo análogo, é feito o cálculo intuitivo do volume de um sólido geométrico, define-se uma unidade de volume, que normalmente é o volume de um cubo unitário, ou seja, cubo de aresta que mede uma unidade de comprimento, e em seguida compara o volume desse cubo com o volume do sólido em questão. O volume do sólido é expresso pelo número de vezes que o volume do cubo unitário cabe no volume do sólido.

Mas, nem sempre a figura plana ou o sólido geométrico permite tais comparações com a unidade de área ou de volume estabelecida, por apresentarem irregularidades em suas formas. Diante desse fato, houve necessidade de se pensar em métodos mais gerais e eficientes para calcular a área e o volume de sólidos ditos irregulares.

Surge então, alguns métodos como os Princípios de Cavalieri, usados neste trabalho para justificar as deduções das fórmulas do volume do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera.

A ideia central do princípio de Cavalieri foi a de analisar uma região plana e concluir que ela é formada por uma infinidade de cordas paralelas. Já no caso de um sólido geométrico foi concluir que ele é formado por uma infinidade de secções planas paralelas. Esse método foi duramente criticado pelos matemáticos da época, porém utilizado como ponto de partida para desenvolver a teoria do cálculo infinitesimal, o qual na atualidade é um método considerado eficiente para obter expressões da fórmula do volume do cilindro, do cone e da esfera.

O texto compõe-se de quatro capítulos. No primeiro são abordadas, de forma intuitiva, as ideias de área e volume, destacando-se as deduções das fórmulas das áreas das principais figuras planas, entre elas o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o triângulo, o trapézio, o losango, o círculo e a coroa circular. No segundo capítulo são apresentados os Princípios de Cavalieri, inicialmente como axiomas e depois enunciados e demonstrados como teoremas, usando a teoria do cálculo infinitesimal. Já no terceiro capítulo, são calculados a área lateral, a área total e o volume dos principais sólidos geométricos: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, sendo que o volume via o Princípio de Cavalieri. No quarto e último capítulo são tratados superfícies e sólidos de revolução, tendo como alicerce para as deduções das fórmulas os Teoremas de Pappus.

O que se propõe com este trabalho é deixar o registro de um texto que sirva de base para ministrar aulas e aprofundar conteúdos de Geometria Plana e Espacial na educação básica, não na sua totalidade, uma vez que em alguns capítulos são utilizados conteúdos não apropriados ao nível de desenvolvimento dos alunos desse nível de ensino, por outro lado não se propõe esgotar o conteúdo, pois o conhecimento é dinâmico e mutável.

Capítulo 1

Ideias Intuitivas de Área e Volume

1.1 Ideia Intuitiva de Área

A área de uma figura plana F , representa a parte do plano ocupada por ela. Então, para encontrar a área de uma figura plana F , faz-se a comparação dessa figura com a unidade de área estabelecida. O resultado dessa comparação será um número, que deve exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área escolhida.

Definição 1.1 *A área da superfície de um quadrado de lado l é l^2 .*

Costuma-se utilizar como unidade de área o metro quadrado (m^2) que é a área de um quadrado de lado $1\ m$, mas isso não impede que sejam utilizadas, também, as unidades de área: quilômetro quadrado (km^2), hectômetro quadrado (hm^2), decâmetro quadrado (dam^2), decímetro quadrado (dm^2), centímetro quadrado (cm^2) e o milímetro quadrado (mm^2) que são áreas de quadrados de lados $1\ km$, $1\ hm$, $1\ dam$, $1\ dm$, $1\ cm$ e $1\ mm$, respectivamente.

A **área de uma superfície limitada por um polígono** é um número real positivo associado à superfície de forma que:

- i.* Às superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais e reciprocamente;

$$P_1 \approx P_2 \Leftrightarrow (\text{Área de } P_1 = \text{Área de } P_2)$$

- ii.* A uma união de superfícies está associada uma área que é a soma das áreas das superfícies reunidas;

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n \Rightarrow \text{Área de } P = \text{Área de } P_1 + \text{Área de } P_2 + \dots + \text{Área de } P_n$$

1.1.1 Área do Retângulo

Definição 1.2 *O retângulo é o quadrilátero que tem os quatros ângulos retos.*

Considere um quadrado de lado $a + b$ dividido da forma abaixo:

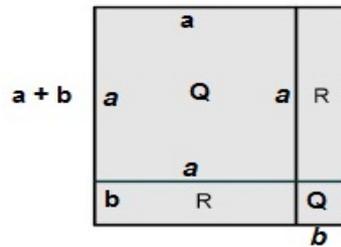


Figura 1.1: Quadrado de lado $a + b$

Note que o quadrado acima é composto de dois quadrados: um de lado medindo a e outro de lado medindo b e de dois retângulos congruentes de lados medindo a e b . Sendo assim, a área do quadrado de lado com medida $a + b$ é igual à soma das áreas dos dois quadrados com a área dos dois retângulos.

Chamando a área do retângulo de A , tem-se que a área do quadrado de lado com medida $a + b$ é igual a área do quadrado de lado de medida a , mais a área do quadrado de lado de medida b , mais duas vezes A , assim,

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + b^2 + 2 \cdot A \\ \Leftrightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= a^2 + b^2 + 2 \cdot A \\ \Leftrightarrow 2 \cdot A &= 2 \cdot a \cdot b \\ \Leftrightarrow A &= a \cdot b. \end{aligned}$$

Portanto, a área de um retângulo de medidas dos lados iguais a a e b é obtida pelo produto dessas medidas.

1.1.2 Área do Paralelogramo

Definição 1.3 *O paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.*

Considere o paralelogramo $ABCD$ abaixo:

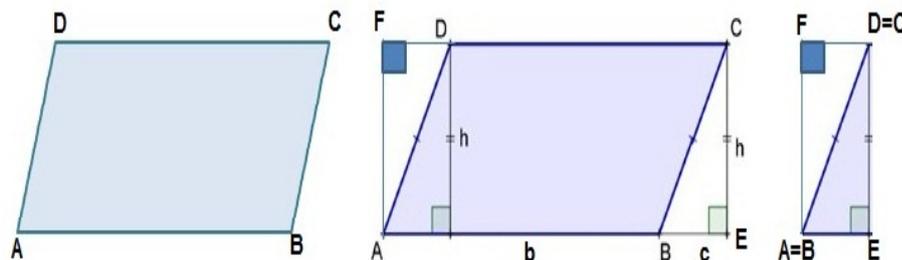


Figura 1.2: Paralelogramo

Prolongando o lado AB ¹ até tocar a perpendicular baixada de C , obtém-se o ponto E , logo CE é a altura do paralelogramo relativa ao lado AB (base). Traçando-se o segmento AF , paralelo e congruente a CE , obtém-se o retângulo $AECF$, no qual está contido o paralelogramo $ABCD$. Observe que os triângulos ADF e BCE são congruentes, pois $AD \equiv BC$, $BE \equiv DF$ e $CE \equiv AF$. Considerando $\text{med}(AB) = b$, $\text{med}(BE) = c$ e $\text{med}(CE) = h$, tem-se que a área do retângulo é dada por $(b + c) \cdot h$ e é igual à área A do paralelogramo, mais a área do retângulo de base de medida c e altura de medida h , isto é:

$$\begin{aligned} (b + c) \cdot h &= A + c \cdot h \\ \Leftrightarrow b \cdot h + c \cdot h &= A + c \cdot h \\ \Leftrightarrow A &= b \cdot h. \end{aligned}$$

Portanto, a área limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de uma de suas bases pela medida da altura relativa a essa base.

1.1.3 Área da Região Triangular

Considere o triângulo ABC de altura h relativa ao lado BC de medida a .

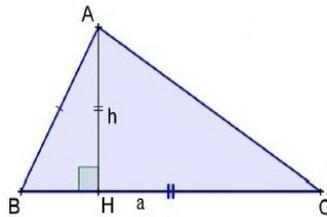


Figura 1.3: Triângulo ABC

Traçando AD , paralelo e congruente a BC e DC paralelo e congruente a AB , obtém-se o paralelogramo $ABCD$, que é composto de dois triângulos congruentes: ABC e ACD , pois $AB \equiv CD$, $AD \equiv BC$ e AC é lado comum aos dois triângulos.

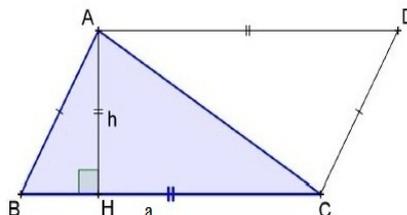


Figura 1.4: Paralelogramo dividido em triângulos

¹Neste texto será usada a notação AB para indicar segmento de reta e $\text{med}(AB)$ para indicar medida de segmento de reta.

Como os triângulos ABC e ACD são congruentes, suas áreas são iguais. Chamando a área de cada triângulo de A , a área do paralelogramo A_P é igual a duas vezes a área A . Assim,

$$\begin{aligned} A_P &= 2 \cdot A \\ \Leftrightarrow a \cdot h &= 2 \cdot A \\ \Leftrightarrow A &= \frac{a \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a área de um triângulo é dada pela metade do produto da medida do lado pela medida da altura relativa a esse lado.

1.1.4 Área Limitada pelo Trapézio

Definição 1.4 *Denomina-se trapézio todo quadrilátero que tem apenas um par de lados paralelos, chamados de bases.*

Considere o trapézio $ABCD$ de altura h .

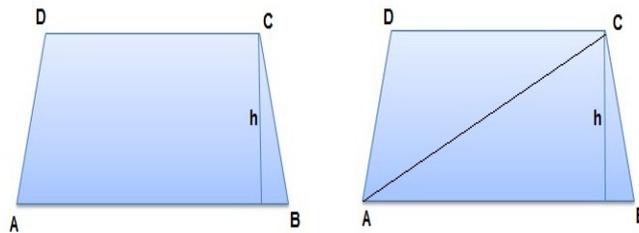


Figura 1.5: Trapézio

Traçando a diagonal AC , o trapézio fica dividido em dois triângulos: ACD e ABC , ambos de altura h , logo, a área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos. Sendo A a área do trapézio, tem-se

$$\begin{aligned} A &= A(\triangle ABC) + A(\triangle ACD) \\ &= \frac{\text{med}(AB) \cdot h}{2} + \frac{\text{med}(CD) \cdot h}{2} \\ &= \frac{[\text{med}(AB) + \text{med}(CD)] \cdot h}{2}, \end{aligned}$$

onde AB é chamado de base maior e CD de base menor. Assim, a área de um trapézio é dada pela metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

1.1.5 Área Limitada pelo Losango

Definição 1.5 *Denomina-se losango todo quadrilátero que tem os quatro lados com medidas iguais.*

Considere o losango $ABCD$ de diagonais de medidas d_1 e d_2 .

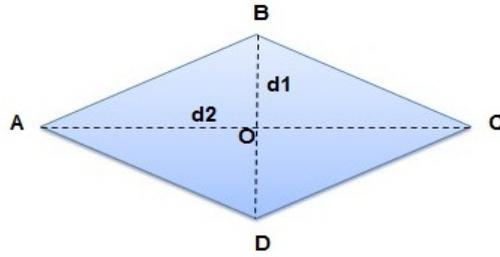


Figura 1.6: Losango

Observe que as diagonais d_1 e d_2 intersectam-se no centro do losango, dividindo-o em quatro triângulos retângulos congruentes de catetos $\frac{d_1}{2}$ e $\frac{d_2}{2}$.

Considerando que o losango foi dividido em quatro triângulos congruentes, sua área A_L é igual a quatro vezes a área de um dos triângulos. Assim, sendo A_L a área do losango, tem-se

$$\begin{aligned}
 A_L &= 4 \cdot A(\triangle AOB) \\
 &= 4 \cdot \frac{\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}}{2} \\
 &= 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{4} \\
 &= 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \\
 &= \frac{d_1 \cdot d_2}{2} .
 \end{aligned}$$

Portanto, a área do losango é obtida através da metade do produto das medidas de suas diagonais.

1.1.6 Área de um Polígono Regular

Definição 1.6 *Um polígono é regular quando tem todos os lados e todos os ângulos internos congruentes.*

No polígono regular a distância do centro a qualquer lado é chamado de **Apótema**.

Relações Entre Lado, Apótema e Raio nos Principais Polígonos Regulares

Polígono Regular	Triângulo	Quadrado	Hexágono
Lado	$\sqrt{3}r$	$\sqrt{2}r$	r
Apótema	$\frac{r}{2}$	$\frac{\sqrt{2}r}{2}$	$\frac{\sqrt{3}r}{2}$

Considere o polígono regular $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ de apótema com medida a e lado medindo l .

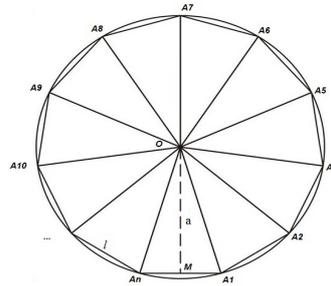


Figura 1.7: Polígono regular

Dividindo o polígono em triângulos com um dos vértices no centro do polígono e o lado coincidindo com um dos lados do polígono, obtém-se n triângulos congruentes de área $\frac{a \cdot l}{2}$.

Assim, sendo A_{PR} a área do polígono regular, tem-se

$$\begin{aligned} A_{PR} &= n \cdot \frac{a \cdot l}{2} \\ &= \frac{n \cdot l}{2} \cdot a \quad , \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $\frac{n \cdot l}{2}$ é o semiperímetro e a é a medida do apótema.

Daí, a área de um polígono regular é determinada pelo produto do seu semiperímetro pela medida do seu apótema.

1.1.7 Comprimento da Circunferência

Para deduzir o comprimento de uma circunferência utiliza-se o argumento de que todas as circunferências são figuras semelhantes entre si. Diante disso, pode-se estabelecer, então, que a razão entre seu comprimento C e a medida do seu diâmetro $2r$ é uma constante que, costuma-se indicar pela letra grega π (pi).

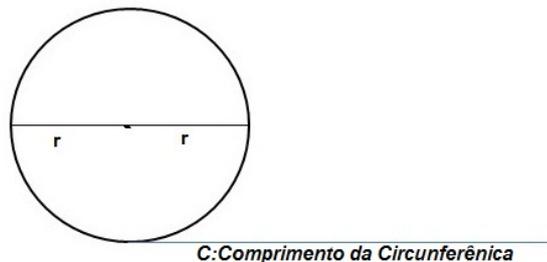


Figura 1.8: Comprimento da circunferência de raio r

Portanto, $\frac{C}{2r} = \pi$ equivale a $C = 2\pi r$, onde r é a medida do raio da circunferência e π é uma constante de valor $3,1415926535 \cdots$.

Nota: O matemático grego Arquimedes de Siracusa foi quem elaborou o primeiro método eficiente para obter valores que se aproximam indefinidamente da constante π . Em uma circunferência dada, ele construiu polígonos regulares inscrito e circunscrito, dividindo o perímetro de cada um pelo diâmetro da circunferência.

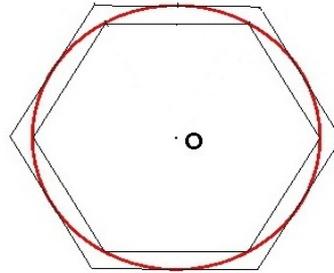


Figura 1.9: Hexágonos regulares inscrito e circunscrito

Perímetro da circunferência: $2\pi r$.

Perímetro do hexágono inscrito: $6r$.

Perímetro do hexágono circunscrito $\cong 6,928r$.

$$\begin{aligned} (6r < 2\pi r < 6,928r) \div 2r \\ 3 < \pi < 3,464 \end{aligned}$$

Arquimedes notou que quanto maior o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito, seus perímetros se aproximavam cada vez mais do perímetro da circunferência. Foi com o total de 96 lados para os polígonos, inscrito e circunscrito, que ele obteve a aproximação $\pi \cong 3,14$.

1.1.8 Área do Círculo

Seja P um polígono regular de n lados, com medida a , inscrito em uma circunferência de raio r .

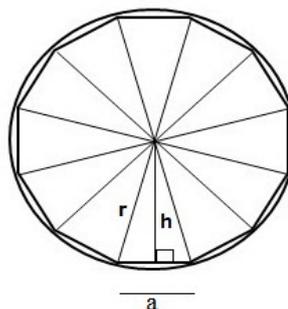


Figura 1.10: Polígono regular de lado a inscrito na circunferência

As diagonais do polígono que passam pelo centro da circunferência, que também é o centro do polígono, transformam-o em n triângulos isósceles de base a e altura h , logo a área desse polígono é

$$n \cdot \frac{a \cdot h}{2} = (n \cdot a) \cdot \frac{h}{2},$$

onde $n \cdot a$ é o perímetro do polígono.

Note que essa área é menor que a área do círculo; contudo, fazendo de modo intuitivo, o número n de lados crescer indefinidamente (n tender a infinito), verifica-se que:

- i. O perímetro do polígono ($n \cdot a$) tende ao perímetro da circunferência: $2\pi r$;
- ii. A altura de cada triângulo isósceles tende ao raio da circunferência;
- iii. A área desse polígono tende à área da superfície limitada pela circunferência, ou seja, à área do círculo.

Assim, a expressão $(n \cdot a) \cdot \frac{h}{2}$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$, que é a área do círculo, logo a área do círculo A_C é igual ao produto do número real π pelo quadrado da medida do seu raio, isto é

$$A_C = \pi r^2.$$

1.1.9 Área da Coroa (ou anel) Circular

Definição 1.7 Denomina-se coroa circular a superfície limitada por duas circunferências concêntricas e de raios R e r .

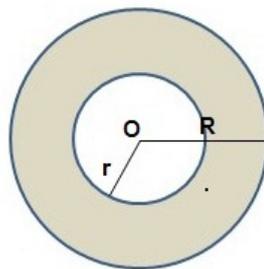


Figura 1.11: Coroa ou anel circular

A área da coroa circular A_{CC} é obtida pela diferença entre as áreas dos círculos de raios R e r , nesta ordem. Dessa forma

$$\begin{aligned} A_{CC} &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(R^2 - r^2). \end{aligned}$$

1.2 Ideia Intuitiva de Volume

O volume de um sólido representa a quantidade de espaço ocupado por ele. Para medir o espaço ocupado por um sólido é necessário comparar a quantidade desse espaço com uma unidade de volume. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes o sólido contém a unidade de volume estabelecida. Como convenção, estabeleceu-se como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, chamado cubo unitário. Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprime quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário.

