
Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Pontos Notáveis do Triângulo.
Quantos Você Conhece?

Por

Elton Jones da Silva Magalhães

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Abril de 2013

Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Elton Jones da Silva Magalhães

**Pontos Notáveis do Triângulo. Quantos Você
Conhece?**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão - Sergipe
Abril de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M188p Magalhães, Elton Jones da Silva.
Pontos notáveis do triângulo. Quantos você conhece? / Elton
Jones da Silva Magalhães ; orientador Almir Rogério Silva Santos.
– São Cristóvão, 2013.
32 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Triângulo. 2. Pontos notáveis. 3. Geometria. I. Santos, Almir
Rogério Silva, orient. II. Título

CDU 514.112.3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

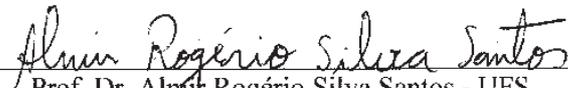
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

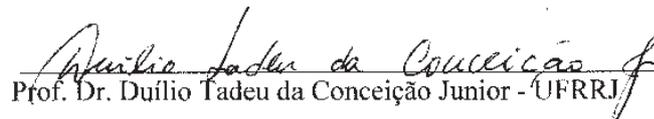
Pontos notáveis do triângulo. Quantos você conhece?

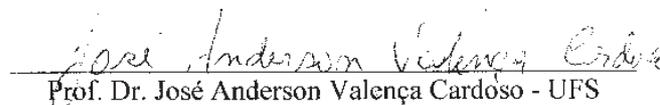
por

Elton Jones da Silva Magalhães

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos - UFS
Orientador


Prof. Dr. Duílio Tadeu da Conceição Junior - UFRRJ
Primeiro Examinador


Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 12 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Sumário

Agradecimentos	iii
Abstract	iv
Resumo	v
Introdução	vi
1 Preliminares	1
1.1 Casos de congruência de triângulos	1
1.2 Casos de semelhança de triângulos	3
1.3 Teoremas Básicos	5
2 Pontos Notáveis do Triângulo	10
2.1 Incentro	10
2.2 Baricentro ou Centróide	12
2.3 Circuncentro	14
2.4 Ortocentro	16
2.5 Reta de Euler	17
2.6 A Circunferência de Nove Pontos	19
2.7 Os pontos de Feuerbach	21
2.8 Ponto de Lemoine (ou ponto simediano)	22
2.9 Pontos de Gergonne	25
2.10 Ponto de Nagel	27
2.11 Ponto de Spieker	28
2.12 Pontos de Fermat ou pontos isogônicos	29
2.12.1 Primeiro ponto de Fermat	29
2.12.2 Segundo ponto de Fermat	32
3 Conclusão	34
Referências Bibliográficas	35

Lista de Figuras

1	Os mil primeiros Pontos Notáveis listados no site da UFF.	vi
1.1	Caso LAL de congruência.	2
1.2	Caso ALA de congruência.	2
1.3	Caso LLL de congruência.	2
1.4	Caso LAAo de congruência.	3
1.5	Caso Especial de congruência.	3
1.6	Caso AAA de Semelhança.	4
1.7	Caso LAL de Semelhança.	4
1.8	Caso LLL de Semelhança.	5
1.9	Base Média.	5
1.10	Ângulo Inscrito: $2 \cdot \alpha = \beta$	6
1.11	Ângulo Interno Alternado.	6
1.12	Cevianas concorrentes.	7
2.1	Bissetrizes concorrentes.	10
2.2	Circunferência inscrita.	11
2.3	Circunferências ex-inscritas.	12
2.4	Medianas concorrentes.	13
2.5	Medianas concorrentes (Demonstração).	14
2.6	Mediatrizes concorrentes.	15
2.7	Circunferência circunscrita.	16
2.8	Localização do Circuncentro.	16
2.9	Alturas concorrentes.	17
2.10	Reta de Euler.	18
2.11	Circunferência de nove pontos.	19
2.12	Demonstração para a circunferência de nove pontos.	20
2.13	Pontos de feuerbach.	21
2.14	Ponto de Lemoine.	22
2.15	Ponto de Lemoine obtido pela intersecção dos segmentos que liga o ponto médio de um lado com o ponto médio da altura relativa a este mesmo lado.	24

2.16	divisão de cada lado do triângulo em partes proporcionais aos quadrados dos outros dois lados.	24
2.17	menor soma dos quadrados das distâncias de K aos lados do triângulo. . .	25
2.18	Distâncias proporcionais de K aos lados e o lado correspondente.	25
2.19	Triângulo inscrito em ABC cuja soma dos quadrados dos lados é mínima. .	26
2.20	Triângulo obtido pelas retas que passam pelos vértices do quadrado construído nos lados do triângulo ABC.	26
2.21	Ponto de Gergonne.	27
2.22	Pontos de Gergonne das circunferências ex-inscritas.	27
2.23	Ponto de Nagel.	28
2.24	Pontos de Nagel.	29
2.25	Alinhamento do ponto de Nagel com o Baricentro e o Incentro.	30
2.26	Ponto de Spieker.	30
2.27	Propriedade do ponto de Spieker.	31
2.28	Ponto de Fermat.	31
2.29	Ponto de Fermat obtido pela intersecção das circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados.	32
2.30	Segundo Ponto de Fermat.	33
2.31	Segundo Ponto de Fermat obtido pela intersecção das circunferências circunscritas aos triângulos equilátero construídos sobre os lados.	33

Agradecimentos

Neste momento de vitória onde completo mais uma importante etapa da minha vida eu não poderia deixar de agradecer a pessoas especiais que me ajudaram neste projeto.

Agradeço primeiramente aquele me criou e me guia aqui na terra, o Deus todo poderoso razão do meu viver.

A minha esposa Daniele que me apoiou, me incentivou e compreendeu as minhas ausências no momento em que mais precisava pelo seu estado gestacional da minha primeira filha.

Ao meu pai Gerson e minha mãe Selma que me incentivaram de maneira incrível dizendo que faria o que fosse preciso para que eu concluísse o curso.

As minhas irmãs que estavam sempre do meu lado.

Aos meus mestres que se colocaram como verdadeiros parceiros, nos ensinando conhecimentos valiosos de uma maneira incansável, disponíveis a qualquer hora. Agradeço de maneira especial ao meu orientador Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos, que aceitou o pedido para orientar minha dissertação mesmo com os vários alunos para orientar e com o prazo para conclusão bastante comprometido, teve ainda papel fundamental no desenvolver da dissertação desde a escolha do tema até os pontos finais.

Aos meus colegas de classe que por muitas vezes me ajudaram nas resolução de problemas, e com os quais construir uma amizade que gostaria de levar para toda a vida, gostaria de agradecer de forma especial ao meu grupo, e até aos companheiros de viagem que são de outra turma.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para a implantação deste projeto como a SBM, a Capes e a UFS.

A todos que me ajudaram a vencer esta etapa, o meu muito obrigado.

Elton Jones da Silva Magalhães

12 de abril de 2013

Abstract

This thesis aims to show that the notable points of the triangles are not limited to Incentro, circumcenter, Baricentro and Orthocenter which are the best known. In fact, the Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), see [5], features over five thousand notable points. Are points with several interesting properties as we will see throughout this work. In addition to the points already mentioned will also present the points of Feuerbach, the Lemoine point, the point Gergonne, the Nagel point, the Spieker point and the points of Fermat. Will be also presented some important theorems, among them we highlight the Ceva theorem that will be used to prove the existence of several points mentioned. We realize that it is a matter of understanding that can be easily inserted into the basic education.

Keywords: Notable points of the triangle, Feuerbach, Lemoine, Gergonne, Nagel, Spieker, Fermat.

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo mostrar que os pontos notáveis dos triângulos não se resumem ao Incentro, Circuncentro, Baricentro e ao Ortocentro que são os mais conhecidos. Na verdade, a Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), ver [5], apresenta mais de cinco mil pontos notáveis. São pontos com várias propriedades interessantes como veremos ao longo deste trabalho. Além dos pontos já citados apresentaremos também os pontos de Feuerbach, o ponto de Lemoine, o ponto de Gergonne, o ponto de Nagel, o ponto de Spieker e os pontos de Fermat. Serão apresentados também alguns teoremas importantes, entre eles podemos destacar o Teorema de Ceva que será usado para provar a existência de vários pontos citados. Podemos perceber que é um assunto de fácil compreensão que pode ser inserido no ensino básico.

Palavras Chaves: Pontos notáveis do triângulo, Feuerbach, Lemoine, Gergonne, Nagel, Spieker, Fermat.

Introdução

Segundo Clark Kimberling, há muito tempo atrás, alguém desenhou um triângulo e três segmentos. Cada segmento ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto. Os segmentos se encontraram em um ponto. A pessoa ficou impressionada e repetiu a experiência em uma forma diferente de triângulo. Novamente os segmentos se intersectaram em um ponto. Ele disse aos amigos. Para sua surpresa e alegria, a coincidência funcionou para eles também.

A notícia se espalhou, e a magia dos três segmentos foi considerada como obra de um poder superior. Séculos se passaram, e alguém mostrou que as três medianas de fato encontram-se em um único ponto, agora chamado de baricentro ou centróide.

Os antigos encontraram também outros pontos, agora chamados de incentro, circuncentro e ortocentro, estes quatro pontos são chamados de pontos notáveis do triângulo.

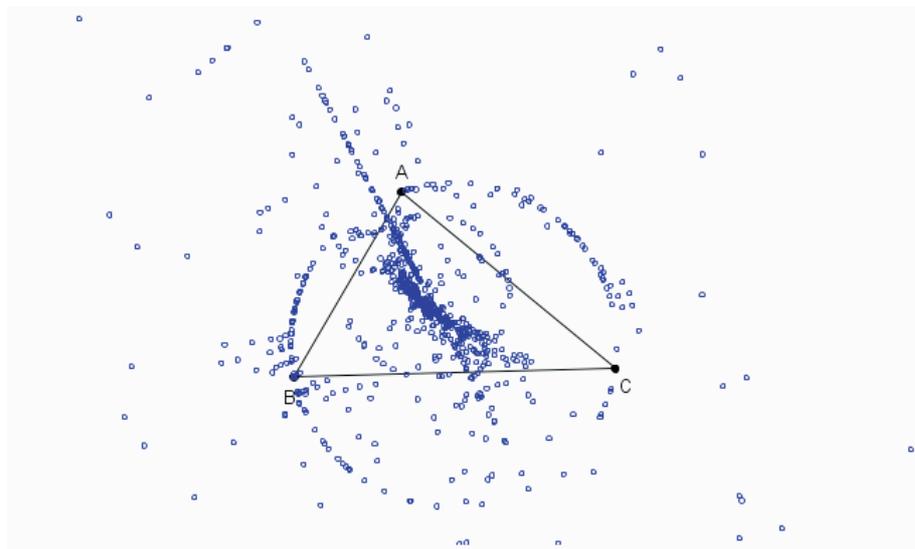


Figura 1: Os mil primeiros Pontos Notáveis listados no site da UFF.

Mais séculos se passaram e outros pontos especiais foram descobertos, mas ainda hoje quando se fala de pontos notáveis do triângulo, a maioria das pessoas se remetem a apenas estes quatro pontos, estes são os pontos mais conhecidos, mas não são os únicos. Na verdade existe uma grande quantidade de pontos notáveis. O site do departamento de matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), ver [6], lista três mil duzentos e

quarenta e oito pontos notáveis. Encontramos ainda na *Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)*, ver [5], do professor americano Clark Kimberling da universidade *Evansville* dos Estados Unidos cinco mil quatrocentos e cinco pontos notáveis do triângulo e provavelmente existam muitos outros. Na Tabela 1 estão os primeiros pontos listados no site e na Figura 1 podemos ver um triângulo com os mil primeiros pontos catalogados no site da Universidade Federal Fluminense que é baseado na ETC.

