UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Redução de um Ideal

Maxwell da Paixão de Jesus Santos
Orientador: André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão, 2018.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Redução de um Ideal

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maxwell da Paixão de Jesus Santos

Orientador: André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão, 2018.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Redução de um Ideal

por

Maxwell da Paixão de Jesus Santos

Aprovada pela banca examinadora:

André Vinicius Santos Dória

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Orientador

Danilo Dias da Silva

Prof. Dr. Danilo Dias da Silva - UFS
Primeiro Examinador

Ricardo Burity Croccia Macedo

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 22 de Fevereiro de 2018

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237r

Santos, Maxwell da Paixão de Jesus
Redução de um ideal / Maxwell da Paixão de Jesus Santos ; orientador André Vinicius Santos Dória. – São Cristóvão, 2018.
76 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Ideais (Álgebra). 4. Polinômios. I. Dória, André Vinicius Santos, orient. II. Título.

CDU: 512

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a toda minha família em especial as minhas avós Dona Zefinha e Dona Ló. Agradeço ao professor Matheus Allegri por acreditar no meu potencial e me incentivar a fazer o mestrado. Deixo meu muito obrigado ao professor André Vinicius por aceitar a difícil tarefa de me orientar. Aos demais professores do PROMAT fica meus sinceros agradecimentos, em especial à Lucas Valeriano, Maria de Andrade, Zaqueu Ramos e Danilo Dias. Por fim, agradeço ao meu parceiro de estudo no mestrado Júnio Teles e minhas quase-amigas Daniele Aparecida e Maria Elismara.

SEE YOU SPACE COWBOY...

Resumo

Neste trabalho, sob a luz da álgebra comutativa, estudaremos reduções de um ideal, tal conceito foi introduzido por Northcott e Rees. Em um primeiro momento, daremos noções preliminares sobre teoria de dimensão, polinômio de Hilbert, polinômio de Hilbert-Samuel, regularidade de módulos e elementos superficiais. Na sequência discutiremos o tema principal da dissertação, no qual falaremos de fecho integral de um ideal, redução e a álgebra de Rees, além disso, estabeleceremos conexões entre esses conceitos. Por fim, discutiremos algumas aplicações na teoria de multiplicidade e polinômio de Hilbert-Samuel, no qual será apresentado alguns resultados recentes.

Palavras Chave: Polinômio de Hilbert-Samuel, Fecho Integral, Redução de um Ideal, Álgebra de Rees, Reduções minimais.

Abstract

In this work, under the view of commutative algebra, we will study reductions of an ideal, the concept was introduced by Northcott and Rees. First of all, we will give preliminary notions about dimension theory, Hilbert's polynomial, Hilbert-Samuel's polynomial, regularity of modules and superficial elements. Next we will discuss the main theme of this dissertation, where we will talk about integral closure of ideal, reduction and the Rees algebra, moreover, we will establish connections between these concepts. Finally, we will discuss some applications in Hilbert-Samuel's polynomial and multiplicity theory, in which some recent results will be presented.

Keywords: Hilbert-Samuel's polynomial, integral closure, reduction of an ideal, Rees algebra, minimal redution.

Lista de símbolos

Símbolo	**Descrição**
$\lambda_R(M)$	Comprimento do R-módulo M.
$\dim_k V$	Dimensão do k-espaço vetorial V.
$\dim M$	Dimensão de Krull do R-módulo M.
$\mathrm{ht}(I)$	Altura do ideal I.
$\mathrm{Spec}\, R$	Conjunto dos ideais primos do anel R.
$\mathrm{Specm}\, R$	Conjunto dos ideais maximais do anel R.
$V(I)$	Conjunto dos ideais primos do anel R contendo o ideal I.
$\mathrm{frac}(D)$	O corpo de frações do domínio D.
$\kappa(P)$	$\mathrm{frac}(R/P)$, no qual $P \in \mathrm{Spec}\, R$.
$\mathrm{gr.tr}_R(S)$	O grau de transcendência de $R \subseteq S$.
R_{red}	O anel reduzido $R/\sqrt{(0)}$.
$\mu(I)$	Número mínimo de geradores do ideal I.

Sumário

Introdução

Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel R, J é dito ser redução de I sempre que $I^{n+1} = JI^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se J não contém propriamente nenhuma redução de I, então é dito que J é uma redução minimal de I, nesse caso definimos $r_J(I)$ como sendo o menor n em que $I^{n+1} = JI^n$. O número de redução global de I é dito como sendo o ínfimo dos $r_J(I)$, para todo J redução minimal de I. Dito isso, nos perguntamos quais condições são necessárias para $r(I)$ existir. O conceito de reduções foi inicialmente apresentado em [11] por Northcott e Rees, nesse mesmo artigo eles provaram que no caso em que R é local noetheriano, reduções minimais irão existir, e consequentemente $r(I)$ também.

O objetivo deste trabalho será estudar as propriedades das reduções minimais. Buscaremos condições para que possamos estabelecer conexões com outras teorias da álgebra comutativa, dentre elas: álgebra de Rees, fecho integral e polinômio de Hilbert-Samuel.

No Capítulo 1 discutiremos resultados preliminares. Inicialmente, definiremos polinômio de Hilbert-Samuel de um ideal relacionado a um módulo, com o objetivo de provar que o grau do polinômio será igual a dimensão do módulo. Na sequência daremos ênfase aos módulos Cohen-Macaulay, para isso apresentaremos as noções de sequência regular e do invariante *grade*. Por fim, faremos uma breve introdução de elementos superficiais, tendo em vista o estudo da Seção 2.5.

Estudaremos redução de um ideal no capítulo 2. Para entrar no tema principal deste trabalho, precisaremos antes desenvolver a teoria de fecho integral para ideais, no qual apresentaremos alguns resultados para que possamos relacionar esses dois conceitos. Dado um ideal podemos definir sua álgebra de Rees e se o anel for local definiremos também sua fibra especial. Nesse mesmo capítulo introduziremos o conceito reduções minimais de um ideal.

No capítulo central, veremos que os melhores anéis para o estudo de reduções minimais são do tipo $(R, \mathfrak{m})$ local noetheriano, com corpo residual infinito. Mostraremos que se I é ideal de R e J redução minimal de I, então a dimensão da fibra especial de I é igual ao número minimal de geradores de J. Provaremos na Seção 2.5 que nesse caso J é gerado por uma sequência superficial.

Por fim, exibiremos algumas aplicações de reduções minimais no estudo do polinômio de Hilbert-Samuel. Para isso o anel além de ser local noetheriano com corpo residual infinito, deverá ser Cohen-Macaulay. Finalizaremos nosso trabalho apresentando os resultado de Valla [16] e Mafi-Naderi [9].

Capítulo 1

Preliminares

Durante este trabalho assumiremos que todos os anéis são comutativos com unidade. Será pré-requisito do leitor, um conhecimento básico em Álgebra Comutativa, tais como módulos graduados, localização, produto tensorial, módulos noetherianos, topologia de Zariski, dentre outros. Alguns resultados constantemente usados nessa dissertação como Lema de Nakayama (global, local e homogêneo), Princípio Global-Local, *Prime Avoidance* (e suas variações), Teorema das desigualdades das dimensões, Teorema da Normalização de Noether (e sua versão graduada) e outros, podem ser encontrados em Atiyah [2], Eisenbud [5] e Borges [3].

Nesse primeiro capítulo introduziremos a noção de anéis Cohen-Macaulay, polinômio de Hilbert e elementos superficiais. As Seções 1.1 e 1.2 deste capítulo são essenciais para o desenvolvimento do Capítulo 3, já a seção 1.3 será aplicada no Capítulo 2.

1.1 Teoria da Dimensão

Neste primeiro momento estaremos dando enfoque a teoria de dimensão de módulos. O conceito de dimensão na geometria surge de forma natural, porém na álgebra comutativa não foi tão intuitivo tratar de dimensão de módulo, visto que vários matemáticos, ao longo da história, apresentaram suas definições de dimensão. Na década de 30, Wolfgang Krull, sugeriu uma dimensão que baseava-se em comprimento de cadeia de primos. Esse conceito é um dos mais importantes invariantes da álgebra comutativa e foi batizado como dimensão de Krull de um módulo, e é aceito até hoje como a versão definitiva para dimensão de anéis e módulos.

Para desenvolver a teoria precisaremos tratar dos polinômios de Hilbert e Hilbert-Samuel. Ao fim dessa seção apresentaremos o Teorema da dimensão de Krull, que é nosso objetivo principal.

1.1.1 Polinômio de Hilbert

A função de Hilbert tem sido objeto de estudo de vários matemáticos nos últimos 100 anos, trazendo grandes avanços, tanto para Álgebra Comutativa, quanto para Geometria Algébrica. Inicialmente Hilbert (*Über die Theorie der algebraischen Formen - 1890*) mostrou que se I é um ideal homogêneo em $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$, então a aplicação $\dim_{\mathbb{C}}(I_n)$ coincide com um polinômio para n suficientemente grande, no qual I_n é o $\mathbb{C}$-espaço vetorial gerado pelas formas homogêneas de grau n de I.

Inicialmente trataremos de polinômios binomiais, que são construídos a partir de conceitos combinatórios. Também introduziremos a ideia do operador diferença e função tipo-polinomial. Apresentaremos uma noção geral da função de Hilbert para módulos com graduação padrão. Nosso objetivo principal é generalizar a ideia de Hilbert para esse tipo de módulo, ou seja, mostrar que a função de Hilbert é tipo-polinomial.

Definição 1.1.1. *Fixe um $d \in \mathbb{Z}$. Um **polinômio binomial** é um polinômio em $\mathbb{Q}[x]$ da forma,*

$$\binom{x}{d} := \begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-d+1)}{d!}, & se\ d \geq 0; \\ 0, & se\ d < 0. \end{cases}$$

Claramente, se $d \in \mathbb{N}$, então $\binom{x}{d}$ é um polinômio de grau d.

Definição 1.1.2. *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ uma função. Definimos o* **operador diferença** *(ou derivada discreta) por:*

$$\Delta f(n) := f(n+1) - f(n).$$

Recursivamente definimos $\Delta^i f(n) := \Delta^{i-1}[\Delta f(n)]$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$.

Definição 1.1.3. *Uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ é dita ser de* **tipo-polinomial**, *se eventualmente coincide com um polinômio $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, isto é, $f(n) = g(n)$ para todo inteiro n suficientemente grande.*

Note que se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ é tipo-polinomial, então ela concordará com um único polinômio. De fato, sejam $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tais que eventualmente concordam com $f(x)$, então para todo $n >> 0$ teremos $g(n) = h(n)$, ou seja, $g(x) - h(x)$ é o polinômio nulo, logo $g(x) = h(x)$. Dessa forma, definiremos o **grau** de f como sendo o grau do polinômio que eventualmente concordará com f. Convencionaremos que o grau do polinômio nulo é igual a -1.

Lema 1.1.4. *Para todo $d \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$ e $f, g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ teremos:*

(1) $\Delta(cf(n) + g(n)) = c\Delta f(n) + \Delta g(n)$;

(2) Suponha que f seja tipo polinomial. Então, $\Delta f(n) = 0$ para todo $n >> 0$ se, e somente se, f concorda com um polinômio constante para todo n suficientemente grande;

(3) $\Delta\binom{x}{d} = \binom{x}{d-1}$.

Demonstração:

(1) Note que $\Delta(cf(n)+g(n)) = \Delta(cf+g)(n) = (cf+g)(n+1)-(cf+g)(n)$. Rearranjando o último termo da igualdade temos o desejado.

(2) Se $\Delta f(n) = 0$ para todo $n >> 0$, então $f(n+1) = f(n)$ para todo $n >> 0$, suponha n_0 o primeiro n ocorrendo a igualdade, assim basta tomar f igual ao polinômio constante $f(n_0)$, para todo $n >> 0$. A recíproca é trivial.

(3) Defina $f(x) = \binom{x+1}{d} - \binom{x}{d} - \binom{x}{d-1}$, note que, para todo $n \geq d$, temos a identidade combinatória

$$\binom{n+1}{d} = \binom{n}{d} + \binom{n}{d-1},$$

ou seja, $f(n) = 0$ para todo $n >> 0$, implicando que $f(x)$ é um polinômio em $\mathbb{Q}[x]$ anulando-se em uma infinidade de pontos, logo $f(x)$ é o polinômio nulo, o que encerra nossa prova.

$\square$

Proposição 1.1.5. *Seja $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinômio de grau d. Então $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo inteiro $n >> 0$ se, e somente se,*

$$p(x) = a_d\binom{x}{d} + a_{d-1}\binom{x}{d-1} + \ldots + a_0\binom{x}{0},$$

com $a_d \neq 0$ e $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$.

Demonstração: Se $p(x)$ é combinação $\mathbb{Z}$ -linear de polinômios do tipo $\binom{x}{i}$, então para todo $n \geq i$ teremos $\binom{n}{i} \in \mathbb{N}$, logo $p(n) \in \mathbb{Z}$. A outra implicação verificaremos usando indução em d. Se $d = 0$ ou $d = -1$, então existe $c \in \mathbb{Z}$ em que $p(n) = c$ para todo $n >> 0$. Logo temos trivialmente o resultado.

Suponha $d > 0$. Afirmamos que $\{\binom{x}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[x]$. De fato, note que $\binom{x}{0} = 1$, $\binom{x}{1} = x$, $2\binom{x}{2} - \binom{x}{1} = x^2$ e de forma geral se x^k é escrito como combinação $\mathbb{Q}$-linear de $\{\binom{x}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, então note que $\binom{x}{k+1} = x^{k+1}/(k+1)! + \mathcal{O}(k)$, no qual $\mathcal{O}(k)$ são polinômios de grau menores que $k+1$, ou seja, $x^{k+1} = (k+1)!(\binom{x}{k+1} - \mathcal{O}(k))$. Logo por recursão podemos ver que $\{\binom{x}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ gera $\{1, x, x^2, \ldots\}$. Como para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $\binom{x}{i}$ é um polinômio de grau i, então qualquer combinação $\mathbb{Q}$-linear igual a zero, de polinômios em $\{\binom{x}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ com graus dois a dois distintos, será a combinação trivial. Logo provamos nossa afirmação.

Assim

$$p(x) = a_d\binom{x}{d} + a_{d-1}\binom{x}{d-1} + \ldots + a_0\binom{x}{0},$$

com $a_i \in \mathbb{Q}$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Por fim, mostraremos que $a_i \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 1.1.4,

$$\Delta p(x) = a_d\binom{x}{d-1} + a_{d-1}\binom{x}{d-2} + \ldots + a_1\binom{x}{0}.$$

Como $\Delta p(n) = p(n+1) - p(n)$, segue que $\Delta p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n >> 0$. Agora pela hipótese de indução e do fato que $\{\binom{x}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma $\mathbb{Q}$-base teremos $a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$. Além disso, note que

$$a_0 = p(x) - a_d\binom{x}{d} - a_{d-1}\binom{x}{d-1} - \ldots - a_0\binom{x}{1},$$

logo $a_0 \in \mathbb{Z}$. $\square$

Observação 1.1.6. *Seja $f(x) \in \mathbb{Q}[x]\backslash\{0\}$. Se $f(n) \in \mathbb{N}$ para todo $n >> 0$, então o coeficiente líder de f será maior que zero. De fato, se $f(x)$ é constante não há o que fazer, sendo assim suponha $\deg(f(x)) = d > 0$. Escreva $f(x) = b_dx^d + b_{d-1}x^{d-1} + \ldots + b_0$, no qual $b_i \in \mathbb{Q}$ e $b_d \neq 0$. Logo $n^d(b_d + (1/n^d)(b_{d-1}n^{d-1} + \ldots + b_0)) \geq 0$ para todo $n >> 0$, como $n^d \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\frac{b_d}{1} + \frac{b_{d-1}n^{d-1} + \ldots + b_0}{n^d} \geq 0$$

para todo $n >> 0$, fazendo $n \to \infty$ temos $b_d > 0$. Note que, pela proposição anterior, f pode ser escrito como combinação $\mathbb{Z}$-linear de $\binom{x}{i}$, com coeficiente líder a_d, mas como $a_d/d! = b_d$, temos $a_d > 0$ também.

Claramente se $f = 0$, então o coeficiente líder de f será zero. Assim podemos dizer que se $f(x) \in \mathbb{Q}$ é tal que $f(n) \in \mathbb{N}$ para todo $n >> 0$, então o coeficiente líder de $f(x)$ é não negativo

Lema 1.1.7. *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função. Então f é de tipo-polinomial de grau d se, e somente se, Δf é de tipo-polinomial de grau $d - 1$.*

Demonstração: Suponha f tipo-polinomial de grau d, sabemos que $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, assim Δf é tipo-polinomial, pois para $n >> 0$ ela coincidirá com a diferença de dois polinômios. Usando a Proposição 1.1.5 e em seguida o Lema 1.1.4 concluímos que o grau de Δf é $d - 1$. Para mostrar a recíproca, usando a proposição anterior obtemos

$$\Delta f(n) = a_d \binom{n}{d-1} + a_{d-1} \binom{n}{d-2} + \ldots + a_1 \binom{n}{0},$$

para todo $n >> 0$. Se definirmos

$$g(n) = a_d \binom{n}{d} + a_{d-1} \binom{n}{d-1} + \ldots + a_1 \binom{n}{1},$$

então $\Delta g(n) = \Delta f(n)$, escrevendo de outra forma $\Delta(f - g)(n) = 0$, para todo $n >> 0$. Pelo Lema 1.1.4, $a_0 = f(n) - g(n)$ é constante para todo n suficientemente grande. Logo $f(n) = g(n) + a_0$, para todo $n >> 0$, encerrando a prova.

□

Note que no lema acima poderíamos tomar $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.8. *Seja $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ um anel graduado e $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ um R-módulo graduado, suponha que M_n possui comprimento finito para todo n. Definimos* **função de Hilbert** *por:*

$$\begin{aligned} h(M, \_) : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \lambda_{R_0}(M_n). \end{aligned}$$

No qual $\lambda_{R_0}(M_n)$ é o comprimento da componente M_n, vista como R_0-módulo.

Exemplo 1.1.9. *Seja k um corpo e $R = k[x_1, \ldots, x_r]$. Defina R_n como sendo a componente graduada de R formada pelos monômios de grau n, tais monômios formam uma k-base de R_n. Daí,*

$$h(R, n) = \dim_k R_n = \binom{n + r - 1}{r - 1}$$

é uma função polinomial de grau $r - 1$.

Proposição 1.1.10. *Seja $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado. Suponha que R_0 é artiniano e R é finitamente gerado como álgebra sobre R_0, onde os geradores pertencem a R_1. Se $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é R-módulo graduado finitamente gerado, então cada componente M_n é finitamente gerada como R_0-módulo.*

Demonstração: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in R_1$ os geradores de R como R_0-álgebra, ou seja, existe um mapa natural sobrejetor

$$\begin{aligned} \varphi : R_0[t_1, t_2, \dots, t_n] &\longrightarrow R \\ f(t_1, t_2, \dots, t_n) &\longmapsto f(a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

que induz uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow R_0[t_1, t_2, \dots, t_n] \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Como R_0 é artiniano, segue que ele também será noetheriano, pelo Teorema da base de Hilbert $R_0[t_1, t_2, \dots, t_n]$ é noetheriano, implicando R ser noetheriano. De forma análoga, como M é finitamente gerado sobre R, segue que existe $k \in \mathbb{N}$ e um morfismo canônico $\psi : R^k \longrightarrow M$ que induz uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker \psi \longrightarrow R^k \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Assim, M é noetheriano, logo para todo $n \geq 0$, M_n é finitamente gerado com R-módulo.