Propriedades de Volume de Sólidos

1. Sólidos congruentes têm volumes iguais;
2. Se um sólido S é a reunião de dois sólidos S' e S'' que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S' e S'' ;
3. Se dois ou mais sólidos tem o mesmo volume, são chamados de sólidos equivalentes.

1.2.1 Sugestão de Atividade Didática

Para mostrar, de forma prática a ideia de volume, o professor poderá utilizar material dourado que é composto de cubos, placas, barras e cubos unitários. O cubo é formado por dez placas, a placa é formada por dez barras e a barra é formada por dez cubos unitários, cada cubo unitário possui 1 cm^3 de volume. A barra é composta de 10 cubos unitários, portanto, seu volume é $10 \times 1\text{ cm}^3 = 10\text{ cm}^3$. Já a placa é composta por dez barras, logo tem volume $10 \times 10\text{ cm}^3 = 100\text{ cm}^3$, e o cubo é formado por dez placas, o seu volume é igual a $10 \times 100\text{ cm}^3 = 1000\text{ cm}^3$.

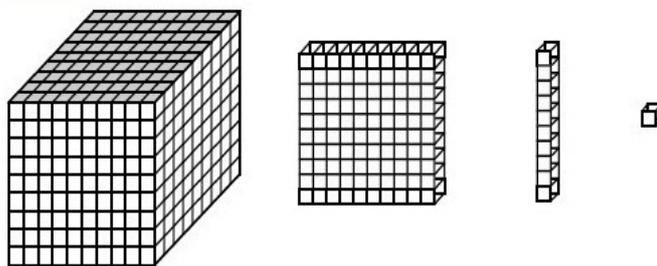


Figura 1.12: Material dourado

Capítulo 2

Princípios de Cavalieri

2.1 Histórico

Francisco Cavalieri (1598 - 1647) nasceu em Milão, na Itália, e adotou o nome de Bonaventura quando entrou para a ordem Jesuítica, em 1615. De família nobre, Cavalieri seguiu paralelamente a carreira religiosa e a atividade científica. Discípulo de Galileu Galilei (1564 - 1642), por indicação deste veio a ser catedrático, desde 1629, da Universidade de Bolonha, ao mesmo tempo que era o superior do monastério de São Jerônimo. Cavalieri foi também astrônomo, mas, se ainda é lembrado, isso se deve em grande parte ao método dos indivisíveis que desenvolveu a partir de 1626.

Cavalieri não definia, em suas obras sobre o assunto, o que vinham a ser os indivisíveis. Segundo ele, uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e um sólido geométrico por uma infinidade de secções planas paralelas entre si - a essas cordas e as essas secções ele chamava de indivisíveis.

O método dos indivisíveis foi desenvolvido por Cavalieri a partir das ideias de Arquimedes, investigando como calcular áreas e volumes de figuras curvas. A ideia central desse matemático foi a de olhar para uma área como um número infinito de segmentos de reta equidistantes e para um volume como uma infinidade de áreas planas. Cavalieri chamou esses elementos de indivisíveis da área e do volume.

Essa teoria permitia que se encontrasse rapidamente e com exatidão a área e o volume de muitas figuras geométricas, porém fora duramente criticada na época. Segundo seus críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada. Mal sabiam estes que o princípio de Cavalieri seria um dos pilares do que hoje se conhece como cálculo integral, o que de fato, ajudou no desenvolvimento da teoria do cálculo.

2.2 Princípio de Cavalieri para Área

Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Supondo-se que, para toda reta s paralela a r , as intersecções de R e S com s sejam vazias ou segmentos de reta tais que a razão entre seus comprimentos seja constante, então a razão entre as áreas de R e S é essa mesma constante.

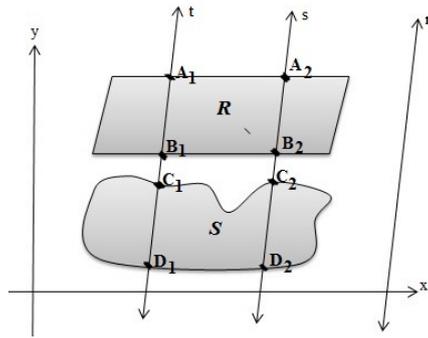


Figura 2.1: Princípio de Cavalieri para área

$$\text{Se } \frac{\text{med}(A_1B_1)}{\text{med}(C_1D_1)} = \frac{\text{med}(A_2B_2)}{\text{med}(C_2D_2)} = k,$$

então

$$\frac{\text{Área}(R)}{\text{Área}(S)} = k.$$

2.3 Princípio de Cavalieri para Volume

São dados três sólidos de mesma altura apoiados em um plano α , S_1 , S_2 e S_3 . Se todo plano paralelo ao plano α secciona os três sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.

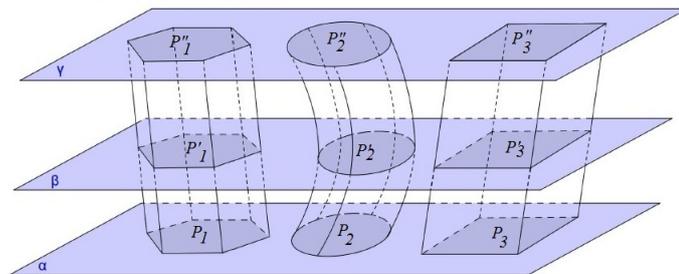


Figura 2.2: Princípio de Cavalieri para volume

$$\text{Se } \text{Área}(P'_1) = \text{Área}(P'_2) = \text{Área}(P'_3), \quad \text{Área}(P''_1) = \text{Área}(P''_2) = \text{Área}(P''_3),$$

então

$$V_{S_1} = V_{S_2} = V_{S_3}.$$

Esses princípios são aceitos como verdade no ensino médio, devido à técnica e instrumentos (conteúdos) científicos utilizados em suas demonstrações, não apropriados ao nível de conhecimento dos alunos de tal nível de ensino.

A seguir, esses princípios serão tratados como teoremas e demonstrados utilizando a teoria de integração de funções reais.

2.4 Teorema de Cavalieri para Área

Considere em um plano um sistema de coordenadas cartesianas OXY e R uma região delimitada por $y = 0$, $y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = f_1(y)$ e $x = f_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $f_1(y) \leq f_2(y)$ para todo y . Além disso, denote a área da região R por A_R .

Teorema 2.1 *Considere que S é uma região delimitada por $y = 0$, $y = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $g_1(y) \leq g_2(y)$ para todo y . Supondo-se que exista $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$, tal que $f_2(y) - f_1(y) = k \cdot [g_2(y) - g_1(y)]$ para todo y , então $A_R = k \cdot A_S$.*

Para demonstrar este teorema será utilizada a definição de área via integral, logo torna-se necessária a seguinte definição:

Definição 2.1 *A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$ é*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

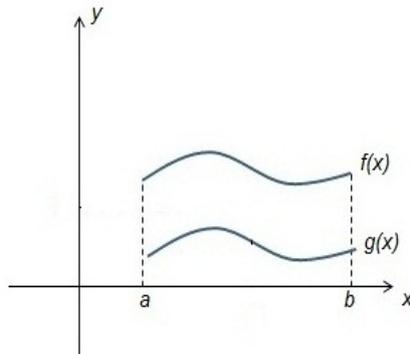


Figura 2.3: Região plana

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais, tem-se

$$A_R = \int \int_R dx dy = \int_0^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx \right] dy = \int_0^b [f_2(y) - f_1(y)] dy$$

Como $f_2(y) - f_1(y) = k \cdot [g_2(y) - g_1(y)]$, assim

$$A_R = \int_0^b k [g_2(y) - g_1(y)] dy = k \int_0^b [g_2(y) - g_1(y)] dy$$

Daí, por (2.1), tem-se $A_R = k \cdot A_S$ □

2.5 Teorema de Cavalieri para Volume

Considerando em um plano, um sistema de coordenadas cartesianas $OXYZ$ e P um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja P_t a intersecção de P com o plano $z = t$. Além disso, denote volume do sólido P por V_P .

Teorema 2.2 Considerando Q , outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t , tal que $0 \leq t \leq c$ seja Q_t a intersecção de Q com o plano $z = t$. Supondo-se que exista $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ tal que $A_{P_t} = k \cdot A_{Q_t}$ para todo t real, então $V_P = k \cdot V_Q$.

Para demonstrar este teorema será utilizada a definição de volume via integral, logo, torna-se necessária a seguinte definição:

Definição 2.2 Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P , passando por x e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é um função contínua em $[a, b]$, então o volume de S é

$$V_S = \int_a^b A(x) dx$$

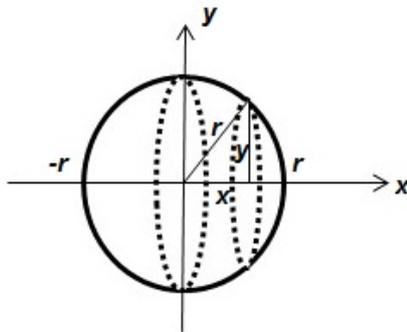


Figura 2.4: Sólido geométrico: esfera

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais, tem-se,

$$V_P = \int \int \int_P dx dy dz = \int_0^c \left[\int \int_{P_z} dx dy \right] dz.$$

Pelo teorema de Cavalieri para área, $\int \int_{P_z} dx dy = A_{P_z}$, assim

$$V_P = \int_0^c A_{P_z} dz.$$

Mas, $A_{P_z} = k \cdot A_{Q_z}$, então

$$V_P = \int_0^c k \cdot A_{Q_z} dz = k \cdot \int_0^c A_{Q_z} dz.$$

Logo, por (2.2) tem-se $V_P = k \cdot V_Q$ □

2.6 Aplicação do Princípio de Cavalieri sobre Área

A seguir é abordada uma aplicação do princípio de Cavalieri sobre área e no capítulo 3, no final da secção da esfera, será abordada uma aplicação do princípio de Cavalieri sobre volume.

2.6.1 Área da Elipse

Considere a elipse ε de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ e a circunferência λ de equação $x'^2 + y'^2 = a^2$.

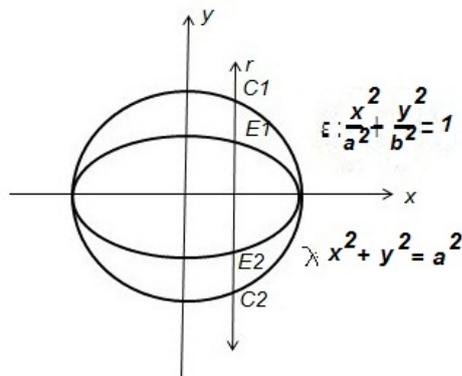


Figura 2.5: Elipse inscrita na circunferência

Note que a elipse está contida na circunferência λ , logo a área da região delimitada pela elipse é menor que a área da região delimitada pela circunferência.

Considerando a representação gráfica acima, no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, e a reta r secante às duas curvas, observa-se que foram definidos por esta reta os segmentos C_1C_2 na circunferência λ e E_1E_2 na elipse ε . Por outro lado, usando a simetria em relação ao eixo x , nota-se que o segmento C_1C_2 corresponde a $2y'$, y' ordenada de C_1 e o segmento E_1E_2 corresponde a $2y$, y ordenada de E_1 .

Expressando y em função de x nas equações das duas curvas, tem-se

Para a Elipse

$$\begin{aligned}b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\a^2y^2 &= a^2b^2 - b^2x^2 \\a^2y^2 &= b^2(a^2 - x^2) \\y^2 &= \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} \\y &= \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\end{aligned}$$

Daí,

$$\text{med}(E_1E_2) = \frac{2b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Para a Circunferência

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 &= a^2 \\y'^2 &= a^2 - x'^2 \\y' &= \sqrt{a^2 - x'^2}\end{aligned}$$

Daí,

$$\text{med}(C_1C_2) = 2\sqrt{a^2 - x'^2}$$

Logo,

$$\frac{\text{med}(E_1E_2)}{\text{med}(C_1C_2)} = \frac{\frac{2b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2b\sqrt{a^2 - x^2}}{2a\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a},$$

portanto, a razão entre as duas cordas (os indivisíveis) é $\frac{b}{a}$, e pelo princípio de Cavalieri tem-se

$$A_\varepsilon = \frac{b}{a} \cdot A_c = \frac{b}{a} \pi r^2 = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab,$$

onde A_C denota a área do círculo.

Capítulo 3

Sólidos Geométricos

3.1 Prisma

Definição 3.1 *Dados os planos α e β , distintos e paralelos, uma reta r secante aos planos α e β e o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ contido em α . Denomina-se prisma o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos a r em que uma extremidade é um ponto do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ e a outra extremidade pertença ao plano β .*

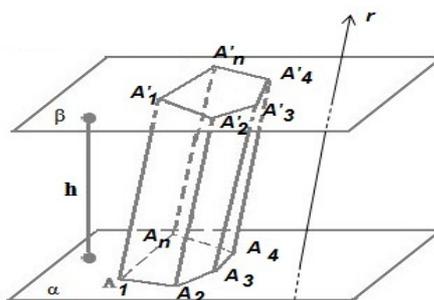


Figura 3.1: Prisma

3.1.1 Elementos do Prisma

No prisma acima

1. Os **vértices** são os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ e $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n$.
2. As **bases** são os polígonos $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \cdots A'_n$.
3. A **altura**(h) é a distância entre as duas bases.
4. As **arestas da base** são os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n; A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_{n-1}A'_n$.
5. As **arestas laterais** são os segmentos $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$.
6. As **faces** são os polígonos $A_1A'_1A_2A'_2, A_2A'_2A_3A'_3, \dots, A_{n-1}A'_{n-1}A_nA'_n$.

3.1.2 Classificação dos Prismas

1. Um prisma é **reto** quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Neste caso, as faces laterais são retângulos.

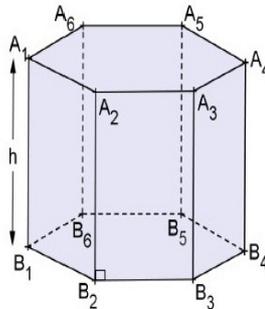


Figura 3.2: Prisma reto

2. Um prisma é **oblíquo** quando as arestas laterais não são perpendiculares aos planos das bases.

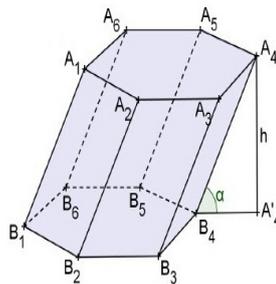


Figura 3.3: Prisma oblíquo

3. Um prisma é **regular** quando é reto e os polígonos que representam suas bases são polígonos regulares. Neste caso, as faces laterais são quadriláteros congruentes.

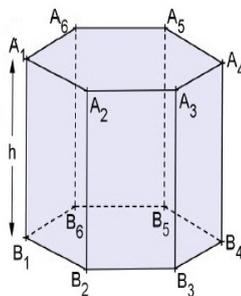


Figura 3.4: Prisma regular

3.1.3 Secção de um Prisma

Definição 3.2 *Denomina-se secção de um prisma a intersecção do prisma com um plano distinto dos planos das bases que intersecta todas as arestas laterais. O resultado de uma secção de um prisma é um polígono com vértices em cada aresta lateral.*

Se o plano que secciona o prisma é paralelo às bases, a secção é chamada de **secção transversal** e o polígono resultante dessa secção é congruente às bases.

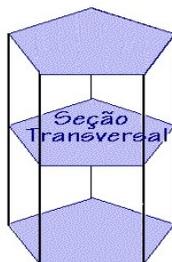


Figura 3.5: Secção transversal do prisma

Se o plano que secciona o prisma é perpendicular a todas as arestas laterais, a secção é dita **secção reta**.

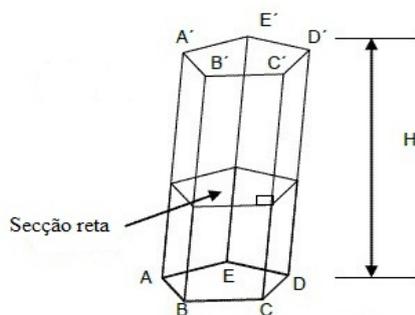


Figura 3.6: Secção reta do prisma

Observação 3.1 *As secções reta e transversal num prisma reto coincidem.*

3.1.4 Natureza de um Prisma

A natureza de um prisma será dada de acordo com o polígono de sua base. Se sua base for um triângulo será dito **prisma triangular**; se sua base for um quadrilátero será dito **prisma quadrangular**; se sua base for um pentágono será dito **prisma pentagonal** e, assim sucessivamente.

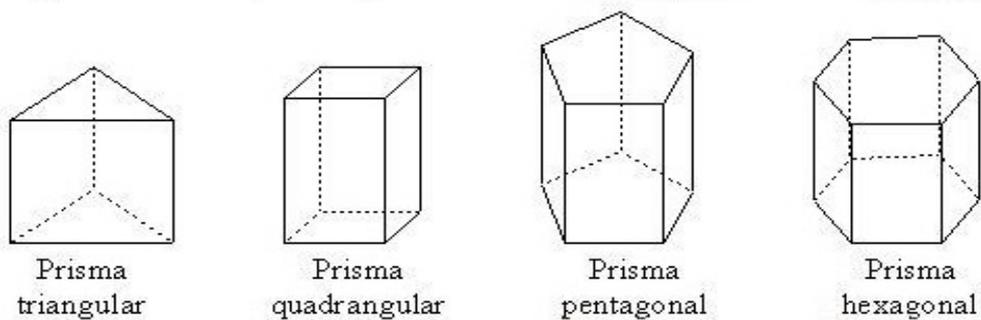


Figura 3.7: Prismas

3.1.5 Área da Superfície do Prisma

Definição 3.3 A área lateral de um prisma é dada pela soma das áreas das faces laterais.

Caso geral: Secção Reta. Considere um prisma de aresta lateral a e $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ as medidas dos lados de uma secção reta. Assim, cada face lateral é um paralelogramo de base a e altura igual a um lado da secção reta.