Nº	Ponto	Propriedade
X(1)	Incentro	Encontro das bissetrizes
X(2)	Baricentro	Encontro das medianas
X(3)	Circuncentro	Encontro das mediatrizes
X(4)	Ortocentro	Encontro das alturas
X(5)	Centro dos nove pontos	Centro do círculo dos nove pontos
X(6)	Ponto de Lemoine	Encontro das simedianas
X(7)	Ponto de Gergonne	Encontro das cevianas determinadas pelo ponto de tangência do círculo inscrito com os lados do triângulo
X(8)	Ponto de Nagel	Encontro das cevianas determinadas pelo ponto de tangência do círculo ex-inscrito com os lados do triângulo
X(9)	Mittenpunkt	Ponto de Lemoine do triângulo formado pelos centros dos três círculos ex-inscritos
X(10)	Centro de Spieker	Incentro do triângulo medial
X(11)	Ponto de Feuerbach	Ponto de tangência do círculo inscrito e do círculo dos nove pontos
X(12)	X(1),X(5)-Conjugado Harmônico de X(11)	
X(13)	Ponto de Fermat	Ponto no plano cuja soma das distâncias aos vértices é a menor possível

Tabela 1: Primeiros pontos notáveis listados nos sites da UFF e ETC.

Neste trabalho serão apresentados mais alguns pontos notáveis do triângulo além dos quatro mais conhecidos, com propriedades úteis e de muita importância no nosso dia-a-dia, que podem ser ensinados aos alunos da educação básica.

Sendo um assunto muito extenso seria improvável tratarmos todos os pontos neste trabalho, pois, como já dito são mais de cinco mil.

Neste trabalho, não se aprofundará nas demonstrações e sempre que possível será indicado onde podem ser encontradas.

Este trabalho está dividido em dois capítulos. No primeiro encontramos alguns resul-

tados básicos e bem conhecidos que serão úteis para nosso objetivo. No segundo capítulo iremos apresentar alguns dos pontos listados na *Encyclopedia of Triangle Centers* e algumas de suas propriedades.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns teoremas e proposições que serão utilizados para demonstrar a existência dos pontos notáveis apresentados nesta dissertação.

1.1 Casos de congruência de triângulos

Definição 1 *Diremos que dois triângulos são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que:*

- a) Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e;*
- b) Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

De modo geral, dados dois triângulos ABC e DEF, indicaremos por $ABC = DEF$ para dizer que os dois triângulos são congruentes e a correspondência é dada por:

$$A \leftrightarrow D,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow F.$$

Neste caso, teremos seis congruências induzidas sobre os lados e os ângulos.

$$\begin{array}{lcl} \overline{AB} = \overline{DE}, & & \hat{A} = \hat{D}, \\ \overline{BC} = \overline{EF}, & \text{e} & \hat{B} = \hat{E}, \\ \overline{CA} = \overline{FD} & & \hat{C} = \hat{F}. \end{array}$$

Existem cinco casos nos quais podemos concluir que dois triângulos são congruentes verificando apenas algumas das igualdades citadas anteriormente, estes casos são chamados de casos de congruência de triângulos. As demonstrações podem ser encontradas nas referências [1] e [4]. Veremos a seguir estes casos de congruência.

Proposição 1.1 (Caso LAL - Lado, Ângulo, Lado) *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então $ABC=DEF$.*

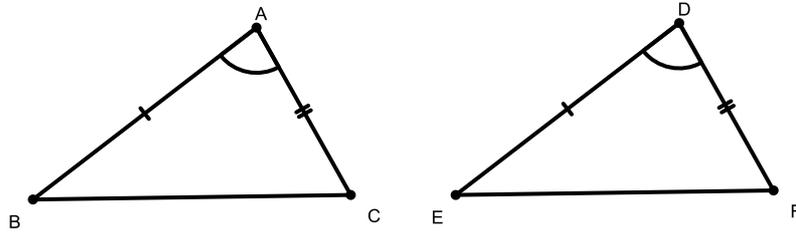


Figura 1.1: Caso LAL de congruência.

Proposição 1.2 (Caso ALA - Ângulo, Lado, Ângulo) *Dados dois triângulos ABC e DEF com $\overline{AB} = \overline{DE}$; $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC=DEF$.*

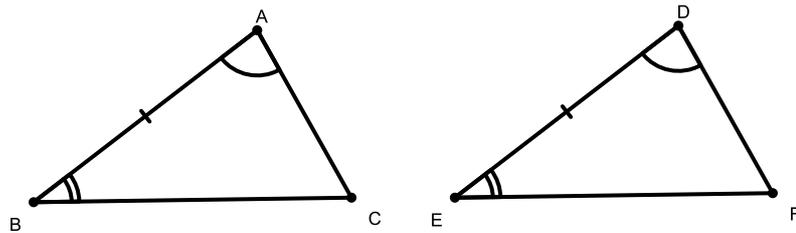


Figura 1.2: Caso ALA de congruência.

Proposição 1.3 (Caso LLL - Lado, Lado, Lado) *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $\overline{AB} = \overline{DE}$; $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$, então $ABC=DEF$.*

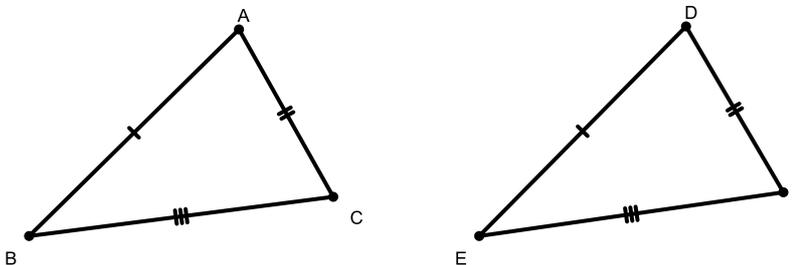


Figura 1.3: Caso LLL de congruência.

Proposição 1.4 (Caso LAAo - Lado, Ângulo, Ângulo oposto) *Dados dois triângulos ABC e DEF com $\overline{AB} = \overline{DE}$; $\hat{A}=\hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{F}$, então $ABC=DEF$.*

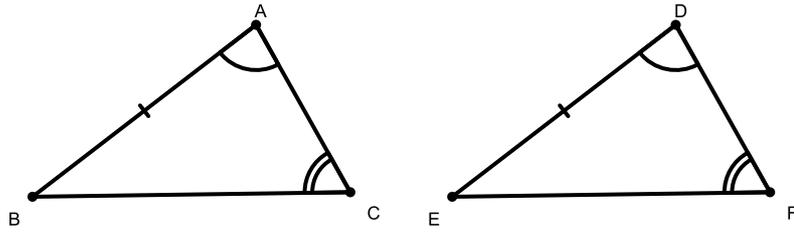


Figura 1.4: Caso LAAo de congruência.

Proposição 1.5 (Caso Especial) *Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são \hat{C} e \hat{F} . Se $\overline{AB} = \overline{DE}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$ (ou $\overline{AC} = \overline{DF}$), então $ABC=DEF$.*

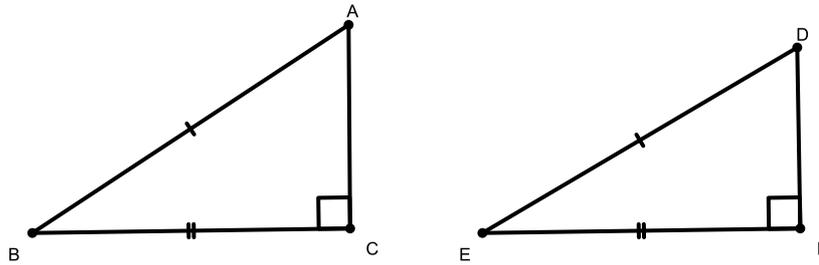


Figura 1.5: Caso Especial de congruência.

1.2 Casos de semelhança de triângulos

Definição 2 *Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que:*

- a) *Seus ângulos correspondentes sejam iguais e;*
- b) *Seus lados correspondentes sejam proporcionais.*

De modo geral, dados dois triângulos ABC e DEF , indicaremos por $ABC \sim DEF$ para dizer que os dois triângulos são semelhantes e a correspondência é dada por:

$$A \leftrightarrow D,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow F.$$

Neste caso, teremos três congruências induzidas sobre os ângulos e três proporções,

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{D}, \\ \hat{B} &= \hat{E}, \\ \hat{C} &= \hat{F} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Existem três casos nos quais podemos concluir que dois triângulos são semelhantes verificando apenas alguns pontos citados. Estes são chamados de casos de semelhança de triângulos. As demonstrações podem ser encontradas em [1] e [4]. Veremos a seguir os casos de semelhança.

Proposição 1.6 (Caso AAA - Ângulo, Ângulo, Ângulo) *Dados dois triângulos ABC e DEF com $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$ então $ABC \sim DEF$.*

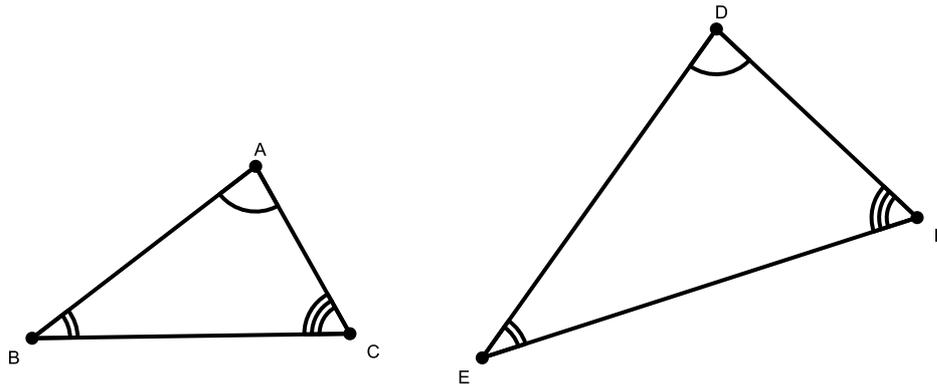


Figura 1.6: Caso AAA de Semelhança.

Proposição 1.7 (Caso LAL - Lado, Ângulo, Lado) *Dados dois triângulos ABC e DEF com $\hat{A} = \hat{D}$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}},$$

então $ABC \sim DEF$.

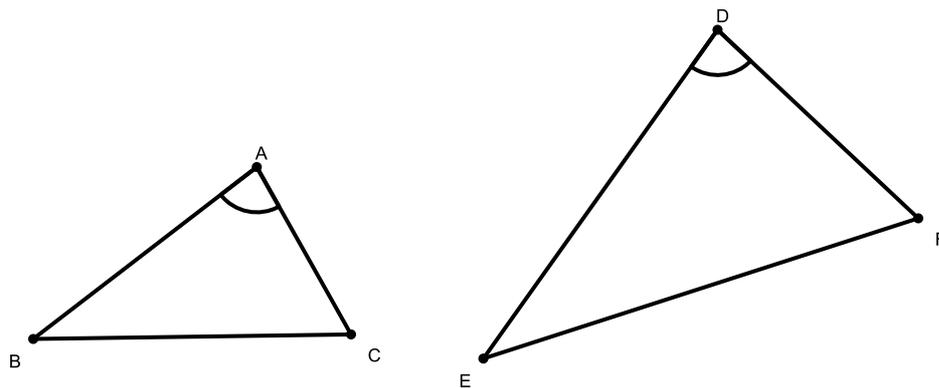


Figura 1.7: Caso LAL de Semelhança.

Proposição 1.8 (Caso LLL - Lado, Lado, Lado) *Dados dois triângulos ABC e DEF , se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}},$$

então $ABC \sim DEF$.

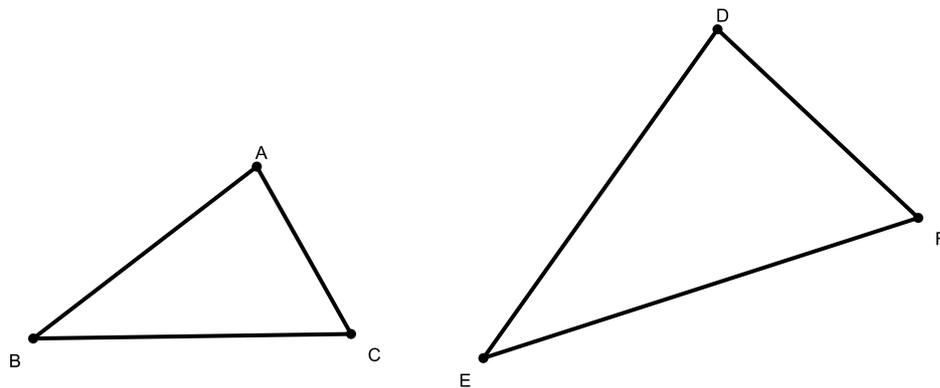


Figura 1.8: Caso LLL de Semelhança.