Para cada $n \geq 0$ defina $N_n = \bigoplus_{m \geq n} M_m$, como M é noetheriano, implica que N_n é finitamente gerado sobre R, digamos que por $x_1, x_2, \dots, x_t$. Desde que $N_n = M_n \bigoplus (\bigoplus_{m>n} M_m)$, então para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ podemos escrever $x_i = y_i + z_i$, com $y_i \in M_n$ e $z_i \in \bigoplus_{m>n} M_m$. Mostraremos que $y_1, y_2, \dots, y_t$ geram M_n sobre R_0. Se $y \in M_n$, então $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i x_i$ com $a_i \in R$. De forma análoga, $a_i = b_i + c_i$ com $b_i \in R_0$ e $c_i \in \bigoplus_{j>0} R_j$. Logo

$$y = \sum_{i=1}^{t} (b_i + c_i)(y_i + z_i).$$

Como $b_i z_i, c_i y_i, c_i z_i \in \bigoplus_{m>n} M_m$, segue que $y = \sum_{i=1}^{t} b_i y_i$, o que encerra a nossa prova. □

Corolário 1.1.11. *Supondo as hipóteses do teorema anterior, temos que para todo $n \geq 0$, M_n tem comprimento finito com R_0-módulo.*

Demonstração: Da proposição anterior temos que para todo $n \geq 0$, M_n é um R_0-módulo finitamente gerado, logo existe um $m \in \mathbb{N}$ e uma aplicação sobrejetora $\psi : R_0^m \longrightarrow M_n$ que induz uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker \psi \longrightarrow R_0^m \longrightarrow M_n \longrightarrow 0.$$

Como R_0^m é artiniano, M_n é artiniano e noetheriano, ou seja, $\lambda_{R_0}(M_n) < \infty$.

□

Teorema 1.1.12. *Seja $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado. Suponha que R_0 é artiniano e R é finitamente gerado como álgebra sobre R_0, sendo todos os geradores $a_1, \dots, a_r$ pertencentes a R_1. Se $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é R-módulo graduado finitamente gerado, então sua função de Hilbert é do tipo-polinomial de grau no máximo $r - 1$.*

Demonstração: Pelo Corolário 1.1.11 teremos que, a função de Hilbert está bem definida para M. Verificaremos o teorema por indução sobre r. Se $r = 0$, escolha um conjunto finito de geradores homogêneos de M sobre R. Caso d seja o máximo dos graus desses geradores, então $M_n = 0$ para todo $n > d$, ou seja, $h(M, n) = 0$ para todo $n >> 0$, e como o polinômio nulo foi assumido previamente de grau -1, logo temos o resultado para esse caso.

Suponha $r > 0$. Para todo n defina o produto por a_r como

$$\begin{aligned} p_r : M_n &\longrightarrow M_{n+1} \\ m &\longmapsto a_r m. \end{aligned}$$

Se $K_n = \ker(p_r)$ e $C_n = \text{coker}(p_r)$, então temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{p_r} M_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow 0.$$

Seja $K = \bigoplus_{n\geq 0} K_n$ e $C = \bigoplus_{n\geq 0} C_n$, então K é um submódulo de M e C é um quociente de M. Logo K e C são R-módulos noetherianos graduados. Pelo Corolário 1.1.11, $h(K, n)$ e $h(C, n)$ estão bem definidas. Pela aditividade do comprimento teremos

$$\lambda_{R_0}(K_n) - \lambda_{R_0}(M_n) + \lambda_{R_0}(M_{n+1}) - \lambda_{R_0}(C_n) = 0,$$

escrevendo de outra forma,

$$h(K, n) - h(M, n) + h(M, n + 1) - h(C, n) = 0,$$

ou seja, $\Delta h(M, n) = h(C, n) - h(K, n)$. Note que a_r anula C e K, então podemos tomar S como sendo o subanel de R gerado por $a_1, \ldots, a_{r-1}$ como álgebra sobre R_0. Assim, K e C são S-módulos que atendem as condições de indução, implicando $\Delta h(M, n)$ é uma função tipo-polinomial de grau no máximo $r-2$, e pelo Lema 1.1.7, temos que $h(M, n)$ é uma função tipo-polinomial de grau no máximo $r - 1$. $\square$

1.1.2 Polinômio de Hilbert-Samuel

Em 1951, Pierre Samuel mostrou que, no trabalho de Hilbert, poderíamos substituir $\mathbb{C}$ por qualquer outro anel Artiniano. Ele também provou que, se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário, então $\lambda_R(R/I^n)$ torna-se um polinômio para um n suficientemente grande. Essa aplicação é chamada de polinômio de Hilbert-Samuel. Escrevendo de forma conveniente o polinômio de Hilbert-Samuel, podemos obter informações a respeito da multiplicidade da variedade algébrica, que será discutido na Seção 3.1.

Um dos conceitos mais importantes da álgebra comutativa é o módulo graduado associado, que será apresentado nessa seção.

Definição 1.1.13. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. Um ideal I de R é dito ser $\mathfrak{m}$-primário (ou ideal de definição) se $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$.*

Observação 1.1.14. *A definição acima é equivalente a dizer que R/I é artiniano. De fato, se I é $\mathfrak{m}$-primário, então pelo Teorema da correspondência, o único primo de R/I será $\mathfrak{m}/I$, ou seja, R/I é noetheriano e todos os seus ideais primos são maximais, equivalentemente R/I é artiniano. Por fim, suponha que R/I é artiniano, então todo primo de R/I é maximal, pelo Teorema da correspondência e do fato que R é local, teremos $V(I) = \{\mathfrak{m}\}$, escrito de outra forma, $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$.*

Definição 1.1.15. *Sejam R um anel, I um ideal de R e M um R-módulo. Definimos o anel* **graduado associado** *de R com respeito a I por*

$$gr_I(R) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} I^i/I^{i+1},$$

no qual o produto de $gr_I(R)$ é induzido pela multiplicação $I^i \times I^j \longrightarrow I^{i+j}$. Chamaremos de **ideal irrelevante** *a parte positiva de $gr_I(R)$, denotado por $gr_I(R)^+ := \bigoplus_{i>0} I^i/I^{i+1}$. Se $(R,\mathfrak{m})$ é local noetheriano, definiremos seu* **maximal irrelevante** *por $\mathfrak{M} := \mathfrak{m}/I \oplus gr_I(R)^+$. De forma análoga definimos a partir de M o R-módulo graduado associado*

$$gr_I(M) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} I^iM/I^{i+1}M.$$

Note que podemos definir $gr_I(R)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, basta convencionarmos $I^i = R$ para todo $i \leq 0$. Note que $gr_I(M)$ é um $gr_I(R)$-módulo graduado. E ainda, se I for finitamente gerado, digamos por $a_1,\dots,a_n$, então temos um morfismo $R[x_1,x_2,\dots,x_n] \longrightarrow gr_I(R)$, que é sobrejetor, induzido pela projeção natural $R \longrightarrow R/I$ e a substituição $x_i \mapsto \overline{a_i} \in I/I^2$. Em particular, se R for anel noetheriano, então $gr_I(R)$ também será noetheriano.

Agora suponha que $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano, I é um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R e M um R-módulo finitamente gerado. Então pelo Corolário 1.1.11, $\lambda_{R/I}(I^nM/I^{n+1}M) < \infty$, para todo n, em particular M/IM é um R/I-módulo noetheriano e artiniano. Como I anula $I^nM/I^{n+1}M$, segue que $\lambda_R(I^nM/I^{n+1}M) < \infty$, para todo n. Da sequência exata

$$0 \longrightarrow I^nM/I^{n+1}M \longrightarrow M/I^{n+1}M \longrightarrow M/I^nM \longrightarrow 0$$

e usando indução sobre n (lembrando que $I^n = R$ para todo $n \leq 0$), temos que $\lambda_R(M/I^nM) < \infty$. Com isso podemos definir a função de Hilbert-Samuel.

Definição 1.1.16. *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, I um ideal $\mathfrak{m}$-primário e M um R-módulo finitamente gerado. Definimos a função de Hilbert-Samuel de M com respeito a I por*

$$\begin{aligned} H_{I,M}(\_) : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \lambda_R(M/I^nM). \end{aligned}$$

Teorema 1.1.17. *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, I um ideal $\mathfrak{m}$-primário e M um R-módulo finitamente gerado. Suponha que $\mu(I) = r$, então a função de Hilbert-Samuel é tipo-polinomial de grau no máximo r.*

Demonstração: Suponha que $I = (a_1,\dots,a_r)$, logo $I/I^2 = (\overline{a_1},\dots,\overline{a_r})$, como $gr_I(M)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1.12, implica que

$$h(gr_I(M),n) = \lambda_{R/I}(I^nM/I^{n+1}M) = \lambda_R(I^nM/I^{n+1}M)$$

é tipo polinomial de grau no máximo $r-1$. Da sequência exata

$$0 \longrightarrow I^nM/I^{n+1}M \longrightarrow M/I^{n+1}M \longrightarrow M/I^nM \longrightarrow 0,$$

temos que $\Delta H_{I,M}(n) = h(gr_I(M), n)$, pelo Lema 1.1.7, $H_{I,M}(n)$ é tipo-polinomial de grau no máximo r.

$\square$

Se $R = M$, então escrevemos $H_I(n)$ no lugar de $H_{I,R}(n)$, nesse caso denotaremos $P_I(n)$ como sendo o polinômio de Hilbert-Samuel de R com respeito a I.

Observação 1.1.18. *Podemos observar que para cada ideal escolhido teremos um polinômio de Hilbert-Samuel. Um fato curioso é que o grau do polinômio será sempre o mesmo para qualquer ideal de definição tomado. Para ver isso, sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano , I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R e M um R-módulo finitamente gerado, então para algum $t > 0$ temos $\mathfrak{m}^t \subseteq I$. Para todo $n \geq 1$ obtemos $\mathfrak{m}^{tn} \subseteq I^n \subseteq \mathfrak{m}^n$, da primeira inclusão obtemos uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow I^n M/\mathfrak{m}^{tn} M \longrightarrow M/\mathfrak{m}^{tn} M \longrightarrow M/I^n M \longrightarrow 0,$$

implicando $\lambda_R(M/\mathfrak{m}^{tn}M) = \lambda_R(I^n M/\mathfrak{m}^{tn}M) + \lambda_R(M/I^n M)$, ou seja, $H_{\mathfrak{m},M}(tn) \geq H_{I,M}(n)$, fazendo o mesmo processo para a outra inclusão conseguimos $H_{I,M}(n) \geq H_{\mathfrak{m},M}(n)$. Caso o grau de $P_{I,M}(n)$ fosse menor que o de $P_{\mathfrak{m},M}(n)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{I,M}(n)}{P_{\mathfrak{m},M}(n)} = 0,$$

tomando $\varepsilon = 1$ vai existir um n suficientemente grande no qual $|P_{I,M}(n)| < |P_{\mathfrak{m},M}(n)|$, como esses valores serão não negativos para todo $n >> 0$, assim teremos $H_{I,M}(n) < H_{\mathfrak{m},M}(n)$, um absurdo. Se supormos que o grau de $P_{\mathfrak{m},M}(n)$ fosse menor que o de $P_{I,M}(n)$, então faríamos uma argumentação análoga com $P_{\mathfrak{m},M}(tn)$ para chegar em outro absurdo. Logo temos o resultado esperado.

Exemplo 1.1.19. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e $I = (x)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário em que x não é divisor de zero em R. Afirmamos que $P_I(n) = n\lambda_R(R/I)$. De fato, para todo $n \geq 0$ temos a sequência exata de R-módulos*

$$0 \longrightarrow I^n/I^{n+1} \longrightarrow R/I^{n+1} \longrightarrow R/I^n \longrightarrow 0.$$

Defina $\varphi : R \longrightarrow I^n/I^{n+1}$ por $\varphi(r) = r\overline{x}^n$, claramente essa aplicação é um morfismo sobrejetor de R-módulos, pois $I^n/I^{n+1} = (\overline{x}^n)$. Trivialmente $I \subseteq \ker\varphi$, agora se $r \in \ker\varphi$, então $\varphi(r) = \overline{0} = r\overline{x}^n$, ou seja, $rx^n \in I^{n+1}$, assim existe $a \in R$ tal que $rx^n = ax^{n+1}$, como x é não divisor de zero de R, então $r = ax$, logo $r \in I$. Pelo Teorema do Isomorfismo teremos que $R/I \cong I^n/I^{n+1}$, que induz uma nova sequência exata

$$0 \longrightarrow R/I \longrightarrow R/I^{n+1} \longrightarrow R/I^n \longrightarrow 0,$$

por aditividade do comprimento $\lambda_R(R/I^{n+1}) = \lambda_R(R/I^n) + \lambda_R(R/I)$, por recursão temos o resultado.

1.1.3 O Teorema da Dimensão

Nessa seção discutiremos sobre o *Teorema da Dimensão de Krull*, que tem por objetivo relacionar o grau do polinômio de Hilbert-Samuel, a dimensão de Krull e a dimensão de Chevalley. Finalizaremos a seção apresentando do *Teorema do Ideal Principal de Krull.*

Definição 1.1.20. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que um conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathfrak{m}$ é um* **sistema de parâmetros** *para M se $\lambda_R(M/(a_1, a_2, \dots, a_n)M) < \infty$.*

Se tomarmos o conjunto minimal de geradores de $\mathfrak{m}$, então pelo Lema de Nakayama tal conjunto será um sistema de parâmetros de M. Logo, um sistema de parâmetros vai sempre existir. Caso $R = M$, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathfrak{m}$ ser um sistema de parâmetros é equivalente a dizer que $R/(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é anel artiniano, e pelo que discutimos na seção anterior, é equivalente a dizer que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Denotaremos por δ_M o tamanho mínimo de um sistema de parâmetros em M, que é chamada de **dimensão de Chevalley**.

Observação 1.1.21. *Como para todo $n > 0$ temos $\sqrt{\mathfrak{m}^n} = \mathfrak{m}$, e pelo Lema de Nakayama sabemos que $\mu(\mathfrak{m}^n) = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$, então:*

$$\delta_R \leq \dim_{R/\mathfrak{m}} \left(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} \right).$$

Exemplo 1.1.22. *Sejam k um corpo e $R = k[\![x]\!]$ o anel de séries formais em k. Note que R é um anel local noetheriano com maximal $\mathfrak{m} = (x)$, pelo Exemplo 1.1.19 sabemos que $\deg(P_{\mathfrak{m}}) = 1$. Em virtude da observação anterior temos $\delta_R \leq 1$, porém se $\delta_R = 0$, então $\sqrt{0} = (x)$, um absurdo pois R é domínio, logo $\delta_R = 1$. Como todo ideal próprio de R estará contido em $\mathfrak{m}$, segue que esse ideal é da forma (x^n), para algum $n > 0$, o que implica $\mathrm{Spec}(k[\![x]\!]) = \{(0), (x)\}$, logo $\dim(k[\![x]\!]) = 1$.*

O que acabamos de exibir no exemplo foi: $\delta_R = \dim R = \deg P_{\mathfrak{m}}$. O principal teorema dessa seção mostrará que esse não é um caso particular se considerarmos $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. Convencionaremos que se M é o módulo nulo, então $\delta_M = -1 = \dim M$.

Lema 1.1.23. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, com corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$. Tome $r \in \mathfrak{m}$ e escreva $S = R/(r)$. Denote por $\mathcal{P}_R$ e $\mathcal{P}_S$ os polinômios de Hilbert-Samuel de R e S respectivamente, com relação a seus respectivos maximais. Então:*

(1) $\deg \mathcal{P}_S \geq \deg \mathcal{P}_R - 1$.

(2) $\deg \mathcal{P}_S = \deg \mathcal{P}_R - 1$, *se r não for divisor de zero em R.*

Demonstração: Denote por $\overline{\mathfrak{m}}$ a imagem de $\mathfrak{m}$ em S. Assim $(S, \overline{\mathfrak{m}})$ é um anel local noetheriano com corpo residual $S/\overline{\mathfrak{m}} \cong R/\mathfrak{m} = k$. Para todo $n > 0$, temos os seguintes isomorfismos:

$$\frac{S}{\overline{\mathfrak{m}}^n} = \frac{R/(r)}{(\mathfrak{m}^n + (r))/(r)} \cong \frac{R}{\mathfrak{m}^n + (r)} \qquad e \qquad \frac{\mathfrak{m}^n + (r)}{\mathfrak{m}^n} \cong \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}$$

induzindo uma sequência de R-módulos

$$0 \longrightarrow \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \longrightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}^n} \longrightarrow \frac{S}{\overline{\mathfrak{m}}^n} \longrightarrow 0.$$

Da aditividade do comprimento temos

$$\lambda_R\left(\frac{R}{\mathfrak{m}^n}\right) = \lambda_R\left(\frac{S}{\overline{\mathfrak{m}}^n}\right) + \lambda_R\left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}\right),$$

como (r) anula S, segue que $\lambda_R\left(S/\overline{\mathfrak{m}}^n\right) = \lambda_S\left(S/\overline{\mathfrak{m}}^n\right)$, logo a igualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma: $\mathcal{P}_R(n) = \mathcal{P}_S(n) + \lambda_R((r)/(\mathfrak{m}^n \cap (r)))$.

Vamos estimar o valor de $\lambda_R((r)/(\mathfrak{m}^n \cap (r)))$, para isso provaremos as afirmações:

(i) Para todo $n \geq 1$, temos

$$\lambda_R\left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}\right) \leq \lambda_R\left(\frac{R}{\mathfrak{m}^{n-1}}\right) = \mathcal{P}_R(n-1).$$

(ii) Se $r \in R$ não é divisor de zero, então existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $n >> 0$ temos

$$\lambda_R\left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}\right) \geq \lambda_R\left(\frac{R}{\mathfrak{m}^{n-c}}\right) = \mathcal{P}_R(n-c).$$

Primeiro verificaremos a prova de (i). Seja o morfismo sobrejetor de R-módulos

$$\varphi_r : \frac{R}{\mathfrak{m}^{n-1}} \longrightarrow \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}$$

dado pelo produto por r. Passando por uma sequência exata conseguimos

$$\lambda_R\left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}\right) + \lambda_R(\ker \varphi_r) = \lambda_R\left(\frac{R}{\mathfrak{m}^{n-1}}\right),$$

o que prova (i).