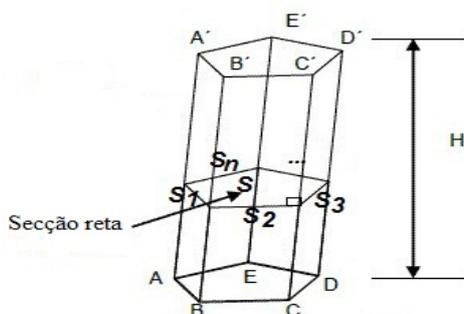


Figura 3.8: Área lateral do prisma

Assim,

$$\begin{aligned} A_l &= a \cdot s_1 + a \cdot s_2 + \dots + a \cdot s_n \\ &= a(s_1 + s_2 + \dots + s_n), \end{aligned}$$

onde $s_1 + s_2 + \dots + s_n$ representa o perímetro da secção reta $= 2p$. Portanto,

$$A_l = a \cdot 2p,$$

onde a é a medida da aresta lateral e $2p$ é o perímetro do polígono obtido através da secção reta.

Definição 3.4 A área total de um prisma é a soma da área lateral com as áreas das bases.

Logo,

$$A_t = a \cdot 2p + 2A_b,$$

onde a é a medida da aresta lateral, $2p$ é o perímetro do polígono obtido através da secção reta e A_b é a área da base.

Casos Particulares.

1. Prisma Reto. Neste caso, a aresta lateral é igual à altura, ou seja, $a = h$ e a base é equivalente à secção reta, daí

$$\begin{aligned} A_l &= 2p \cdot a \\ &= 2p \cdot h, \end{aligned}$$

sendo $2p$ o perímetro da base e h a altura do prisma.

$$\begin{aligned} A_t &= A_l + 2A_b \\ &= 2ph + 2A_b . \end{aligned}$$

2. Prisma Regular. Neste caso, a aresta lateral é igual à altura e a base é um polígono regular. Sabe-se que a área de um polígono regular (1.1) é dada pelo produto do semiperímetro e a medida do seu apótema.

Representando o apótema da base por m e o semiperímetro por p , tem-se que a área da base $A_b = m \cdot p$ e a área lateral $A_l = 2p \cdot h$, daí

$$\begin{aligned} A_t &= A_l + 2 \cdot A_b \\ &= 2p \cdot h + 2p \cdot m \\ &= 2p(h + m) . \end{aligned}$$

3. Um **Paralelepípedo Reto-retângulo** é o prisma formado por 6 faces retangulares, duas a duas equivalentes, ou seja, com as mesmas dimensões. Denote por $P(a, b, c)$ o paralelepípedo de medidas a , b e c .

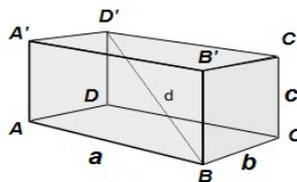


Figura 3.9: Paralelepípedo reto-retângulo

Observando a figura acima tem-se que $ABA'B' = CDC'D'$, $BCB'C' = ADA'D'$, $ABCD = A'B'C'D'$.

Medida da Diagonal de um Paralelepípedo

Considere o paralelepípedo $ABCDEFGH$, de medidas: $\text{med}(AB) = a$, $\text{med}(BC) = b$ e $\text{med}(CG) = c$.

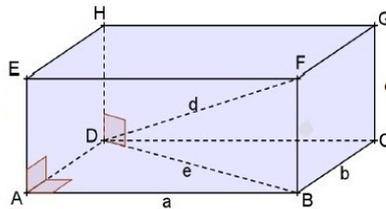


Figura 3.10: Diagonal do paralelepípedo

No retângulo $ABCD$, BD é uma diagonal, logo ABD é um triângulo retângulo em A . Aplicando o Teorema de Pitágoras em ABD , tem-se

$$\begin{aligned} [\text{med}(BD)]^2 &= [\text{med}(AB)]^2 + [\text{med}(AD)]^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

No retângulo $BDHF$, DF é uma diagonal que coincide com a diagonal do paralelepípedo $ABCDEFGH$. Como BDF é um triângulo retângulo em B , aplicando-se o Teorema de Pitágoras em BDF , tem-se

$$[\text{med}(DF)]^2 = [\text{med}(BD)]^2 + [\text{med}(BF)]^2.$$

De (3.1) $[\text{med}(BD)]^2 = a^2 + b^2$, logo

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Área Total de um Paralelepípedo

Definição 3.5 *É a soma das áreas das seis faces retangulares. Denotando a área do retângulo por A , tem-se*

$$\begin{aligned} A_t &= 2(A_{ABCD}) + 2(A_{ABEF}) + 2(A_{BCFG}) \\ &= 2 \cdot ab + 2 \cdot ac + 2 \cdot bc \\ &= 2(ab + ac + bc). \end{aligned}$$

Volume do Paralelepípedo Retângulo

Seja o paralelepípedo retângulo PR de dimensões a , b e c .

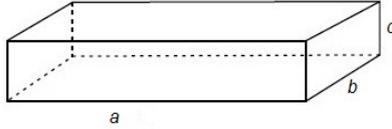


Figura 3.11: Paralelepípedo

Representando seu volume por $V(a, b, c)$ e adotando como unidade padrão de volume o cubo unitário, ou seja, outro paralelepípedo de dimensões 1, 1, 1, com volume $V(1, 1, 1) = 1$, e utilizando o fato de que o volume de um paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões, isto é, mantendo-se constantes a largura e a altura e multiplicando o comprimento por um número natural n , o volume ficará também multiplicado por n , ou seja, $V(na, b, c) = n \cdot V(a, b, c)$.

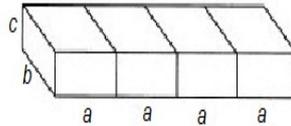


Figura 3.12: Paralelepípedos justapostos

Sendo a , b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 V(1, 1, 1) &= 1 \\
 \Leftrightarrow V(1 \cdot a, 1, 1) &= a \cdot 1 \\
 \Leftrightarrow V(a, 1 \cdot b, 1) &= a \cdot b \\
 \Leftrightarrow V(a, b, 1 \cdot c) &= a \cdot b \cdot c \\
 \Leftrightarrow V(a, b, c) &= abc.
 \end{aligned}$$

Concluindo, se $a \cdot b$ representa a área da base do paralelepípedo e c a medida da altura, então o volume de um paralelepípedo retângulo pode ser enunciado assim

O volume do paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, ou seja

$$V_{PR} = A_b \cdot h.$$

Observação 3.2 *Um cubo pode ser considerado como um paralelepípedo reto-retângulo no qual as três dimensões são iguais. Sendo a a medida da aresta, sua representação é*

$P(a, a, a)$ e as deduções das fórmulas podem ser obtidas a partir das fórmulas aplicadas aos paralelepípedos retos-retângulos.

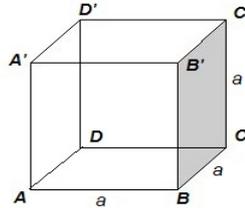


Figura 3.13: Cubo

Daí, a medida da diagonal é dada por

$$\begin{aligned} med(AC') &= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \\ &= \sqrt{3a^2} \\ &= a\sqrt{3}, \end{aligned}$$

sua área total

$$\begin{aligned} A_t &= 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \\ &= 2(a^2 + a^2 + a^2) \\ &= 2 \cdot 3a^2 \\ &= 6a^2, \end{aligned}$$

e seu volume

$$\begin{aligned} V &= a \cdot a \cdot a \\ &= a^3 \end{aligned}$$

3.1.6 Volume do Prisma

Considere um paralelepípedo reto-retângulo PR de altura h e área da base $B_1 = A$ apoiado em um plano α . Considere um prisma reto P de altura h e de área da base $B_2 = A$ apoiado no mesmo plano α .

Note que o paralelepípedo e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes.

Em seguida, tome um plano β , paralelo a α . Quando β secciona PR , também secciona P , resultando dessas secções os polígonos B'_1 e B'_2 , respectivamente.

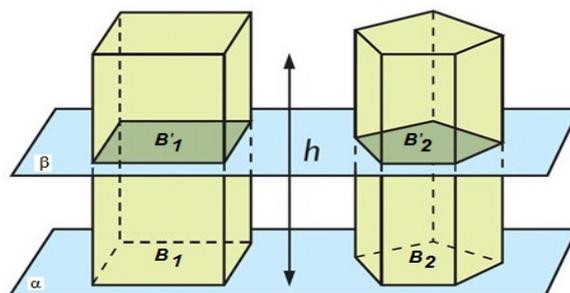


Figura 3.14: Secção transversal do paralelepípedo e do prisma

Como a secção é transversal, os polígonos B_1 e B'_1 , B_2 e B'_2 são congruentes, logo $B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$. Mas $B_1 = B_2 = A$, assim $B'_1 = B'_2 = A$.

Dado que B'_1 é equivalente à B'_2 , suas áreas são iguais. Pelo princípio de Cavalieri, o prisma P tem volume igual ao volume do paralelepípedo PR . Então

$$V_P = V_{PR}.$$

Posto que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, tem-se

$$V_P = A_b \cdot h.$$

Daí, pode-se enunciar

O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura, ou seja,

$$V_P = A_b \cdot h.$$

3.2 Pirâmide

Definição 3.6 Considere o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ contido no plano α e um ponto V não pertencente a α , denomina-se pirâmide o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$.

Neste texto, convencionou-se como notação de pirâmide a expressão $V_{A_1A_2A_3 \cdots A_n}$, onde V é o vértice e o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ é a base.

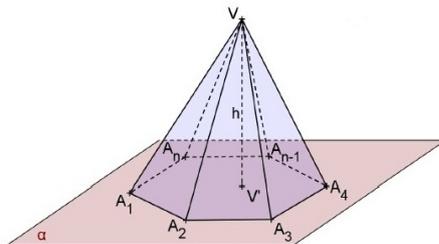


Figura 3.15: Pirâmide

3.2.1 Elementos de uma Pirâmide

Na pirâmide acima, pode-se identificar os seguintes elementos:

1. A **base** é o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$.
2. O **vértice** é o ponto V .
3. As **faces** são os triângulos $A_1A_2V, A_2A_3V, \cdots, A_{n-1}A_nV$.
4. As **arestas laterais** são os segmentos de reta A_1V, A_2V, \cdots, A_nV .
5. As **arestas da base** são os segmentos de reta $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$.
6. A **altura**(h) é dada pela distância entre o vértice e o plano da base.

3.2.2 Classificação ou Natureza de uma Pirâmide

A classificação de uma pirâmide é estabelecida de acordo com o polígono de sua base, ou seja

1. No **prisma triangular** a base é um triângulo.
2. No **prisma quadrangular** a base é um quadrilátero.
3. No **prisma pentagonal** a base é um pentágono.
4. No **prisma hexagonal** a base é um hexágono.

e assim sucessivamente.

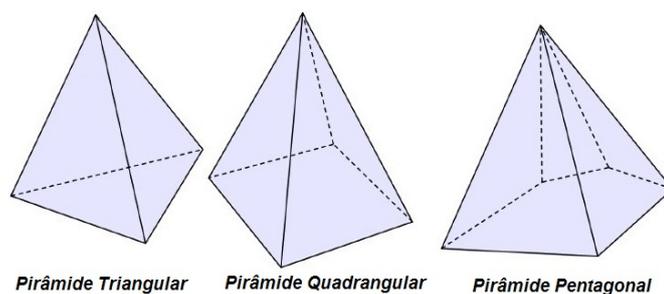


Figura 3.16: Pirâmides

Definição 3.7 *Define-se como pirâmide regular a pirâmide que tem um polígono regular na sua base. Neste caso, o centro da base é dado pela projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base.*

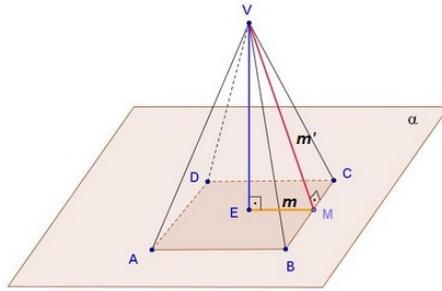


Figura 3.17: Pirâmide regular

Em uma pirâmide regular as faces laterais são triângulos isósceles congruentes e a altura relativa ao lado da base de uma face é chamada de **apótema da pirâmide**, representado na figura acima por m' .

A distância do centro da base a qualquer aresta da base, chama-se **apótema da base**, representado na figura acima por m .

3.2.3 Área da Superfície da Pirâmide

Definição 3.8 A superfície lateral de uma pirâmide é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada de área lateral e indica-se por A_l .

Definição 3.9 A superfície total de uma pirâmide é a reunião da superfície lateral com a superfície da sua base. A soma das áreas dessas superfícies é chamada área total e indica-se por A_t . Assim

$$A_t = A_l + A_b$$

Por exemplo, considere a pirâmide quadrangular regular de aresta da base igual a l , altura h e aresta lateral igual a a .

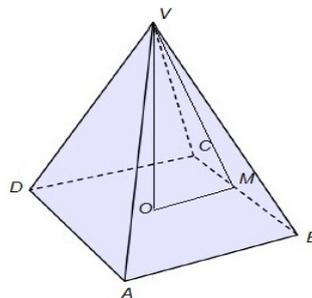


Figura 3.18: Pirâmide quadrangular regular

Como a pirâmide é quadrangular regular, sua base é um quadrado de lado l cuja área é igual a l^2 .

Quanto às suas faces, são quatro triângulos isósceles congruentes em que a base mede l , os lados congruentes medem a e o apótema da pirâmide é calculado utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo VMC , assim

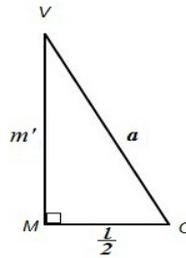


Figura 3.19: Triângulo retângulo

$$\begin{aligned} a^2 &= m'^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow m'^2 &= a^2 - \frac{l^2}{4} \\ \Leftrightarrow m'^2 &= \frac{4a^2 - l^2}{4} \\ \Leftrightarrow m' &= \frac{\sqrt{4a^2 - l^2}}{2}, \end{aligned}$$

sendo m' a altura de cada triângulo das faces. Por outro lado, a área lateral é dada por

$$\begin{aligned} A_l &= 4 \cdot A_{ABV} \\ &= 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - l^2}}{2}}{2} \\ &= 4 \cdot \frac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{4} \\ &= l\sqrt{4a^2 - l^2}. \end{aligned}$$

Logo, a área total será

$$\begin{aligned} A_t &= A_b + A_l \\ &= l^2 + l\sqrt{4a^2 - l^2} \\ &= l \cdot (l + \sqrt{4a^2 - l^2}). \end{aligned}$$

Observação 3.3 No caso em que $l = a$ a área total fica

$$A_t = a^2(1 + \sqrt{3}).$$

3.2.4 Secção de uma Pirâmide

Se um plano distinto do plano da base intersecta todas as arestas laterais de uma pirâmide em pontos distintos do vértice, diz-se que houve uma secção dessa pirâmide. No

caso desse plano ser paralelo ao plano da base da pirâmide, a secção é denominada **secção transversal** e o polígono gerado por esta secção é semelhante ao polígono da base.

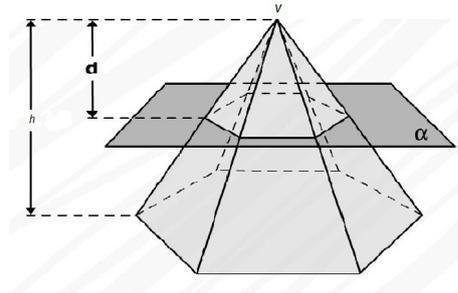


Figura 3.20: Secção da pirâmide

3.2.5 Volume de uma Pirâmide

Para demonstrar a fórmula do volume da pirâmide é necessário fazer algumas considerações preliminares.

I . A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração. Considere os triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ de modo que a razão de semelhança do 1º triângulo para o 2º triângulo seja igual a k .

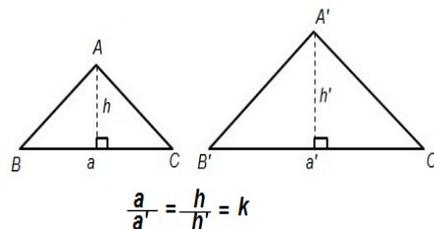


Figura 3.21: Triângulos semelhantes

Calculando as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se

$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad A_{\Delta A'B'C'} = \frac{a' \cdot h'}{2}.$$

Assim, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$ é

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta A'B'C'}} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{a' \cdot h'}{2}} = \frac{a \cdot h}{a' \cdot h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2.$$

□

II . Duas Pirâmides triangulares de mesma base e mesma altura têm volumes iguais.

Demonstração. Tome duas pirâmides triangulares apoiadas num mesmo plano com polígonos das bases P_1 e P_2 , respectivamente. Sendo as bases de mesma área [$A(P_1) = A(P_2)$] e as pirâmides de mesma altura h .

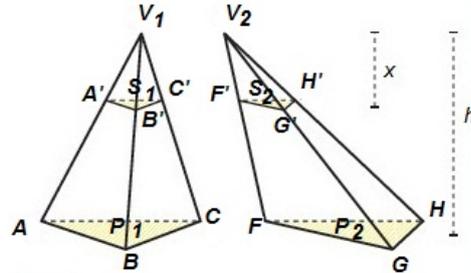


Figura 3.22: Pirâmides seccionadas

Seccionando transversalmente as duas pirâmides por um plano paralelo ao plano da base, a uma distância x dos seus vértices, tem-se que os polígonos S_1 e P_1 , S_2 e P_2 , as pirâmides V_{1ABC} e $V_{1A'B'C'}$, V_{2FGH} e $V_{2F'G'H'}$ são semelhantes, respectivamente.

Considerando a razão de semelhança entre as alturas das pirâmides igual a k , tem-se $\frac{x}{h} = k$, então $k^2 = (\frac{x}{h})^2$.

Assim, se $P_1 \sim S_1$ e $P_2 \sim S_2$, então

$$\frac{A(S_1)}{A(P_1)} = k^2 \quad \text{e} \quad (3.2)$$

$$\frac{A(S_2)}{A(P_2)} = k^2. \quad (3.3)$$

De (3.2) e (3.3), tem-se que

$$\frac{A(S_1)}{A(P_1)} = \frac{A(S_2)}{A(P_2)}.$$

Dado que $A(P_1) = A(P_2)$, então $A(S_1) = A(S_2)$. Daí, como os polígonos das secções apresentam a mesma área, pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que as pirâmides têm volumes iguais.

III . O volume de uma pirâmide triangular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

Demonstração. Considere o prisma triangular $ABCA'B'C'$ abaixo de volume $V = A_b \cdot h$.