1.3 Teoremas Básicos

Teorema 1 (Teorema da Base Média) *Em um triângulo qualquer o segmento que une os pontos médios de dois dos seus lados é paralelo ao terceiro lado e tem como medida a metade da medida deste lado.*

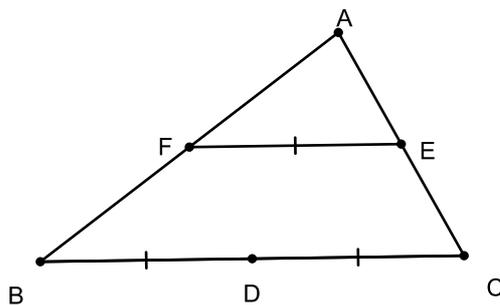


Figura 1.9: Base Média.

Na figura 1.9 os pontos E e F são pontos médios de \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, o segmento \overline{EF} é paralelo a \overline{BC} e $2 \cdot \overline{EF} = \overline{BC}$.

A demonstração deste teorema é encontrado nas referências [1] e [4].

Teorema 2 (Teorema do Ângulo Inscrito) *A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade da medida do arco correspondente.*

A demonstração deste teorema é encontrado na referência [4].

Definição 3 *Seja t uma reta transversal a duas retas m e n , com t interceptando m em E e n em B . Escolha pontos D e F em m tais que D , E e F estejam exatamente nesta ordem, e pontos A e C em n tais que A e D estejam no mesmo lado de t e A , B e C estejam exatamente nesta ordem. Os ângulos $\hat{DÊB}$, $\hat{FÊB}$, $\hat{ÂÊE}$ e $\hat{CÊE}$ são chamados ângulos interiores. Os pares de ângulos $(\hat{ÂÊE}, \hat{FÊB})$ e $(\hat{DÊB}, \hat{CÊE})$ são chamados de pares de ângulos internos alternados.*

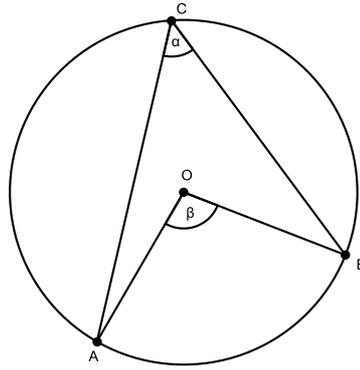


Figura 1.10: Ângulo Inscrito: $2 \cdot \alpha = \beta$.

α e β são ângulo internos alternados.

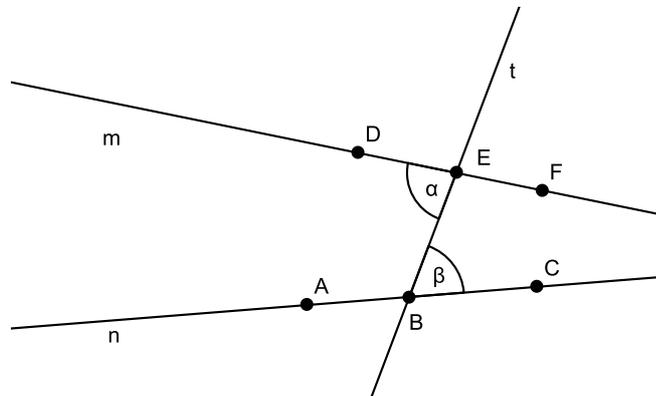


Figura 1.11: Ângulo Interno Alternado.

Teorema 3 (Teorema do Ângulo Interno Alternado) *Se duas retas m e n são cortadas por uma reta transversal t formando um par de ângulos internos alternados congruentes, então as duas retas são paralelas.*

Definição 4 *Uma ceviana de um triângulo é um segmento que une um vértice a um ponto do lado oposto.*

Teorema 4 (Teorema de Ceva) *Três cevianas AD , BE e CF de um triângulo ABC são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Encontramos a demonstração deste teorema que é apresentada a seguir em [2].

Demonstração:

Suponha que as três cevianas sejam concorrentes.

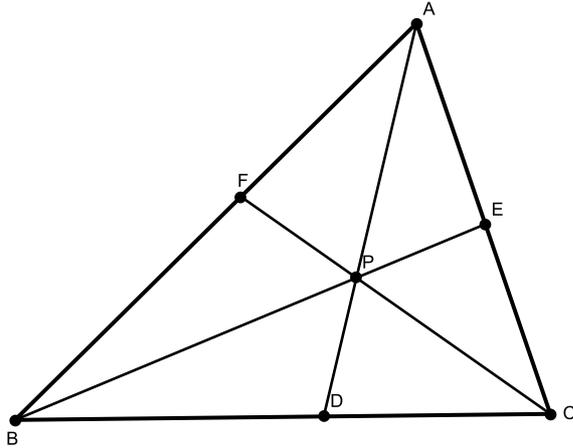


Figura 1.12: Cevianas concorrentes.

Seja P o ponto de encontro das três cevianas. Denote por (ABC) a área de um triângulo ABC . Observe que os triângulos BDP e CDP possuem a mesma altura h com respeito às bases \overline{BD} e \overline{DC} , respectivamente.

E os triângulos ABD e ACD têm altura H com respeito às bases \overline{BD} e \overline{DC} , respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned} (ABD) &= \frac{1}{2}H \cdot \overline{BD}, & \text{e} & & (ACD) &= \frac{1}{2}H \cdot \overline{DC}, \\ (BDP) &= \frac{1}{2}h \cdot \overline{BD}, & \text{e} & & (CDP) &= \frac{1}{2}h \cdot \overline{DC}. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{(ABP)}{(ACP)} = \frac{(ABD) - (BDP)}{(ACD) - (CDP)} = \frac{\frac{1}{2}H \cdot \overline{BD} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{BD}}{\frac{1}{2}H \cdot \overline{DC} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Portanto

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{(ABP)}{(ACP)}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{(BCP)}{(ABP)} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{(ACP)}{(BCP)}.$$

Fazendo o produto das três igualdades temos

$$\frac{(ABP)}{(ACP)} \cdot \frac{(BCP)}{(ABP)} \cdot \frac{(ACP)}{(BCP)} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Suponha agora que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1. \tag{1.1}$$

Vamos mostrar que as três cevianas são concorrentes.

Seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AD} e \overline{BE} . Vamos mostrar que \overline{CF} passa por P .

Seja $\overline{CF'}$ a ceviana que passa por P . Pelo caso anterior, temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = 1. \quad (1.2)$$

Devemos mostrar que $F = F'$.

Mas, por (1.1) e (1.2), obtemos

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$

Como F e F' pertencem ao segmento AB , podemos associar coordenadas a, b, f, f' aos pontos A, B, F e F' . Note que $a < b$ e f, f' estão entre a e b . Assim,

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \implies \frac{f' - a}{b - f'} = \frac{f - a}{b - f}$$

e então

$$\begin{aligned} fb - ff' - ab + af &= bf - ab - cf' + af' \implies f'b + af = bf + af' \\ \implies f'b - af' &= bf - af \implies f'(b - a) = f(b - a) \implies f = f'. \end{aligned}$$

Logo, $F = F'$.

□

Capítulo 2

Pontos Notáveis do Triângulo

Vamos apresentar neste capítulo alguns pontos notáveis do triângulos bem como algumas de suas propriedades.

2.1 Incentro

A semirreta que divide um ângulo em dois ângulos iguais é chamada de bissetriz.

Daqui por diante vamos denotar por (ABC) a área do triângulo ABC .

Proposição 2.1 *Dado um triângulo ABC qualquer, as três bissetrizes internas se intersectam no mesmo ponto, este ponto é chamado de **incentro** do triângulo.*

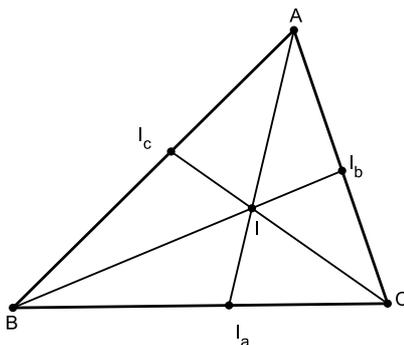


Figura 2.1: Bissetrizes concorrentes.

Demonstração:

Uma demonstração utilizando o Teorema de Ceva apresentado em [3] de que as três bissetrizes se encontram no mesmo ponto “ I ”, é apresentada a seguir.

Dado um triângulo ABC , suas bissetrizes são $\overline{AI_a}$, $\overline{BI_b}$ e $\overline{CI_c}$ (Ver Figura 2.1).

A área de um triângulo pode ser calculado de diversas formas. Usaremos duas delas para calcular a área dos triângulos ABI_a e ACI_a . Vamos denotar o ângulo \widehat{BAC} pela letra grega α . Logo, temos

$$\frac{(ABI_a)}{(ACI_a)} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AI_a} \cdot \text{sen}(\alpha/2)}{\overline{AC} \cdot \overline{AI_a} \cdot \text{sen}(\alpha/2)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Por outro lado, se $\overline{AH_a}$ é a altura em relação ao lado \overline{BC} , então

$$\frac{(ABI_a)}{(ACI_a)} = \frac{\frac{\overline{AH_a} \cdot \overline{BI_a}}{2}}{\frac{\overline{AH_a} \cdot \overline{CI_a}}{2}} = \frac{\overline{BI_a}}{\overline{CI_a}}.$$

Logo, concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BI_a}}{\overline{CI_a}}.$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CI_b}}{\overline{AI_b}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AI_c}}{\overline{BI_c}}.$$

Multiplicando as três igualdades temos

$$\frac{\overline{BI_a}}{\overline{CI_a}} \cdot \frac{\overline{CI_b}}{\overline{AI_b}} \cdot \frac{\overline{AI_c}}{\overline{BI_c}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1,$$

e pelo Teorema de Ceva concluímos que as três bissetrizes se intersectam em “I”.

□

Proposição 2.2 *O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, onde o raio da circunferência é igual à distância do incentro a um dos lados do triângulo.*

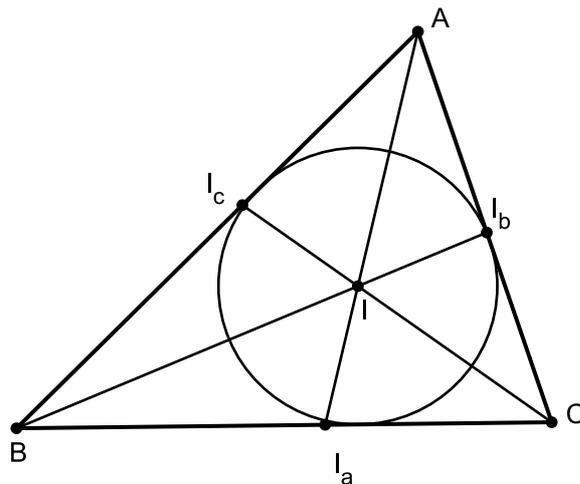


Figura 2.2: Circunferência inscrita.

Demonstração:

Para demonstrar esta proposição basta utilizar o fato de que a bissetriz é o conjunto de pontos que equidista dos dois lados que formam o ângulo. Deste modo, como “ I ” é o encontro das bissetrizes então a sua distância a \overline{AB} é igual a sua distância a \overline{AC} e a \overline{BC} , logo “ I ” é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

□

Podemos ainda encontrar, utilizando as bissetrizes, três circunferências ex-inscritas, que são circunferências tangentes a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois. Os centros das circunferências são encontrados através das interseções da bissetriz interna do vértice oposto ao lado de tangência e as bissetrizes externas (ver Figura 2.3). Uma forma de mostrar que essas três bissetrizes se intersectam em um único ponto é utilizando a propriedade que a bissetriz é o conjunto dos pontos equidistantes aos lados do ângulo.