Por fim demonstraremos (ii). Pelo Lema de Artin-Rees podemos tomar um $c > 0$ em que $\mathfrak{m}^n \cap (r) \subseteq (r).\mathfrak{m}^{n-c}$, para todo $n >> 0$. Que induz um mapa sobrejetor

$$\psi : \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \longrightarrow \frac{(r)}{(r).\mathfrak{m}^{n-c}}.$$

Tome o morfismo sobrejetor, produto por r

$$\varphi_r : R \longrightarrow \frac{(r)}{(r).\mathfrak{m}^{n-c}}.$$

Note que se $a \in \ker \varphi_r$, então $\varphi_r(a) = 0$, o que implica $a.r \in (r).\mathfrak{m}^{n-c}$, logo existe $m \in \mathfrak{m}^{n-c}$ tal que $a.r = m.r$, como r é não divisor de zero, teremos $a = m$, isto é, $\ker \varphi_r \subseteq \mathfrak{m}^{n-c}$, como a inclusão contrária é trivial, podemos aplicar o Teorema do Isomorfismo e conseguir

$$\frac{R}{\mathfrak{m}^{n-c}} \cong \frac{(r)}{(r).\mathfrak{m}^{n-c}}.$$

Com isso temos uma nova aplicação sobrejetora

$$\varphi_r \circ \psi : \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \longrightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}^{n-c}},$$

passando por uma sequência exata teremos a prova de (ii).

Por (i), temos $\mathcal{P}_S(n) \geq \mathcal{P}_R(n) - \mathcal{P}_R(n-1) = \Delta\mathcal{P}_R(n-1)$ para $n >> 0$ e pelo Lema 1.1.7 sabemos que $\deg \Delta\mathcal{P}_R = \deg \mathcal{P}_R - 1$, por argumentos similares aos que foram feitos na Seção 1.1.3, conseguiremos que as desigualdades serão preservadas após passar pelos graus, então $\deg \mathcal{P}_S \geq \deg \mathcal{P}_R - 1$, provando (1).

Agora supondo $r \in R$ não divisor de zero, podemos usar (ii) para conseguir a desigualdade $\mathcal{P}_S(n) \leq \mathcal{P}_R(n) - \mathcal{P}_R(n-c)$, similarmente ao caso anterior teremos $\deg \mathcal{P}_S \leq \deg \mathcal{P}_R - 1$. Combinado essa nova desigualdade com a obtida para o item (1), teremos a prova de (2).

□

Teorema 1.1.24. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R. Suponha que temos uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

de R-módulos finitamente gerados. Então $P_{I,M'}(n) + P_{I,M''}(n) = P_{I,M}(n) + r(n)$, em que $r(n)$ é tipo-polinomial de grau menor que $\deg(P_{I,M}(n))$ *e coeficiente líder não negativo.*

Demonstração: Como $M' \subseteq M$, segue que $M'/(M' \cap I^nM) \cong (M' + I^nM)/I^nM$ para todo $n \geq 0$, e do fato que $M/M' \cong M''$ teremos

$$\frac{(M/I^nM)}{(M' + I^nM)/I^nM} \cong \frac{M}{M' + I^nM} \cong \frac{M/M'}{(M' + I^nM)/M'} \cong \frac{M''}{I^nM''}.$$

Assim temos sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{M'}{M' \cap I^nM} \longrightarrow \frac{M}{I^nM} \longrightarrow \frac{M''}{I^nM''} \longrightarrow 0.$$

Escreva $M'_n = M' \cap I^nM$. Pela aditividade do comprimento e para todo $n >> 0$ temos $P_{I,M}(n) - P_{I,M''}(n) = \lambda(M'/M'_n)$, logo $\lambda(M'/M'_n)$ é tipo polinomial. Por Artin-Rees existe $m \in \mathbb{N}$ no qual $I^{m+n}M' \subseteq M' \cap I^{m+n}M = I^n(M' \cap I^mM)$. Assim

$$I^{m+n}M' \subseteq M'_{m+n} \subseteq I^nM'$$

e passando por sequências exatas triviais $\lambda(M'/I^{m+n}M') \geq \lambda(M'/M'_{m+n}) \geq \lambda(M'/I^nM')$. Para todo $n >> 0$ os termos da extremidade serão $P_{I,M'}(m+n)$ e $P_{I,M'}(n)$ respectivamente, que possuem o mesmo grau e coeficiente líder. Dessa forma conseguimos que $\lambda(M'/M'_n)$ possui grau e coeficiente líder igual ao de $P_{I,M'}(n)$.

Seja $r(n) = P_{I,M'}(n) - \lambda(M'/M'_n)$, então essa função é tipo-polinomial de grau estritamente menor que $\deg(\lambda(M'/M'_n))$. Como $\deg(\lambda(M'/M'_n)) \leq \deg(P_{I,M}(n))$, segue que $\deg(r(n)) < \deg(P_{I,M}(n))$. Desde que $P_{I,M}(n) \geq \lambda(M'/M'_n)$ para todo $n >> 0$, então $r(n) \geq 0$ para todo $n >> 0$. Pela Observação 1.1.6 teremos que o coeficiente líder de $r(n)$ é não-negativo.

Por fim, note que

$$\begin{aligned} P_{I,M}(n) + r(n) &= P_{I,M}(n) + P_{I,M'}(n) - \lambda(M'/M'_n) \\ &= P_{I,M}(n) + P_{I,M'}(n) - P_{I,M}(n) + P_{I,M''}(n) \\ &= P_{I,M'}(n) + P_{I,M''}(n). \end{aligned}$$

□

Corolário 1.1.25. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel local noetheriano, I ideal $\mathfrak{m}$-primário e M um R-módulo finitamente gerado. Se N é submódulo de M, então* $\deg(P_{I,N}(n)) \leq \deg(P_{I,M}(n))$.

Demonstração: Do teorema anterior sabemos que o grau de $r(n)$ é estritamente menor que o de $P_{I,M}(n)$. Dessa forma

$$\deg(P_{I,M}(n)) = \deg(P_{I,N}(n) + P_{I,M/N}(n)).$$

A Observação 1.1.6 nos garante que os coeficientes líderes de todos os polinômios em questão não são negativos, logo

$$\deg(P_{I,N}(n)) \leq \deg(P_{I,N}(n) + P_{I,M/N}(n)) = \deg(P_{I,M}(n)).$$

□

Teorema 1.1.26 (Dimensão de Krull). *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, I ideal $\mathfrak{m}$-primário e M um R-módulo finitamente gerado. Então $\delta_M = \dim M = \deg P_{I,M}$. Em particular M tem dimensão finita.*

Demonstração: Como já comentamos, o grau do polinômio de Hilbert-Samuel independe do ideal de definição tomado, logo para o restante da demonstração usaremos $I = \mathfrak{m}$. Mostraremos que $\dim M \leq \deg(P_{\mathfrak{m},M}) \leq \delta_M \leq \dim M$. Apresentaremos cada desigualdade por vez.

1ª Desigualdade: $\dim M \leq \deg(P_{\mathfrak{m},M})$. Se $\deg(P_{\mathfrak{m},M}) = -1$, então para todo $n >> 0$ teremos $P_{\mathfrak{m},M}(n) = \lambda(M/\mathfrak{m}^n M) = 0$, ou seja, $M/\mathfrak{m}^n M = 0$ e pelo Lema de Nakayama teremos $M = 0$. Assim, $\dim M = -1$, dessa forma suponha que $\deg(P_{\mathfrak{m},M}) \geq 0$.

Como $M \neq 0$, segue que M tem uma quantidade finita de primos associados, portanto existe $Q \in \operatorname{Ass} M$, no qual $\dim M = \dim R/Q$. Dessa forma, M possui um submódulo isomorfo a R/Q e do Corolário 1.1.25, $\deg(P_{\mathfrak{m},R/Q}) \leq \deg(P_{\mathfrak{m},M})$.

Se provarmos que $\dim R/Q \leq \deg(P_{\mathfrak{m},R/Q})$, então temos o resultado. Seja $S = R/Q$ e $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/Q$. Mostraremos que se $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k$ é uma cadeia de primos em S, então $k \leq \deg(P_{\mathfrak{n},S})$. O Caso em que $\deg(P_{\mathfrak{n},S}) = -1$ já foi feito no parágrafo anterior, assim suponha $\deg(P_{\mathfrak{n},S}) \geq 0$. Para conseguirmos o resultado faremos indução sobre o grau de $P_{\mathfrak{n},S}$. Se $\deg(P_{\mathfrak{n},S}) = 0$, então $P_{\mathfrak{n},S}(n) = \lambda(R/(\mathfrak{n}^n))$ é constante para $n >> 0$, logo $\Delta\lambda(S/(\mathfrak{n}^n)) = 0$, que passando por uma sequência exata teremos $\dim_{S/\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}^n/\mathfrak{n}^{n+1}) = 0$, assim $\mathfrak{n}^n/\mathfrak{n}^{n+1} = 0$, pelo Lema de Nakayama $\mathfrak{n}^n = 0$ e por S ser domínio teremos $(0) = \sqrt{0} = \sqrt{\mathfrak{n}^n} = \mathfrak{n}$, logo $\dim S = 0$.

Suponha $\deg(P_{\mathfrak{n},S}) > 0$. Seja $r \in P_1 \backslash \{0\}$ e defina $T = S/(r)$, pelo Lema 1.1.23 obtemos $\deg(P_{\mathfrak{n},T}) = \deg(P_{\mathfrak{n},S}) - 1$. Note que $P_1/(r) \subsetneq P_2/(r) \subsetneq \cdots \subsetneq P_k/(r)$ é uma cadeia de primos em T e por hipótese de indução $k - 1 \leq \deg(P_{\mathfrak{n},T})$, logo $k - 1 \leq \deg(P_{\mathfrak{n},S}) - 1$, o que nos fornece o resultado desejado.

2ª Desigualdade : $\deg(P_{\mathfrak{m},M}) \leq \delta_M$. Se $\delta_M = -1$, então $M = 0$ implicando $P_{\mathfrak{m},M} = -1$. Suponha $\delta_M \geq 0$, assim $M \neq 0$. Tome $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ tal que $\lambda(M/(a_1, a_2, \ldots, a_r)M) < \infty$. Seja $I = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $P = \operatorname{Ann} M$ e $Q = P + I$. Afirmamos que $\operatorname{Supp}(R/Q) = \{\mathfrak{m}\}$, ou seja, $V(Q) = \{\mathfrak{m}\}$. De fato, pois

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp}(M/IM) &= \operatorname{Supp}(M \otimes R/I)\\ &= \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(R/I)\\ &= V(P) \cap V(I)\\ &= \operatorname{Supp}(R/P \otimes R/I)\\ &= \operatorname{Supp}(R/(I+P))\\ &= \operatorname{Supp}(R/Q).\end{aligned}$$

Se $IM = M$, então por Nakayama $M = 0$, contrariando a hipótese, portanto teremos $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp}(M/IM)$, ou seja, $\operatorname{Supp}(M/IM) = \{\mathfrak{m}\}$, logo temos provado nossa afirmação.

Sejam $\overline{R} = R/P$, $\overline{Q} = Q/P$ e $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$, e desde que M é anulado por P, então podemos considerá-lo como um $\overline{R}$-módulo. Assim $(\overline{R}, \overline{\mathfrak{m}})$ é anel local noetheriano e $\overline{Q} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_r})$ é um ideal de definição, pois $\{\overline{\mathfrak{m}}\} = V(\overline{Q})$. Pelo Teorema 1.1.17, $\deg(P_{\overline{Q},M}) \leq r$. Como $M/\overline{Q}^n M \cong M/(Q^n + P)M = M/Q^n M$, segue que $\lambda_{\overline{R}}(M/\overline{Q}^n M) = \lambda_{\overline{R}}(M/Q^n M) = \lambda_R(M/Q^n M)$. Assim, $P_{\overline{Q},M}(n) = P_{Q,M}(n)$ e com isso temos $\deg(P_{Q,M}) \leq r$. Assim, pelo fato que $\deg(P_{\mathfrak{m},M}) = \deg(P_{Q,M})$, segue o resultado.

3ª Desigualdade: $\delta_M \leq \dim M$. Se $\dim M = -1$, então $M = 0$, implicando $\delta_M = -1$. Dessa forma assumiremos que $\dim M \geq 0$ e com isso $M \neq 0$. Note que na primeira desigualdade provamos $\dim M < \infty$, sendo assim, façamos indução sobre $\dim M$. Se $\dim M = 0$, então todo primo do suporte é maximal, equivalentemente temos $\lambda(M) < \infty$, logo $\delta_M = 0$.

Suponha $\dim M > 0$. Desde que $\operatorname{Ass} M$ é finito, então podemos escolher $P_1, P_2, \ldots, P_t \in \operatorname{Ass} M$ tal que $\dim(R/P_i) = \dim M$ para todo i. Como $\dim M > 0$, segue que $P_i \subsetneq \mathfrak{m}$, e pelo *Prime Avoidance* existe $a \in \mathfrak{m}$ evitando todos os P_i. Seja $N = M/aM$, portanto $N_{P_i} = M_{P_i}/M_{P_i} = 0$, ou seja, $\operatorname{Supp} N \subseteq \operatorname{Supp} M \backslash \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$, implicando $\dim N < \dim M$.

Tome $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ tal que $\lambda(N/(a_1, a_2, \ldots, a_r)N) < \infty$ e $r = \delta_N$. Como

$$\frac{M}{(a, a_1, a_2, \ldots, a_r)} \cong \frac{N}{(a_1, a_2, \ldots, a_r)N},$$

segue que $M/(a, a_1, a_2, \ldots, a_r)M$ tem comprimento finito, em particular, $\delta_M \leq r + 1$. Por indução $\delta_N \leq \dim N$, logo $\delta_M \leq \delta_N + 1 \leq \dim N + 1 \leq \dim M$.

□

Exemplo 1.1.27. *Seja k um corpo e $R = k[\![x_1, x_2, \ldots, x_n]\!]$ o anel de séries formais em k, então* $\dim R = n$. *De fato, se combinarmos o Lema 1.1.23 com o Teorema de Krull temos* $\dim k[\![x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]\!] = \dim R - 1$, *que reescrevemos,* $\dim k[\![x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]\!] + 1 = \dim R$, *repetindo o processo n-vezes obtemos* $\dim R = n$

Corolário 1.1.28 (**Teorema do Ideal Principal de Krull**). *Sejam R um anel noetheriano e $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \subsetneq R$ um ideal. Então existe $P \in V((r_1, r_2, \ldots, r_n))$ tal que* $\operatorname{ht} P \leq n$.

Demonstração: Seja $P \in \operatorname{Spec} R$ minimal dentre os primos contendo $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Defina $S = R_P/(r_1, r_2, \ldots, r_n)_P$, logo S é um anel local noetheriano, e pelo Teorema da correspondência, $\operatorname{Spec}(S) = \{PR_P/(r_1, r_2, \ldots, r_n)_P\}$, ou seja, S é artiniano, implicando o radical de Jacobson ser nilpotente. Dessa forma $\sqrt{(r_1, r_2, \ldots, r_n)} = PR_P$, logo $\delta_{R_P} \leq n$, pelo teorema anterior sabemos $\dim R_P = \delta_{R_P}$, ou seja, $\operatorname{ht} P = \dim R_P \leq n$. □

1.2 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

Na álgebra comutativa e geometria algébrica, os módulos Cohen-Macaulay são um dos mais ricos objetos de estudo, no qual temos igualdade entre invariantes algébrico (profundidade) e geométrico (dimensão de Krull). Esses módulos foram batizados em homenagem aos matemáticos Francis Sowerby Macaulay e Irvin Cohen. Nosso objetivo será discutir tais módulos e seus resultados básicos, para isso precisaremos falar sobre sequências regulares e grade.

1.2.1 Sequência Regular

Apresentaremos o conceito de sequência regular de um módulo, no qual discutiremos alguns resultados básicos. Mostraremos que potências de sequências regulares também serão regulares e ainda, no caso local, permutações de sequências regulares serão regulares. Veremos que esse novo conceito tem aplicações interessantes no graduado associado, como no caso do teorema de Valla-Valabrega, que nos fornece condições suficientes para o estudo de sequências regulares no graduado associado.

Definição 1.2.1. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Dizemos que $x \in R$ é um elemento* **M-regular** *quando x não é divisor de zero de M, ou seja, se $m \in M$ e $x.m = 0$, então $m = 0$.*

Definição 1.2.2. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma sequência $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos de R é dita ser* **M-sequência regular***, ou apenas M-sequência, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos que x_i é um elemento $M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M$-regular.

(2) $M/(x_1, x_2, \ldots, x_n)M \neq 0$.

Se $\boldsymbol{x}$ satisfaz o item (1), então dizemos que $\boldsymbol{x}$ é uma M-sequência fraca. Se $R = M$, então dizemos apenas que $\boldsymbol{x}$ é uma sequência regular.

Exemplo 1.2.3. *Seja $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ no qual k é um corpo, então $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma R-sequência.*

Exemplo 1.2.4. *Seja $\mathbb{Z}[x]$ o anel de polinômios sobre $\mathbb{Z}$ na variável x. Claramente $\boldsymbol{x} = 2, x$ é uma R-sequência, mas $\boldsymbol{x}$ não é uma $(\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_4)$-sequência, pois 2 é divisor de zero em $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_4$.*

Nesse último exemplo vimos que a regularidade da sequência nem sempre é preservada por produto tensorial. A próxima proposição mostra que, sobre determinadas circunstâncias, o produto tensorial não interfere na regularidade da sequência.

Proposição 1.2.5. *Sejam M e N módulos sobre o anel R. Seja $\boldsymbol{x} \subset R$ uma M-sequência. Suponha que N seja plano e $\boldsymbol{x}(M \otimes_R N) \neq M \otimes_R N$, então $\boldsymbol{x}$ é uma $(M \otimes_R N)$-sequência. Mais ainda, se N for fielmente plano, então temos a recíproca.*

Demonstração: Escreva $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$, vamos fazer indução sobre n.

Caso $n = 1$. Considere o homomorfismo de R-módulos $\varphi : M \longrightarrow M$ definido por $\varphi(m) = x_1 m$, para todo $m \in M$. Claramente esse morfismo é injetor pois x_1 não é divisor de zero em M. Como N é R-plano, então $\varphi \otimes_R \mathrm{id_N} : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ é um homomorfismo injetor. Dessa forma, se $m_1 \otimes n_1 + m_2 \otimes n_2 + \ldots + m_k \otimes n_k$ é um elemento qualquer de $M \otimes_R N$, temos

$$\varphi \otimes_R \mathrm{id_N}(m_1 \otimes n_1 + m_2 \otimes n_2 + \ldots m_k \otimes n_k) = \varphi(m_1) \otimes n_1 + \varphi(m_2) \otimes n_2 + \ldots \varphi(m_k) \otimes n_k$$

$$= x_1 m_1 \otimes n_1 + x_1 m_2 \otimes n_2 + \ldots x_1 m_k \otimes n_k = x_1(m_1 \otimes n_1 + m_2 \otimes n_2 + \ldots m_k \otimes n_k).$$

Portanto se $t \in M \otimes_R N$ é tal que $x_1 t = 0$, então $t \in \ker(\varphi \otimes_R \mathrm{id_N})$ e pela injetividade de $\varphi \otimes_R \mathrm{id_N}$ segue que $t = 0$, isto é, x_1 é $(M \otimes_R N)$-regular.

Suponha $n > 1$. Defina $I = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Agora note que

$$(M \otimes_R N)/(I(M \otimes_R N)) \cong (R/I) \otimes_R (M \otimes_R N) \cong (R/I \otimes_R M) \otimes_R N \cong (M/IM) \otimes_R N.$$

Como x_n é (M/IM)-regular, seque do caso 1 da indução que x_n é $(M \otimes_R N/I(M \otimes_R N))$-regular. Por hipótese temos que $\boldsymbol{x}(M \otimes_R N) \neq M \otimes_R N$, então segue o resultado.