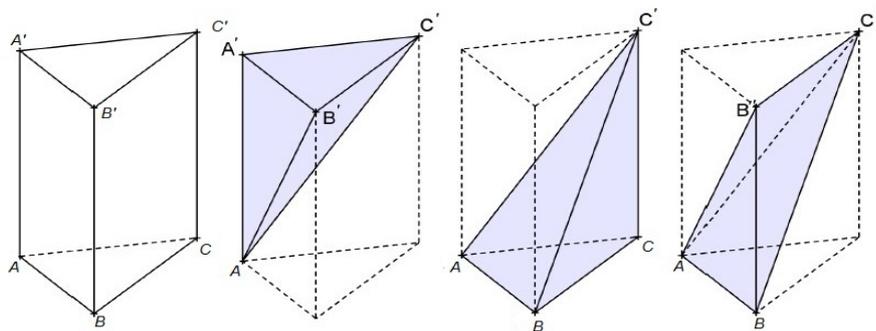


Figura 3.23: Secção do prisma em pirâmides triangulares

Seccionando-se este prisma pelos planos $AB'C'$ e ABC' , obtêm-se as pirâmides triangulares $A'A'B'C'$, $C'ABC$ e $C'ABB'$. Nas pirâmides $A'A'B'C'$ e $C'ABC$ as bases são equivalentes (mesma área) e as alturas são congruentes. As pirâmides $A'A'B'C'$ e $C'ABC$ têm o mesmo volume segundo (3.2.5 II), ou seja,

$$V_{A'A'B'C'} = V_{C'ABC} \quad (3.4)$$

Note que nas pirâmides $C'ABC$ e $B'ABC'$ (que também podem ser escritas como $C'ABC'$ e $B'ABC'$) as bases são equivalentes e as alturas têm a mesma medida, pois a distância do vértice C ao plano ABC' é igual à distância do vértice B' ao plano ABC' . Baseado em (3.2.5 II), as pirâmides $C'ABC$ e $B'ABC'$ têm o mesmo volume, logo

$$V_{C'ABC} = V_{B'ABC'} \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5), tem-se

$$V_{A'A'B'C'} = V_{C'ABC} = V_{C'ABB'} = V_{pt}, \text{ onde } pt \text{ denota a pirâmide triangular.}$$

Logo, o volume do prisma é igual à soma dos volumes das três pirâmides triangulares. Assim

$$\begin{aligned} V_P &= V_{pt} + V_{pt} + V_{pt} \\ \Leftrightarrow A_b \cdot h &= 3 \cdot V_{pt} \\ \Leftrightarrow V_{pt} &= \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \end{aligned}$$

□

Feitas essas considerações, pode-se deduzir a expressão (fórmula) para calcular o volume de uma pirâmide qualquer.

Volume de uma Pirâmide Qualquer

Considere uma pirâmide de vértice V , base $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ de área A_b e altura h .

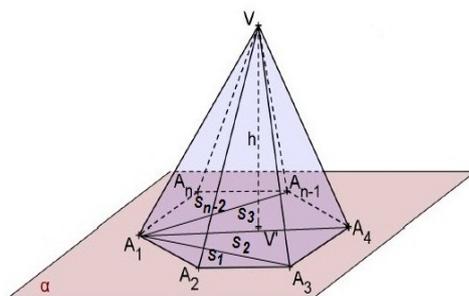


Figura 3.24: Volume da pirâmide

Dividindo-se o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ da base em $(n - 2)$ triângulos, tem-se que a pirâmide $V_{A_1A_2A_3 \cdots A_n}$ se transforma em $(n - 2)$ pirâmides triangulares de altura h , cujas bases são os $(n - 2)$ triângulos de áreas $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{n-2}$. Sendo assim, o volume da pirâmide $V_{A_1A_2A_3 \cdots A_n}$ é a soma dos volumes das $(n - 2)$ pirâmides triangulares.

Por (3.2.5 III), o volume de cada pirâmide triangular é dado por $V_{pt} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$. Então

$$\begin{aligned} V_{PM} &= \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h + \cdots + \frac{1}{3}S_{n-2}h \\ &= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{n-2})h. \end{aligned}$$

Como $A_b = (S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{n-2})$, então

$$V_{PM} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Conclusão. O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área de sua base pela medida da altura.

Observação 3.4 *Outra forma para deduzir a fórmula do volume da pirâmide.*

Considere o cubo $ABCD A' B' C' D'$ de aresta a abaixo.

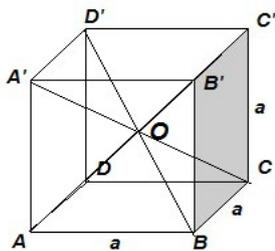


Figura 3.25: Cubo de aresta a

Traçando as suas diagonais AC' , BD' , $CA'eDB'$, elas se intersectam no ponto O que é o centro do cubo e o divide em 6 pirâmides de bases que coincidem com as faces do cubo e de vértices comuns localizados no ponto O e altura igual à metade da aresta, ou seja, $h = \frac{a}{2}$.

Por outro lado, sabe-se que o volume do cubo de aresta a é a^3 . Como o cubo foi dividido em 6 pirâmides equivalentes, então

$$\begin{aligned} V_C &= 6 \cdot V_{PM} \\ \Leftrightarrow V_{PM} &= \frac{V_C}{6} = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \cdot a}{6}. \end{aligned}$$

Note que a^2 é a área da base de cada pirâmide, assim

$$\begin{aligned} V_{PM} &= A_b \cdot \frac{a}{6} \\ &= A_b \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por outro lado, $\frac{a}{2}$ é a altura de cada pirâmide, então

$$V_{PM} = A_b \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h .$$

3.3 Cilindro

Definição 3.10 Considere um círculo de raio r e centro " O " contido num plano α , um plano β paralelo a α e uma reta s secante aos dois planos. Denomina-se cilindro o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos a s , que tenham uma extremidade num ponto do círculo e a outra extremidade no plano β .

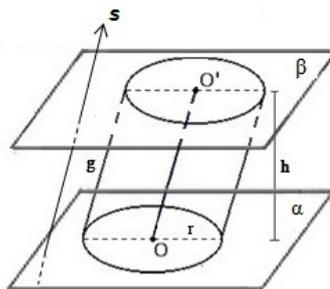


Figura 3.26: Cilindro

3.3.1 Elementos do Cilindro

No cilindro acima, tem-se

1. As **bases** são os círculos contidos nos planos α e β .
2. As **geratrizes** são os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto da circunferência do círculo contido no plano α e a outra num ponto da circunferência do círculo contido no plano β .
3. A **altura** é a distância entre os planos das bases.
4. O **raio** é o raio da base.
5. O **eixo** é o segmento de reta que tem suas extremidades nos centros das bases.

3.3.2 Classificação dos Cilindros

Os cilindros são classificados de acordo com a posição entre as geratrizes e os planos das bases.

1. Se as geratrizes do cilindro forem oblíquas aos planos das bases, ele será chamado de **cilindro oblíquo**.

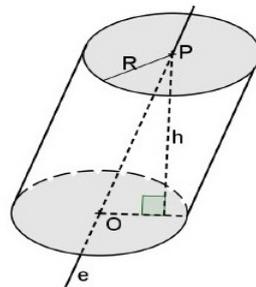


Figura 3.27: Cilindro oblíquo

2. Se as geratrizes do cilindro forem perpendiculares aos planos das bases, ele será chamado de **cilindro reto**.

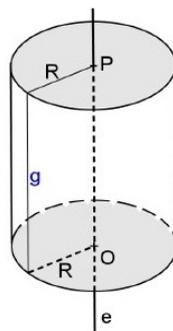


Figura 3.28: Cilindro reto

3.3.3 Secção de um Cilindro

Secção transversal. Se um plano paralelo aos planos das bases de um cilindro o intersecta, diz-se que essa secção é **transversal**.

Secção meridiana. É a secção que contém o eixo do cilindro.

Da secção meridiana de um cilindro reto obtém-se um retângulo que tem a base igual ao diâmetro da base do cilindro e a altura igual à altura do cilindro.

Da secção meridiana de um cilindro oblíquo, obtém-se um paralelogramo. Quando o ângulo formado pela base do cilindro e pelo plano da secção meridiana é equivalente ao ângulo formado pelas geratrizes com o plano da base a secção é um retângulo.

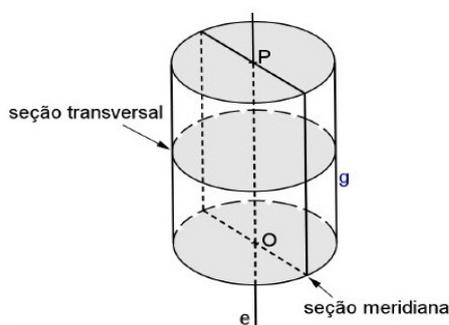


Figura 3.29: Secções do cilindro

Cilindro Equilátero

Definição 3.11 Um cilindro reto é dito equilátero quando sua altura é congruente ao diâmetro de sua base. A secção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado de lado igual à altura do mesmo.

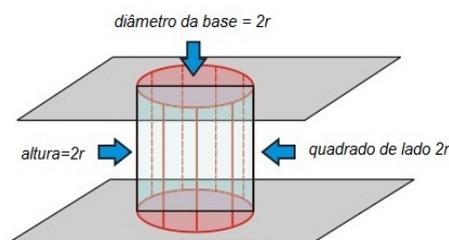


Figura 3.30: Cilindro equilátero

3.3.4 Área da Superfície de um Cilindro

Considere um cilindro reto de altura h e raio R .

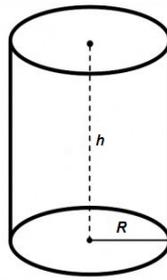


Figura 3.31: Cilindro de altura h e raio R

Área Lateral. Supondo que o cilindro acima esteja coberto por um papel de presente sem nenhuma sobra. Considere somente o papel da parte lateral do cilindro. Colocando-se esse papel sobre uma superfície plana, percebe-se que a superfície lateral do cilindro equivale a um retângulo de base igual ao comprimento da circunferência da base do cilindro ($2\pi \cdot R$) e altura igual à altura do cilindro (h).

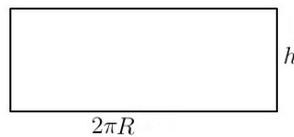


Figura 3.32: Superfície lateral do cilindro

Logo, a área lateral do cilindro é dada pela área do retângulo acima. Então

$$A_l = 2\pi R \cdot h$$

Área Total

Considere a superfície lateral juntamente com as duas bases.

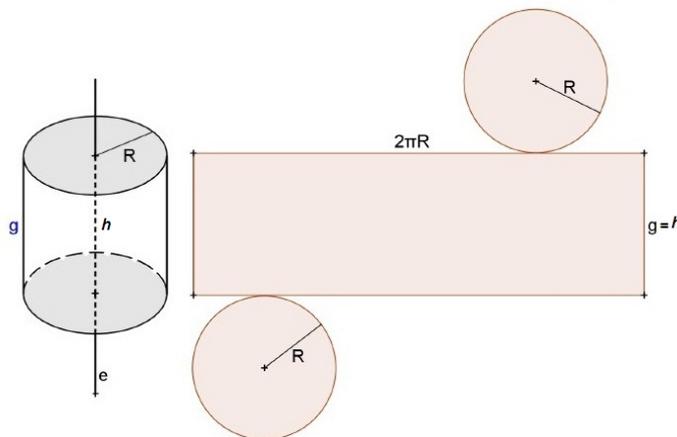


Figura 3.33: Planificação do cilindro

Então, a área total é dada por

$$A_t = A_l + 2(\pi \cdot R^2) = 2\pi \cdot R \cdot h + 2\pi \cdot R^2 = 2\pi \cdot R \cdot (h + R).$$

3.3.5 Volume do Cilindro

Considere um cilindro de raio da base r e altura h , cuja base esteja apoiada em um plano α e um prisma quadrangular de aresta da base $r\sqrt{\pi}$ e altura h também apoiado no plano α e contido no mesmo semiespaço do cilindro.

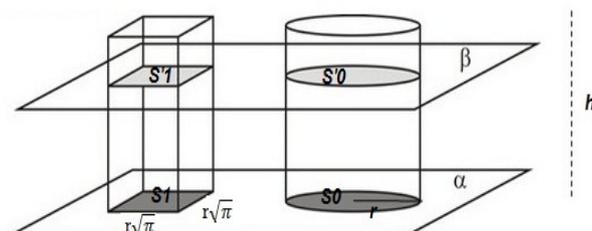


Figura 3.34: Secção do prisma e do cilindro

Note que as áreas das bases tanto do cilindro quanto do prisma são iguais. Chame as áreas da base do cilindro e da base do prisma de $S_O = A$ e $S_1 = A$, respectivamente. Do estudo de prisma sabe-se que $V_P = A_b \cdot h$, ou seja, $V_P = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Qualquer plano paralelo a α que seccione o cilindro, secciona também o prisma, originando dessa secção regiões planas equivalentes às bases, tanto no cilindro quanto no prisma, pois a secção é transversal. Chame as áreas dessas regiões de S'_O e S'_1 , respectivamente. Assim a área S'_O é igual a área da base do cilindro e a área S'_1 é igual a área da base do prisma. Se $S_O = A = S_1$, então $S'_O = A = S'_1$. Assim, pelo Princípio de Cavalieri o cilindro tem volume igual ao volume do prisma, ou seja

$$\begin{aligned} V_{CL} &= V_P \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então, o volume do cilindro pode ser enunciado assim

O volume de um cilindro de raio da base r e altura h é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, isto é

$$V_{CL} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

3.4 Cone

Definição 3.12 Sendo C um círculo de centro O e raio r contido no plano α e A um ponto não pertencente a α , define-se como cone o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em A e a outra em um ponto do círculo C .

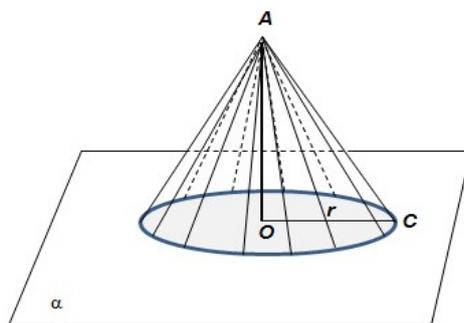


Figura 3.35: Cone

3.4.1 Elementos do Cone

No cone da figura acima, pode-se identificar.

1. A **Base** é o círculo C .
2. O **Vértice** é o ponto A .
3. A **Altura** é a distância do vértice A ao plano da base.
4. O **Raio da base** é o raio do círculo C .
5. O **Eixo** é o segmento de reta AO .
6. A **Geratriz**(g) é qualquer segmento que tem uma extremidade em A e a outra na circunferência da base.

3.4.2 Classificação dos Cones

A classificação de um cone é definida de acordo com a posição do seu eixo em relação ao plano da base.

1. Se o eixo do cone for perpendicular ao plano da base será dito cone **reto**.

Observação 3.5 *Somente no caso do cone reto as geratrizes apresentam o mesmo comprimento.*

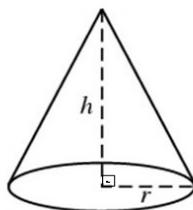


Figura 3.36: Cone reto

2. Se o eixo do cone for obluo ao plano da base será dto cone **obluo**.

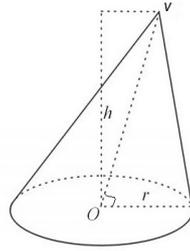


Figura 3.37: Cone obluo

Relação entre Geratriz, Altura e Raio da Base de um Cone Reto

Considere o cone reto de altura h , geratriz g e raio da base r abaixo.

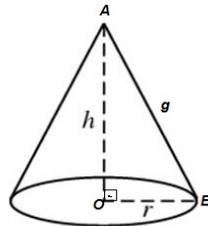


Figura 3.38: Cone reto de geratriz g e altura h

Note que no cone o triângulo AOB  retângulo em O , logo pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$g^2 = h^2 + r^2.$$

3.4.3 Secção de Cone

Secção transversal.  a secção feita por um plano paralelo ao plano da base que intersecta todas as geratrizes em pontos distintos do vértice. Da seco transversal de um cone obtm-se um círculo paralelo ao círculo da base.

Secção meridiana.  a secção feita no cone por um plano que contém o seu eixo.

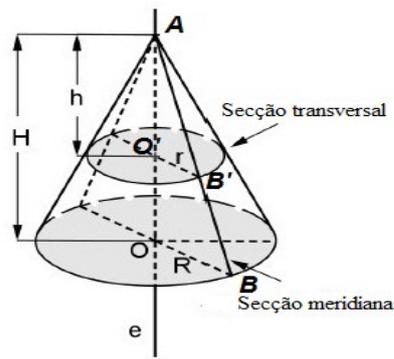


Figura 3.39: Secções do cone

Observação 3.6 *A secção meridiana em um cone reto é um triângulo isósceles.*

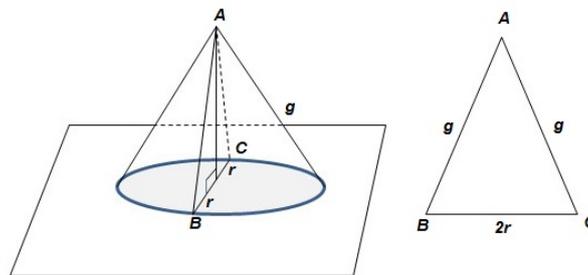


Figura 3.40: Secção meridiana no cone reto

Observação 3.7 *Se a secção meridiana de um cone reto for um triângulo equilátero, o cone é chamado de cone **equilátero**.*

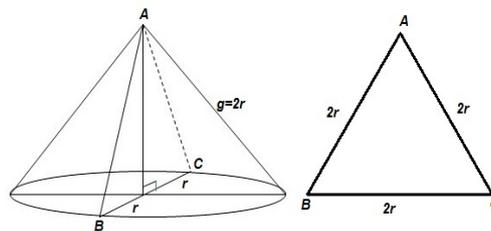


Figura 3.41: Cone equilátero

3.4.4 Área da Superfície de um Cone

Para calcular a área da superfície de um cone, torna-se necessária a sua planificação. Considere um cone de geratriz g e de base um círculo C de raio r .