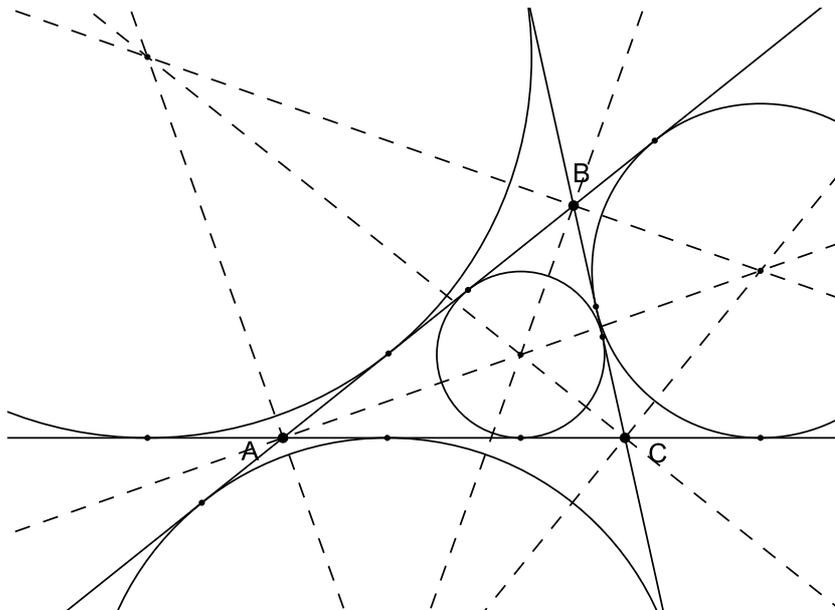


Figura 2.3: Circunferências ex-inscritas.

2.2 Baricentro ou Centróide

Dado um triângulo ABC qualquer, os segmentos que ligam cada vértice ao ponto médio do lado oposto são chamadas de mediana.

Proposição 2.3 *As três medianas de um triângulo se encontram em um único ponto. Este ponto é chamado de **baricentro** ou centróide.*

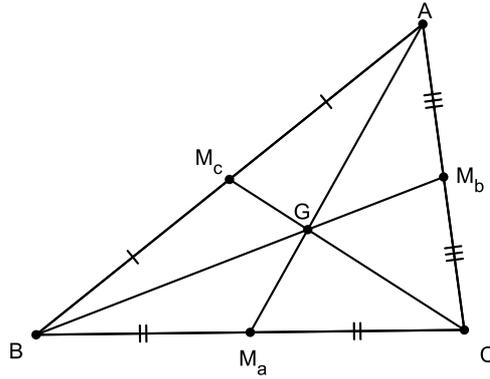


Figura 2.4: Medianas concorrentes.

Demonstração:

Utilizando o Teorema de Ceva esta afirmação é facilmente verificada, pois, se M_a , M_b e M_c são os pontos médios relativos aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, temos

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} = \frac{\overline{CM_b}}{\overline{M_bA}} = \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = 1.$$

Então

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} \cdot \frac{\overline{CM_b}}{\overline{M_bA}} \cdot \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = 1$$

□

Proposição 2.4 *As medianas dividem o triângulo em seis triângulos menores de áreas iguais.*

A demonstração abaixo da proposição é encontrada em [2].

Demonstração:

Observamos facilmente que $(BGM_a) = (CGM_a)$, $(BGM_c) = (AGM_c)$, $(CGM_b) = (AGM_b)$ e $(AM_aC) = (ABM_a)$, pois têm bases e alturas iguais. Daí,

$$(AM_aC) = (AGM_b) + (CGM_b) + (CGM_a) = 2(AGM_b) + (CGM_a)$$

e

$$(ABM_a) = (AGM_c) + (BGM_c) + (BGM_c) = 2(AGM_c) + (CGM_a).$$

Assim,

$$(AGM_b) = (AGM_c).$$

Da mesma forma mostra-se que $(AGM_b) = (BGM_a)$.

□

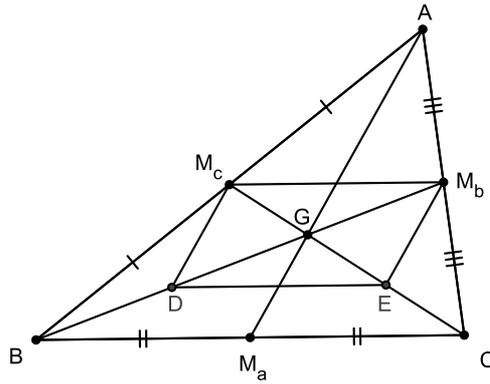


Figura 2.5: Medianas concorrentes (Demonstração).

Proposição 2.5 *O baricentro divide cada mediana na razão de dois para um, ou seja, a distância do vértice ao baricentro é duas vezes o comprimento que vai do baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice.*

Demonstração:

Vamos utilizar o Teorema da Base Média do Triângulo da seguinte forma. Considere os pontos D e E , tal que sejam os pontos médios de \overline{BG} e \overline{CG} (sendo G o baricentro) respectivamente. Pelo Teorema da Base Média do triângulo, $\overline{M_bM_c} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{DE}$, e os segmentos $\overline{M_bM_c}$, \overline{DE} e \overline{BC} são paralelos. Logo M_bM_cDE é um paralelogramo com as diagonais $\overline{M_bD}$ e $\overline{M_cE}$ intersectando-se em G . Logo, $\overline{M_bG} = \overline{GD}$ e como D é o ponto médio de \overline{BG} temos $\overline{BD} = \overline{DG}$. Portanto $2\overline{GM_b} = \overline{BG}$. Da mesma forma concluímos que $2\overline{GM_c} = \overline{CG}$ e $2\overline{GM_a} = \overline{AG}$, concluindo o que queríamos demonstrar.

□

O baricentro é o centro de gravidade do triângulo. Isto quer dizer que, se suspendermos um triângulo de um mesmo material pelo seu baricentro, ele fica em equilíbrio.

2.3 Circuncentro

As retas perpendiculares a cada lado do triângulo que passa pelo ponto médio deste lado é chamada de mediatriz.

Proposição 2.6 *As três mediatrizes de um triângulo ABC qualquer se intersectam no mesmo ponto chamado de **circuncentro**.*

A seguinte demonstração encontra-se em [4].

Demonstração:

Por hipótese, temos que m_1 , m_2 e m_3 são mediatrizes de \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente.

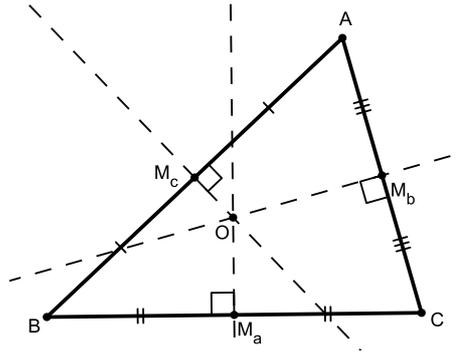


Figura 2.6: Mediatrizes concorrentes.

Queremos provar que

$$m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\}$$

e

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}.$$

Seja O o ponto de encontro de m_2 e m_3 , ou seja,

$$m_2 \cap m_3 = \{O\}.$$

Como a mediatriz é o conjunto de pontos que equidistam dos extremos temos que

$$O \in m_2 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC},$$

$$O \in m_3 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB}.$$

Assim, $\overline{OC} \equiv \overline{OB}$ e portanto

$$O \in m_1.$$

Logo,

$$m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\}$$

e então

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}.$$

Concluindo o que queríamos demonstrar.

□

O ponto de interseção das mediatrizes é chamado de circuncentro. Este ponto equidista dos três vértices do triângulo como vimos na demonstração. Logo o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo com raio igual a distância do circuncentro a um dos vértices.

O circuncentro será interno ao triângulo se este for acutângulo (possuir todos os ângulos menores que noventa graus), coincidirá com o ponto médio do lado oposto ao

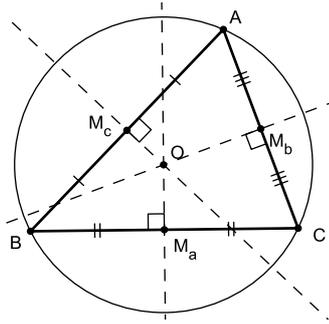


Figura 2.7: Circunferência circunscrita.

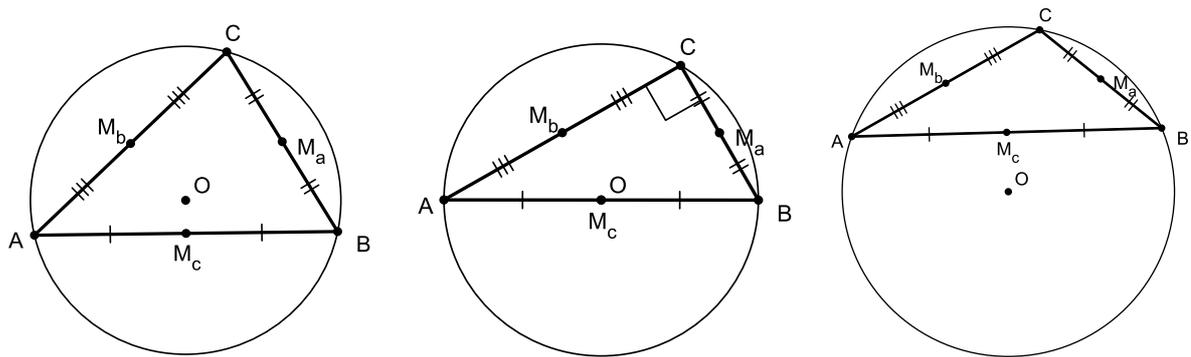


Figura 2.8: Localização do Circuncentro.

ângulo reto (hipotenusa) se este for retângulo (possuir um ângulo de noventa graus) e será externo ao triângulo se este for obtusângulo (possuir um ângulo maior que noventa graus).

Para explicar a afirmação anterior usaremos o Teorema do Ângulo Inscrito.

Considere o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O (ver figura 2.8). Se o ângulo $\hat{A}CB$ mede noventa graus, pelo teorema citado $2 \cdot \hat{A}CB = \hat{A}OB$, ou seja, o ângulo $\hat{A}OB$ mede 180° . Conclui-se então que AB é um diâmetro da circunferência e O é o ponto médio da hipotenusa do triângulo ABC . Se o ângulo $\hat{A}CB$ é maior que noventa graus então $\hat{A}OB$ (maior ângulo) é maior que 180° . Logo, O é externo ao triângulo ABC .

2.4 Ortocentro

As retas que passam pelo vértice de um triângulo e interceptam o lado oposto (ou seu prolongamento) perpendicularmente é a altura do triângulo relativo a este vértice

Proposição 2.7 *Em qualquer triângulo ABC , as três alturas se interceptam em um mesmo ponto, este ponto é chamado de **ortocentro**.*

Demonstração:

Seja ABC um triângulo, H_a , H_b e H_c os pés das perpendiculares baixadas dos vértices A , B e C , respectivamente, aos lados opostos (Ver Figura 2.9).

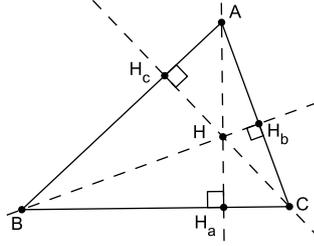


Figura 2.9: Alturas concorrentes.

Verificamos facilmente que os triângulos retângulos ACH_a e BCH_b são semelhantes pelo caso AAA. Portanto ,

$$\frac{\overline{CH_b}}{\overline{CH_a}} = \frac{\overline{BH_b}}{\overline{AH_a}}.$$

De maneira análoga

$$\frac{\overline{AH_c}}{\overline{AH_b}} = \frac{\overline{CH_c}}{\overline{BH_b}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BH_a}}{\overline{BH_c}} = \frac{\overline{AH_a}}{\overline{CH_c}}.$$

Portanto, temos

$$\frac{\overline{AH_c}}{\overline{BH_c}} \cdot \frac{\overline{BH_a}}{\overline{CH_a}} \cdot \frac{\overline{CH_b}}{\overline{AH_b}} = \frac{\overline{CH_c}}{\overline{BH_b}} \cdot \frac{\overline{AH_a}}{\overline{CH_c}} \cdot \frac{\overline{BH_b}}{\overline{AH_a}} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva concluímos que as cevianas $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$ e $\overline{CH_c}$ se interceptam em um ponto “H”.