Para a recíproca usaremos indução sobre o comprimento da sequência. Será suficiente provar o caso em que $\boldsymbol{x} = x_1$, pois o segundo passo da indução repetirá exatamente o mesmo processo do caso 1.

Defina $\varphi : M \longrightarrow M$ por $\varphi(m) = x_1 m$. Se denotarmos $K = \ker \varphi$, então teremos $K \otimes_R N \subseteq \ker(\varphi \otimes \mathrm{id}_N)$. Note que se $t \in M \otimes_R N$, então $\varphi \otimes \mathrm{id}_N(t) = x_1 t$, dessa forma se $x_1 t = 0$ teremos $t = 0$ pois x_1 não é divisor de zero em $M \otimes_R N$, ou seja, $\ker(\varphi \otimes \mathrm{id}_N) = 0$, implicando $K \otimes_R N = 0$. Como N é fielmente plano, segue que $K = 0$, assim teremos x_1 é elemento M-regular. Em seguida, note que $(M \otimes_R N)/x_1(M \otimes_R N) \cong (M/x_1 M) \otimes_R N$. No caso em que $(M/x_1 M) \otimes_R N = 0$ teremos $(M/x_1 M) = 0$, pois N é fielmente plano. Logo, $(M \otimes_R N)/x_1(M \otimes_R N) \neq 0$ se, e somente se, $M/x_1 M \neq 0$.

□

Corolário 1.2.6. *Sejam R anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $\boldsymbol{x}$ uma M-sequência. Seja $P \in \operatorname{Supp} M$ tal que contém $\boldsymbol{x}$. Então $\boldsymbol{x}$ (em R_p) é uma M_P-sequência.*

Demonstração: Sabemos que $M_P = R_P \otimes_R M$ e pelo fato de $P \in \operatorname{Supp} M$, segue que $M_P \neq 0$, assim pelo Lema de Nakayama $PM_P \neq M_P$, em particular $\boldsymbol{x} M_P \neq M_P$. Como $R \longrightarrow R_P$ é plano, segue o resultado da Proposição 1.2.5. □

Proposição 1.2.7. *Sejam R um anel, M um R-módulo e $\boldsymbol{x}$ uma M-sequência fraca. Então uma sequência exata*

$$N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

de R-módulos induz uma nova sequência exata

$$N_2/\boldsymbol{x}N_2 \longrightarrow N_1/\boldsymbol{x}N_1 \longrightarrow N_0/\boldsymbol{x}N_0 \longrightarrow M/\boldsymbol{x}M \longrightarrow 0.$$

Demonstração: Seja $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma M-sequência. Faremos por indução sobre n.

Para $n = 1$, ou seja, $\boldsymbol{x} = x_1$. Note que a segunda sequência é obtida da primeira tensorando por $R/(x_1)$. Como o funtor $\_ \otimes_R R/(x_1)$ é exato a direita, logo é suficiente checar a exatidão da segunda sequência apenas em N_1/x_1N_1.

Da primeira sequência, temos um mapa induzido $\overline{\varphi_1} : N_1/x_1N_1 \longrightarrow N_0/x_1N_0$, definido por $\overline{\varphi_1}(y + x_1N_1) = \varphi_1(y) + x_1N_0$. Note que para todo $z \in N_2$ temos

$$\overline{\varphi_1} \circ \overline{\varphi_2}(z + x_1N_2) = \overline{\varphi_1}(\varphi_2(z) + x_1N_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(z) + x_1N_2 = 0 + x_1N_2,$$

implicando $\mathrm{Im}\overline{\varphi_2} \subseteq \ker \overline{\varphi_1}$. Se $\overline{\varphi_1}(y + x_1N_1) = 0 + x_1N_1 = \varphi_1(y) + x_1N_1$, então $\varphi_1(y) \in x_1N_1$, isto é, existe $z \in N_0$ tal que $\varphi_1(y) = x_1z$. Pela exatidão da sequência original $(\varphi_0 \circ \varphi_1)(y) = 0 = x_1\varphi_0(z)$, implicando $\varphi_0(z) = 0$, pois x_1 não é divisor de zero em M. Como $\ker \varphi_0 = \mathrm{Im}\varphi_1$, existe $y' \in N_1$ tal que $\varphi_1(y') = z$, assim $\varphi_1(y) = x_1\varphi_1(y')$, implicando $\varphi_1(y - x_1y') = 0$, assim $(y - x_1y') \in \ker \varphi_1 = \mathrm{Im}\varphi_2$. Logo $y + x_1N_1 \in \mathrm{Im}\overline{\varphi_2}$.

Para completar a prova, podemos supor o resultado válido para $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tomando $I = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, assim temos uma sequência exata

$$N_2/IN_2 \longrightarrow N_1/IN_1 \longrightarrow N_0/IN_0 \longrightarrow M/IM \longrightarrow 0.$$

Agora, fazendo uma argumentação similar ao caso anterior, no qual tensoramos a nova sequência por $R/(x_n)$, obtemos o resultado.

□

Proposição 1.2.8. *Sejam R um anel e*

$$N\bullet : \ldots \longrightarrow N_n \xrightarrow{\varphi_n} N_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} N_{n-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_0 \longrightarrow 0$$

um complexo exato de R-módulos. Se $\boldsymbol{x}$ é uma N_i-sequência fraca para todo i, então teremos $N \bullet \otimes_R (R/(\boldsymbol{x}))$ é exata.

Demonstração: Faremos por indução no comprimento da sequência $\boldsymbol{x}$, para isso é suficiente a prova do caso $\boldsymbol{x} = x$, pois o segundo passo de indução tem argumentação análoga ao primeiro passo.

Como x é regular em N_i, implica que será regular em $\mathrm{Im}\varphi_{i+1}$. Logo a sequência

$$N_{i+3} \longrightarrow N_{i+2} \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow \mathrm{Im}\varphi_{i+1} \longrightarrow 0$$

é exata. Pela proposição anterior

$$N_{i+3} \otimes_R R/(x) \longrightarrow N_{i+2} \otimes_R R/(x) \longrightarrow N_{i+1} \otimes_R R/(x) \longrightarrow \mathrm{Im}\varphi_{i+1} \otimes_R R/(x) \longrightarrow 0$$

é sequência exata, assim temos o resultado. □

Corolário 1.2.9. *Sejam R um anel e $\boldsymbol{x} \in R$ uma sequência de elementos. Seja*

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R-módulos. Suponha que $\boldsymbol{x}$ seja tanto uma U-sequência quanto uma N-sequência, então $\boldsymbol{x}$ também será uma M-sequência.

Demonstração: Seja $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos que $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ é uma N-sequência, segue da Proposição 1.2.7, que

$$0 \longrightarrow U/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})U \xrightarrow{\overline{\varphi}} M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M \xrightarrow{\overline{\psi}} N/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Seja $\overline{m} \in M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M$ tal que $x_i\overline{m} = 0$, logo teremos $x_i\overline{\psi}(\overline{m}) = \overline{\psi}(x_i\overline{m}) = 0$. Como x_i não é divisor de zero em N, temos que $\overline{\psi}(\overline{m}) = 0$, implicando $\overline{m} \in \ker\overline{\psi} = \mathrm{Im}\overline{\varphi}$, isto é, existe $\overline{u} \in U/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})U$ tal que $\overline{\varphi}(\overline{u}) = \overline{m}$. Note que $\overline{\varphi}(x_i\overline{u}) = x_i\overline{\varphi}(\overline{u}) = x_i\overline{m} = 0$, ou seja, $x_i\overline{u} \in \ker\overline{\varphi} = \{0\}$, como x_i não é divisor de zero em $U/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})U$, segue que $\overline{u} = 0$, implicando que $\overline{m} = 0$.

Agora novamente pela Proposição 1.2.7, temos que

$$0 \longrightarrow U/\boldsymbol{x}U \longrightarrow M/\boldsymbol{x}M \longrightarrow N/\boldsymbol{x}N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata, assim $M \neq \boldsymbol{x}M$, pois caso contrário implicaria $N = \boldsymbol{x}N$, contrariando o fato de $\boldsymbol{x}$ ser N-sequência. □

Corolário 1.2.10. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n$ e $x_1, x_2, \ldots, x_i', \ldots x_n$ são ambas M-sequências, então $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_ix_i', x_{i+1}, \ldots x_n$ é também uma M-sequência.*

Demonstração: Note que para todo $k < i$ temos que x_k é $M/(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})M$-regular. Logo, sem perda de generalidade, podemos considerar o caso em que $i = 1$.

Seja $\boldsymbol{x} = x_1x_1', x_2, \ldots, x_n$. Se $m \in M$ é tal que $x_1x_1'm = 0$, então pelo fato de x_1 não ser divisor de zero de M teremos $x_1'm = 0$, por um argumento similar aplicado a x_1' conseguimos que $m = 0$.

Como $x_1x_1'M \subseteq x_1M$, temos que $\varphi : M/x_1x_1'M \longrightarrow M/x_1M$ é um morfismo sobrejetor de R-módulos induzido pela projeção canônica, que nos fornece uma sequência exata

$$0 \longrightarrow x_1M/x_1x_1'M \longrightarrow M/x_1x_1'M \xrightarrow{\varphi} M/x_1M \longrightarrow 0$$

de R-módulos.

Defina o morfismo sobrejetor $\psi : M \longrightarrow x_1M/x_1x_1'M$ por $\psi(m) = x_1\overline{m}$. Note que se $y \in x_1'M$, então $y = x_1'm$, para algum $m \in M$, assim $\psi(y) = x_1\overline{x_1'm} = 0$. Implicando $x_1'M \subseteq \ker\psi$. Suponha que $m \in \ker\psi$, ou seja, $\psi(m) = 0 = x_1\overline{m}$, logo existe $m' \in M$ tal que $x_1m = x_1x_1'm'$, como x_1 é M-regular, teremos $m = x_1'm'$, que vai implicar $\ker\psi \subseteq x_1'M$. Pelo Teorema do Isomorfismo, $M/x_1'M \cong x_1M/x_1x_1'M$, logo podemos reescrever a sequência exata anterior como

$$0 \longrightarrow M/x_1'M \longrightarrow M/x_1x_1'M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0.$$

Como $x_2, x_3, \ldots, x_n$ é tanto uma (M/x_1M)-sequência quanto $(M/x_1'M)$-sequência. Pelo Corolário 1.2.9, temos que $x_2, x_3, \ldots, x_n$ é uma $(M/x_1x_1'M)$-sequência, logo $x_1x_1', x_2, x_3, \ldots, x_n$ é uma M-sequência. □

Corolário 1.2.11. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n$ é uma M-sequência, então ${x_1}^{e_1}, {x_2}^{e_2}, \ldots, {x_n}^{e_n}$ é também uma M-sequência, para qualquer $e_i \in \mathbb{Z}_+$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demonstração: Segue direto do Corolário 1.2.10. $\square$

Proposição 1.2.12. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano R. Suponha que $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma M-sequência pertencente ao radical de Jacobson de R, então para todo $\sigma \in S_n$ temos que $\boldsymbol{x}_\sigma = x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ é também uma M-sequência.*

Demonstração: Como as transposições geram o S_n será suficiente provar o resultado para uma transposição, que sem perda de generalidade podemos assumir sendo $\sigma = (12)$. Dessa forma basta mostrar que $x_2, x_1, \ldots, x_n$ é M-sequência.

Inicialmente provaremos que x_1 não é divisor de zero em M/x_2M. Suponha $\overline{a} \in M/x_2M$ tal que $x_1\overline{a} = 0$, então $x_1a \in x_2M$, logo existe $m \in M$ tal que $x_1a = x_2m$. Desde que x_2 não é divisor de zero em M/x_1M, então $m \in x_1M$, isto é, $m = x_1m'$ para algum $m' \in M$. Dessa forma $x_1a = x_2x_1m'$, por x_1 não ser divisor de zero de M temos $a = x_1m'$, implicando $\overline{a} = 0$.

Mostraremos agora que x_2 não é divisor de zero de M. Seja $N = (0 :_M x_2)$ e tome $b \in N$. Como por definição $x_2b = 0$, passando a classe módulo x_1M teremos $x_2\overline{b} = 0$, porém x_2 não é divisor de zero de M/x_1M, implicando $b \in x_1M$. Tome $m \in M$ tal que $b = x_1m$, logo $x_2x_1m = 0$, mas como x_1 não é divisor de zero de M, segue que $x_2m = 0$, ou seja, $m \in N$ e ainda $b = x_1m \in x_1N$. Assim $N = x_1N$, por Nakayama teremos $N = 0$, com isso finaliza nossa prova. $\square$

Corolário 1.2.13. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local noetheriano R. Suponha que $\boldsymbol{x}$ é uma M-sequência, então $\boldsymbol{x}_\sigma$ é também uma M-sequência para todo $\sigma \in S_n$.*

Demonstração: Segue direto da Proposição 1.2.12.

$\square$

Note que a hipótese da sequência estar no radical de Jacobson foi fundamental na demonstração da proposição. Aqui está um exemplo que ilustra bem esse fato.

Exemplo 1.2.14. *Seja $R = \mathbb{Z}[x, y]$ e $\boldsymbol{x} = 3, 2x, 2y$. Claramente $\boldsymbol{x}$ é uma R-sequência, mas $2y, 2x, 3$ não é uma R-sequência pois $2x$ é divisor de zero de $R/(2y)R$.*

Sejam R um anel, M um R-módulo e $T = t_1, t_2, \ldots, t_n$ indeterminadas sobre R. Escreva $M[T]$ para determinar o R-módulo $M \otimes_R R[T]$ e nomeie seus elementos de polinômios com coeficientes em M. Se $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência de elementos de R, então temos um morfismo natural de R-álgebras, $\varphi : R[T] \longrightarrow R$, definido por $\varphi(f(T)) = f(\boldsymbol{x})$. Assim temos uma ação natural, que torna M um $R[T]$-módulo,

$$\begin{aligned} B : M \times R[T] &\longrightarrow M \\ (m, f(T)) &\longmapsto f(\boldsymbol{x}).m \end{aligned}$$

e pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma aplicação R-linear $M[T] \longrightarrow M$, que manda tensores elementares $m \otimes f(T)$ em $f(\boldsymbol{x}).m$ Para simplificar a notação, se $F \in M[T]$, então denotaremos $F(\boldsymbol{x})$ a imagem dessa aplicação.

Como os polinômios monomiais formam uma base R-livre de $R[T]$, segue que os elementos de $M[T]$ possuem escrita de forma única, logo podemos falar de grau dos elementos de $M[T]$.

Teorema 1.2.15. *Sejam R um anel, M um R-módulo, $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma M-sequência e $I = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ideal de R. Se $F \in M[T]$ é homogêneo de grau d e $F(\boldsymbol{x}) \in I^{d+1}M$, então os coeficientes de F estão em IM.*

Demonstração: Faremos por indução sobre n. Se $n = 1$, então $F = m \otimes t^d$. Caso $F(\boldsymbol{x}) \in I^{d+1}M$, então podemos escolher $m' \in M$ tal que $mx_1^d = m'x_1^{d+1}$, pela regularidade de x_1, segue que $m = x_1m' \in IM$. Suponha o resultado válido até $n-1$. Para o segundo passo da indução, precisaremos da seguinte afirmação:

Afirmação: Se $J = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, então x_n é regular em M/J^kM, para todo $k \geq 1$. Faremos a prova por indução sobre k. Se $k = 1$, o resultado segue da hipótese do teorema. Seja $k > 1$ e $\overline{y} \in M/J^kM$ tal que $x_n\overline{y} = 0$, ou seja, $x_ny \in J^kM$. Como $J^kM \subseteq J^{k-1}M$, segue da hipótese de indução sobre k que $y \in J^{k-1}M$, e ainda $y = G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ com $G \in M[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$. Como J^{k-1} é gerado por elementos da forma $x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_{n-1}^{b_{n-1}}$, com $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = k-1$, logo podemos tomar G como polinômio homogêneo de grau $k-1$.

Defina $G' = x_nG$, assim $G' \in M[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$ e por hipótese de indução sobre n seus coeficientes estão em JM. Como x_n é regular em M/JM, segue que os coeficientes de G estarão em JM, assim $y \in J^kM$, o que prova a afirmação.

Voltando ao teorema, faremos mais uma indução, agora sobre d. Se $d = 0$, então o resultado é trivial. Suponha $d > 0$. Primeiro note que podemos reduzir ao caso em que $F(\boldsymbol{x}) = 0$, porque se $F(\boldsymbol{x}) \in I^{d+1}M$, então $F(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x})$ com G homogêneo de grau $d+1$. Sendo assim, escreva $G = \sum_{i=1}^{n} t_iG_i$, com G_i homogêneo de grau d, denote $G_i' = x_iG_i$ e $G' = \sum_{i=1}^{n} G_i'$. Logo $F - G'$ é homogêneo de grau d e $(F - G')(\boldsymbol{x}) = 0$. Se os coeficientes de $F - G'$ estão em IM, então os coeficientes de F estão em IM, pois cada G_i' tem seus coeficientes em IM.

Suponha que $F(\boldsymbol{x}) = 0$. Seja $F = \sum_{j=1}^{s} m_j \otimes f_j(T)$, dividindo cada $f_j(T)$ por t_n temos $f_j(T) = t_nh_j(T) + g_j(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$. Logo $F = G + t_nH$, com $H = \sum_{j=1}^{s} m_j \otimes h_j(T)$ e $G = \sum_{j=1}^{s} m_j \otimes g_j(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$, em que $G \in M[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$. Desta forma $x_nH(x_1, x_2, \dots, x_n) = -G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in J^dM$, da afirmação, $H(x_1, x_2, \dots, x_n) \in J^dM$, como $J^dM \subseteq I^dM$ e por hipótese de indução sobre d, os coeficientes de H estão em IM. Por outro lado, $H(\boldsymbol{x}) = H'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, no qual $H' \in M[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$ é homogêneo de grau d. Como

$$(G + x_nH')(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - x_nH(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

segue da indução sobre n que os coeficientes de $G + x_nH'$ estão em JM. Desde que x_nH' tem seus coeficientes em IM, então os de G também estão em IM. Logo segue o resultado.

$\square$

Teorema 1.2.16. *Sejam R um anel, M um R-módulo, $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ uma M-sequência e $I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ideal de R. Então $(M/IM)[t_1, t_2, \dots, t_n]$ é isomorfo a $gr_I(M)$, ambos vistos como R-módulos. Caso $M = R$, então teremos um isomorfismo de anéis graduados também.*

Demonstração: Como já foi comentado (Seção 1.1), temos um morfismo sobrejetor de R-álgebras graduadas $R[T] \longrightarrow gr_I(R)$, que mapeia t_i em $x_i + I^2$. De forma análoga, definimos um morfismo sobrejetor de R-módulos graduados $\varphi : M[T] \longrightarrow gr_I(M)$, no qual se $F \in M[T]$ é homogêneo de grau d, então $\varphi(F) = F(\boldsymbol{x}) + I^{d+1}M$.