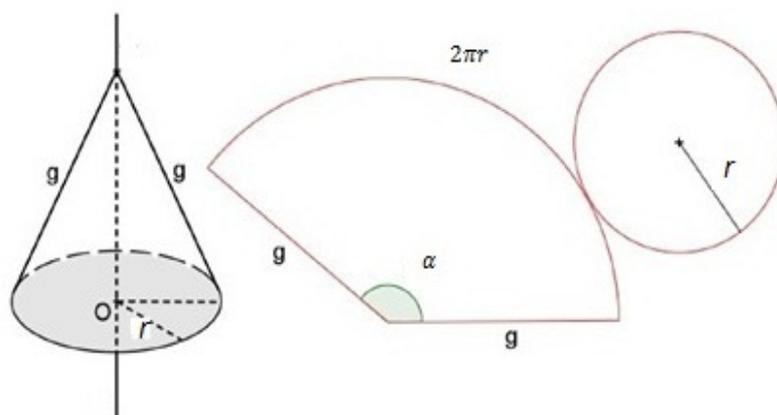


Figura 3.42: Planificação do cone

Note que a superfície lateral desse cone é um setor circular de raio g , com arco de comprimento igual ao comprimento da circunferência da base e ângulo central α . Já a superfície da base é o círculo de raio r .

Área Lateral. Sabendo-se que a superfície lateral de um cone é um setor circular de raio g , com arco de comprimento igual ao comprimento da circunferência do círculo da base e ângulo central α , então a área lateral A_l é igual a área desse setor.

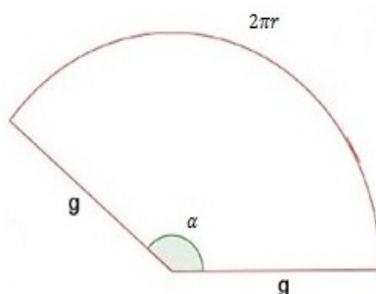


Figura 3.43: Superfície lateral do cone

Para calcular a área desse setor, calcula-se primeiro a medida do ângulo α em função de g e r . Para isso, utiliza-se a regra de três abaixo.

Ângulo central	Comprimento do arco
α	$2\pi r$
2π	$2\pi g$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2\pi \cdot g \cdot \alpha &= 2\pi \cdot 2\pi \cdot r. \\ \alpha &= \frac{2\pi \cdot 2\pi \cdot r}{2\pi \cdot g} = \frac{2\pi \cdot r}{g} \text{ rad.} \end{aligned}$$

De modo análogo, utilizando a regra de três simples envolvendo ângulo central e área, tem-se

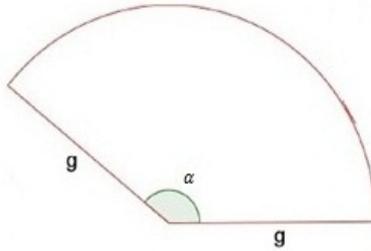


Figura 3.44: Área lateral do cone

ângulo central	Área do setor
2π	$\pi \cdot g^2$
α	A_l

$$2\pi \cdot A_l = \alpha \cdot \pi \cdot g^2.$$

Mas, $\alpha = \frac{2\pi \cdot r}{g}$ rad. Assim,

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot A_l &= \frac{2\pi \cdot r}{g} \cdot \pi \cdot g^2 = 2\pi \cdot r \cdot \pi \cdot g. \\ \Leftrightarrow A_l &= \frac{2\pi \cdot r \cdot \pi \cdot g}{2\pi} = \pi \cdot r \cdot g. \end{aligned}$$

Área total. A área da superfície total A_t de um cone é dada pela soma da área lateral com a área da base. Dessa forma

$$A_t = A_l + A_b.$$

Como a base é um círculo de raio r , sua área é $\pi \cdot r^2$. Sendo assim

$$A_t = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (r + g).$$

3.4.5 Volume do Cone

Para deduzir a fórmula do volume do cone considere uma pirâmide de altura $h_1 = h$ e área da base $b_1 = b$ e um cone de altura $h_2 = h$ e área da base $b_2 = b$ apoiados em um mesmo plano com vértices V_1 e V_2 não pertencentes ao plano da base, respectivamente.

Note que o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes (mesma área). Se um plano paralelo ao plano da base, intersecta o cone a uma distância k do vértice, também intersecta a pirâmide a uma distância k do seu vértice, gerando secções semelhantes às suas respectivas bases, de áreas b'_1 na pirâmide e b'_2 no cone.

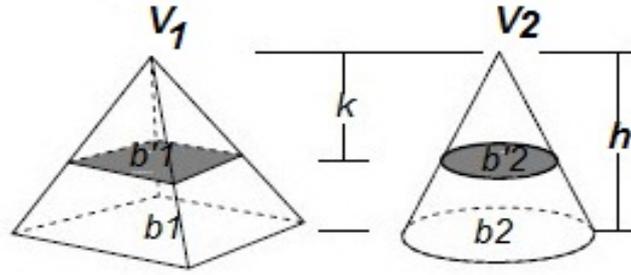


Figura 3.45: Secção do cone e da pirâmide

Sabendo que a razão entre as suas áreas é o quadrado da razão de semelhança, então

$$\frac{b'_1}{b_1} = \left(\frac{k}{h}\right)^2. \quad (3.7)$$

$$\frac{b'_2}{b_2} = \left(\frac{k}{h}\right)^2. \quad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8), tem-se que $\frac{b'_1}{b_1} = \frac{b'_2}{b_2}$, como $b_1 = b_2 = b$, vem que $\frac{b'_1}{b} = \frac{b'_2}{b}$. Multiplicando a igualdade por b , tem-se $b'_1 = b'_2$, isto significa que as secções têm a mesma área. Logo, pelo Princípio de Cavalieri o cone tem volume igual ao volume da pirâmide, ou seja

$$V_{CN} = V_{PM}.$$

Como o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}A_b \cdot h$, conclui-se que

O volume de um cone é dado por um terço do produto da área da base pela medida da altura.

$$V_{CN} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h.$$

3.5 Esfera

Definição 3.13 *Dados um ponto O e um segmento de reta com medida R , denomina-se esfera de centro O e de raio R o conjunto de todos os pontos P do espaço tal que $d(O, P) \leq R$.*

Observação 3.8 *A esfera também pode ser considerada como sólido de revolução gerada pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.*

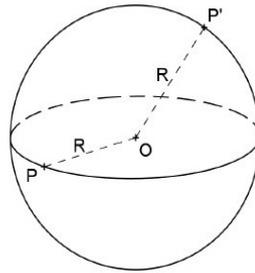


Figura 3.46: Esfera

3.5.1 Secção da Esfera

A secção feita por um plano secante a uma esfera é um **círculo**.

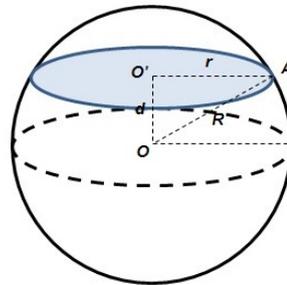


Figura 3.47: Secção da esfera

Relação importante. Sejam R o raio da esfera, r o raio do círculo obtido através de uma secção e d a distância do plano secante ao centro da esfera.

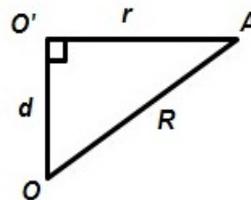


Figura 3.48: Triângulo retângulo

Observe que o triângulo $OO'A$ é retângulo em O' . Aplicando o Teorema de Pitágoras surge a relação

$$R^2 = d^2 + r^2.$$

Observação 3.9 Se o plano secante à esfera contém o seu centro $d = 0$, a secção é chamada de **círculo máximo** da esfera.

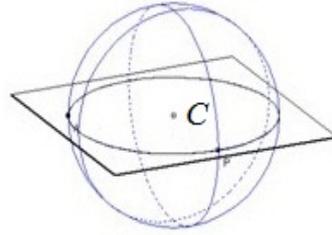


Figura 3.49: Círculo máximo da esfera

3.5.2 Volume da Esfera

Para a dedução da fórmula do volume da esfera, é preciso utilizar um sólido que já se saiba a fórmula para calcular o seu volume e que quando seccionado por um plano gere uma região que tenha a mesma área que a secção na esfera feita pelo mesmo plano.

O sólido usado nessa dedução é a **anticlepsidra**, que é o sólido obtido retirando-se dois cones de um cilindro equilátero de raio R de bases coincidindo com as bases do cilindro e de vértices comuns coincidindo com o centro do cilindro.

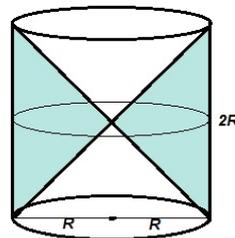


Figura 3.50: Anticlepsidra

Assim, o volume da anticlepsidra é dado por

$$\begin{aligned}
 V_{anticlepsidra} &= V_{CL} - 2 \cdot V_{CN} \\
 &= \pi \cdot R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot R \\
 &= 2\pi \cdot R^3 - \frac{2\pi \cdot R^3}{3} \\
 &= \frac{6\pi \cdot R^3 - 2\pi \cdot R^3}{3} \\
 &= \frac{4\pi \cdot R^3}{3}.
 \end{aligned}$$

Deduzida a fórmula para o volume da anticlipsis, pode-se deduzir a fórmula para o volume da esfera.

Considere uma esfera de raio R e uma anticlipsis obtida de um cilindro equilátero de raio R sobre um mesmo plano e no mesmo simiespaço.

Considerando um plano α paralelo ao plano da base, que seccione a esfera a uma distância d do seu centro, esse mesmo plano secciona a anticlipsis a uma distância também d do seu centro.

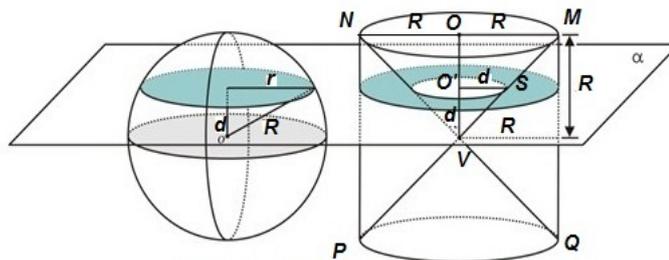


Figura 3.51: Secção da esfera e do cilindro

Na esfera, a secção é um círculo de raio r .

Então, sua área A é

$$A = \pi.r^2, \text{ mas } R^2 = r^2 + d^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 - d^2.$$

Assim, chamando essa área de A_1 , tem-se que $A_1 = \pi.(R^2 - d^2)$.

Na anticlipsis, a secção é uma coroa circular de raios R e d .

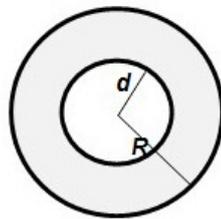


Figura 3.52: Coroa circular

Note que $MNPQ$, figura 3.51, é um quadrado em que PM e NQ são suas diagonais, as quais se intersectam no centro formando ângulos retos.

Note também que o triângulo VMN é isósceles e VO é bissetriz do ângulo do vértice V . Assim, o triângulo $VO'S$ também é isósceles, pois se ele é reto em O' , o ângulo no

vértice V mede 45° , então o ângulo no vértice S também mede 45° , logo VS é a base do triângulo isósceles $VO'S$ e $VO' \equiv O'S$, logo $\text{med}(VO') = \text{med}(O'S) = d$.

Daí, a área da coroa circular A_2 é dada por $A_2 = \pi \cdot (R^2 - d^2)$. Dessa forma $A_1 = A_2$. Pode-se concluir, através do Princípio de Cavalieri, que a esfera tem volume igual ao volume da anticlépsidra, isto é

$$\begin{aligned} V_E &= V_{anticlépsidra} \\ &= \frac{4\pi \cdot R^3}{3}, \text{ sendo } R \text{ o seu raio.} \end{aligned}$$

3.5.3 Área da Superfície Esférica

Considere duas esferas concêntricas de raios r e $r+k$, ($k > 0$), com volumes $V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ e $V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi (r+k)^3$, respectivamente.

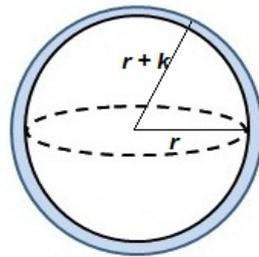


Figura 3.53: Esferas concêntricas

O volume V compreendido entre as esferas é dado pela diferença entre os volumes V_2 e V_1 , logo

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi (r+k)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi [r^3 + 3kr^2 + 3k^2r + k^3 - r^3] \\ &= \frac{4}{3} \pi [3kr^2 + 3k^2r + k^3]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observe que esse resultado representa o volume do sólido compreendido entre as duas esferas que é formado pela reunião de todos os segmentos de comprimento k perpendiculares às duas esferas.

Assim, de modo intuitivo, pode-se considerar a medida k como sendo a medida da altura para o cálculo do volume desse sólido, onde a base seria a superfície da esfera de

raio r e de área A . Assim, o volume V poderia ser representado por

$$\begin{aligned} A \cdot k &= V, \text{ usando (3.9) fica} \\ &= \frac{4}{3}\pi(3kr^2 + 3k^2r + k^3) \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot k(3r^2 + 3kr + k^2) \text{ dividindo por } k \text{ fica,} \\ A &= \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3kr + k^2). \end{aligned}$$

Fazendo k se aproximar de zero, as parcelas $3kr$ e k^2 também se aproximam de zero, tornando-se insignificantes. Dessa forma

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \\ &= 4\pi \cdot r^2. \end{aligned}$$

Daí, a área da superfície esférica pode ser enunciada assim

A área da superfície esférica é obtida pelo quádruplo da área de um de seus círculos máximos.

Observação 3.10 *Outra forma para deduzir a fórmula da área da superfície esférica.*

Considere uma esfera como sendo a reunião de sólidos que se aproximam de pirâmides com bases na sua superfície e vértice no seu centro, como na figura abaixo.

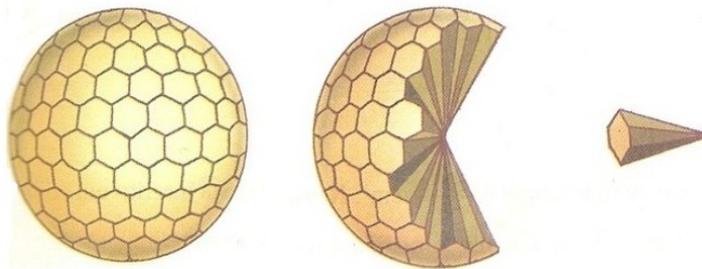


Figura 3.54: Esfera dividida em pirâmides

Mesmo sabendo que em toda pirâmide a base é uma figura plana e nesses sólidos as bases são arredondadas, considere esses sólidos com base mínima possível. Dessa forma, as bases arredondadas se aproximam de regiões planas, tornando-se aceitáveis tais sólidos como "pirâmides".

Sendo assim, pode-se aceitar que o volume da esfera é igual à soma dos volumes de todas as "pirâmides" que a compõem e a área da sua superfície é igual à soma das áreas das bases dessas "pirâmides".

Note que a altura de cada "pirâmide" corresponde à medida do raio da esfera. Suponha que uma esfera de raio R tenha sido dividida em n pirâmides (n suficientemente grande)

de áreas das bases $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, então a área A da superfície esférica é dada pela soma $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$. Do exposto

$$\begin{aligned} V_E &= \frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \frac{1}{3}A_3R + \dots + \frac{1}{3}A_nR \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) \cdot R. \end{aligned}$$

Mas, $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$, logo

$$V_E = \frac{1}{3}AR$$

Por outro lado, sabe-se que o volume da esfera é dado por $\frac{4}{3}\pi \cdot R^3$, assim

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 &= \frac{1}{3}A \cdot R \\ A &= 4\pi \cdot R^2. \end{aligned}$$

3.5.4 Aplicação do Princípio de Cavalieri: Volume da Esfera

Considere um hemisfério H de raio r e um cilindro C de raio e altura r , do qual é retirado um cone de base coincidindo com a base superior do cilindro e vértice localizado no centro da base inferior.

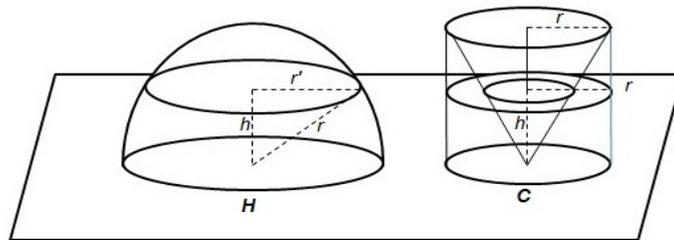


Figura 3.55: Hemisfério e cilindro

Seccionando os dois sólidos por um plano paralelo ao plano das bases do cilindro, situado a uma distância h , percebe-se que as secções são um círculo no hemisfério e uma coroa circular no cilindro com o cone retirado.

Para determinar a área do círculo obtido após seccionar o hemisfério, precisa-se de uma relação.

No sólido H observa-se um triângulo retângulo.

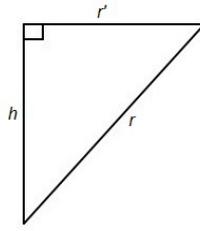


Figura 3.56: Triângulo retângulo

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se

$$\begin{aligned} r^2 &= h^2 + r'^2 \\ \Leftrightarrow r'^2 &= r^2 - h^2 \\ \Leftrightarrow r' &= \sqrt{r^2 - h^2}, \end{aligned}$$

onde r' é o raio do círculo da secção.

Daí a área do círculo é

$$\begin{aligned} A &= \pi r'^2 \\ &= \pi(\sqrt{r^2 - h^2})^2 \\ &= \pi(r^2 - h^2). \end{aligned}$$

Por outro lado, na secção do cilindro com o cone retirado, nota-se a figura de uma coroa circular e os triângulos semelhantes.

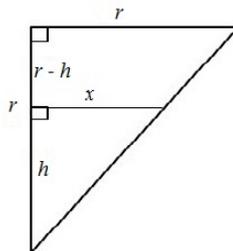


Figura 3.57: Triângulos retângulos semelhantes

$$\frac{r}{h} = \frac{r}{x} \Leftrightarrow rx = rh \Leftrightarrow x = h.$$

Logo, a coroa circular apresenta os seguintes raios

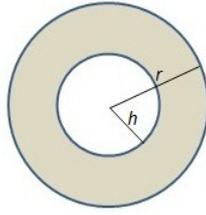


Figura 3.58: Coroa circular

Então, sua área é

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 - \pi h^2 \\ &= \pi(r^2 - h^2). \end{aligned}$$

Como as secções são equivalentes, ou seja, apresentam a mesma área, pelo Princípio de Cavalieri os volumes do hemisfério e do cilindro com o cone retirado são iguais, isto é, $V_H = V_{CL} - V_{CN}$. Portanto,

$$\begin{aligned} V_E &= 2 \cdot V_H \\ &= 2 \cdot (V_{CL} - V_{CN}) \\ &= 2 \cdot \left(\pi r^2 r - \frac{1}{3} \pi r^2 r \right) \\ &= 2 \cdot \left(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{3\pi r^3 - \pi r^3}{3} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Superfícies e Sólidos de Revolução

4.1 Superfície de Revolução

Considere em um plano uma reta e e um segmento de reta g não perpendicular a e . Ao girar esse segmento de reta g em torno da reta e será gerada uma superfície que é chamada de **superfície de revolução**. A reta e chama-se **eixo**.