□

Proposição 2.8 *O ortocentro será interno ao triângulo se este for acutângulo, coincidirá com o vértice do ângulo reto se este for retângulo e será externo ao triângulo se este for obtusângulo.*

Isso se explica porque como os catetos são perpendiculares então serão alturas do triângulo e se encontram no vértice cujo ângulo mede noventa graus. Logo este vértice será o ortocentro já que é o encontro de duas alturas e se tivermos um ângulo obtuso então as alturas relativas aos lados adjacentes ao vértice que forma esse ângulo não terá nenhuma interseção com a região interna do polígono. Logo, o ortocentro também deverá ser externo ao polígono.

2.5 Reta de Euler

Leonhard Euler¹ demonstrou a seguinte proposição relativa ao ortocentro (H), baricentro (G) e circuncentro (O).

¹Leonhard Paul Euler foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha nasceu na Basileia em 15 de abril de 1707 e morreu em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783.

Proposição 2.9 *Em qualquer triângulo, o ortocentro, o circuncentro, e o baricentro são sempre colineares, e a distância do ortocentro ao baricentro é sempre o dobro da distância do baricentro ao circuncentro. A reta que contém estes três pontos é chamada de **reta de Euler**.*

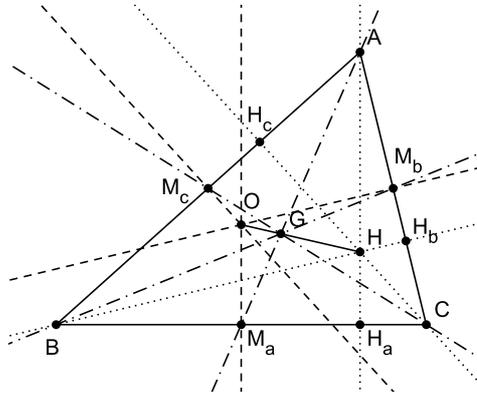


Figura 2.10: Reta de Euler.

Demonstração:

Observe que em um triângulo equilátero a reta de Euler não está definida, já que neste triângulo a mediatriz, a bissetriz e a altura coincidem e por sua vez os três pontos também coincidem.

Em triângulos isósceles, temos que a mediana, a mediatriz e a altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem a um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a reta de Euler do triângulo.

Vamos supor que todos os ângulos do triângulo ABC são agudos, para garantirmos que os três pontos são internos ao triângulo. Para um triângulo com um ângulo obtuso ou retângulo, a prova é análoga. Podemos supor que ABC não é isósceles.

Neste caso, a mediana é distinta da mediatriz, o que implica que o baricentro G e o circuncentro O são pontos distintos. Tome a reta r determinada por G e O .

Na semi-reta com origem em O e contendo G tome um ponto H tal que $\overline{GH} = 2\overline{GO}$. Seja M_a o ponto médio do lado \overline{BC} . Considere a mediana e a mediatriz relativas ao lado \overline{BC} . Os triângulos GHA e GOM_a são semelhantes pelo caso LAL de semelhança, pois, $\overline{GH} = 2\overline{GO}$ (por construção) os ângulos $\hat{A}GH = \hat{M}_aGO$ (opostos pelo vértice) e $\overline{AG} = 2\overline{GM}_a$ (propriedade do baricentro). Logo, os ângulos $\hat{A}HG = \hat{M}_aOG$. Portanto, as retas contendo \overline{AH} e \overline{OM}_a são paralelas pelo Teorema do Ângulo Interno Alternado. Mas como \overline{OM}_a é perpendicular a \overline{BC} e paralela a \overline{AH} , segue que H pertence à altura de ABC relativa ao lado \overline{BC} . Da mesma forma, mostramos que H pertence à altura de ABC relativa ao lado \overline{AC} .

Como H é a intersecção de duas alturas, então H é o ortocentro de ABC.

□

2.6 A Circunferência de Nove Pontos

Teorema 5 *Existe uma circunferência passando pelos seguintes pontos:*

- os pontos médios dos lados;
- os pés das alturas;
- os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro.

O raio desta circunferência é a metade do raio da circunferência circunscrita.

A história da descoberta desta circunferência é um pouco confusa e está descrita em [2], onde relata que Euler descobriu alguns destes pontos e anos depois Karl Feuerbach² descobriu os pontos restantes.

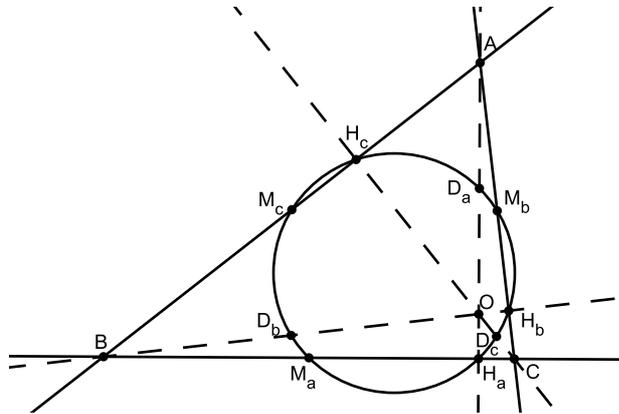


Figura 2.11: Circunferência de nove pontos.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC , com os pontos médio M_a , M_b e M_c , dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Sejam H_a , H_b e H_c os pés das alturas referentes aos vértices A , B e C , respectivamente. Sejam D_a , D_b e D_c os pontos médios dos segmentos \overline{HA} , \overline{HB} e \overline{HC} , onde H é o ortocentro do triângulo.

Pelo Teorema da Base Média do triângulo, temos que $\overline{M_bM_c} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{D_bD_c}$ e $\overline{M_bM_c} = \overline{D_bD_c}$ já que medem a metade do segmento \overline{BC} . Pelo mesmo teorema temos que $\overline{D_bM_c} \parallel \overline{AH} \parallel \overline{M_bD_c}$, como \overline{AH} é perpendicular a \overline{BC} , temos que $D_bM_cM_bD_c$ é um retângulo. De modo análogo mostramos que $M_aM_bD_aD_b$ e $M_aM_cD_aD_c$ também são retângulos, com

²Karl Wilhelm von Feuerbach nasceu em 30 de maio de 1800 e faleceu em 12 de março 1834 foi um geômetra alemão e o filho do famoso jurista Paul Johann Anselm Ritter von Feuerbach, e irmão do filósofo Ludwig Feuerbach com quem é confundido com frequência. Após receber seu doutorado aos 22 anos, tornou-se professor de matemática no Ginásio de Erlangen. Em 1822, ele escreveu um pequeno livro sobre matemática observado principalmente para um teorema sobre o círculo de nove pontos, que agora é conhecido como o teorema de Feuerbach. Em 1827, ele introduziu as coordenadas homogêneas, independentemente de Möbius.

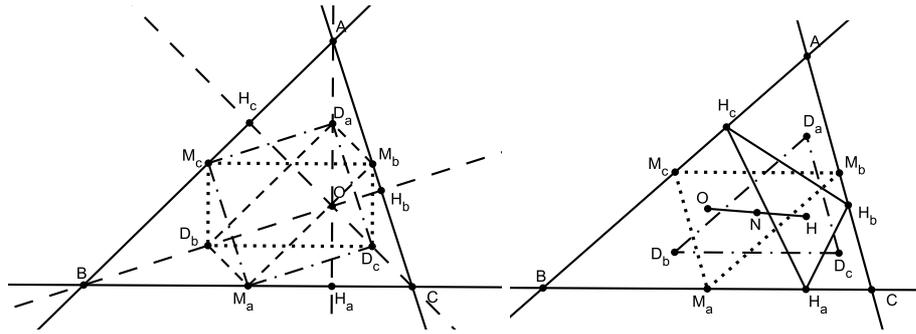


Figura 2.12: Demonstração para a circunferência de nove pontos.

suas diagonais se intersectando no mesmo ponto que chamaremos de N . Deste modo mostramos que os pontos médios dos lados e os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices pertencem a uma circunferência, falta mostrar que os pés das alturas também pertencem a esta circunferência.

Os segmentos $\overline{AH_a}$ é perpendicular ao lado \overline{BC} , já que $\overline{AH_a}$ é a altura relativa a base \overline{BC} . O segmento $\overline{M_a D_a}$ é um diâmetro da circunferência que contém os seis pontos, logo, sendo o triângulo $M_a D_a H_a$ retângulo em H_a e $\overline{M_a D_a}$ um diâmetro da circunferência (pois são vértices opostos de um dos retângulos inscritos citados acima), então H_a também pertence a circunferência. De forma análoga mostra-se que as alturas H_b e H_c também pertencem a circunferência e temos então os nove pontos, como queríamos demonstrar.

Para demonstrar que o raio da circunferência de nove pontos é a metade do raio da circunferência circunscrita usaremos o fato de que a circunferência de nove pontos é circunscrita ao triângulo medial e este semelhante ao triângulo ABC de razão igual a 2, pois, a circunferência de nove pontos passa pelos três pontos médios deste triângulo e o triângulo medial é semelhante ao triângulo ABC pelo caso LLL, verificamos este fato utilizando o teorema da base média já que cada lado do triângulo medial é a metade do seu lado paralelo, logo podemos concluir que o raio da circunferência de nove pontos é a metade do raio da circunferência circunscrita.

□

Corolário 1 *O centro da circunferência de nove pontos está localizado na reta de Euler, ele é o ponto médio do segmento que liga o ortocentro ao circuncentro, a distância do centro do círculo de nove pontos ao baricentro é a metade da distância do baricentro ao circuncentro e um terço da sua distância ao ortocentro.*

Demonstração:

Para verificar esta afirmação usaremos o fato de que o ortocentro do triângulo ABC é o circuncentro do triângulo medial.

Pelo Teorema do Ângulo Interno Alternado verificamos que as mediatrizes do triângulo ABC são também as alturas do triângulo medial $M_a M_b M_c$ (ver figura [?]) e estas alturas

se intersectam no ortocentro O .

O ortocentro do triângulo ABC também é ortocentro do triângulo $D_aD_bD_c$ pois a altura $\overline{AH_a}$ passa por D_a , pois, D_a é o ponto médio de \overline{AH} e como $\overline{D_bD_c} \parallel \overline{BC}$ então $\overline{O_aH}$ é perpendicular a $\overline{D_bD_c}$ de forma análoga mostramos as demais alturas do triângulo ABC também são alturas de $D_aD_bD_c$ e se encontram em H .

Como os pontos D_a, D_b e D_c são diametralmente opostos aos pontos M_a, M_b e M_c respectivamente, cada um dos triângulos (Triângulos formados pelas medianas e pelos pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices) podem ser obtidos do outro por uma rotação de 180° em torno do centro da circunferência de nove pontos. Sendo O a altura do triângulo $M_aM_bM_c$ e H a altura de $D_aD_bD_c$ então esta rotação permutam H e O . Daí, o centro do círculo dos nove pontos é o ponto médio de \overline{HO} .

Desta forma temos que $\overline{ON} = \overline{NH}$ sendo N o centro da circunferência de nove pontos, da reta de Euler vimos que $2 \cdot \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{GN} + \overline{NH} = \overline{GN} + \overline{ON} = \overline{GN} + \overline{GN} + \overline{OG} \Rightarrow \overline{OG} = 2 \cdot \overline{GN}$. Temos também que $\overline{NH} = \overline{ON} = \overline{OG} + \overline{GN} = 2 \cdot \overline{NG} + \overline{GN} = 3 \cdot \overline{GN} \Rightarrow \overline{NH} = 3 \cdot \overline{GN}$ podemos concluir que

$$\overline{GN} = \frac{1}{2}\overline{OG} = \frac{1}{3}\overline{NH}$$

□

2.7 Os pontos de Feuerbach

Em 1822, Feuerbach comprovou ainda que:

Proposição 2.10 *A circunferência dos nove pontos (designada também por circunferência de Euler ou de Feuerbach) é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências ex-inscritas ao triângulo.*

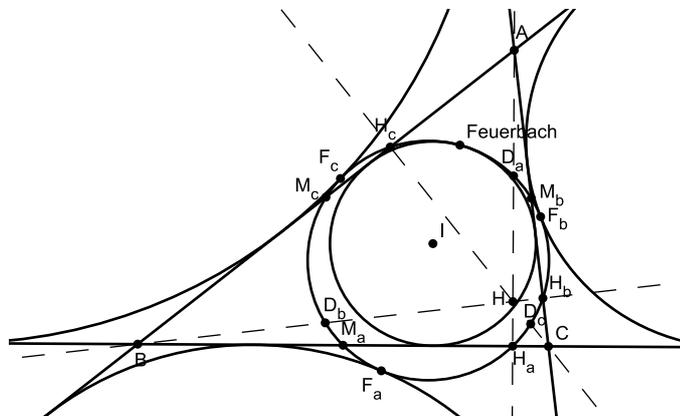


Figura 2.13: Pontos de feuerbach.