Seja $F \in IM[T]$, então $F = \sum_{j=1}^{r} i_jF_j$, com $i_j \in I$ e $F_j \in M[T]$. Note que cada F_j pode ser escrito como $F_j = F_{j_0} + F_{j_1} + \dots F_{j_k}$, no qual F_{j_l} é homogêneo de grau l. Dessa forma $i_j F_{j_l}(\boldsymbol{x}) \in I^{l+1}M$, para todo j e l, implicando $IM \subseteq \ker\varphi$. Logo existe um morfismo sobrejetor $\overline{\varphi} : M[T]/IM[T] \longrightarrow gr_I(M)$, induzido de φ. Pelos isomorfismos canônicos

$$M[T]/(IM[T]) \cong M[T] \otimes_R (R/I) \cong (M \otimes_R (R/I)) \otimes_R R[T] \cong (M/IM) \otimes_R R[T],$$

podemos assumir que o domínio de $\overline{\varphi}$ seja $(M/IM)[T]$. Seja $\overline{F} \in \ker\overline{\varphi}$, e escreva $F = F_0 + F_1 + \ldots + F_d$, no qual F_j é homogêneo de grau j, então $\overline{\varphi}(\overline{F}) = 0$ o que implica $F_j(\boldsymbol{x}) \in I^{j+1}M$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Pelo Teorema 1.2.15 segue que os coeficientes de F estão em IM, logo $\overline{F} = 0$ e pelo Teorema do Isomorfismo temos o resultado. □

Definição 1.2.17. *Seja I ideal de um anel R. A função* $\operatorname{ord}_I : R \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *definida por* $\operatorname{ord}_I(x) = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid x \in I^m\}$ *é chamada de* **ordem** *de I. Claramente,* $\operatorname{ord}_I(x) = \infty$ *se, e somente se, $x \in I^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Quando* $\operatorname{ord}_I(x) < \infty$*, a classe residual de x em* $I^{\operatorname{ord}_I(x)}/I^{\operatorname{ord}_I(x)+1}$ *é chamada de* **forma inicial** *de x em $gr_I(R)$, que será denotada por x^*. Se* $\operatorname{ord}_I(x) = \infty$*, então a imagem de x em $gr_I(R)$ será igual a zero.*

De agora em diante, guardaremos o símbolo x^* para denotar a imagem x em $gr_I(R)$.

Proposição 1.2.18. *Sejam R anel noetheriano, I um ideal de R e $x_1, \ldots, x_r$ elementos de R. Defina $S = R/(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $J = (I + (x_1, x_2, \ldots, x_r))/(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e $p_i = \operatorname{ord}_I(x_i)$. Suponha que $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$ é uma sequência regular de $gr_I(R)$. Então:*

(1) $(gr_I(R))/((x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*)gr_I(R)) \cong gr_J(S)$;

(2) $I^n \cap (x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{r} x_i I^{n-p_i}$.

Demonstração: Inicialmente, note que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ teremos $x_i^* \neq 0$, assim $\operatorname{ord}_I(x_i) = p_i < \infty$.

(1) Faremos por indução sobre r. Suponha $r = 1$.

Afirmação 1: $(I^n : x_1) = I^{n-p_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $f \in (I^n : x_1)\backslash I^{n-p_1}$, segue que $f \in I^k \backslash I^{k+1}$, no qual $k < n - p_1$. Como $x_1 f \in I^n$ e $k + p_1 + 1 \leq n$, segue que $x_1 f \in I^{k+p_1+1}$, ou seja, $(x_1 + I^{p_1+1})(f + I^{k+1}) = 0$, desde que x_1^* é $gr_I(R)$-regular, temos que $f \in I^{k+1}$, um absurdo. A inclusão contrária é trivial, logo temos o desejado.

Afirmação 2: $I^n \cap (x_1) = I^{n-p_1}x_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $a \in I^n \cap (x_1)$, então $a = x_1 f$ para algum $f \in R$, como $a \in I^n$, segue da afirmação 1 que $f \in I^{n-p_1}$. Logo $I^n \cap (x_1) \subseteq I^{n-p_1}x_1$, como a inclusão contrária é trivial, segue a prova da afirmação.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\left[\frac{gr_I(R)}{x_1^* gr_I(R)}\right]_n = \frac{(I^n)/(I^{n+1})}{(x_1 I^{n-p_1} + I^{n+1})/(I^{n+1})} \cong \frac{I^n}{x_1 I^{n-p_1} + I^{n+1}} \quad e$$

$$[gr_{I/(x_1)}(R/(x_1))]_n = \frac{(I^n + (x_1))/(x_1)}{(I^{n+1} + (x_1))/(x_1)} \cong \frac{I^n + (x_1)}{I^{n+1} + (x_1)}.$$

Como $x_1 I^{n-p_1} + I^{n+1} \subseteq I^{n+1} + (x_1)$, temos um morfismo sobrejetor de R-álgebras

$$\varphi_n : \left[\frac{gr_I(R)}{x_1^* gr_I(R)}\right]_n \longrightarrow [gr_{I/(x_1)}(R/(x_1))]_n$$

definido por $\varphi_n(y + x_1 I^{n-p_1} + I^{n+1}) = y + I^{n+1} + (x_1)$, para todo $y \in I^n$. Seja $y \in I^n$ tal que $\varphi_n(y+x_1I^{n-p_1}+I^{n+1}) = 0$, então $y \in I^{n+1}+(x_1)$. Logo $y \in I^n \cap (I^{n+1}+(x_1)) = I^{n+1}+I^n \cap (x_1)$. Portanto

$$\ker \varphi_n \subseteq \frac{I^{n+1} + I^n \cap (x_1)}{x_1 I^{n-p_1} + I^{n+1}},$$

como a inclusão contrária é trivial, segue que temos a igualdade. Da afirmação 2, sabemos que $(x_1) \cap I^n = x_1 I^{n-p_1}$, então φ_n é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$, com isso temos um isomorfismo induzido de R-álgebras (ou R/I-álgebras)

$$\varphi : \frac{gr_I(R)}{x_1^* gr_I(R)} \longrightarrow gr_{I/(x_1)}(R/(x_1)).$$

Suponha $r > 1$.

Escreva $G = (gr_I(R))/((x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*)gr_I(R))$, $L = (I + (x_1, \ldots, x_{r-1}))/(x_1, \ldots, x_{r-1})$, $T = R/(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$ e $\overline{x_r}$ a imagem de x_r em T. Por hipótese de indução, $G \cong gr_L(T)$, digamos que φ seja tal isomorfismo. Suponha que x_r^{**} é a imagem de $\overline{x_r}$ em $gr_L(T)$, o que implica $\varphi(x_r^*) = x_r^{**}$, logo

$$\frac{gr_I(R)}{(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*)gr_I(R)} \cong \frac{G}{x_r^* G} \cong \frac{gr_L(T)}{x_r^{**} gr_L(T)}.$$

Pelo isomorfismo acima, obtemos que x_r^{**} é regular em $gr_L(T)$, logo pelo caso 1 da indução temos $(gr_L(T))/(x_r^{**}(gr_L(T)) \cong gr_{(L+\overline{x_r})/(\overline{x_r})}(T/(\overline{x_r}))$, desde que $T/(\overline{x_r}) \cong R/(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e $(L + \overline{x_r})/(\overline{x_r}) \cong I/(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, então temos o desejado.

(2) Novamente será feito por indução sobre r e por conveniência usaremos a mesma notação do item anterior. Note que o caso $r = 1$ já foi feito na afirmação 2, sendo assim, suponha $r > 1$. Note que $\operatorname{ord}_I(x_r) = \operatorname{ord}_L(\overline{x_r})$, pois $\overline{x_r} \in L^{p_r}$ e caso $\overline{x_r} \in L^{p_r+1}$, então $x_r = b + \sum_{j=1}^{r-1} a_i x_i$ com $b \in I^{p_r+1}$. Com isso teríamos $x_r + I^{p_r+1} = \sum_{j=1}^{r-1} a_i x_i + I^{p_r+1}$, implicando que $x_r^* = 0$ em G, que é um absurdo pois x_r^* é regular em G.

Como x_r^{**} é regular em $gr_L(T)$, segue do caso 1 da indução que $L^n \cap (\overline{x_r}) = \overline{x_r} L^{n-p_r}$, ou seja, $I^n \cap (x_1, x_2, \ldots, x_r) \subseteq x_r I^{n-p_r} + (x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$. Assim, se $y \in I^n \cap (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, então $y = bx_r + a$, com $b \in I^{n-p_r}$ e $a \in (x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$. Como $bx_r \in I^n$, temos que $y - bx_r = a \in I^n \cap (x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$, da hipótese de indução, segue que $a \in \sum_{j=1}^{r-1} x_j I^{n-p_j}$, o que encerra a prova.

□

Lema 1.2.19. (Valla - Valabrega) *Sejam R anel noetheriano, I e $J = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ ideais de R. Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ defina $p_i = \operatorname{ord}_I(f_i)$ e $J_i = (f_1, f_2, \ldots, f_i)$. Suponha que $f_1, f_2, \ldots, f_r$ é uma R-sequência e $I^n \cap J = \sum_{i=1}^{r} I^{n-p_i} f_i$, para todo $n \geq 1$. Se R é local ou $J \subseteq I$, então $I^n \cap J_i = \sum_{j=1}^{i} I^{n-p_j} f_j$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ e para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: É suficiente provar que $I^n \cap J_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j$ para todo $n \geq 1$, pois uma vez que temos esse caso, sabemos que $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ é uma R-sequência e assim, usando uma argumentação similar, podemos provar que $I^n \cap J_{r-2} = \sum_{j=1}^{r-2} I^{n-p_j} f_j$, continuando recursivamente obtemos o resultado.

Claramente $\sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j \subseteq I^n \cap J_{r-1}$, pois para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ temos que $f_j I^{n-p_j} \subseteq I^{p_J} I^{n-p_j} = I^n$ e $f_j I^{n-p_j} \subseteq J_{r-1}$. Sendo assim, basta pensar na inclusão contrária.

Seja $a \in I^n \cap J_{r-1}$, então existem $a_j \in R$ tais que $a = \sum_{j=1}^{r-1} a_j f_j$. Como $I^n \cap J_{r-1} \subseteq I^n \cap J$, segue que existem $b_i \in I^{n-p_i}$ tais que $a = \sum_{i=1}^{r} b_i f_i$. Assim $\sum_{j=1}^{r-1} a_j f_j = \sum_{j=1}^{r-1} b_j f_j + f_r b_r$, logo a imagem de $f_r b_r$ em R/J_{r-1} será igual a zero e pela regularidade de f_r, segue que $b_r \in J_{r-1}$. Logo, $I^n \cap J_{r-1} \subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j + f_r(I^{n-p_r} \cap J_{r-1})$.

Fixe $m \in \mathbb{N}$, no qual $m \leq \min\{p_j \mid 1 \leq j \leq r-1\}$. Se $n \leq m + p_r$, então $n - p_r \leq p_j$ para todo $j \leq r-1$, logo $I^{p_j} \subseteq I^{n-p_r}$ e com isso $f_j \in I^{n-p_r}$, implicando $J_{r-1} \subseteq I^{n-p_r}$. Note também que teríamos $n - m \leq p_r$, implicando $I^{p_r} \subseteq I^{n-m} \subseteq I^{n-p_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$, em particular $f_r \in I^{n-p_i}$. Além disso,

$$I^n \cap J_{r-1} \subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j + f_r(I^{n-p_r} \cap J_{r-1}) \subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j + f_r J_{r-1}$$

e como $f_i f_r \in f_i I^{n-p_i}$ para todo $1 \leq i \leq r-1$, segue que $f_r J_{r-1} \subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j$. Logo teríamos o resultado.

Sendo assim, podemos supor $n > m + p_r$ e que para todo $t \leq n-1$ seja verdade que $I^t \cap J_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j$. Se R é local e $p_r = 0$, então

$$\begin{aligned} I^n \cap J_{r-1} &\subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j + f_r(I^{n-0} \cap J_{r-1}) \\ &\subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j + I^n \cap J_{r-1} \\ &\subseteq I^n \cap J_{r-1}. \end{aligned}$$

Logo $I^n \cap J_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j + f_r(I^n \cap J_{r-1})$, como f_r é elemento regular de R, segue que (f_r) é ideal próprio de R, com isso, usamos o Lema de Nakayama para conseguir $I^n \cap J_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j$.

Suponha $p_r \geq 1$, desde que $n - p_r \leq n - 1$, então

$$\begin{aligned} f_r(I^{n-p_r} \cap J_{r-1}) &= f_r(\sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_r-p_j} f_j) \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_r-p_j} f_r f_j \\ &\subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_r-p_j} I^{p_r} f_j \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j. \end{aligned}$$

Logo

$$I^n \cap J_{r-1} \subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j + f_r(I^{n-p_r} \cap J_{r-1}) \subseteq \sum_{j=1}^{r-1} I^{n-p_j} f_j.$$

Note que a localidade do anel só foi necessária para o caso em que $p_r = 0$, quando $J \subseteq I$ é sempre verdade que $p_r > 0$, então temos o resultado para ambos os casos.

$\square$

Teorema 1.2.20. (Valla - Valabrega) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, I e $J = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ ideais de R. Então são equivalentes:*

(1) $f_1^*, f_2^*, \dots, f_r^*$ é uma $gr_I(R)$-sequência.

(2) $f_1, f_2, \dots, f_r$ é uma R-sequência e $I^n \cap J = \sum_{i=1}^{r} I^{n-p_i} f_i$ para todo $n \geq 1$. No qual $p_i = \operatorname{ord}_I(x_i)$.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2). Faremos indução sobre r. Note que da Proposição 1.2.18 só precisamos mostrar que $f_1, f_2, \dots, f_r$ é R-sequência, do isomorfismo dessa mesma proposição, será necessário apenas o caso em que $r = 1$. Claramente $f_1 \in \mathfrak{m}$, pois caso contrário f_1^* seria invertível em $gr_I(R)$, dessa forma temos que $f_1 R \neq R$. Seja $y \in R$ tal que $f_1 y = 0$, suponha que $y \neq 0$, desde que $\cap_{n \geq 0} I^n = 0$ (pois R é local noetheriano), então $y \in I^k \backslash I^{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo $(f_1 + I^{p_1+1})(y + I^{k+1}) = 0$, como f_1^* é $gr_I(R)$-regular, segue que $y \in I^{k+1}$, um absurdo.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Recorreremos mais uma vez ao princípio indutivo. Para $r = 1$. Tome $x + I^{m+1}$ elemento homogêneo de $gr_I(R)$ no qual $(f_1 + I^{p_1+1})(x + I^{m+1}) = 0$, o que implica $f_1 x \in I^{m+p_1+1}$. Assim $f_1 x \in I^{m+p_1+1} \cap (f_1)$, mas por hipótese $f_1 x \in f_1 I^{(m+p_1+1)-p_1}$, da regularidade de f_1 teremos $x \in I^{m+1}$. Logo f_1^* é não divisor de zero de $gr_I(R)$ e ainda mais, como $f_1 \in \mathfrak{m}$, segue que $f_1^* \in \mathfrak{M}$, ou seja, $f_1^* gr_I(R) \neq gr_I(R)$.

Suponha $r > 1$. Pelo Lema 1.2.19 teremos que $I^n \cap (f_1, f_2, \dots, f_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-1} f_j I^{n-p_j}$ para todo $n \geq 1$, logo pela hipótese de indução $f_1^*, f_2^*, \dots, f_{r-1}^*$ é uma $gr_I(R)$-sequência. Através do isomorfismo obtido na Proposição 1.2.18, voltaremos ao caso 1 da indução e finalizamos nossa prova.

$\square$

Proposição 1.2.21. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado de dimensão n e $a_1, a_2, \dots, a_t$ elementos de $\mathfrak{m}$. Então $\dim(M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M) \geq n - t$, com a igualdade acontecendo se, e somente se, $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ pode ser estendido para um sistema de parâmetros de M.*

Demonstração: Para a primeira parte faremos indução sobre t. Seja $t = 1$ e escreva $N = M/a_1 M$. Como M tem dimensão finita (do Teorema da dimensão de Krull), segue que N também terá, assim escolha $\{b_1, b_2, \dots, b_r\} \subseteq \mathfrak{m}$ tal que $\lambda(N/(b_1, b_2, \dots, b_r)N) < \infty$ e $r = \delta_N = \dim N$. Como

$$\frac{N}{(b_1, b_2, \dots, b_r)N} = \frac{(M/a_1 M)}{((b_1, b_2, \dots, b_r)M + a_1 M)/a_1 M} \cong \frac{M}{(a_1, b_1, b_2, \dots, b_r)M},$$

implica que $\lambda(M/(a_1, b_1, \dots, b_r)M) < \infty$, logo $\delta_M \leq \delta_N + 1$, aplicando o Teorema da dimensão de Krull temos $\dim(M/a_1 M) \geq \dim M - 1$.

Suponha agora $t > 1$ e suponha o resultado válido até $t-1$. Defina $N = M/(a_2, \dots, a_t)M$, pelo caso $t = 1$ temos que $\dim(N/a_1 N) \geq \dim N - 1$, por hipótese de indução $\dim N \geq \dim M - (t-1)$. Como sabemos que $N/a_1 N \cong M/(a_1, \dots, a_t)M$, segue que

$$\dim(M/(a_1, \dots, a_t)M) \geq \dim N - 1 \geq \dim M - (t-1) - 1 \geq \dim M - t.$$

Provaremos agora a segunda parte. Suponha que $\dim(M/(a_1, a_2, \ldots, a_t)M) = n-t$, então podemos escolher um sistema de parâmetros $\{a_{t+1}, a_{t+2}, \ldots, a_n\}$ para $M/(a_1, a_2, \ldots, a_t)M$. Seja $N = M/(a_1, a_2, \ldots, a_t)M$. Como N quocientado por $(a_{t+1}, \ldots, a_n)N$ é isomorfo a $M/(a_1, a_2, \ldots, a_n)M$, segue que $\lambda(M/(a_1, a_2, \ldots, a_n)M) < \infty$, ou seja, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ formam um sistema de parâmetros para M.

Reciprocamente, se $a_1, a_2, \ldots, a_t$ pode ser estendido para um sistema de parâmetros $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de M. Definimos $M/(a_1, \ldots, a_t)M = N$, no qual temos um isomorfismo $N/(a_{t+1}, \ldots, a_n)N \cong M/(a_1, a_2, \ldots, a_n)M$, ou seja, $\lambda(N/(a_{t+1}, \ldots, a_n)N) < \infty$. Com isso teremos $\delta_N \leq n - t$, equivalentemente (Teorema da dimensão) $\dim N \leq n - t$, como a desigualdade contrária segue do primeiro caso, logo temos resultado desejado.