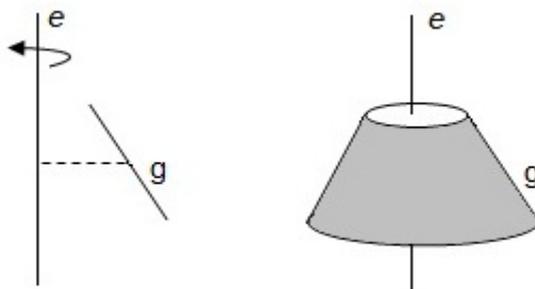


Figura 4.1: Tronco de cone

Observe que cada ponto $P \in g$ descreve uma circunferência de raio igual à distância de P ao eixo. Reunindo-se todas as circunferências assim descritas, forma-se a superfície de revolução.

4.2 Sólido de Revolução

Considere em um plano uma reta e e uma linha fechada (figura plana) ou uma linha em que suas duas extremidades pertençam ao eixo. Ao girar de 360° essa figura ou essa linha em torno do eixo será descrito um sólido que é denominado **sólido de revolução**.

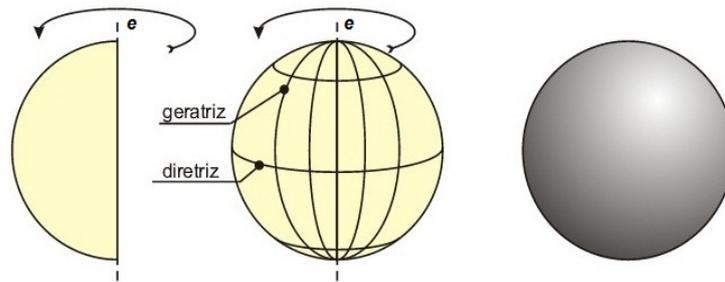


Figura 4.2: Esfera de revolução

4.3 Conhecimentos Preliminares

O estudo de superfície de revolução bem como o estudo de sólidos de revolução requerem alguns conhecimentos e resultados preliminares que servem de ferramentas indispensáveis para o cálculo de áreas de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução.

4.3.1 Centro de Gravidade $G(\bar{x}, \bar{y})$

Diz-se que um ponto pertencente a uma figura plana, segmento de reta ou arco é seu **centro de gravidade** se esse ponto mantém a figura plana, o segmento de reta ou o arco em equilíbrio quando levantado(a) por um fio fixado nesse ponto.

Para determinar o centro de gravidade de uma figura plana é preciso dispor dos seguintes axiomas.

1. O centro de gravidade de um segmento de reta é o seu ponto médio;

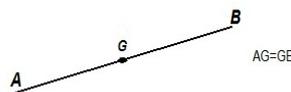


Figura 4.3: Segmento de reta

2. Se uma figura plana possui eixo de simetria, então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo. No caso da figura possuir mais de um eixo de simetria, o seu centro de gravidade fica determinado pela intersecção dos eixos de simetria.

O Processo prático para determinar o centro de gravidade de uma figura plana segue os seguintes passos.

1. Desenhe uma figura em uma placa de madeira;
2. Recorte a figura e marque dois pontos P_1 e P_2 em lados distintos;
3. Pendure a figura por um fio fixado em P_1 e trace uma reta r_1 contendo o fio;

4. Pendure a figura por um fio fixado em P_2 e em seguida trace uma reta r_2 contendo o fio;
5. Marque o ponto G que é a intersecção das duas retas, r_1 e r_2 , traçadas nos passos 3 e 4. Esse ponto é o **centro de gravidade** da figura.

4.3.2 Centro de Gravidade de uma Poligonal

Segundo [1], se uma poligonal P é formada por segmentos consecutivos $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ de comprimentos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o ponto médio do segmento l_k ,



Figura 4.4: Poligonal

o centro de gravidade de P é o ponto $G = (\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\bar{x} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}. \quad (4.1)$$

$$\bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \dots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}. \quad (4.2)$$

Demonstração. Supondo-se que os lados $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ dessa poligonal sejam varetas feitas de mesmo material, assim a massa de cada vareta é proporcional ao seu comprimento, isto é, $m_k = c \cdot a_k$.

Considerando que os pontos médios dessas varetas sejam os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$, eles representam os centros de gravidade das varetas, uma vez que o centro de gravidade de um segmento de reta é o seu ponto médio, por (4.3.1 1).

Conforme o estudo físico de Energia Potencial, adotando-se um sistema de partículas de massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$, respectivamente, o centro de gravidade desse conjunto será o ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}.$$

$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}.$$

Assim, o centro de gravidade da poligonal é o ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{ca_1x_1 + ca_2x_2 + ca_3x_3 + \cdots + ca_nx_n}{ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n} \\ &= \frac{c(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n)}{c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)} \\ &= \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} \quad e \\ \bar{y} &= \frac{ca_1y_1 + ca_2y_2 + ca_3y_3 + \cdots + ca_ny_n}{ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n} \\ &= \frac{c(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_ny_n)}{c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)} \\ &= \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}.\end{aligned}$$

□

4.3.3 Centro de Gravidade de um Arco

Conforme [11], se uma função contínua f em $[a, b]$ define um arco de comprimento L de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, e tem sua derivada também contínua em $[a, b]$, o centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) desse arco é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx . \quad (4.3)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4.4)$$

4.3.4 Centro de Gravidade de um Polígono

Antes de considerar um polígono qualquer, define-se o centro de gravidade nos triângulos.

Definição 4.1 *Mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.*

Proposição 4.1 *O centro de gravidade da superfície limitada por um triângulo é o ponto de intersecção de suas medianas.*

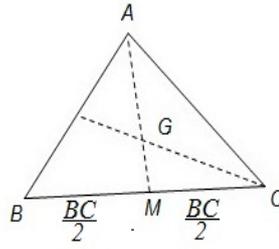


Figura 4.5: Centro de gravidade do triângulo

Demonstração. Da definição de mediana, tem-se que ela é um eixo de simetria do triângulo, sendo assim, por (4.3.1 2), a intersecção das três medianas representa o centro de gravidade do triângulo. \square

Utilizando o fato de que o centro de gravidade de um triângulo é a intersecção de suas medianas, pode-se pensar na divisão de polígonos em n triângulos para determinar o seu centro de gravidade.

Considere um polígono de n lados. Dividindo esse polígono em triângulos tem-se $k = (n - 2)$ triângulos, $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$ de áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$.

Sejam x_k e y_k as coordenadas do baricentro (centro de gravidade) do triângulo T_k , com $1 \leq k \leq n - 2$, $k \in \mathbb{N}$ e um sistema de coordenadas que contém o polígono. Utilizando-se os conhecimentos da Física e supondo que o polígono seja confeccionado em uma chapa de madeira uniforme de espessura constante e em seguida recortado, tem-se que sua massa é proporcional à sua área, ou seja, $m_k = cA_k$, mas o polígono foi dividido em $k = n - 2$ triângulos de massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ e de áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$, respectivamente. Então, a massa total é dada por $m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$ e a área total por $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k$.

Analogamente, adotando-se um sistema de coordenadas e um conjunto de partículas de massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_k, y_k)$, respectivamente, o centro de gravidade desse conjunto será o ponto (\bar{x}, \bar{y}) , dado por (4.1) e (4.2)

Assim, no caso do polígono o centro de gravidade é o ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{cA_1x_1 + cA_2x_2 + \dots + cA_kx_k}{cA_1 + cA_2 + \dots + cA_k} \\
 &= \frac{c(A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k)}{c(A_1 + A_2 + \dots + A_k)} \\
 &= \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k}{A_1 + A_2 + \dots + A_k}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{cA_1y_1 + cA_2y_2 + \cdots + cA_ky_k}{cA_1 + cA_2 + \cdots + cA_k} \\
&= \frac{c(A_1y_1 + A_2y_2 + \cdots + A_ky_k)}{c(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)} \\
&= \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \cdots + A_ky_k}{A_1 + A_2 + \cdots + A_k}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Centro de Gravidade de um Polígono Via Integral

Para demonstrar a fórmula do centro de gravidade de um polígono via integral, precisa-se definir alguns conceitos que serão pré-requisitos para tal demonstração. Inicialmente, será definido **momento de massa**.

Considere duas partículas p_1 e p_2 de massas m_1 e m_2 apoiadas em um bastão de massa desprezível, em lados opostos de um ponto onde o bastão se encontra apoiado e cujas distâncias a esse ponto são indicadas por d_1 e d_2 .

Segundo Arquimedes, através da lei da Alavanca, o bastão ficará em equilíbrio se, somente se, $m_1d_1 = m_2d_2$.

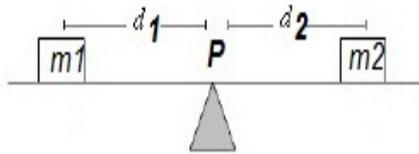


Figura 4.6: Alavanca em equilíbrio

Considere esse bastão sobre o eixo x com p_1 na posição $x_1 > 0$, p_2 na posição $x_2 > 0$ e o ponto de apoio \bar{x} , $x_1 < \bar{x} < x_2$.

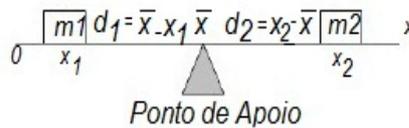


Figura 4.7: Alavanca sobre o eixo x

Utilizando a lei do Equilíbrio (Lei da Alavanca)

$$\begin{aligned}
m_1 d_1 &= m_2 d_2, \\
\Leftrightarrow m_1(\bar{x} - x_1) &= m_2(x_2 - \bar{x}), \\
\Leftrightarrow m_1\bar{x} - m_1x_1 &= m_2x_2 - m_2\bar{x}, \\
\Leftrightarrow m_1\bar{x} + m_2\bar{x} &= m_1x_1 + m_2x_2, \\
\Leftrightarrow (m_1 + m_2)\bar{x} &= m_1x_1 + m_2x_2, \\
\Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.
\end{aligned}$$

Os números m_1x_1 e m_2x_2 são chamados de momentos das massas m_1 e m_2 em relação à origem e a soma dos momentos é chamada momento do sistema em relação à origem, ou seja,

$$M = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Note que o centro de gravidade é dado pelo quociente entre a soma dos momentos de massa e a soma das massas. Assim

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \\
\Leftrightarrow m\bar{x} &= \sum_{i=1}^n m_i x_i,
\end{aligned}$$

onde m é a massa total do sistema e a soma dos momentos individuais $M = \sum_{i=1}^n m_i x_i$ é chamada de momento do sistema em relação à origem.

Considerando um sistema de n partículas com massas m_1, m_2, \dots, m_n , localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ do plano OXY , o momento de massa das n partículas em relação ao eixo y é dado, analogamente ao caso unidimensional por

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Similarmente, em relação ao eixo x é dado por

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

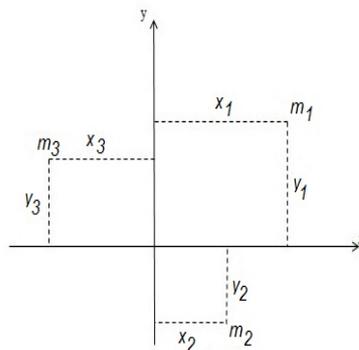


Figura 4.8: Sistema de partículas

O centro de massa está localizado no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\begin{aligned} m\bar{x} &= \sum_{i=1}^n m_i x_i = M_y, \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{M_y}{m}, \\ m\bar{y} &= \sum_{i=1}^n m_i y_i = M_x, \\ \Leftrightarrow \bar{y} &= \frac{M_x}{m}. \end{aligned}$$

Teorema 4.1 [5] *O centro de gravidade de uma região plana R limitada por uma função contínua f , pelo eixo x e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ está localizado no ponto $G(\bar{x}, \bar{y})$.*

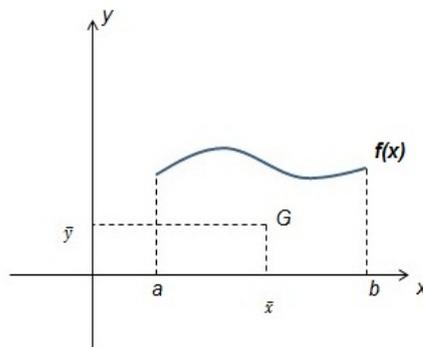


Figura 4.9: Centro de gravidade de uma região plana

Onde

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx \quad e \quad (4.7)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx. \quad (4.8)$$

Demonstração. Considere uma região R , limitada pelas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo gráfico da função contínua e positiva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e pelo eixo x .

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ de larguras iguais a Δx , tem-se n retângulos de altura $f(\bar{x}_i)$, onde $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Assim a área de cada retângulo é dada por $f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$.

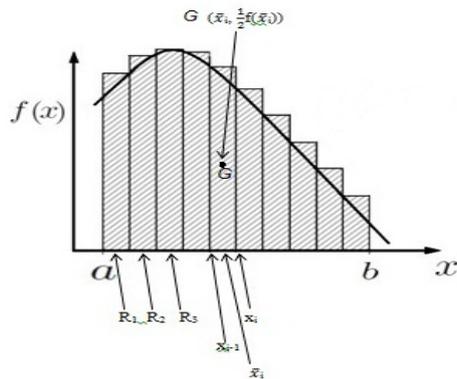


Figura 4.10: Partições da região R

Considerando que a região R foi coberta por uma placa plana com densidade uniforme ρ , a sua massa é dada pelo produto de sua densidade pela área que ela ocupa, então

$$m = \rho \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x.$$

Sendo assim, o momento de cada retângulo R_i em relação ao eixo y é expresso por

$$\begin{aligned} M_y(R_i) &= m\bar{x}_i \\ &= [\rho \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x] \cdot \bar{x}_i \\ &= \rho \cdot \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x, \end{aligned}$$

onde \bar{x}_i é a distância do centro de massa ao eixo y .

Somando-se os momentos dos n retângulos, obtém-se o momento da aproximação poligonal a R . Supondo que $n \rightarrow \infty$, o momento da região R em relação ao eixo y é

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \cdot \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x \\ &= \rho \int_a^b x \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

De modo análogo, deduz-se o momento de cada retângulo R_i em relação ao eixo x .

$$\begin{aligned} M_x(R_i) &= m \cdot y_i \\ &= [\rho \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x] \cdot \frac{1}{2} \cdot f(\bar{x}_i) \\ &= \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot [f(\bar{x}_i)]^2 \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Somando os momentos dos n retângulos e tomando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtém-se o momento da região R em relação ao eixo x .

$$\begin{aligned}
M_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot [f(\bar{x}_i)]^2 \cdot \Delta x \\
&= \rho \cdot \int_a^b \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que

$$m = \rho \cdot A = \rho \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_y}{m} \\
&= \frac{\rho \int_a^b x \cdot f(x) dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \\
&= \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx \\
\bar{y} &= \frac{M_x}{m} \\
&= \frac{\rho \cdot \int_a^b \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} \\
&= \frac{1}{A} \cdot \int_a^b \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 dx.
\end{aligned}$$

□

Observação 4.1 Se a região R estiver entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$,

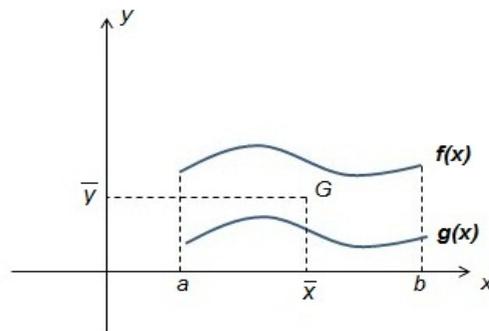


Figura 4.11: Centro de gravidade de região plana limitada por duas funções

o centro de gravidade é o ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] dx \quad e \quad (4.9)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx. \quad (4.10)$$

4.3.5 Cálculo de Volume de Sólidos de Revolução Via Integral

Considere um sólido S obtido pela rotação em torno do eixo y de uma região R limitada pelas curvas $y = f(x)$, com $f(x) \geq 0$; $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, com $0 \leq a < b$.

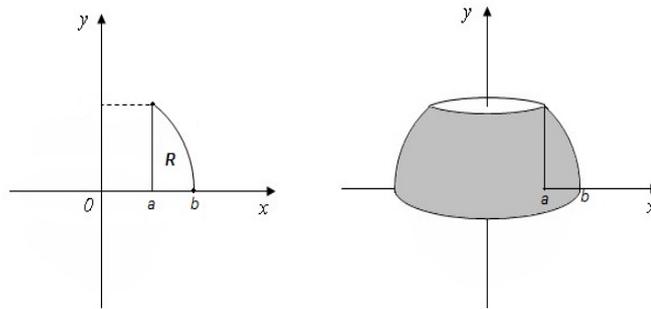


Figura 4.12: Sólido de revolução

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de largura uniforme Δx , existe \bar{x}_i tal que $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$.

Observe que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ representa a base de um retângulo de altura $f(\bar{x}_i)$, o qual quando girado em torno do eixo y gera uma casca cilíndrica de raio médio \bar{x}_i e espessura Δx .

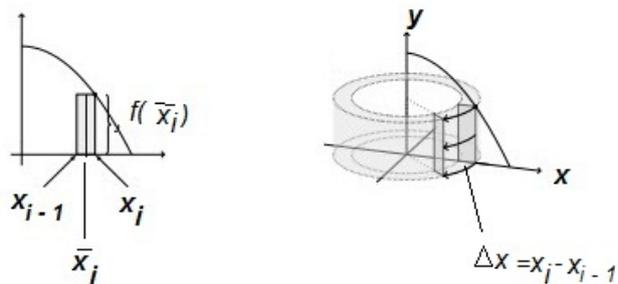


Figura 4.13: Casca cilíndrica

Logo, o volume dessa casca cilíndrica é dado por

$$\begin{aligned}
 V &= \pi x_i^2 f(\bar{x}_i) - \pi x_{i-1}^2 f(\bar{x}_i). \\
 &= \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) \cdot f(\bar{x}_i). \\
 &= \pi(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i + x_{i-1}) \cdot f(\bar{x}_i), \text{ mas } \Delta x = x_i - x_{i-1}, \text{ então} \\
 &= \pi \cdot \Delta x \cdot (x_i + x_{i-1}) \cdot f(\bar{x}_i). \\
 &= 2\pi \cdot \Delta x \cdot \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot f(\bar{x}_i). \text{ Como } \bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \text{ então} \\
 &= 2\pi \cdot \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x.
 \end{aligned}$$

Como o intervalo $[a, b]$ foi dividido em n subintervalos, a rotação da região R gera n cascas cilíndricas e daí, o volume aproximado do sólido S é dado pelo somatório dos volumes dessas n cascas.