Definição 5 Os pontos de interseção da circunferência de nove pontos e as circunferências inscrita e ex-inscritas são chamados de pontos de Feuerbach (F).

A demonstração da proposição anterior é encontrada na referência [2]. Por envolver conhecimentos matemáticos que foge ao objetivo deste trabalho, não apresentaremos a demonstração nesta dissertação.

2.8 Ponto de Lemoine (ou ponto simediano)

3

Definição 6 a) Duas semi-retas $\overline{AM_a}$ e $\overline{AS_a}$ com origem no vértice A de um ângulo \hat{A} são ditas isogonais se a bissetriz do ângulo \hat{A} também é bissetriz do ângulo $S_a\hat{A}M_a$. Chamaremos $\overline{AM_a}$ e $\overline{AS_a}$ de retas simétricas em relação a bissetriz (ver Figura 2.14);

b) O ponto encontrado pela interseção das retas isogonais é chamado de ponto isogonal;

c) As isogonais das medianas de um triângulo são chamadas de simedianas (simétrico + mediana) e o ponto de encontro das retas isogonais de ponto isogonal.

Proposição 2.11 As três simedianas interceptam-se no mesmo ponto, chamado “ponto de Lemoine” que designaremos por K .

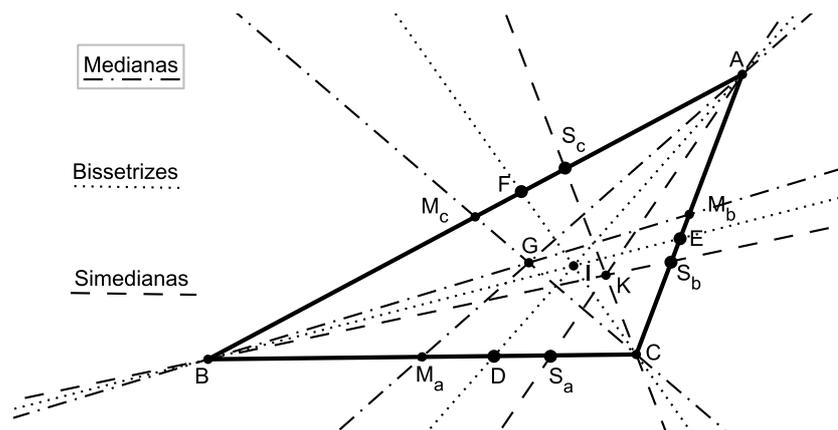


Figura 2.14: Ponto de Lemoine.

Demonstração:

A demonstração da existência do ponto de Lemoine é apresentada em [2] da seguinte forma.

³Émile Michel Hyacinthe Lemoine nasceu em Quimper em 22 de Novembro de 1840 e faleceu em Paris em 21 de Fevereiro de 1912 foi um engenheiro civil, matemático e geômetra francês.

Sejam \overline{AD} a bissetriz de \hat{A} , $\overline{AM_a}$ a mediana relativa ao vértice A e $\overline{AS_a}$ a simediana correspondente.

Vamos calcular a área dos triângulo ACM_a e ABS_a de duas formas diferentes, a saber, $2S = a \cdot b \operatorname{sen} C = \overline{AB} \cdot H_c$. Assim, Como $C\hat{A}M_a = B\hat{A}S_a$, temos

$$(ACM_a) = \frac{1}{2} \overline{CM_a} \cdot H_a = \overline{CA} \cdot \overline{AM_a} \cdot \operatorname{sen} C\hat{A}M_a$$

$$(ABS_a) = \frac{1}{2} \overline{BS_a} \cdot H_a = \overline{AB} \cdot \overline{AS_a} \cdot \operatorname{sen} B\hat{A}S_a;$$

$$(ABM_a) = \frac{1}{2} \overline{BM_a} \cdot H_a = \overline{AB} \cdot \overline{AM_a} \cdot \operatorname{sen} B\hat{A}M_a;$$

e

$$(ACS_a) = \frac{1}{2} \overline{CS_a} \cdot H_a = \overline{AC} \cdot \overline{AS_a} \cdot \operatorname{sen} C\hat{A}S_a.$$

O que implica em

$$\frac{(ACM_a)}{(ABS_a)} = \frac{\overline{CM_a}}{\overline{BS_a}} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{AM_a}}{\overline{AB} \cdot \overline{AS_a}}$$

e

$$\frac{(ABM_a)}{(ACS_a)} = \frac{\overline{BM_a}}{\overline{CS_a}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AM_a}}{\overline{AC} \cdot \overline{AS_a}}.$$

Dividindo a primeira pela segunda, obtemos

$$\frac{\overline{CM_a}}{\overline{BS_a}} \cdot \frac{\overline{CS_a}}{\overline{BM_a}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

mas como $CM_a = BM_a$, obtemos

$$\frac{\overline{CS_a}}{\overline{BS_a}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\frac{\overline{BS_c}}{\overline{AS_c}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} \quad e \quad \frac{\overline{AS_b}}{\overline{CS_b}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{CS_a}}{\overline{BS_a}} \cdot \frac{\overline{BS_c}}{\overline{AS_c}} \cdot \frac{\overline{AS_b}}{\overline{CS_b}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \cdot \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} \cdot \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva concluímos que as simedianas se intercectam no mesmo ponto chamado de ponto de Lemoine.

□

O ponto de Lemoine pode ser obtido também pela interseção de três retas definidas pelos pontos médios dos lados de um triângulo e pelos pontos médios das alturas correspondentes(ver figura 2.15).

Listamos a seguir algumas propriedades do Ponto de Lemoine cujas demonstrações podem ser encontradas em [3].

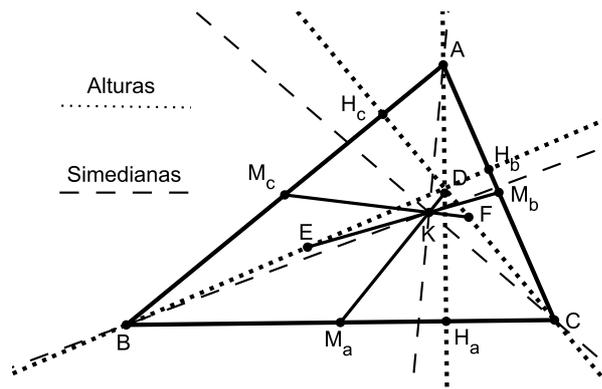


Figura 2.15: Ponto de Lemoine obtido pela intersecção dos segmentos que liga o ponto médio de um lado com o ponto médio da altura relativa a este mesmo lado.

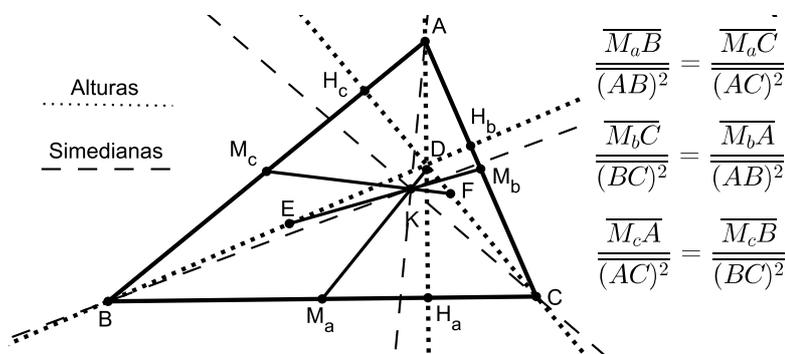


Figura 2.16: divisão de cada lado do triângulo em partes proporcionais aos quadrados dos outros dois lados.

Propriedade 1 *As três cevianas que concorrem em K dividem cada lado do triângulo em partes proporcionais aos quadrados dos outros dois lados.*

Propriedade 2 *A soma dos quadrados das distâncias de K aos lados do triângulo é o mínimo.*

Propriedade 3 *O lugar dos pontos para os quais é constante a soma dos quadrados das distâncias aos lados do triângulo é uma elipse de centro K.*

Propriedade 4 *As distâncias de K aos lados são proporcionais aos comprimentos dos lados (ver figura 2.18).*

Propriedade 5 *As projeções ortogonais de K sobre os lados são vértices de um triângulo $A'B'C'$ cujo baricentro é K (ver figura 2.19).*

Propriedade 6 *$A'B'C'$ é o triângulo inscrito em ABC cuja soma dos quadrados dos lados é mínima (ver Figura 2.19).*

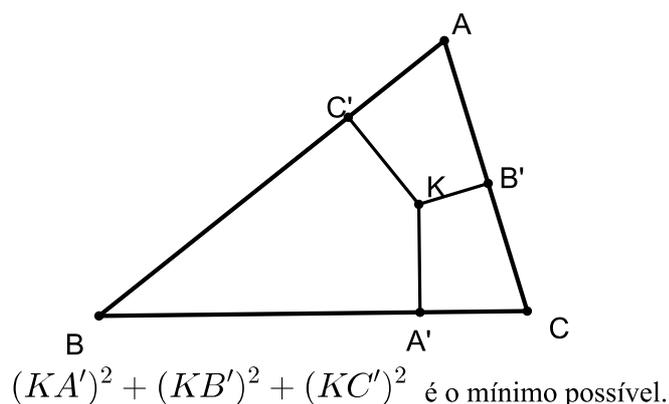


Figura 2.17: menor soma dos quadrados das distâncias de K aos lados do triângulo.

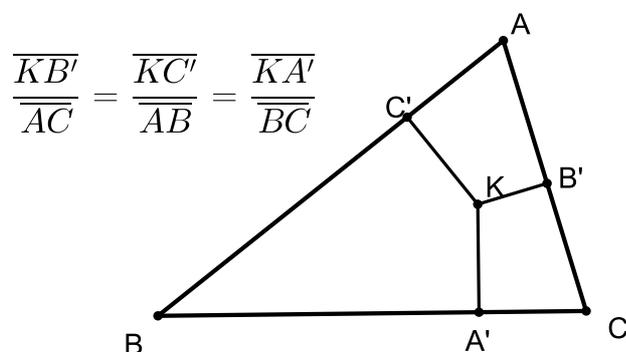


Figura 2.18: Distâncias proporcionais de K aos lados e o lado correspondente.

Propriedade 7 *Sobre os lados de um triângulo, e externamente, construímos três quadrados. As retas a que pertencem os lados do quadrado paralelos aos lados do triângulo formam um triângulo $A'B'C'$. As retas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ intersectam-se em K (ver Figura 2.20).*

2.9 Pontos de Gergonne

Proposição 2.12 *As cevianas que unem cada vértice de um triângulo ABC ao ponto de contato do círculo inscrito com o lado oposto intersectam-se no mesmo ponto chamado de “ponto de Gergonne⁴” (ver Figura 2.21).*

Na demonstração da existência do ponto de Gergonne usaremos o Teorema de Ceva.
Demonstração:

⁴Joseph Diaz Gergonne foi um matemático e lógico francês, nasceu em 19 de junho de 1771 na cidade de Nancy e faleceu em 04 de maio de 1859 em Montpellier, França

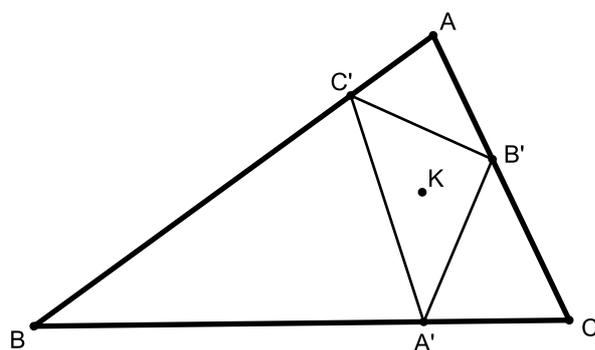


Figura 2.19: Triângulo inscrito em ABC cuja soma dos quadrados dos lados é mínima.