$\square$

Teorema 1.2.22. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local noetheriano R. Se $x_1, x_2, \ldots, x_t$ é uma M-sequência, então $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ pode ser estendido a um sistema de parâmetros para M.*

Demonstração: Faremos por indução sobre t. Seja $t = 1$, decorre da Proposição 1.2.21 que $\dim(M/x_1M) \geq \dim M - 1$. Temos que $(x_1) + \operatorname{ann}(M) \subseteq \operatorname{ann}(M/x_1M)$, logo existe um morfismo sobrejetor de anéis

$$\varphi : \frac{R}{(x_1) + \operatorname{ann}(M)} \longrightarrow \frac{R}{\operatorname{ann}(M/x_1M)},$$

que implica $\dim(R/\operatorname{ann}(M/x_1M)) \leq \dim R/((x_1) + \operatorname{ann}(M))$. Defina $S = R/(\operatorname{ann}(M))$. Note que se $y \in R$ e $yx_1 \in \operatorname{ann}(\mathrm{M})$, então para todo $m \in M$ temos $yx_1m = 0$, pelo fato de x_1 ser M-regular segue que $ym = 0$, logo $y \in \operatorname{ann}(M)$, ou seja, a imagem x_1 em S não é divisor de zero em S. Do item (2) do Lema 1.1.23 sabemos que $\dim(S/x_1S) = \dim S - 1$. Como

$$\frac{S}{x_1S} = \frac{(R/\operatorname{ann}(\mathrm{M}))}{((x_1) + \operatorname{ann}(M))/\operatorname{ann}(\mathrm{M})} \cong \frac{R}{(x_1) + \operatorname{ann}(M)},$$

segue que $\dim(M/x_1M) = \dim(R/\operatorname{ann}(M/x_1M)) \leq \dim S - 1 = \dim M - 1$. Dessa forma, $\dim(M/x_1M) = \dim M - 1$ e pela Proposição 1.2.21 temos que x_1 pode ser estendido para um sistema de parâmetros.

Suponha $t > 1$ e o resultado válido até $t - 1$. Seja $N = M/(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1})M$ e por hipótese de indução $x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}$ pode ser estendido para um sistema de parâmetros, logo usando a Proposição 1.2.21 conseguimos que $\dim N = n - (t - 1)$. Desde que por hipótese x_t é não divisor de zero de N, então por uma argumentação similar ao caso $t = 1$ temos $\dim(N/x_tN) = \dim N - 1$. Pelo fato de que N/x_tN ser isomorfo a $M/(x_1, x_2, \ldots, x_t)M$, segue que $\dim(M/(x_1, x_2, \ldots, x_t)M) = \dim N - 1 = n - (t - 1) - 1 = n - t$. Por fim, pela Proposição 1.2.21 segue o resultado.

$\square$

1.2.2 Profundidade e Grade

Note que se R é um anel noetheriano, M um R-módulo e $x_1, x_2, \ldots, x_t$ é uma M-sequência, então temos uma cadeia de inclusões próprias, $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ de ideais de R. Pelo fato de R ser noetheriano podemos estender a sequência original, a uma M-sequência de comprimento máximo. Dito isto, podemos definir o conceito de M-sequência maximal como sendo uma sequência de comprimento máximo. O objetivo dessa subseção é apresentar os invariantes algébricos *grade* e profundidade de um módulo.

Definição 1.2.23. *Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma M-sequência tal que para todo $x_{n+1} \in R$, $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ não é M-sequência, então dizemos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma* **M-sequência maximal**.

Exemplo 1.2.24. *Seja $R = k[x, y, z]/(xz, yz)$, no qual x, y e z são variáveis sobre o corpo k. Afirmamos que $\boldsymbol{x} = 1 - \overline{z}$ e $\boldsymbol{y} = 1 - \overline{x}, 1 - \overline{y}$ são ambas R-sequências maximais. De fato, inicialmente mostraremos que $1 - \overline{z}$ não é divisor de zero de R, para isso seja $\overline{f} \in R$ tal que $(1 - \overline{z})\overline{f} = 0$, isso quer dizer que existem $g, h \in k[x, y, z]$, no qual*

$$(1 - z)f = xzg + yzh.$$

Assim z divide $(1 - z)f$, como z é primo e não divide $(1 - z)$, segue que z divide f, isto é, existe $f_1 \in k[x, y, z]$ em que $f = zf_1$. Fazendo a substituição na equação acima e eliminado o z, temos

$$(1 - z)f_1 = xg + yh,$$

isto é, $(1 - z)f_1$ está no ideal primo (x, y), como $1 - z \notin (x, y)$, segue que

$$f_1 = xg_1 + yh_1,$$

com $g_1, h_1 \in k[x, y, z]$. Logo $f = xzg_1 + yzh_1$, noutras palavras, $\overline{f} = 0$, provando que $1 - \overline{z}$ não é divisor de zero de R.

Note que

$$\frac{R}{(1 - \overline{z})} = \frac{k[x, y, z]/(xz, yz)}{((1 - z) + (xz, yz))/(xz, yz)} \cong \frac{k[x, y, z]}{(1 - z, xz, yz)} \cong k,$$

assim $\boldsymbol{x}$ é R-sequência e mais ainda o ideal $(1 - \overline{z})$ é maximal em R, logo a sequência $\boldsymbol{x}$ não pode ser estendida. Agora fica mais simples provar que $\boldsymbol{y}$ é também uma R-sequência maximal, porque usando argumentos análogos ao caso anterior provamos que $1 - \overline{x}$ não é divisor de zero em R. Como $R/(1 - \overline{x})R \cong k[y]$, segue que $1 - \overline{y}$ não é divisor de zero em $R/(1 - \overline{x})R$. Por fim, basta ver que $R/(1 - \overline{x}, 1 - \overline{y}) \cong k$, novamente pelo caso anterior segue o resultado.

O exemplo acima mostrou que nem sempre duas M-sequências maximais tem o mesmo comprimento. O próximo teorema mostrará que, sobre determinadas condições, teremos a igualdade dos comprimentos. Antes disso precisaremos do seguinte lema.

Lema 1.2.25. *Sejam R um anel, M um R-módulo finitamente gerado e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma M-sequência. Fixe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Suponha que x_{i+1} é $M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M$-regular, então $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n$ é uma M-sequência. Em particular, se a sequência original for maximal, então a sequência alternada será maximal também.*

Demonstração: Note que podemos supor $i = 1$, pois no caso geral bastaria denotar $N = M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M$ e argumentar o teorema para N. Por hipótese, já sabemos que x_2 é regular em M, mostraremos que x_1 é M/x_2M-regular.

Seja $m_1 \in M$ tal que $x_1m_1 \in x_2M$, ou seja, existe $m_2 \in M$ no qual $x_1m_1 = x_2m_2$. Como x_2 é M/x_1M-regular, segue que $m_2 = x_1m_3$ para algum $m_3 \in M$, assim $x_1m_1 = x_1x_2m_3$ e pela regularidade de x_1 temos $m_1 = x_2m_3$, implicando que x_1 é M/x_2M-regular. Como $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M = (x_2, x_1, \ldots, x_{i-1})M$ para todo $i \geq 3$, segue que x_i é $(x_2, x_1, \ldots, x_{i-1})M$-regular para todo $i \geq 3$, provando que a sequência alternada é também uma M-sequência.

Por fim, suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é M-sequência maximal e que $x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ é uma M-sequência para algum $x_{n+1} \in R$. Pelo que acabamos de provar, $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ seria uma M-sequência, o que contraria a maximalidade da sequência original. □

Teorema 1.2.26. *Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R em que $IM \neq M$. Então todas as M-sequências que são maximais, dentre as que estão contidas em I, possuem o mesmo comprimento.*

Demonstração: Sejam $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $\boldsymbol{y} = y_1, y_2, \ldots, y_n$ duas M-sequências contidas em I, provaremos que se $\boldsymbol{x}$ é uma sequência maximal, então $\boldsymbol{y}$ também será. Para isso faremos indução sobre n.

$n = 1$. Como x_1 é M-sequência maximal, segue que I é formado por divisores de zero de M/x_1M. Sabemos que o conjunto dos divisores de zero de M/x_1M é a união de seus primos associados, pelo *Prime Avoidance* existe $P \in \mathrm{Ass}(M/x_1M)$ contendo I, no qual $P = (x_1M : m)$ para algum $m \in M$. Portanto, $Im \subseteq x_1M$, em particular $y_1m = x_1r$ para algum $r \in M$.

Suponha que $r \in y_1M$, então $r = y_1s$ para algum $s \in M$. Dessa forma, $y_1m = x_1y_1s$ e pela regularidade de y_1 teríamos $m = x_1s$, implicando $P = (x_1M : x_1s) = R$, contrariando a primalidade de P, com isso temos que a imagem de r não é zero em M/y_1M. Como $x_1rI = y_1mI$, segue que $x_1rI \subseteq y_1mI \subseteq y_1x_1M$ e pela regularidade de x_1 teremos $rI \subseteq y_1M$. Logo I é formado por divisores de zero de M/y_1M, portanto y_1 é M-sequência maximal.

Suponha $n > 1$. Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definiremos $B_i = M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ e $C_i = M/(y_1, \ldots, y_{i-1})M$, como existem x_i e y_i que são regulares em B_i e C_i respectivamente, segue que I não é formado inteiramente de divisores de zero B_i e C_i, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo

$$I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{P \in \mathrm{Ass}(B_i) \cup \mathrm{Ass}(C_i)} P \right),$$

mais uma vez, pelo *Prime Avoidance*, existe $z_n \in I$ evitando todos esses primos associados. Com isso, z_n é regular em B_i e C_i para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pelo caso 1 da indução, z_n é B_n-sequência maximal, aplicando o Lema 1.2.25 teremos que $z_n, x_1, \ldots, x_{n-1}$ é M-sequência maximal e $z_n, y_1, \ldots, y_{n-1}$ é uma M-sequência. Como $x_1, \ldots, x_{n-1}$ é M/z_nM-sequência maximal, segue da hipótese de indução que $y_1, \ldots, y_{n-1}$ é também uma M/z_nM-sequência maximal, ou seja, $z_n, x_1, \ldots, x_{n-1}$ é M-maximal e do Lema 1.2.25 sabemos que podemos levar o termo z_n ao final da sequência que sua maximalidade será preservada, equivalentemente z_n é $M/(y_1, \ldots, y_{n-1})M$-sequência maximal e pelo caso 1 da indução y_n também será maximal em $M/(y_1, \ldots, y_{n-1})M$, concluindo assim a prova.

□

Através desse teorema podemos definir um novo invariante de um módulo.

Definição 1.2.27. *Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R em que $IM \neq M$. Então definimos o comprimento maximal de uma M-sequência em I, por "grade" de I em M, que será denotado por* $\operatorname{grade}(I, M)$.

Definição 1.2.28. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então o grade de $\mathfrak{m}$ em M é chamado de profundidade de M, que será denotado por* $\operatorname{depth} M$.

A partir de agora, toda vez que estivermos utilizando-se do grade de I em M estará implícito que $IM \neq M$.

Proposição 1.2.29. *Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado. Se I e J são ideais de R em que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, então* $\operatorname{grade}(I, M) = \operatorname{grade}(J, M)$.

Demonstração: Como R é noetheriano, segue que todos os seu ideais são finitamente gerado, assim existe $n \in \mathbb{Z}_+$ no qual $I^n \subseteq J$. Portanto se $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_r$ é uma M-sequência contida em I, então, pelo Corolário 1.2.11, $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_r^n$ é uma M-sequência contida em J. Logo $\operatorname{grade}(I, M) \leq \operatorname{grade}(J, M)$ e por uma argumentação análoga teremos a desigualdade contrária.

□

Proposição 1.2.30. *Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R. Suponha que $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_r$ é uma M-sequência contida em I, então* $\operatorname{grade}(I/\boldsymbol{x}, M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{grade}(I, M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{grade}(I, M) - r$.

Demonstração: A primeira igualdade é trivial, desde que $M/\boldsymbol{x}M$ é tanto um R-módulo, quanto um $R/\boldsymbol{x}$-módulo, por isso faremos apenas a segunda. Como podemos estender $\boldsymbol{x}$ a uma M-sequência maximal contida em I, digamos que $\boldsymbol{z} = x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_k$ seja tal sequência. Do Teorema 1.2.26 temos que $\operatorname{grade}(I, M) = r + k$. Claramente $y_1, y_2, \ldots, y_k$ é uma $M/\boldsymbol{x}M$-sequência, mas ela também será maximal, pois caso contrário, não teríamos a maximalidade de $\boldsymbol{z}$, logo $\operatorname{grade}(I, M/\boldsymbol{x}M) = k$, o que encerra nossa prova. □

Proposição 1.2.31. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um R-módulo, não-nulo, finitamente gerado. Então $\operatorname{depth} M \leq \dim R/P$, para todo $P \in \operatorname{Ass} M$.*

Demonstração: Faremos por indução em $\operatorname{depth} M$. Se $\operatorname{depth} M = 0$ o resultado é trivial. Suponha que $\operatorname{depth} M > 0$, então existe $x \in \mathfrak{m}$ que é M-regular. Como $M \neq 0$, segue que $\operatorname{Ass} M \neq \emptyset$. Seja $P \in \operatorname{Ass} M$ e defina $C = \{Rm \,|\, m \in M \text{ e } Pm = 0\}$. Desde que $C \neq \emptyset$ e M é noetheriano, então C possui um elemento máximo com respeito a inclusão, digamos que Rm seja tal elemento.

Suponha que $m \in xM$, então existe $n \in M$ tal que $m = xn$ e pela regularidade de x teríamos $Pn = 0$, ou seja, $Rn \in C$ e $Rm \subseteq Rn$. Caso $n = my$ para algum $y \in R$, então $(xy - 1)m = 0$, implicando $xy - 1 \in (0 : m)$, o que acarretaria $-1 \in \mathfrak{m}$. Logo $Rm \subsetneq Rn$, contrariando a maximalidade de Rm, sendo assim, $m \notin xM$. Com isso teremos que a imagem de m em M/xM é não-nula e mais ainda é anulada por P, ou seja, P é composto por divisores de zero de M/xM. Como o conjunto dos divisores de zero de M/xM é igual a união dos primos associados de M/xM, segue do *Prime Avoidance* que existe $Q \in \operatorname{Ass}(M/xM)$ no qual $P \subseteq Q$.

Como x foi tomado regular, segue que $x \notin P$, logo

$$\left(\frac{M}{xM}\right)_P = \frac{M_P}{(xM)_P} = \frac{M_p}{M_P} = 0,$$

ou seja, $P \notin \operatorname{Supp}(M/xM)$. Como $\operatorname{Ass}(M/xM) \subseteq \operatorname{Supp}(M/xM)$, segue que Q está no suporte de (M/xM) e com isso $P \subsetneq Q$, implicando $\dim R/P > \dim R/Q$. Por indução $\dim R/Q \geq \operatorname{depth}(M/xM)$ e pela Proposição 1.2.30 temos $\operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth} M - 1$. Assim $\dim R/P > \operatorname{depth} M - 1$, ou seja, $\dim R/P \geq \operatorname{depth} M$.

□

Teorema 1.2.32. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um módulo não nulo finitamente gerado sobre R. Então* $\operatorname{depth} M \leq \dim M$.

Demonstração: Como $\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Supp} M$ e $\dim M = \sup\{\dim(R/P) \ / \ P \in \operatorname{Supp} M\}$, segue o resultado da Proposição 1.2.31. □

1.2.3 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

Agora teremos uma breve noção do que são módulos Cohen-Macaulay. Mostraremos alguns resultados com relação a profundidade e dimensão de tais módulos. Os anéis Cohen-Macaulay serão de fundamental importância no capítulo 3.

Definição 1.2.33. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, M um R-módulo não nulo finitamente gerado. Se* $\operatorname{depth} M = \dim M$*, então dizemos que M é Cohen-Macaulay. O anel R é dito Cohen-Macaulay, sempre que visto como R-módulo ele for Cohen-Macaulay.*

Em geral, se R é um anel noetheriano, dizemos que M é Cohen-Macaulay sempre que $M_{\mathfrak{m}}$ é Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M$. Por simplicidade, sempre que escrevermos "$(R, \mathfrak{m})$ anel Cohen-Macaulay", estará implícito que o anel em questão é local noetheriano.

Exemplo 1.2.34. *Seja $k[\![x, y]\!]$ o anel de séries formais nas variáveis x e y sobre o corpo k. Defina $R = K[\![x, y]\!]/(xy, x^2)$. Afirmamos que R não é Cohen-Macaulay. De fato, pois $(x, y)R$ é o maximal de R, que por sua vez é anulado por x, ou seja, todo elemento não-invertível de R é divisor de zero, implicando* $\operatorname{depth} R = 0$*, e como $(x)R \subseteq (x, y)R$ é uma cadeia de primos em R, segue que* $\dim R \geq 1$.

Teorema 1.2.35. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um módulo Cohen-Macaulay não nulo, no qual M é finitamente gerado sobre R. Então*

(1) $\dim(R/P) = \operatorname{depth} M$*, para todo $P \in \operatorname{Ass} M$;*

(2) $\operatorname{grade}(I, M) = \dim M - \dim(M/IM)$*, para todo $I \subseteq \mathfrak{m}$;*

(3) $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_r$ é uma M-sequência se, e somente se, $\dim(M/\boldsymbol{x}M) = \dim M - r$.

Demonstração:

(1) Seja $P \in \operatorname{Ass} M$, pela Proposição 1.2.31 sabemos que $\operatorname{depth} M \leq \dim(R/P)$, pelo fato de que $\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Supp} M$ temos $\dim(R/P) \leq \dim M$, como $\operatorname{depth} M = \dim M$, então segue o resultado.

(2) Faremos por indução em grade (I, M). Se grade $(I, M) = 0$, então I consiste de divisores de zero de M. Como o conjunto dos divisores de zero de M é a união de seus primos associados, segue do *Prime Avoidance* que existe $P \in \operatorname{Ass} M$ tal que $I \subseteq P$. Sabemos que $\operatorname{Supp}(M/IM) = \operatorname{Supp}(M) \cap V(I)$, então $P \in \operatorname{Supp}(M/IM)$, logo $\dim(R/P) \leq \dim(M/IM)$ e do item anterior temos $\dim(R/P) = \operatorname{depth} M$. Logo, o resultado segue do fato que M é Cohen-Macaulay.

Se grade $(I, M) > 0$, então escolha $x \in I$ que seja M-regular. Seja $N = M/xM$, então podemos ver que $N/IN \cong M/IM$. Pela Proposição 1.2.21 e o Teorema 1.2.22 teremos que $\dim N = \dim M - 1$. Da Proposição 1.2.30, grade $(I, M/xM) =$ grade $(I, M) - 1$ e depth $(M/xM) = \operatorname{depth} M - 1$ e assim aplicando a hipótese de indução

$$\operatorname{grade}(I, N) = \dim N - \dim(N/IN),$$

isto é,

$$\operatorname{grade}(I, M) - 1 = \dim M - 1 - \dim(M/IM),$$

nos dando o resultado.

(3) Se $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_r$ é uma M-sequência, então o resultado segue da Proposição 1.2.21 e do Teorema 1.2.22.

A recíproca será feita por indução em r. Se $r = 1$, então do item (2) temos grade $(x_1, M) = 1$, ou seja, (x_1) possui um elemento M-regular, que será da forma x_1k para algum $k \in R$. Se $m \in M$ é tal que $x_1m = 0$, então $x_1km = 0$ e pela regularidade de x_1k segue que $m = 0$, ou seja, x_1 é regular em M. Suponha $r > 1$ e defina $N = M/(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})M$. Sabemos da Proposição 1.2.21 que $\dim N \geq \dim M - (r - 1)$, caso a desigualdade fosse estrita teríamos

$$\dim(M/\boldsymbol{x}M) = \dim(N/x_rN) \geq \dim N - 1 > \dim M - r = \dim(M/\boldsymbol{x}M),$$

que é um absurdo, logo $\dim(M/(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})M) = \dim N = \dim M - (r - 1)$ e por indução $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ é uma M-sequência. Assim

$$\dim(N/x_rN) = \dim M/\boldsymbol{x}M = \dim M - r = \dim M - (r - 1) - 1 = \dim N - 1,$$

pelo caso 1 da indução, segue que x_r é N-regular. $\square$

Corolário 1.2.36. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um R-módulo Cohen-Macaulay finitamente gerado de dimensão d. Suponha que $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_r$ é uma M-sequência, então $M/\boldsymbol{x}M$ é um R-módulo Cohen-Macaulay de dimensão d-r.*

Demonstração: Pelo item (3) da proposição anterior sabemos que $\dim(M/\boldsymbol{x}M) = \dim M - r$. Da Proposição 1.2.30 temos depth $(M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{depth} M - r$. Por fim, como M é Cohen-Macaulay segue o resultado.