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, esse volume aproximado torna-se praticamente igual ao volume do sólido S , que é equivalente ao limite abaixo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Mas pela definição de integral,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Assim,

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx, \quad 0 \leq a < b.$$

Obsevação. Se a região R for limitada por duas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo f e g contínuas em $[a, b]$, com $a > 0$ e $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, o volume de S é dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx. \quad (4.11)$$

4.4 Teoremas de Pappus

O caso da área do tronco de cone servirá para ilustrar o primeiro Teorema de Pappus.

1º Teorema de Pappus. Considere em um plano α uma reta e e um segmento de reta AB não-paralelo e não-perpendicular a e . Ao girar esse segmento de reta em torno da reta e (eixo) forma-se uma superfície lateral chamada tronco de cone.

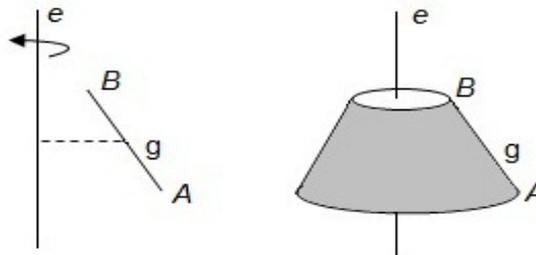


Figura 4.14: Tronco de cone

Seja C o ponto de intersecção da reta que contém o segmento AB com a reta e , R a distância de A à reta e e r a distância de B à reta e , então o tronco de cone fica determinado pelo corte e retirada do cone de raio r e geratriz BC do cone de raio R e geratriz AC , obtidos através da rotação do triângulo retângulo ACO_1 abaixo em torno do eixo e .

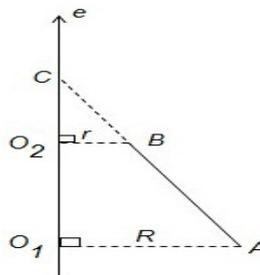


Figura 4.15: Triângulo retângulo ACO_1

Da semelhança dos triângulos AO_1C e BO_2C , (caso: ângulo, ângulo), tem-se

$$\frac{R}{AC} = \frac{r}{BC} = \frac{R - r}{AC - BC}.$$

Então,

$$BC(R - r) = (AC - BC) \cdot r.$$

Como $AB = AC - BC$, tem-se

$$BC(R - r) = AB \cdot r$$

Por (3.7) a área lateral do cone é πRg , onde R é a medida do raio da base do cone e g é a medida de sua geratriz. Assim, a área lateral do tronco do cone é

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot R \cdot AC - \pi \cdot r \cdot BC \\ &= \pi \cdot R \cdot (AB + BC) - \pi \cdot r \cdot BC \\ &= \pi \cdot R \cdot AB + \pi \cdot R \cdot BC - \pi \cdot r \cdot BC \\ &= \pi \cdot R \cdot AB + \pi \cdot (R - r) \cdot BC. \end{aligned}$$

Mas, $(R - r) \cdot BC = AB \cdot r$. Logo

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot R \cdot AB + \pi \cdot AB \cdot r \\ &= \pi \cdot (R + r) \cdot AB. \end{aligned}$$

Seja x a distância do centro de gravidade de AB (representado pelo ponto M) ao eixo e , então pela semelhança dos triângulos BMN e BAP ,

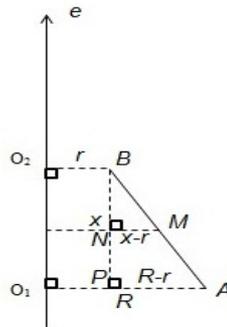


Figura 4.16: Centro de gravidade

conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{R-r}{x-r} &= \frac{AB}{BM} = \frac{2}{1} \\ \Leftrightarrow 2x - 2r &= R - r \\ \Leftrightarrow 2x &= R + r. \end{aligned}$$

Substituindo $2x = R + r$ na área A obtida acima, tem-se

$$A = \pi \cdot (R + r) \cdot AB = \pi \cdot 2x \cdot AB = 2\pi \cdot x \cdot AB,$$

onde $2\pi \cdot x$ é o comprimento da circunferência de raio x , que é a distância do centro de gravidade de AB ao eixo e e AB é a medida da geratriz do tronco de cone. Assim

$$A = 2\pi \bar{x}L. \quad (4.12)$$

Antes de enunciar o primeiro Teorema de Pappus, será demonstrado um lema referente a área de superfície de revolução via integral.

Lema 4.1 [5] *Seja f uma função positiva e com derivada contínua em $[a, b]$. A área A da superfície obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, com $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x é dada por*

$$A = 2\pi \int_a^b y \cdot (\sqrt{1 + [f'(x)]^2}) dx. \quad (4.13)$$

No caso da rotação ser em torno do eixo y , a área A é dada por

$$A = 2\pi \int_a^b x \cdot (\sqrt{1 + [f'(x)]^2}) dx. \quad (4.14)$$

Demonstração. Para demonstrar a expressão do cálculo da área da superfície de revolução via integral é preciso deduzir a fórmula para o cálculo do comprimento de arco.

De fato, suponha que uma curva C seja definida pela função contínua $y = f(x)$ em $[a, b]$.

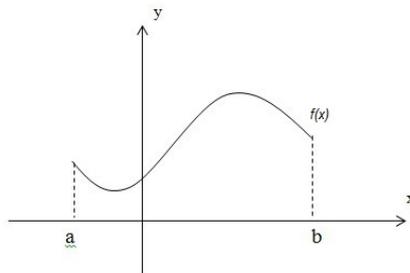


Figura 4.17: Gráfico da função $f(x)$

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de extremos x_0, x_1, \dots, x_n e com larguras iguais a Δx .

Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto (x_i, y_i) pertence à curva C e o polígono de vértices P_0, P_1, \dots, P_n representa uma aproximação para C . Sendo assim, o comprimento L de C é aproximadamente o comprimento desse polígono. Quanto maior for o número de partições do intervalo $[a, b]$, melhor será a aproximação.

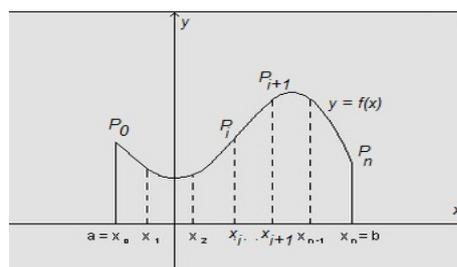


Figura 4.18: Partições do gráfico de uma função

Assim, o comprimento L da curva C , definida por $y = f(x)$ com $a \leq x \leq b$ é dado pela soma dos comprimentos dos segmentos $P_i P_{i+1}$, ou seja

$$L = \sum_{i=0}^n |P_i P_{i+1}|.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, tem-se

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |P_i P_{i+1}|. \quad (4.15)$$

Note que $|P_i P_{i+1}|$ representa a distância dos pontos $P_i = (x_i, y_i)$ e $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, logo pode-se escrever

$$\begin{aligned} |P_i P_{i+1}| &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, nota-se que existe um número x_i^* entre x_i e x_{i+1} tal que

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_i) &= f'(x_i^*) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ \Leftrightarrow y_{i+1} - y_i &= f'(x_i^*) \cdot \Delta x \\ \Leftrightarrow \Delta y_i &= f'(x_i^*) \cdot \Delta x \\ \Leftrightarrow |P_i P_{i+1}| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)]^2 \cdot (\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 \cdot (1 + [f'(x_i^*)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x. \end{aligned}$$

Logo, voltando a (4.15).

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4.16)$$

Assim, tem-se deduzida a fórmula para o cálculo do comprimento de arco em (4.16).

Agora, segue a demonstração do lema. Considere uma superfície obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, com $a \leq x \leq b$ em torno do eixo x , onde $f(x) > 0$ e tem derivada contínua em $[a, b]$.

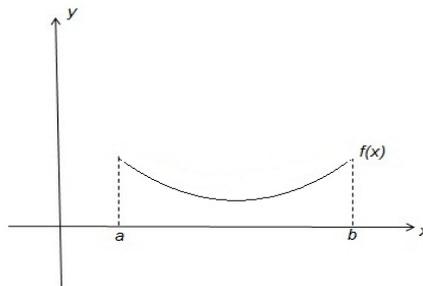


Figura 4.19: Gráfico de $y = f(x)$

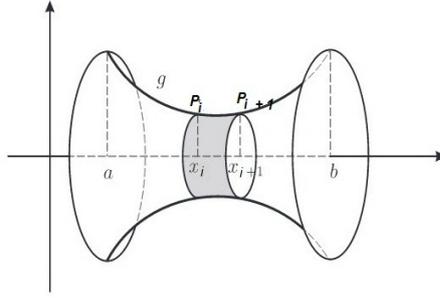


Figura 4.20: Sólido obtido pela rotação de $f(x)$

Se o intervalo $[a, b]$ for dividido em n subintervalos com extremos x_0, x_1, \dots, x_n e largura Δx e forem tomados os pontos P_i e P_{i+1} sobre a curva, é possível notar que girando o segmento $P_i P_{i+1}$ em torno do eixo x é obtido um tronco de cone com comprimento da geratriz $g = |P_i P_{i+1}|$ e raio médio $r = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$ (distância do centro de gravidade ao eixo x). Assim, usando (4.12) a área da superfície é

$$A = 2\pi \bar{x} L,$$

sendo $\bar{x} = r = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$ e $L = g = |P_i P_{i+1}|$, obtém-se

$$A = 2\pi \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot |P_i P_{i+1}|.$$

Como $|P_i P_{i+1}| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$, com $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$.

$$A = 2\pi \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x.$$

Tomando Δx muito pequeno, $y_i = f(x_i)$ e $y_{i+1} = f(x_{i+1})$ tornam-se muito próximos, assim $y_i \simeq y_{i+1} \simeq f(x_i^*)$ e nesse caso

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \cdot \frac{f(x_i^*) + f(x_i^*)}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \\ &= 2\pi \cdot f(x_i^*) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x. \end{aligned}$$

Logo, a área total aproximada da superfície de revolução é dada pelo somatório

$$A_t = \sum_{i=0}^n 2\pi \cdot f(x_i^*) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \quad (\text{Soma de Riemann}).$$

Esta aproximação tem resultado ideal (aceitável) se $n \rightarrow \infty$. Então, passando o limite tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n 2\pi \cdot f(x_i^*) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Portanto, a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x é dada por

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Por outro lado, se a superfície é obtida pela rotação da curva $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, em torno do eixo y , a área é dada por

$$A = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

□

Continuando será enunciado e demonstrado por casos o primeiro Teorema de Pappus.

Teorema 4.2 *Se uma linha gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita de raio igual à distância entre o eixo de rotação e o centro de gravidade dessa linha.*

Demonstração.

- (i) *Linha poligonal.* Considere uma poligonal plana com n lados medindo a_1, a_2, \dots, a_n , logo o comprimento da poligonal $L = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, com x_1, x_2, \dots, x_n sendo as distâncias dos pontos médios (centros de gravidades) dos lados ao eixo e .

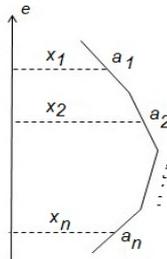


Figura 4.21: Rotação de uma poligonal

A rotação de cada lado em torno de e gera a superfície lateral de um tronco de cone, logo, a área da superfície de revolução obtida a partir da poligonal é a soma das áreas das superfícies de todos os troncos de cones. Então,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + \dots + 2\pi x_n a_n \quad \text{por (4.12)} \\ &= 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n). \end{aligned}$$

Sendo \bar{x} a distância do centro de gravidade da poligonal ao eixo, por (4.1), tem-se

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\ \Leftrightarrow \bar{x}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n. \end{aligned}$$

Mas, $L = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, então

$$\bar{x}L = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n.$$

Assim, a área da superfície de revolução gerada pela rotação da poligonal em torno de um eixo e é

$$A = 2\pi\bar{x}L, \quad (4.17)$$

onde $2\pi\bar{x}$ é o comprimento da circunferência descrita de raio igual à distância do centro de gravidade da poligonal ao eixo e e L é o comprimento da poligonal.

- (ii) *Caso geral.* Suponha que uma função $y = f(x)$, contínua em $[a, b]$, gere um arco de extremidades nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Rotacionando esse arco em torno do eixo y será gerada uma superfície cuja expressão da área dada por (4.14) é

$$A = 2\pi \int_a^b x(\sqrt{1 + [f'(x)]^2})dx.$$

Multiplicando por L e $\frac{1}{L}$ simultaneamente a expressão do 2º membro da equação anterior, vem

$$A = 2\pi \cdot L \cdot \frac{1}{L} \int_a^b x(\sqrt{1 + [f'(x)]^2})dx.$$

Mas, por (4.3) $\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x(\sqrt{1 + [f'(x)]^2})dx$, então,

$$A = 2\pi L\bar{x}, \quad (4.18)$$

onde L é o comprimento do arco rotacionado e $2\pi\bar{x}$ é o comprimento da circunferência de raio \bar{x} que é a distância do centro de gravidade do arco ao eixo de rotação (eixo y).

De maneira análoga, obtém-se a expressão da área com o arco rotacionado em torno do eixo x .

$$A = 2\pi L\bar{y}. \quad (4.19)$$

2º Teorema de Pappus. Para ilustrar o 2º Teorema de Pappus, considere um retângulo de base a e altura h e um eixo e paralelo a um de seus lados e distante d do lado mais próximo.

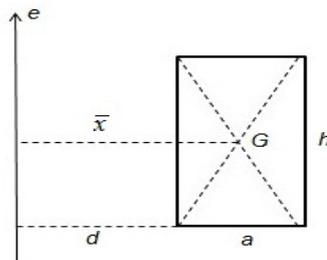


Figura 4.22: Rotação do retângulo

Ao girar esse retângulo de área $A = a \cdot h$ em torno do eixo e , obtém-se um sólido de revolução cujo volume é dado pela diferença entre o volume do cilindro de raio $a + d$ com altura h e o volume do cilindro de raio d com altura h .

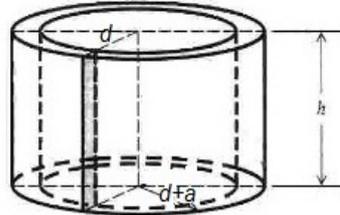


Figura 4.23: Invólucro cilíndrico

Por (3.6), o volume do cilindro é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, assim

$$\begin{aligned}
 V &= \pi(a+d)^2h - \pi d^2h \\
 &= \pi(a^2 + 2ad + d^2)h - \pi d^2h \\
 &= \pi a^2h + 2\pi adh + \pi d^2h - \pi d^2h \\
 &= \pi ah(a + 2d) \\
 &= 2\pi ah\left(\frac{a}{2} + d\right) \text{ mas } A = ah, \text{ assim} \\
 &= 2\pi A\left(\frac{a}{2} + d\right).
 \end{aligned}$$

Observando a figura, antes da rotação, $\frac{a}{2} + d = \bar{x}$, ou seja, $\frac{a}{2} + d$ é a distância do centro do retângulo (centro de gravidade) ao eixo de rotação. Dessa forma

$$V = 2\pi A\bar{x}, \quad (4.20)$$

onde A é a área do retângulo rotacionado e $2\pi\bar{x}$ é o comprimento da circunferência de raio \bar{x} que é a distância do centro de gravidade ao eixo de rotação.

Teorema 4.3 [1]. *Se uma figura plana de área A , de centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) , gira em torno de um eixo de seu plano (que não a intersecta), o volume do sólido gerado é igual à área dessa figura multiplicada pelo comprimento da circunferência descrita de raio igual à distância entre o eixo de rotação e o centro de gravidade.*

Demonstração.

- (i) *Figuras planas que podem ser divididas em retângulos.* Seja F uma figura plana dividida em n retângulos, R_1, R_2, \dots, R_n , de áreas A_1, A_2, \dots, A_n respectivamente. Se A é a área da figura F , então $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, se x_k é a distância do centro do retângulo R_k ao eixo e , que é paralelo a um dos lados desse retângulo e não-secante a nenhum deles, então o volume do sólido de revolução gerado pela

rotação de F em torno de e é dado pela soma dos volumes dos sólidos gerados pela rotação de cada retângulo R_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) em torno de e . Assim, por (4.20)

$$\begin{aligned} V &= 2\pi A_1 x_1 + 2\pi A_2 x_2 + \dots + 2\pi A_n x_n \\ &= 2\pi(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n). \end{aligned}$$

Sendo \bar{x} a distância do centro de gravidade da figura F ao eixo e , então por (4.5)

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

Mas, $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Assim

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A} \\ \Leftrightarrow A\bar{x} &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n, \text{ logo} \\ \Leftrightarrow V &= 2\pi\bar{x}A, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde A é a área da figura F que foi rotacionada e $2\pi\bar{x}$ é o comprimento da circunferência de raio \bar{x} que é a distância do centro de gravidade da figura F ao eixo de rotação.

- (ii) *Caso geral (Figura arbitrária)*. Para demonstrar o caso geral, utiliza-se conhecimentos de Cálculo.

Considere uma região plana R de área A , limitada pelas funções contínuas em $[a, b]$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, com $f(x) \geq g(x) \geq 0$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação da região R em torno do eixo y . Por (4.11), o volume V de S é

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

Multiplicando a expressão do 2º membro da equação anterior por A e $\frac{1}{A}$, simultaneamente, onde A é a área da região R rotacionada, tem-se

$$V = 2\pi \cdot A \cdot \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

Mas, por (4.9) $\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$, assim

$$V = 2\pi A\bar{x}, \quad (4.22)$$

onde A é a área da figura rotacionada e $2\pi\bar{x}$ é o comprimento da circunferência descrita de raio igual à distância do centro de gravidade ao eixo de rotação (eixo y).