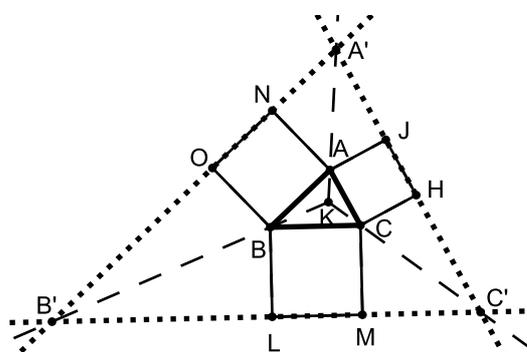


Figura 2.20: Triângulo obtido pelas retas que passam pelos vértices do quadrado construído nos lados do triângulo ABC.

Como a bissetriz é o conjunto de pontos que equidista dos dois segmentos que formam o ângulo e o centro da circunferência inscrita é o incentro, temos que

$$\overline{AE} = \overline{AF}, \overline{BF} = \overline{BD} \quad e \quad \overline{CE} = \overline{CD}.$$

Para a demonstração basta substituir \overline{AF} por \overline{AE} , \overline{BD} por \overline{BF} e \overline{CD} por \overline{CE} , que logo verificamos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{AE}} = 1.$$

Daí

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} = 1.$$

Logo, as três cevianas que ligam os vértices ao ponto de tangência da circunferência se interceptam em um ponto chamado de ponto de Gergonne.

□

É possível definir pontos de Gergonne relativamente a cada um dos três ex-incírculos (circunferências ex-inscritas) (ver Figura 2.22).

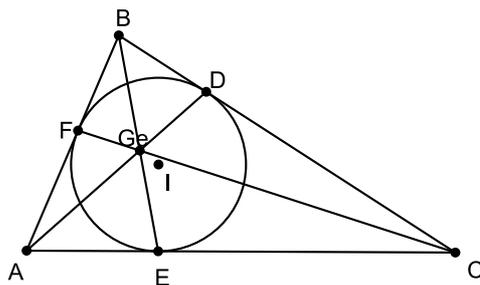


Figura 2.21: Ponto de Gergonne.

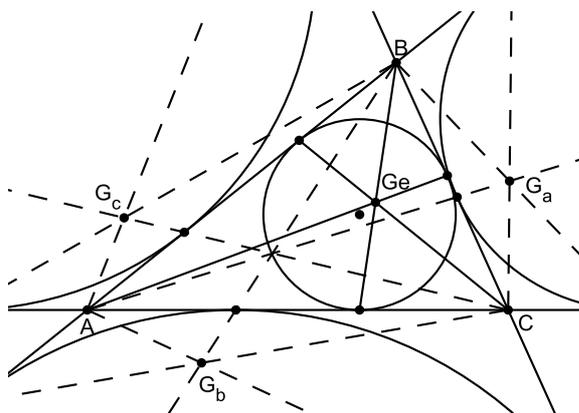


Figura 2.22: Pontos de Gergonne das circunferências ex-inscritas.

2.10 Ponto de Nagel

Proposição 2.13 *As cevianas que unem cada vértice de um triângulo ABC ao ponto de contato de cada círculo ex-inscrito com o lado oposto, intersectam-se no mesmo ponto chamado de ponto de Nagel⁵ (ver Figura 2.23).*

A demonstração da existência do ponto de Nagel é apresentada em [2] da seguinte forma.

Demonstração:

Vamos utilizar a figura a 2.23.

Como \overline{AT} e \overline{AU} são duas tangentes ao círculo Γ_a , então $\overline{AT} = \overline{AU}$.

Da mesma forma, $\overline{CX} = \overline{CT}$ e $\overline{BX} = \overline{BU}$. Assim, $\overline{AC} + \overline{CX} = \overline{AB} + \overline{BX} = p$, onde p é o semiperímetro de ABC . Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então

$$b + \overline{CX} = c + \overline{BX} = p \implies \overline{CX} = p - b$$

e

$$\overline{BX} = p - c.$$

⁵Ernest Nagel foi um filósofo cientista, nasceu em Vágújhely, Áustria-Hungria em 16 de novembro de 1901 e faleceu em New York em 20 de setembro de 1985

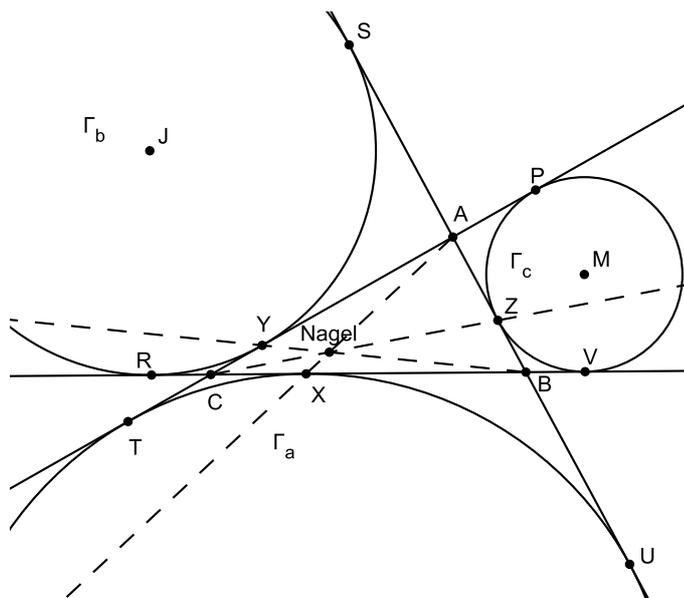


Figura 2.23: Ponto de Nagel.

Analogamente, obtemos

$$\overline{AY} = p - c;$$

$$\overline{CY} = p - a;$$

$$\overline{AZ} = p - b;$$

$$\overline{BZ} = p - a.$$

Logo,

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{CY}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} = \frac{p - c}{p - a} \cdot \frac{p - b}{p - c} \cdot \frac{p - a}{p - b} = 1.$$

□

À semelhança do que aconteceu com os pontos de Gergonne, também consideramos mais três pontos de Nagel (ver Figura 2.24).

O ponto de Nagel de um triângulo ABC está sobre a reta definida pelo seu incentro e baricentro. E mais: $\overline{NG} = 2\overline{IG}$ (ver Figura 2.25).

2.11 Ponto de Spieker

Proposição 2.14 *Construa o triângulo $M_aM_bM_c$ cujos vértices são os pontos médios do triângulo dado ABC. O ponto Sk de Spieker⁶ é o ponto de intersecção das três bissetrizes internas do triângulo $M_aM_bM_c$.*

⁶Theodor Spieker foi um matemático alemão, professor em uma academia em Potsdam nasceu em 1823 e faleceu em 1913.

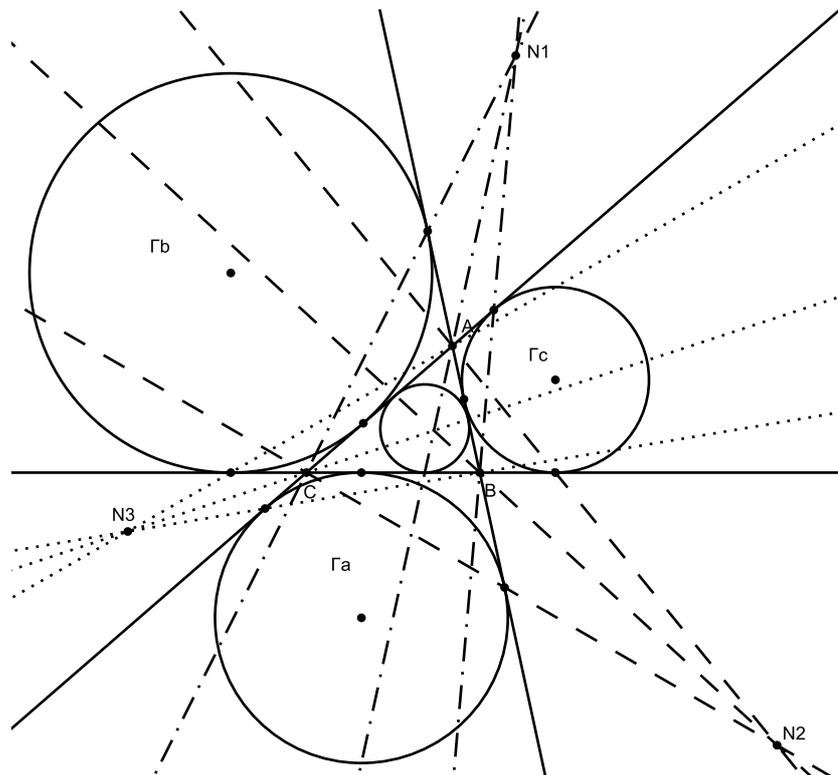


Figura 2.24: Pontos de Nagel.

A existência do ponto de Spieker é óbvia, uma vez que já sabemos que as três bissetrizes se encontram em um único ponto.

Tracemos as circunferências ex-inscritas no triângulo ABC . Sejam E_a, E_b, E_c os seus centros. Estes três pontos definem uma circunferência. Esta circunferência define, com cada uma das ex-inscritas dois pontos de intersecção e cada par de pontos uma reta; vamos designá-los por $M'_a M'_b, M'_b M'_c, M'_a M'_c$. O triângulo formado por estes segmentos é homotético do triângulo ABC e ao triângulo medial de ABC (pois o triângulo medial e o triângulo ABC são semelhantes) e o centro de homotetia é o ponto de Spiecker (ver figura 2.27).

2.12 Pontos de Fermat ou pontos isogônicos

2.12.1 Primeiro ponto de Fermat

Proposição 2.15 *Construa três triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo ABC (ver figura 2.28). Os três segmentos $\overline{CG}, \overline{BE}$ e \overline{AD} se intersectam em um único ponto.*

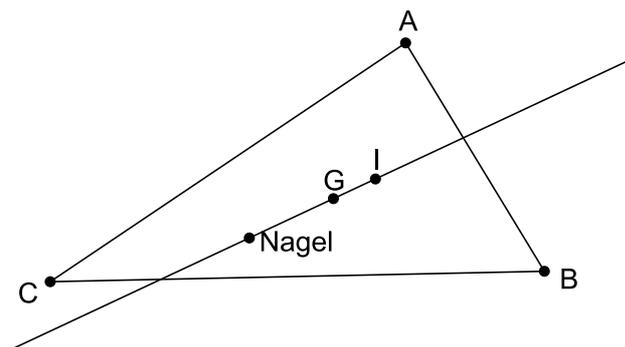


Figura 2.25: Alinhamento do ponto de Nagel com o Baricentro e o Incentro.

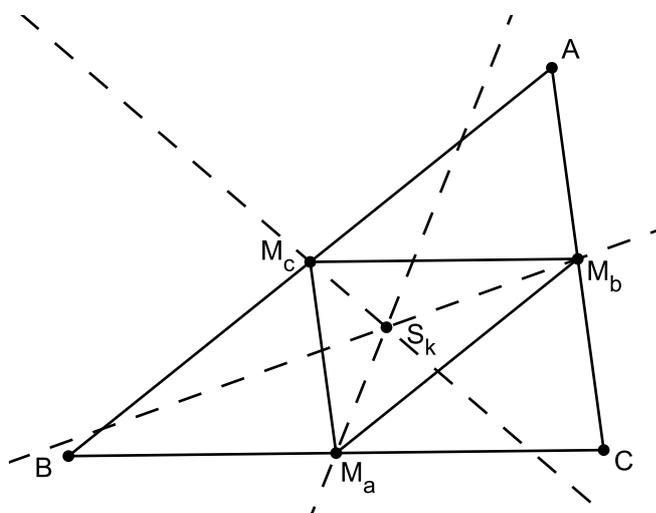


Figura 2.26: Ponto de Spieker.