$\square$

1.3 Elementos Superficiais

Nesse seção falaremos brevemente sobre elementos superficiais. O principal resultado para esse conceito será exibido no capítulo 2, em que definiremos sequências superficiais e a partir delas conseguiremos uma $gr_I(R)$-sequência. Outro resultado obtido com elementos superficiais é com respeito a reduções minimais, que também será discutido no capítulo 2.

Definição 1.3.1. *Sejam R uma anel, I um ideal de R e M um R-módulo. Dizemos que $x \in I$ é um* **elemento superficial** *de I com respeito a M, se existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq c$, temos $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^c M = I^n M$. Se M=R, dizemos apenas que x é elemento superficial de I.*

Claramente para todo $x \in I$ e $n \geq c$ temos $I^n M \subseteq (I^{n+1}M :_M x) \cap I^c M$. Então, em nossos estudos futuros, só iremos nos preocupar com a inclusão contrária. Quando mencionarmos da superficialidade de x, estaremos nos referindo à x ser elemento superficial de I com respeito a M.

Exemplo 1.3.2. *Seja $R = k[x]/(x^2)$, no qual x é uma variável sobre o corpo k. Se definirmos $I = (x)R$, então afirmamos que todo elemento de I é superficial. De fato, se $a \in I$, então basta tomar $c = 2$, pois para todo $n \geq c$ teremos $(I^{n+1} : a) \cap I^2 = (0 : a) \cap (0) = (0) = I^n$. Note que esse exemplo é facilmente generalizado, de forma que qualquer elemento de um ideal nilpotente I de um anel R é superficial com respeito a I, basta escolhermos um c tal que $I^c = 0$.*

Proposição 1.3.3. *Sejam R anel noetheriano, I ideal de R e $x \in I \backslash I^2$. Defina x^* a imagem de x em $gr_I(R)$. Então x é superficial para I se, e somente se, $(0 :_{gr_I(R)} x^*)_n = 0$ para todo $n >> 0$.*

Demonstração: Primeiramente, suponha que x seja superficial para I, então existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $(I^{n+1} : x) \cap I^c = I^n$ para todo $n \geq c$. Seja $a + I^{n+1}$ elemento homogêneo de $gr_I(R)$ em que $n \geq c$ e $(a + I^{n+1})(x + I^2) = 0$. Logo $ax \in I^{n+2}$ e pela superficialidade de x, segue que $a \in I^{n+1}$, ou seja, $(0 :_{gr_I(R)} x^*)_n = 0$ para todo $n \geq c$.

Reciprocamente, suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ no qual $(0 :_{gr_I(R)} x^*)_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. Seja $n \geq n_0$, suponha que existe $y \in (I^{n+1} : x) \cap I^{n_0} \backslash I^n$. Defina $k = \mathrm{ord}_I(y)$, assim $n_0 \leq k < n$ e em particular $(0 :_{gr_I(R)} x^*)_k = 0$. Como $xy \in I^{n+1}$ e $n \geq k + 1$, segue que $xy \in I^{k+2}$. Logo $(x + I^2)(y + I^{k+1}) = xy + I^{k+2} = 0$, implicando que $y + I^{k+1}$ está em $(0 :_{gr_I(R)} x^*)_k$, ou seja, $y \in I^{k+1}$ um absurdo.

□

Proposição 1.3.4. *Sejam R um anel, I um ideal de R tal que todas as suas potências são distintas. Se $x \in I$ é um elemento superficial para I, então $x \notin I^2$. Em particular, se R for um anel local noetheriano, em que I seja ideal próprio não nilpotente, então todo elemento superficial de I não está em I^2.*

Demonstração: Suponha que $x \in I^2$ seja elemento superficial de I, então existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq c$ teremos $(I^{n+1} : x) \cap I^c = I^n$. Escolhendo $n = c + 1$ obtemos $(I^{c+2} : x) \cap I^c = I^{c+1}$. Seja $y \in I^c$, assim $yx \in I^c I^2 = I^{c+2}$, isto é, $I^c \subseteq (I^{c+2} : x) \cap I^c = I^{c+1}$, implicando $I^c = I^{c+1}$, contrariando o fato de I ter todas as suas potências distintas.

Suponha que R é anel local noetheriano e que I não é nilpotente. Caso tivéssemos $I^n = I^{n+1}$ para algum $n > 0$, então por Nakayama $I^n = 0$, contrariando o fato de I não ser nilpotente. Logo I tem todas as suas potências distintas, e segue o resultado. □

Proposição 1.3.5. *Sejam R um anel, I um ideal de R e M um R-módulo. Suponha que $x \in I$ é um elemento superficial para I com respeito a M. Então para todo $m \geq 1$, x^m é um elemento superficial para I^m com respeito a M.*

Demonstração: Por hipótese, existe um c natural no qual $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^c M = I^n M$ para todo $n \geq c$. Afirmamos que para todo $n \geq c$ teremos $(I^{m(n+1)}M :_M x) \cap I^{mc}M = I^{mn}M$. Para ver isso, tome $r \in (I^{m(n+1)}M :_M x) \cap I^{mc}M$, faremos indução em $m - i$, em que provaremos que $rx^i \in I^{m(n+1)-m+i}M$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Se $m - i = 0$, então $i = m$, logo pela escolha do r temos $rx^m \in I^{m(n+1)-m+m}M$. Suponha $m - i = k$ com $k > 0$, implicando $i = m - k$. Pelo princípio de indução temos que $rx^{m-k+1} \in I^{m(n+1)-k+1}M$, ou ainda, $rx^{m-k} \in (I^{m(n+1)-k+1}M :_M x)$. Como $r \in I^{cm}M$, segue que $rx^{m-k} \in I^c M$, o que nos fornece $(I^{m(n+1)-k+1}M :_M x) \cap I^{cm}M = I^{m(n+1)-k}M$. Sendo assim, teremos $rx^{m-k} \in I^{m(n+1)-k}M$, provando a indução. Por fim se tomarmos $m - i = m$ conseguiremos $r \in I^{mn}M$.

□

Exemplo 1.3.6. *Sejam $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2(x+1))$ e $I = (\overline{x}, \overline{y})$ ideal de R. Então $\overline{x} \in I$ é um elemento superficial com respeito a I. De fato, seja $c = 0$ e iremos mostrar que $(I^{n+1} : \overline{x}) \subseteq I^n$. Se $n = 0$ é trivial, pois $(I^{n+1} : \overline{x}) \subseteq R = I^0$. Suponha $n > 0$. Seja $f \in (I^{n+1} : \overline{x})$, isto é, $f\overline{x} \in I^{n+1}$, logo existem $h_i \in R$ tal que*

$$f\overline{x} = h_{n+1}\overline{x}^{n+1} + h_n\overline{x}^n\overline{y} + \ldots + h_2\overline{x}^2\overline{y}^{n-1} + h_1\overline{x}\,\overline{y}^n + h_0\overline{y}^{n+1}$$

e como $n + 1 \geq 2$, segue que $h_0\overline{y}^{n+1} = h_0\overline{y}^{n+1-2}\overline{y}^2 = h_0\overline{y}^{n-1}\overline{x}^2(\overline{x} + 1)$, dessa forma reescrevemos a equação acima com

$$f\overline{x} = h_{n+1}\overline{x}^{n+1} + h_n\overline{x}^n\overline{y} + \ldots + h_2\overline{x}^2\overline{y}^{n-1} + h_1\overline{x}\,\overline{y}^n + h_0\overline{y}^{n-1}\overline{x}^2(\overline{x} + 1),$$

evidenciando o $\overline{x}$, teremos

$$f\overline{x} = \overline{x}(h_{n+1}\overline{x}^n + h_n\overline{x}^{n-1}\overline{y} + \ldots + (h_2 + h_0(\overline{x} + 1))\overline{xy}^{n-1} + h_1\overline{y}^n).$$

Pelo fato de R ser domínio e $\overline{x}$ não ser zero em R, então teremos $f \in I^n$.

No exemplo acima, conseguimos uma equação mais "limpa"para o cálculo de elementos superficiais, um dos fatores cruciais foi o fato desse elemento tomado não ser divisor de zero. Veremos no próximo lema que isso não é uma particularidade desse exemplo.

Lema 1.3.7. *Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R, M um R-módulo finitamente gerado e $x \in I$ um elemento não divisor de zero de M. Então x é elemento superficial de I com respeito a M se, e somente se, para todo n suficientemente grande $(I^n M :_M x) = I^{n-1}M$.*

Demonstração: Suponha que $(I^n M :_M x) = I^{n-1}M$ para todo n suficientemente grande, reescrevendo de forma conveniente teremos $(I^{n+1}M :_M x) = I^n M$. Tome c o menor dos naturais que satisfazem essa igualdade, assim para todo $n \geq c$ teremos $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^c M = I^n M \cap I^c M = I^n M$.

Reciprocamente suponha que x é um elemento superficial de I com respeito a M. Tomando o submódulo xM de M, podemos aplicar o Lema de Artin-Rees para garantir a existência de um $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n >> 0$, $I^n M \cap xM = I^{n-k}(I^k M \cap xM) \subseteq xI^{n-k}M$.

Note que se $r \in x(I^n M :_M x)$, então $r = xm$ com $m \in (I^n M :_M x)$, ou seja, $r \in I^n M$, implicando $x(I^n M :_M x) \subseteq I^n M \cap xM \subseteq xI^{n-k}M$. Agora se $y \in (I^n M :_M x)$, então $xy \in xI^{n-k}M$, isto é, $xy = xm$, com $m \in I^{n-k}M$. Pelo fato de x não ser divisor de zero temos que $y = m$, implicando $(I^nM :_M x) \subseteq I^{n-k}M$. Assim caso tomarmos $n \geq c + k$, teremos $(I^nM :_M x) \cap I^cM = (I^nM :_M x)$ e ainda $(I^nM :_M x) \cap I^cM = I^{n-1}M$, sendo esta última igualdade decorrente da superficialidade de x. Combinando essas duas igualdades temos o desejado. $\square$

Lema 1.3.8. *Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Suponha que $\bigcap_{n\geq 0}(I^nM) = 0$ e que I contenha um elemento não divisor de zero em M. Então qualquer elemento superficial de I com respeito a M não é divisor de zero em M.*

Demonstração: Seja $x \in I$ elemento superficial de I com respeito a M, então existe $c \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq c$ temos $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^cM = I^nM$. Tome $r \in (0 :_M x)I^c$, logo $rx = 0$, implicando $(0 :_M x)I^c \subseteq (I^{n+1}M :_M x) \cap I^cM$, para todo $n \geq c$. Assim $(0 :_M x)I^c \subseteq I^nM$, para todo $n \geq c$, como $I^{n+1}M \subseteq I^nM$ para todo $n \geq 0$, então $(0 :_M x)I^c \subseteq I^nM$ para todo $n \geq 0$. Por hipótese $\bigcap_{n\geq 0}(I^nM) = 0$, então $(0 :_M x)I^c = 0$.

Seja $y \in I$ o elemento não divisor de zero em M, então para qualquer $r \in (0 :_M x)$, temos $ry^c = 0$, implicando $r = 0$. Dessa forma $(0 :_M x) = 0$, noutras palavras, x não é divisor de zero de M. $\square$

Note que a hipótese de que $\bigcap_{n\geq 0}(I^nM) = 0$ foi essencial. Segue abaixo um contra exemplo em que falha a tese.

Exemplo 1.3.9. *Sejam x e y variáveis sobre o corpo k. Defina $R = k[x, y]/(x - x^2y^2)$, $I = (\overline{y})$ e $r = (1 - \overline{xy}^2)\overline{y}$. Então I possui um elemento não divisor de zero, $\bigcap_{n\geq 0}(I^n) \neq 0$, r é divisor de zero, porém r é elemento superficial de I. De fato, primeiramente note que $r.\overline{x} = 0$ e $\overline{x}$ é diferente de zero em R. Em seguida, se $\overline{f}\overline{y} = 0$, para algum $\overline{f} \in R$, então existe $h \in k[x, y]$ tal que $fy = (x - x^2y^2)h$, dessa igualdade e do fato de y ser primo, segue que $h(x, y) = yh_1$ no qual $h_1 \in k[x, y]$, fazendo as devidas substituições e cortes, ficamos com*

$$f = (x - x^2y^2)h_1,$$

logo $\overline{f} = 0$, implicando $\overline{y}$ não ser divisor de zero de R.

Para mostrar que $\bigcap_{n\geq 0}(I^n) \neq 0$, vamos usar indução sobre n, para provar que $\overline{x} \in I^n$ para todo $n \geq 0$. Se $n = 0$ então trivialmente $\overline{x} \in R = I^0$. Suponha que $n > 0$ e o resultado válido para até $n - 1$, logo $\overline{x} \in I^{n-1}$, assim $\overline{x}.\overline{y} \in I^n$, logo $\overline{x}^2\overline{y}^2 \in I^n$, o que implica $\overline{x} \in I^n$.

Por fim, provaremos que r é elemento superficial de I. Tome $c = 2$, se $n = 2$ então claramente $(I^3 : r) \cap I^2 \subseteq I^2$. Suponha $n > 2$, se $\overline{f} \in (I^{n+1} : r) \cap I^2$, então existem $\overline{g}, \overline{h} \in R$ tais que $\overline{f} = \overline{y}^2\overline{g}$ e $\overline{f}r = \overline{h}\overline{y}^{n+1}$, equivalentemente

$$y^2g(y - xy^3) - y^{n+1}h = (x - x^2y^2)j,$$

para algum $j \in k[x, y]$, isolando o y temos

$$y^3(g(1 - xy^2) - y^{n-2}h) = (x - x^2y^2)j,$$

logo, pela primalidade de y, existe $j_1 \in k[x, y]$ tal que $j = y^3j_1$. Cancelando y^3 e reorganizando a igualdade teremos

$$g = x(y^2g + j_1 + j_1xy^2) + y^{n-2}h,$$

noutras palavras $g \in (x, y^{n-2})$, assim $\overline{g} \in (\overline{x}, \overline{y}^{n-2}) = I^{n-2}$, essa última igualdade segue do fato que $\overline{x} \in I^{n-2}$. Dessa forma $\overline{f} \in I^2I^{n-2} = I^n$.

Lema 1.3.10. *Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R, $x \in R$ e M um R-módulo finitamente gerado. Suponha que x não é divisor de zero em M ou que existe um ideal J de R em que $I \subseteq \sqrt{J}$, $\bigcap_{n\geq 0}(J^n M) = 0$ e x é elemento superficial de J com respeito a M. Então existe $c \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq c$,*

$$(I^n M :_M x) \subseteq (0 :_M x) + I^{n-c}M \qquad e \qquad (0 :_M x) \cap I^c M = 0.$$

Mais ainda, se x é superficial para I, então para todo n suficientemente grande, teremos $(I^n M :_M x) = (0 :_M x) + I^{n-1}M$.

Demonstração: Pelo Lema de Artin-Rees, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$, teremos $I^n M \cap xM \subseteq xI^{n-k}M$. Desde que $x(I^n M :_M x) \subseteq I^n M \cap xM$, então teremos $x(I^n M :_M x) \subseteq xI^{n-k}M$. Se $r \in (I^n M :_M x)$, então $rx = mx$ com $m \in I^{n-k}M$, assim $(r-m)x = 0$, dito de outra forma $(r-m) \in (0 :_M x)$. Como $r = (r-m) + m$, segue que $(I^n M :_M x) \subseteq (0 :_M x) + I^{n-k}M$.

Caso x não seja divisor de zero em M teremos $(0 :_M x) = 0$, ou seja, $(0 :_M x) \cap I^k M = 0$ e $(I^n M :_M x) \subseteq I^{n-k}M$.

Suponha agora que x é superficial para J com respeito a M e que exista um $m > 0$ em que $I^m \subseteq J$. Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $(J^n M :_M x) \cap J^c M = J^{n-1}M$ e defina $e = cm + k$. Do primeiro parágrafo concluímos que $(I^n M :_M x) \subseteq (0 :_M x) + I^{n-e}M$, para todo $n \geq e$. Para todo $n \geq 0$ temos $(0 :_M x) \subseteq (J^n M :_M x)$ e $I^e M = I^{cm+k}M = I^{mc}I^k M \subseteq J^c I^k M \subseteq J^c M$. Logo $(0 :_M x) \cap I^e M \subseteq (J^n M :_M x) \cap J^c M = J^{n-1}M$ para todo n. Como por hipótese $\bigcap_{n\geq 0} J^n M = 0$, segue que $(0 :_M x) \cap I^e M = 0$.

Para a segunda parte, podemos considerar $I = J$ e $n \geq e + c$. Pelo o que acabamos de mostrar

$$(I^n M :_M x) \subseteq (0 :_M x) + I^{n-e}M \subseteq (0 :_M x) + I^c M.$$

Nos dando

$$\begin{aligned}(I^n M :_M x) &= ((0 :_M x) + I^c M) \cap (I^n M :_M x) \\ &= (0 :_M x) + (I^c M) \cap (I^n M :_M x) \\ &= (0 :_M x) + I^{n-1}M.\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.11. *Seja $R = (\mathbb{Z}_2[x,y]/(xy(x+y)))_{(x,y)}$. Então afirmamos que $I = (x,y)R$ não possui elementos superficiais. Suponha o contrário, isto é, existe $r \in I$ que seja superficial para I. Note que R é um anel local noetheriano e que I não é nilpotente. Logo pela Proposição 1.3.4 temos que $r \notin I^2$, ou seja, a componente de grau 1 de r é não nula. Por simetria e possivelmente mudança de variáveis, podemos assumir que a parte linear de r está em $(x)R$. Podemos escrever $r = ax + by^2$, com $a, b \in \mathbb{Z}_2[x,y]$. Para todo $n > \max\{2, c\}$ teremos $y^{n-2}(x+y)r \in I^{n+1}$, mas $y^{n-2}(x+y) \in I^c \setminus I^n$.*

Como acabamos de ver, elementos superficiais nem sempre existem. O próximo teorema fornecerá condições para que tais elementos existam.

Proposição 1.3.12. *Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Então:*

(1) Existe $m \in \mathbb{Z}_+$, tal que I^m possui elemento superficial x com respeito a M. Também existirá um $c \in \mathbb{N}$, no qual para todo $n \geq \max\{m, c\}$ temos $(I^n M :_M x) \cap I^c M = I^{n-m} M$;

(2) Se R tem corpo residual infinito, então no item anterior podemos tomar $m = 1$;

(3) Se $(R, \mathfrak{m})$ é anel local noetheriano com infinito corpo residual, então I tem um elemento superficial com respeito a M. Nesse caso, se considerarmos a topologia de Zariski, garantiremos a existência de um aberto não-vazio U de $I/\mathfrak{m}I$ com a seguinte propriedade, sempre que $r \in I$ e sua imagem em $I/\mathfrak{m}I$ está em U, então r é superficial para I com respeito a M.