De modo análogo, obtém-se o volume do sólido quando a figura é rotacionada em torno do eixo x .

$$V = 2\pi A\bar{y}. \quad (4.23)$$

□

Demonstrados os Teoremas de Pappus, serão tratados área e volume dos principais sólidos de revolução.

4.5 Cilindro de Revolução

Definição 4.2 *O cilindro de revolução é o sólido obtido pela rotação de um retângulo em torno de um eixo e e que contém um de seus lados.*

Considere o retângulo $ABCD$ e o eixo e que contém o lado AD .

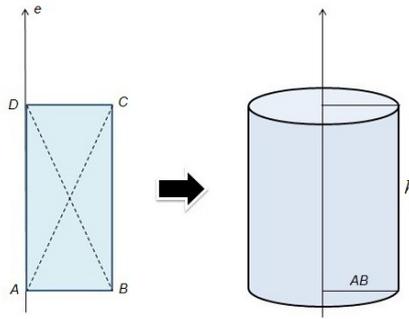


Figura 4.24: Cilindro de revolução

Sejam $r = med(AB)$, $h = med(BC)$, $\bar{x}_1 = \frac{med(AB)}{2} = \frac{r}{2}$ (distância do centro de gravidade do retângulo ao eixo e) e $\bar{x}_2 = AB = r$ (distância do centro de gravidade do segmento BC ao eixo e).

Por (4.17), a área da superfície lateral de um sólido de revolução é dada por

$$A = 2\pi\bar{x}L.$$

Neste caso, $\bar{x} = \bar{x}_2 = med(AB) = r$ e $L = med(BC) = h$, assim

$$A = 2\pi rh.$$

Obsevando a figura acima, nota-se que $r = med(AB)$ é a medida do raio da base do cilindro e h é a altura. Portanto,

A área da superfície lateral de um cilindro é dada pelo produto do comprimento da circunferência da base vezes a medida da altura.

Por (4.21), o volume de um sólido de revolução é dado por

$$V = 2\pi\bar{x}A.$$

Neste caso, $\bar{x} = \bar{x}_1 = \frac{med(AB)}{2} = \frac{r}{2}$ e $A = ABh = rh$, assim

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\frac{r}{2}rh \\ &= \pi r^2 h. \end{aligned}$$

Como na figura acima, $r = med(AB)$ é o raio da base e h é a altura, tem-se que πr^2 é a área da base do cilindro. Logo, **o volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base vezes a medida da altura.**

4.6 Cone de Revolução

Definição 4.3 O cone de revolução é o sólido obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo e que contém um de seus catetos.

Considere o triângulo retângulo ABC , retângulo em A , e o eixo e que contém o cateto AC .

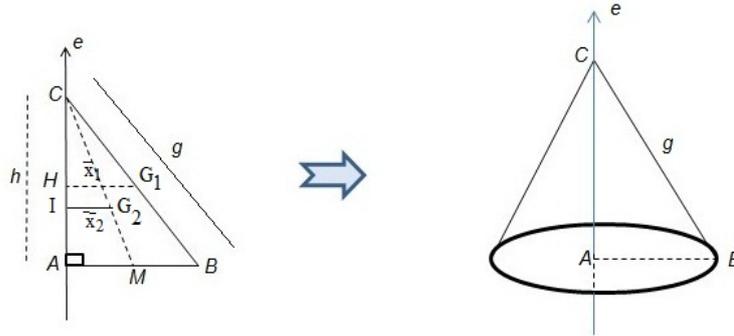


Figura 4.25: Cone de revolução

Obsevando a figura 4.25, \bar{x}_1 (distância do centro de gravidade da poligonal BC ao eixo e) tem medida igual à metade do lado AB . Note que os triângulos HCG_1 e ABC são semelhantes e como $CG_1 = \frac{1}{2}CB$, então,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_1}{AB} &= \frac{CG_1}{CB}, \\ &= \frac{\frac{CB}{2}}{CB} \\ \Leftrightarrow CB\bar{x}_1 &= \frac{AB \cdot CB}{2} \\ \Leftrightarrow \bar{x}_1 &= \frac{AB}{2}. \end{aligned}$$

Sabendo que o baricentro de um triângulo é o ponto que pertence à mediana, localizado a uma distância equivalente à $\frac{2}{3}$ de um vértice considerado e denotando por G_2 o baricentro da mediana relativa ao lado AB , tem-se que $CG_2 = \frac{2}{3}CM$. Sendo \bar{x}_2 a distância do eixo ao ponto G_2 , então pela semelhança dos triângulos CG_2I e AMC , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_2}{AM} &= \frac{\frac{2}{3}CM}{CM} \\ \Leftrightarrow CM\bar{x}_2 &= \frac{2}{3}AM \cdot CM \\ \Leftrightarrow \bar{x}_2 &= \frac{2}{3}AM \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AB \\ &= \frac{AB}{3}. \end{aligned}$$

Por (4.17), a área da superfície lateral de um sólido de revolução é dada por

$$A_l = 2\pi\bar{x}L,$$

onde $L = BC = g$ (*geratriz*) e $\bar{x} = \bar{x}_1 = \frac{AB}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} A_l &= 2\pi \frac{AB}{2}g \\ &= \pi ABg. \end{aligned}$$

Obsevando a figura 4.25, nota-se que AB é o raio do cone de revolução, assim

A área da superfície lateral de um cone de revolução de raio AB e geratriz g é dada pelo produto de π vezes as medidas do raio da base e da geratriz.

Por (4.21), o volume de um sólido de revolução é dado por

$$V = 2\pi\bar{x}A.$$

Neste caso, $\bar{x} = \bar{x}_2 = \frac{AB}{3}$ e $A = \frac{AB \cdot AC}{2}$, assim

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \frac{AB}{3} \cdot \frac{AB \cdot AC}{2} \\ &= \frac{\pi(AB)^2 AC}{3}. \end{aligned}$$

Obsevando a figura 4.25, AB representa o raio da base do cone e AC a altura. Sendo assim, $\pi(AB)^2$ é a área da base do cone. Então,

O volume do cone de revolução é igual a um terço do produto da área da base pela medida de sua altura.

4.7 Esfera de Revolução

Definição 4.4 *A esfera é um sólido de revolução obtido pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo e que contém o seu diâmetro.*

Considere o semicírculo λ , de centro O e raio r e o eixo e contendo o seu diâmetro.

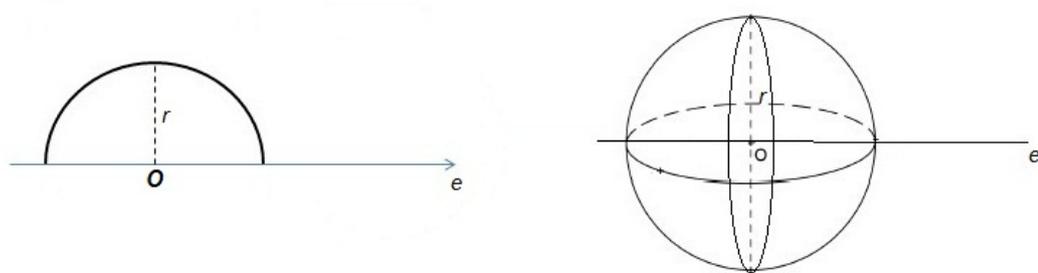


Figura 4.26: Esfera de revolução

A **superfície esférica** é gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o seu diâmetro. Adotando-se um sistema cartesiano ortogonal com origem no centro da semicircunferência e em seguida rotacionando essa semicircunferência

em torno do eixo x , nota-se que houve a rotação de um arco de equação dada por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, com $-r \leq x \leq r$.

A área da superfície esférica, segundo (4.19) é dada por

$$A = 2\pi\bar{y}L,$$

onde, $L = \pi r$ é o comprimento da semicircunferência e \bar{y} é definido segundo (4.4) como

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_{-r}^r y \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sua derivada é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r r dx \\ &= \frac{r}{\pi r} \cdot x \Big|_{-r}^r \\ &= \frac{1}{\pi} [r + r] \\ &= \frac{2r}{\pi}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Substituindo (4.24) e $L = \pi r$ em $A = 2\pi\bar{y}L$, tem-se

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \pi r \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Então,

A área da superfície de uma esfera de raio r é igual a quatro vezes a área de um de seus círculos máximos, ou seja, o círculo obtido pela secção de um plano que contém o seu centro.

Para deduzir a fórmula do volume da esfera, considera-se um semicírculo de raio r e um sistema cartesiano ortogonal OXY , com origem no seu centro. Girando esse semicírculo em torno do eixo OX , obtém-se uma esfera cujo volume, conforme (4.23) é dado por

$$V = 2\pi\bar{y}A,$$

onde A é a área do semicírculo rotacionado e \bar{y} , segundo (4.8), é definido por

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx.$$

Mas, $A = \frac{\pi r^2}{2}$ e $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, com $-r \leq x < r$. Assim

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\frac{\pi r^2}{2}} \int_{-r}^r \frac{1}{2}(\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx. \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx. \\ &= \frac{1}{\pi r^2} r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r. \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \left[r^2 r - \frac{r^3}{3} - \left[r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right] \right]. \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \left[r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right]. \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \cdot \frac{4r^3}{3}. \\ &= \frac{4r}{3\pi}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Substituindo $A = \frac{\pi r^2}{2}$ e (4.25) em $V = 2\pi\bar{y}A$, tem-se

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2}. \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

Então, o volume de uma esfera é igual a quatro terços de π , vezes a medida do seu raio ao cubo.

Referências Bibliográficas

- [1] A. C. Morgado; E. L. Lima; P. C. P. Carvalho; E. Wagner. *Coleção do Professor de Matemática: A Matemática do Ensino Médio*, v.2. 5ª Edição, SBM, Rio de Janeiro. (1998).
- [2] E. L. Lima. *Medida e Forma em Geometria*, 2ª Edição, SBM, Rio de Janeiro (1991).
- [3] H. Eves. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de H. H. Domingues, Editora Unicamp, Campinas (2004).
- [4] J. Stewart. *Cálculo: Volume I*, 4ª Edição, Pioneira Thomson Learning, São Paulo (2006).
- [5] J. Stewart. *Cálculo: Volume II*, 5ª Edição, Pioneira Thomson Learning, São Paulo (2006).
- [6] L. R. Dante. *Matemática: Contexto e Aplicações*, v. 2, 2ª Edição, Ática, São Paulo (2013).
- [7] M. Paiva. *Matemática do Ensino Médio: Volume I*, 2ª Edição, Moderna, São Paulo (2013).
- [8] O. Dolce; J. N. Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Espacial: Posição e Métrica*, v.10. 6ª Edição, Atual Editora, São Paulo (2005).
- [9] O. Dolce; J. N. Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*, v.09. 7ª Edição, Atual Editora, São Paulo (2006).
- [10] O. G. Júnior. *Matemática por Assunto: Geometria Plana e Espacial*, v.6. 8ª Edição, Editora Scipione, São Paulo (1988).
- [11] R. R. Rautenberg. *Dissertação de Mestrado: Os Teoremas de Pappus para Sólidos de Revolução*. Universidade Tecnológica Federal de Paraná-PROFMAT, (2013). Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/471/1/CT_PROFMAT_M_Rautenberg,%20Robson%20Raulino_2013.pdf. Acesso em 30 de abril de 2015 às 10h06.

Sites Utilizados Para as Figuras da Dissertação

- [12] Figura 1.7. Disponível em: <http://imgkid.com/decagono.shtml>. (Adaptada). Acesso em 23 de março de 2015 às 20h37.

- [13] Figura 1.10. Disponível em: <http://imgkid.com/decagono.shtml>. (Adaptada). Acesso em 23 de março de 2015 às 20h40.
- [14] Figura 3.1. Disponível em: hpdemat.apphb.com/Espacial. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 11h15.
- [15] Figura 3.2. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. Acesso em 13 de março de 2015 às 21h30.
- [16] Figura 3.3. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. Acesso em 13 de março de 2015 às 21h33.
- [17] Figura 3.4. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. Acesso em 13 de março de 2015 às 21h37.
- [18] Figura 3.5. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. Acesso em 13 de março de 2015 às 21h39.
- [19] Figura 3.6. Disponível em: <http://guiadoestudante.abril.com.br/estudar/matematica/prismas-677833.shtml>. (Adaptada). Acesso em 29 de março de 2015 às 16h48.
- [20] Figura 3.7. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/nunof/pagina/poliedros.htm>. Acesso em 30 de março de 2015 às 21h57.
- [21] Figura 3.8. Disponível em: <http://guiadoestudante.abril.com.br/estudar/matematica/prismas-677833.shtml>. (Adaptada). Acesso em 29 de março de 2015 às 16h48.
- [22] Figura 3.9. Disponível em: http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup22.shtml. (Adaptada). Acesso em 27 de março de 2015 às 22h21.
- [23] Figura 3.10. Disponível em: http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup22.shtml. (Adaptada). Acesso em 27 de março de 2015 às 22h26.
- [24] Figura 3.13. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/matematica/aprendendo-a-medir-volumes.jhtm>. (Adaptada). Acesso em 27 de março de 2015 às 22h10.
- [25] Figura 3.14. Disponível em: <https://matematicasafa.wordpress.com/category/segundo-de-eso/unidad-10-medida-del-volumen/>. (Adaptada). Acesso em 29 de março de 2015 às 18h03.
- [26] Figura 3.15. Disponível em: <http://portfoliodematematica.blogspot.com.br/2012/12/225-piramides.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 10h15.
- [27] Figura 3.16. Disponível em: <http://portfoliodematematica.blogspot.com.br/2012/12/225-piramides.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 10h17.
- [28] Figura 3.17. Disponível em: <http://portfoliodematematica.blogspot.com.br/2012/12/225-piramides.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 10h20.

- [29] Figura 3.18. Disponível em: <http://portfoliodematematica.blogspot.com.br/2012/12/225-piramides.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 10h25.
- [30] Figura 3.20. Disponível em: http://www.clickideia.com.br/cgi-local/lib-site/galeriaExercicios/bloc_exc.pl?cod=EM_MAT_200202. (Adaptada). Acesso em 14 de março de 2015 às 20h30.
- [31] Figura 3.22. Disponível em: http://www.clickideia.com.br/cgi-local/lib-site/galeriaExercicios/bloc_exc.pl?cod=EM_MAT_200202. (Adaptada). Acesso em 14 de março de 2015 às 20h39.
- [32] Figura 3.23. Disponível em: http://www.clickideia.com.br/cgi-local/lib-site/galeriaExercicios/bloc_exc.pl?cod=EM_MAT_200202. (Adaptada). Acesso em 14 de março de 2015 às 20h40.
- [33] Figura 3.24. Disponível em: http://www.clickideia.com.br/cgi-local/lib-site/galeriaExercicios/bloc_exc.pl?cod=EM_MAT_200202. (Adaptada). Acesso em 14 de março de 2015 às 20h50.
- [34] Figura 3.25. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/matematica/aprendendo-a-medir-volumes.jhtm>. (Adaptada). Acesso em 27 de março de 2015 às 22h15.
- [35] Figura 3.26. Disponível em: hpdemat.apphb.com/Espacial. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 11h15.
- [36] Figura 3.27. Disponível em: http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1401.htm#GE0140104. (Adaptada). Acesso em 13 de março de 2015 às 19h46.
- [37] Figura 3.28. Disponível em: http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1401.htm#GE0140104. (Adaptada). Acesso em 13 de março de 2015 às 19h50.
- [38] Figura 3.29. Disponível em: http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1401.htm#GE0140104. (Adaptada). Acesso em 13 de março de 2015 às 19h58.
- [39] Figura 3.30. Disponível em: http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1401.htm#GE0140104. (Adaptada). Acesso em 13 de março de 2015 às 20h06.
- [40] Figura 3.31. Disponível em: <http://professor.pauloalexandre.com/cilindro-geometria-espacial-1-de-5/>. (Adaptada). Acesso em 13 de março de 2015 às 22h21.
- [41] Figura 3.33. Disponível em: http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1401.htm#GE0140104. (Adaptada). Acesso em 13 de março de 2015 às 19h40.
- [42] Figura 3.34. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/12/o-principio-de-cavalieri.html>. (Adaptada). Acesso em 17 de março de 2015 às 21h40.
- [43] Figura 3.36. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h14.

- [44] Figura 3.37. Disponível em: www.todamateria.com.br/cone. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h26.
- [45] Figura 3.38. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h14.
- [46] Figura 3.39. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h25.
- [47] Figura 3.42. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h32.
- [48] Figura 3.43. Disponível em: www.todamateria.com.br/cone. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h30.
- [49] Figura 3.45. Disponível em: www.todamateria.com.br/cone. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h12.
- [50] Figura 3.46. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html>. (Adaptada). Acesso em 28 de março de 2015 às 14h09.
- [51] Figura 3.52. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/12/o-principio-de-cavalieri.html>. (Adaptada). Acesso em 27 de março de 2015 às 20h52.
- [52] Figura 3.56. Disponível em: <http://slideplayer.com.br/slide/364967/>. Acesso em 12 de março de 2015 às 21h46.
- [53] Figura 4.13. Disponível em: http://www.e-scola.edu.gov.cv/index.php?option=com_rea&id_disciplina=&id_materia=6&id_capitulo=72&id_pagina=164&Itemid=483. Acesso em 30 de abril de 2015 às 13h47.
- [54] Figura 4.14. Disponível em: <http://phylos.net/matematica/hist-calculo/hc-cap3/>. (Adaptada). Acesso em 22 de abril de 2015 às 21h49.
- [55] Figura 4.15.1. Disponível em: <http://phylos.net/matematica/hist-calculo/hc-cap3/>. (Adaptada). Acesso em 22 de abril de 2015 às 21h29.
- [56] Figura 4.15.2. Disponível em: <http://phylos.net/matematica/hist-calculo/hc-cap3/>. (Adaptada). Acesso em 22 de abril de 2015 às 21h37.
- [57] Figuras 4.20 e 4.21. Disponíveis em: http://ecalculo.if.usp.br/integrais/aplicacoes_integral/volumes_solidos/volumes_solidos.htm. (Adaptadas). Acesso em 18 de abril de 2015 às 21h55 e às 21h59, respectivamente.
- [58] Figura 4.25. Disponível em: https://digitalsignal.files.wordpress.com/2010/05/aula01_lourdes1_sem_2.pdf. (Adaptada). Acesso em 12 de março de 2015 às 9h14.