O ponto de intersecção “F” destes três segmentos é conhecido como primeiro ponto de Fermat⁷. Este ponto é conhecido também como ponto de Torricelli⁸, ponto de Viviane, primeiro ponto isogónico ou juntamente com o segundo ponto de Fermat que será visto mais adiante de pontos gêmeos.

Encontramos a demonstração da existência do ponto de Fermat em [2] da seguinte forma:

Demonstração:

Construa triângulos equiláteros exteriormente sobre os lados do triângulo ABC. Seja F o ponto de intersecção de \overline{AD} e \overline{BE} . Note que \overline{AD} é \overline{CG} rotacionado 60° no sentido horário sobre B (pois \overline{BC} se torna \overline{BD} e \overline{BG} se torna \overline{BA} na rotação) e \overline{BE} é \overline{CG} rotacionado 60° no sentido anti-horário sobre A. Segue que $\widehat{AFE} = 60^\circ$. Seja X o ponto em \overline{BE} tal que o triângulo AFX seja equilátero. Agora, se \overline{BE} é rotacionado 60° sobre A no sentido

⁷Pierre de Fermat foi um matemático e cientista francês, nasceu em Beaumont de Lomagne na primeira década do século XVII e faleceu em Castres em 12 de Janeiro de 1665.

⁸Evangelista Torricelli foi um físico e matemático italiano, nasceu em Faenza em 15 de outubro de 1608 e faleceu em Florença em 25 de outubro de 1647.

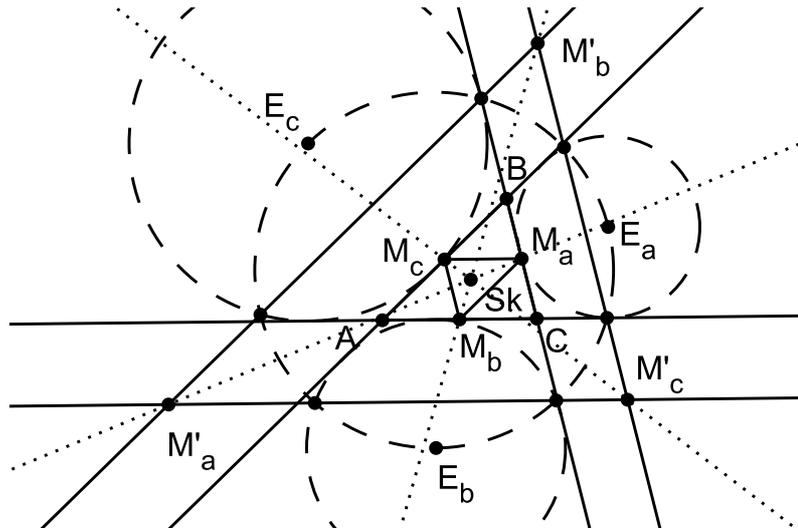


Figura 2.27: Propriedade do ponto de Spieker.

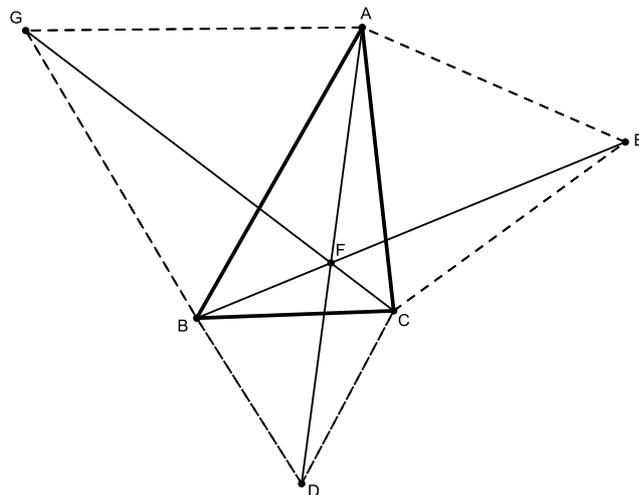


Figura 2.28: Ponto de Fermat.

horário, então X vai para F , E vai para C , e B vai para G . Daí, F , C e G são colineares. Logo, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes e quaisquer duas destas retas fazem ângulo de 120° .

□

O fato de ser conhecido também como ponto de Torricelli ou ponto de Viviane, se deve ao desafio proposto por Fermat a Torricelli de encontrar um ponto de tal forma que a soma das suas distâncias aos três vértices do triângulo fosse à mínima possível. Torricelli encontrou o ponto de um modo um pouco diferente do utilizado por Fermat, ele descobriu que este ponto é também a intersecção dos círculos circunscritos aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo ABC , já Viviane era aluna de Torricelli e publicou o resultado do desafio anos depois.

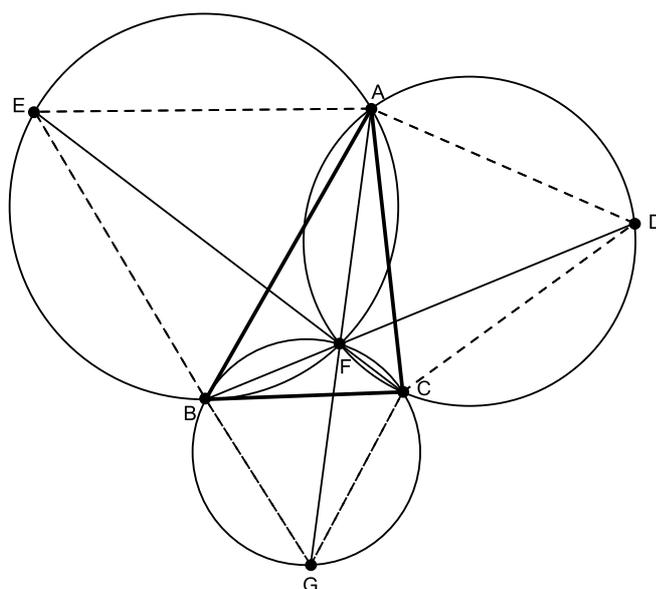


Figura 2.29: Ponto de Fermat obtido pela intersecção das circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados.

Se o triângulo possuir um ângulo maior que 120° , o encontro das três retas que possui os segmentos que unem os vértices livres dos triângulos equiláteros ao vértice oposto ao segmento em que este triângulo equilátero foi construído, ocorrerá fora do triângulo e o ponto de Fermat passa a ser o vértice deste ângulo maior que 120° . Se o triângulo possuir um ângulo de exatamente 120° , o vértice deste ângulo coincidirá com o primeiro ponto de Fermat.

A principal propriedade deste ponto é aquela que já foi citada acima, ou seja, é o ponto cuja soma das distâncias aos vértices do triângulo ABC é a menor possível. Nesta construção temos ainda a propriedade que os segmentos \overline{BD} , \overline{CE} e \overline{AG} são congruentes.

2.12.2 Segundo ponto de Fermat

Alguns matemáticos não gostam de denominar este ponto, de segundo ponto de Fermat, eles dizem que este ponto na verdade é o “ponto negativo” do primeiro (determinam de negativo pelo fato dos triângulos serem construídos internamente). Para encontrar este ponto construímos três triângulos equiláteros, desta vez internos, sobre cada um dos lados de um triângulo ABC , e traçamos as retas que ligam os vértices livres aos vértices opostos ao lado que foi construído o triângulo equilátero, da mesma forma que foi feito para encontrar o primeiro ponto de Fermat. Estas retas também se intercectam no mesmo ponto F' . Este ponto é o segundo ponto de Fermat ou ponto negativo de Fermat.

Este ponto tem a propriedade de que os segmentos $\overline{BD} = \overline{CG} = \overline{AE}$. Assim como o primeiro ponto de Fermat, este ponto também pode ser encontrado pela intersecção dos

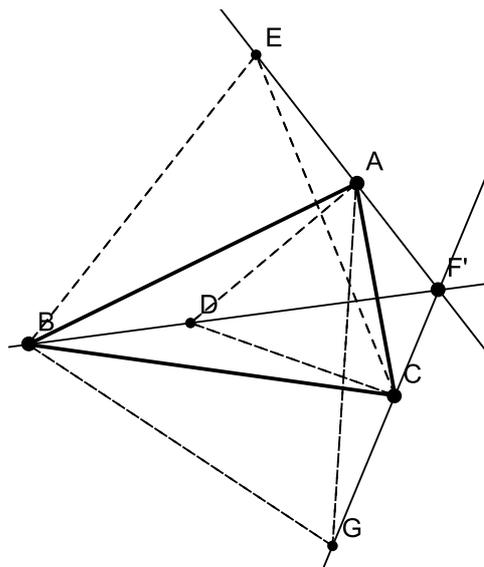


Figura 2.30: Segundo Ponto de Fermat.

círculos circunscritos aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo ABC (ver figura 2.31).

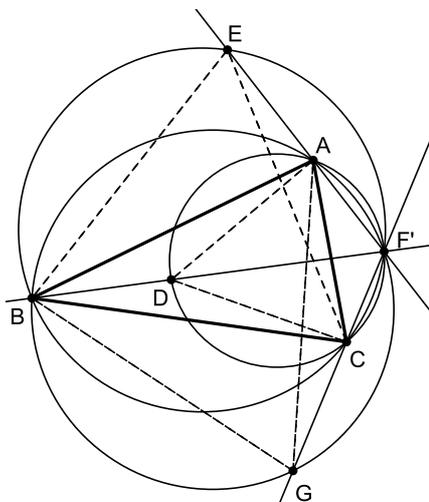


Figura 2.31: Segundo Ponto de Fermat obtido pela intersecção das circunferências circunscritas aos triângulos equilátero construídos sobre os lados.

Capítulo 3

Conclusão

Existem diversas formas de se trabalhar com pontos notáveis no ensino básico, e seu ensino deve ser incentivado desde as primeiras séries do ensino fundamental 2 (6º ao 9º ano), pelo menos com os pontos mais conhecidos, pois, todos os pontos possuem aplicações, alguns mais do que outros, mas podemos encontrá-las, uma disciplina que ajudaria neste trabalho seria a disciplina de física que estuda diversas aplicações de conteúdos de matemática no dia-a-dia.

Uma forma de introduzir o conteúdo e despertar a curiosidade dos alunos seria pedir que confeccionassem um triângulo de um mesmo material, uma cartolina dura seria um bom material, mandar os alunos fazerem um único furo neste triângulo e amarrar um barbante de modo que o triângulo fique em equilíbrio, o resultado esperado é que poucos ou ninguém consiga, após esta tentativa o professor explicaria o conceito de baricentro e como o encontramos através da intersecção das medianas e pediria que encontrassem em outro triângulo utilizando o baricentro de modo a equilibrar o triângulo, desta vez espera-se que todos coloquem o triângulo em equilíbrio.

Um exemplo de aplicação dos pontos notáveis menos conhecidos seria se tivémos em uma praça três locais formando um triângulo como uma quadra de esportes, um parque e um centro de artesanato e quisémos construir uma lanchonete de modo que a soma das distâncias até estes locais seja a menor possível, bastaria utilizar o ponto de Fermat para encontrar o local procurado, assim como este exemplo poderíamos ter cidades formando triângulos ou um professor trabalha em uma escola da área rural e esta foi construída de forma que ficasse próxima de três povoados, mais uma vez poderíamos utilizar o ponto de Fermat se quiséssemos a menor soma das distâncias ou o circuncentro se quiséssemos que ela se encontrasse a uma mesma distância das três localidades.

No ensino básico devemos apresentar os quatro pontos mais conhecidos e mais alguns além destes e incentivar o interesse em conhecer outros pontos.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. - 4ª Ed. - SBM, 1995.
- [2] COXETER, H. S. M. *Geometry Revisited*.
- [3] CUT THE KNOT, *Cut The Knot*. Disponível em: <http://www.cut-the-knot.org/proofs/index.shtml>. Acesso em: 15/03/2013.
- [4] DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos da matemática elementar 9: Geometria plana* - 8.ed. - São Paulo: Atual, 2005.
- [5] KIMBERLING, Clark. *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*. Disponível em: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em: 06/03/2013.
- [6] UFF, Universidade Federal Fluminense. *Site do Departamento de Matemática*. Disponível em: <http://www.uff.br/trianglecenters/etcwc.html>. Acesso em: 06/03/2013