Demonstração: Note que $gr_I(M)$ é um $gr_I(R)$-módulo finitamente gerado. Considere a decomposição primária do zero em $gr_I(M)$ por $0 = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_r$. Sendo assim, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ teremos que $P_i = \sqrt{(N_i :_{gr_I(R)} gr_I(M))}$ é ideal primo de $gr_I(R)$. Sem perda de generalidade, suponha que $P_1, P_2, \ldots, P_s$ contenha todos os elementos de grau positivo de $gr_I(R)$ e que $P_{s+1}, P_{s+2}, \ldots, P_r$ não contenha. Dessa forma, $I/I^2 \subseteq P_j$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, logo existe $n_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\frac{I^{n_j}}{I^{n_j+1}} gr_I(M) = \bigoplus_{i \geq 0} \frac{I^{n_j+i} M}{I^{n_j+i+1} M}$$

vai estar contido em N_j. Em particular se $c = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_s\}$, então $I^c M / I^{c+1} M \subseteq N_j$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

O *Prime Avoidance* garante a existência de um elemento positivo $h = x + I^{m+1}$, com $x \in I^m$, em que $h \notin \bigcup_{i>s} P_i$. Caso R tenha corpo residual infinito, então podemos tomar esse elemento de grau 1, ou seja, $m = 1$.

Faremos por contradição. Sejam $n \geq \max\{c, m\}$ e $y \in (I^n M :_M x) \cap I^c M \setminus I^{n-m} M$. Pela escolha do y vai existir um $k \in \mathbb{N}$, no qual $y \in I^k M \setminus I^{k+1} M$, então $c \leq k < n - m$. Note que $(x + I^{m+1})(y + I^{k+1} M) = (xy + I^{m+k+1} M) = 0$, pois $xy \in I^n M$ e $n > k + m$. Da forma que foi escolhido $x + I^{m+1}$ e pelo fato de N_j ser P_j-primário para todo $j \in \{s+1, s+2, \cdots, r\}$, então teremos $y + I^{k+1} M \in N_{s+1} \cap N_{s+2} \cap \ldots \cap N_r$. Pela escolha de c, conseguiremos $y + I^{k+1} M \in N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_s$. Logo $y + I^{k+1} M = 0$, ou seja, $y \in I^{k+1} M$, contradizendo a escolha de k.

Agora com o que acabamos de provar no parágrafo anterior, se $n \geq \max\{c, m\}$ então $nm \geq \max\{c, m\}$, assim $(I^{nm} M :_M x) \cap I^c M = I^{mn-m} M$, que podemos reescrever de outra forma $((I^m)^n M :_M x) \cap I^c M = (I^m)^{n-1} M$. Logo os itens (1) e (2) estão provados.

Por fim, suponha que $(R, \mathfrak{m})$ é anel local noetheriano e com corpo residual infinito. Seja $I = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, como vimos no primeiro capítulo deste trabalho, existe um morfismo sobrejetor de R-álgebras graduadas $\varphi : R[x_1, x_2, \ldots, x_r] \longrightarrow gr_I(R)$, no qual $x_i \to a_i$. Assim a imagem de P_j em $I/\mathfrak{m}I$ é definida por

$$\frac{\varphi^{-1}(P_j) \cap I + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}.$$

Afirmamos que se $j \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}$, então os espaços acima são $(R/\mathfrak{m})$- espaços vetoriais próprios de $I/\mathfrak{m}I$. De fato, pois caso contrário teríamos $\varphi^{-1}(P_j) \cap I + \mathfrak{m}I = I$ e pelo Lema de Nakayama, $I = \varphi^{-1}(P_j) \cap I$, ou seja, $I \subseteq \varphi^{-1}(P_j)$. Portanto, $\varphi(I) = I/I^2 \subseteq P_j$ e como os elementos positivos de $gr_I(R)$ é gerado por I/I^2, segue que P_j contém todos os elementos de grau positivo, o que é um absurdo pela escolha do j.

Como $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então o aberto de Zariski evitando todos esses subespaços será não vazio. Pela construção dos primos $P_{s+1}, P_{s+2}, \ldots, P_r$ teremos a prova do item (3). $\square$

Lema 1.3.13. *Seja I um ideal de um anel noetheriano R. Suponha que $gr_I(R)$ tem um elemento não divisor de zero de grau positivo, então $(I^{n+1} : I) = I^n$, para todo n suficientemente grande.*

Demonstração: Seguindo os passos da demonstração da Proposição 1.3.12 (para $M = R$), podemos escolher $h = x + I^{m+1}$ evitando todos os primos da decomposição do zero, mais ainda, como $gr_I(R)$ tem um elemento não divisor de zero de grau positivo, então podemos tomar h fora de todos os primos associados de $gr_I(R)$. Dessa forma não existe primo, da decomposição do zero, contendo todos os elementos de grau positivo de $gr_I(R)$, sendo assim podemos tomar $c = 0$.

Seja $n \geq m$ e $y \in (I^{n+1} : I)$, então $yx \in yI^m$, pois $x \in I^m$. Note que

$$yI^m = yII^{m-1} \subseteq I^{n+1}I^{m-1} = I^{n+m},$$

implicando $y \in (I^{m+n} : x)$. Pela Proposição 1.3.12, $(I^{m+n} : x) = I^n$, logo $y \in I^n$. Como a inclusão contrária é trivial, segue o resultado desejado. $\square$

Corolário 1.3.14. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano com corpo residual infinito. Sejam I ideal de R e $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ideais primos de R não contendo I. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então existe um elemento superficial para I com respeito a M, no qual esse elemento não está contido em P_i, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.*

Demonstração: Seja U o aberto (topologia de Zariski) de $I/\mathfrak{m}I$ que conseguimos do item (3) da Proposição 1.3.12. Defina

$$W_i = \frac{P_i \cap I + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$$

o subespaço vetorial de $I/\mathfrak{m}I$. Afirmamos que W_i é subespaço próprio de $I/\mathfrak{m}I$, pois caso contrário teríamos $I = P_i \cap I + \mathfrak{m}I$ e por Nakayama, $I = P_i \cap I$, implicando $I \subseteq P_i$.

Como $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então $W = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_r$ é subespaço próprio de $I/\mathfrak{m}I$. Sendo assim $U' = (I/\mathfrak{m}I) \setminus W$ é aberto não-vazio. Como dois abertos quaisquer, ambos não-vazios na topologia de Zariski, tem interseção não vazia, então $U \cap U' \neq \emptyset$. Segue da construção de U' que, se $x \in I$ e $x + \mathfrak{m}I \in U \cap U'$, então x é superficial para I com respeito a M, mais ainda $x \notin P_i$. $\square$

Capítulo 2

Redução

Neste capítulo trabalharemos o tema principal desse trabalho, que são reduções de um ideal. Esse conceito foi inicialmente apresentado por Rees e Northcott no ano de 1954. Antes de tudo, estudaremos o fecho integral de ideais, que está diretamente relacionado com tema do trabalho. Na sequência, discutiremos sobre reduções de um ideal, apresentando suas propriedades básicas. Na Seção 2.3 estudaremos a álgebra de Rees, definiremos a fibra especial e observaremos que conexões podemos fazer com outras seções. Em seguida, trataremos de reduções que são minimais com respeito a inclusão, veremos quais condições precisaremos ter para que essas reduções existam. Por fim, retornaremos ao assunto da Seção 1.3, no qual tentaremos estabelecer critérios para que uma redução minimal seja gerada por uma sequência superficial.

2.1 Fecho Integral de um Ideal

O conceito de fecho integral de um ideal foi apresentado inicialmente por Zariski e Krull na década de 30. Esse objeto tem papel fundamental na Geometria Algébrica e Álgebra Comutativa, principalmente no estudo de reduções de um ideal, multiplicidade, teoria da singularidade e da Álgebra de Rees de um ideal.

Nessa seção iremos fornecer a definição de fecho integral de um ideal, bem como falaremos de suas propriedades básicas. Veremos que esse conceito se comporta bem diante de localizações e morfismos fielmente planos. Mostraremos também que para o estudo do fecho integral de um ideal, podemos considerar, sem perda de generalidade, que o anel em que se encontra o ideal seja um domínio.

Definição 2.1.1. *Seja I um ideal de um anel R. Um elemento $r \in R$ é dito* **integral** *sobre I se existe um inteiro positivo n e elementos $a_j \in I^j$, $j = 1, \ldots, n$ tal que:*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r^1 + a_n = 0.$$

A equação acima é chamada de uma **equação de dependência integral** de r sobre I de grau n.

O conjunto de todos os elementos de R que são integrais sobre I é chamado de **fecho integral** de I, e é denotado por $\overline{I}$. Um ideal I é chamado de **integralmente fechado** se $I = \overline{I}$. Se $I \subseteq J$ são ideais tal que $J = \overline{I}$, dizemos que J é **integral** sobre I.

Se I é um ideal tal que I^n é integralmente fechado, para todo inteiro positivo n, então I é dito ser um **ideal normal**.

Exemplo 2.1.2. *Seja R um anel, então para quaisquer $x, y \in R$, $xy \in \overline{(x^2, y^2)}$. Para isso tome $n = 2$, $a_1 = 0$ e $a_2 = -x^2y^2$. Assim $(xy)^2 + a_1(xy) + a_2 = 0$ é uma equação de dependência integral de xy sobre (x^2, y^2).*

Proposição 2.1.3. *Sejam R um anel, J e I ideais de R. Temos as seguintes propriedades básicas:*

(1) $I \subseteq \overline{I}$;

(2) Se $I \subseteq J$, então $\overline{I} \subseteq \overline{J}$;

(3) $\overline{I} \subseteq \sqrt{I}$;

(4) Ideais radicais (consequentemente primos) são integralmente fechados;

(5) $\sqrt{0} \subseteq \overline{I}$;

(6) Se $I = \overline{I}$ e $J = \overline{J}$, então $I \cap J = \overline{I \cap J}$;

*(7)Se $R \xrightarrow{\varphi} S$ é um homomorfismo de anéis, então $\varphi(\overline{I}) \subseteq \overline{\varphi(I)S}$. Chamamos essa propriedade de **Persistência**;*

*(8) Se $R \xrightarrow{\varphi} S$ é um homomorfismo de anéis e L é um ideal integralmente fechado de S, então $\varphi^{-1}(L)$ é integralmente fechado sobre R. Essa propriedade é chamada de **Contração**;*

(9) Se R é subanel de S e L um ideal integralmente fechado de S, então $L \cap R$ é um ideal integralmente fechado de R.

Demonstração:

(1) Para isso, note que se $r \in I$, então tomando $n = 1$ e $a_1 = -r$ teremos uma equação de dependência integral de r sobre I.

(2) Se $r \in \overline{I}$, então qualquer equação de dependência integral de r sobre I teremos $a_k \in I^k \subseteq J^k$ para todo k, logo a mesma equação também será de dependência integral de r sobre J.

(3) Note que se $r \in \overline{I}$, então qualquer equação de dependência integral de r sobre I teremos $r^n \in (a_1, a_2, \ldots, a_n) \subseteq I$, logo $r \in \sqrt{I}$.

(4) Basta aplicar (1) e (3).

(5) Isso ocorre porque se $r \in \sqrt{0}$, então $r^n = 0$ para algum $n > 0$, mas isso é uma equação de dependência integral de r sobre I.

(6) O fato de que $I \cap J \subseteq \overline{I \cap J}$ segue diretamente de (1). Se tomarmos $r \in \overline{I \cap J}$, então qualquer equação de dependência integral de r sobre $I \cap J$, será também equação de dependência integral de r sobre I e de r sobre J, ou seja, $r \in \overline{I} \cap \overline{J} = I \cap J$.

(7) Basta aplicar φ numa equação de dependência integral de um elemento r sobre I e conseguiremos uma equação de dependência integral $\varphi(r)$ sobre $\varphi(I)S$.

(8) O fato de que $\varphi^{-1}(L) \subseteq \overline{\varphi^{-1}(L)}$ segue trivialmente da propriedade (1). Se r é integral sobre $\varphi^{-1}(L)$, então aplicando φ numa equação de dependência integral de r sobre $\varphi^{-1}(L)$, obteremos uma equação de dependência de $\varphi(r)$ sobre L. Como por hipótese $\overline{L} = L$, segue que $\varphi(r) \in \overline{L} = L$, logo $r \in \varphi^{-1}(L)$.

(9) É um caso particular do item (8). □

Exemplo 2.1.4. *O ideal (x^2) do anel de polinômios $k[x, y]$, no qual k é um corpo, é integralmente fechado. Pelo item (1) da Proposição 2.1.3, temos que $(x^2) \subseteq \overline{(x^2)}$. Agora vamos* *mostrar a inclusão contrária. Seja $r \in \overline{(x^2)}$, então para algum n, temos*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r^1 + a_n = 0,$$

com $a_i \in (x^{2i})$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Caso $n = 1$, então $r + a_1 = 0$, implicando $r \in (x^2)$. Suponha $n \geq 2$, temos que x divide todo termo a_i, isolando r^n teremos que x divide r^n. Pela primalidade de x teremos que ele dividirá r, dito de outra forma, vai existir um $f \in k[x, y]$ tal que $r = xf$. Como cada a_i está em (x^{2i}), segue que existem $f_i \in k[x, y]$ no qual $a_i = f_i x^{2i}$, assim $a_i r^{n-i} = f_i x^{2i} x^{n-i} f^{n-i} = f_i f^{n-i} x^{n+i}$, fazendo essas substituições na equação de dependência integral obtemos

$$f^n x^n + f_1 f^{n-1} x^{n+1} + \ldots + f_{n-1} f x^{2n-1} + f_n x^{2n} = 0.$$

Por supormos n maior que 1, então podemos reescrever a equação acima como

$$f^n x^n = x^{n+1}(-f_1 f^{n-1} - \ldots - f_{n-1} f x^{n-2} - f_n x^{n-1}).$$

Assim x dividirá f^n, e pelo fato de ser primo, x vai dividir f, o que implica x^2 divide r, logo $r \in (x^2)$, o que nos fornece a inclusão contrária.

Note que esse exemplo pode ser generalizado para o ideal (x^n), para qualquer $n > 0$, isso mostra que (x) é normal em $k[x, y]$. E ainda, por argumentos análogos aos que foram usados nesse exemplo conseguimos mostrar que se R é um DFU, então todo ideal principal gerado por um elemento irredutível é normal.

Os exemplos a seguir nos mostrarão que o fecho integral nem sempre é preservado por soma e produto.

Exemplo 2.1.5. *Sejam $R = \mathbb{Z}_4[x]$ e $I = (x, 2)$ ideal de R. Afirmamos que $\overline{I^2} \neq \overline{I}^2$. De fato, note que $\overline{(x, 2)(x, 2)} = \overline{(x^2, 2x)}$ e pelo item (5) da proposição anterior temos que $2 \in \overline{(x^2, 2x)}$. Agora usando o item (4) da mesma proposição, vemos que*

$$\overline{(x, 2)}.\overline{(x, 2)} = (x, 2).(x, 2) = (x^2, 2x).$$

Note que 2 não pode ser escrito como combinação de x^2 e $2x$, caso contrário iria existir $f(x), g(x) \in R$ tal que $x^2 f(x) + 2xg(x) = 2$, ou seja, $x^2 f(x) + 2xg(x) - 2 = 0$, implicando $(0)^2 f(0) + 2.(0)g(0) - 2 = 0$, mas com isso 2 seria igual a zero em $\mathbb{Z}_4$, o que é um absurdo. Logo temos o resultado desejado.

Exemplo 2.1.6. *A soma nem sempre é preservada no fecho integral. Tome os ideais (x^2) e (y^2) do anel de polinômios $k[x, y]$, no qual k é um corpo. Do exemplo 2.1.2, $xy \in \overline{(x^2, y^2)}$, pelo exemplo 2.1.4 teremos $\overline{(x^2)} + \overline{(y^2)} = (x^2) + (y^2) = (x^2, y^2)$, porém xy não está em (x^2, y^2).*

O exemplo a seguir mostrará que, nem sempre, dois ideais que possuem o mesmo fecho integral serão necessariamente iguais.

Exemplo 2.1.7. *Seja $R = \mathbb{Z}_4$, seja $I = (2)$ e, assim $\overline{I} = I$ pelo item (4) da Proposição 2.1.3, agora usando os itens (3) e (5), dessa mesma proposição, teremos $\overline{(0)} = \sqrt{(0)}$. Logo $\overline{I} = \overline{(0)}$ em R, mas claramente $I \neq (0)$.*

A seguinte proposição mostra que ideais integralmente fechados se comportam bem diante de localização.

Proposição 2.1.8. *Sejam R um anel, I ideal de R e S um conjunto multiplicativo de R. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(1) $I = \overline{I}$.
(2) $S^{-1}I = \overline{S^{-1}I}$.
(3)$I_P = \overline{I_P}$, para todo $P \in \operatorname{Spec} R$.
(4) $I_{\mathfrak{m}} = \overline{I_{\mathfrak{m}}}$, para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$.

Demonstração:
Para mostrar (1) $\Rightarrow$ (2) note que uma inclusão é trivial, pois $S^{-1}I = S^{-1}\overline{I}$ e $S^{-1}I \subseteq \overline{S^{-1}I}$. Seja $\frac{r}{s} \in \overline{S^{-1}I}$ então

$$\left(\frac{r}{s}\right)^n + \left(\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)\left(\frac{r}{s}\right) + \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{0}{1},$$

para algum inteiro positivo n e $\frac{a_k}{b_k} \in S^{-1}I^k$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Tome $w = b_1 b_2 \ldots b_n$ e $c_k = s^k w^{k-1} a_k b_1 \ldots b_{k-1} b_{k+1} \ldots b_n$. Multiplicando a equação acima por $(sw)^n$, temos:

$$\frac{(wr)^n + c_1(wr)^{n-1} + \ldots + c_{n-1}wr + c_n}{1} = \frac{0}{1}.$$

Assim existe um $t \in S$ tal que $t(wr)^n + tc_1(wr)^{n-1} + \ldots + tc_{n-1}wr + tc_n = 0$, igualdade vista em R, no qual $c_k \in I^k$. Se multiplicarmos por t^{n-1} obteremos uma equação de dependência integral de twr sobre I, ou seja, $twr \in \overline{I} = I$. Como $\frac{twr}{tws} = \frac{r}{s}$, segue que $\frac{r}{s} \in S^{-1}I$.

(2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (4) são triviais.

Para mostrar (4) $\Rightarrow$ (1), tome $r \in \overline{I}$, então qualquer equação integral de r sobre I pode ser vista no anel localizado através do mapa de localização $\rho : R \longrightarrow S^{-1}R$, portanto $\rho(r) \in \overline{I_{\mathfrak{m}}} = I_{\mathfrak{m}}$, para todo maximal $\mathfrak{m}$. Considere o seguinte complexo de R módulos:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} I + (r) \longrightarrow 0,$$

no qual a aplicação central é homomorfismo inclusão. Localizando por $\mathfrak{m}$, conseguimos a sequência abaixo:

$$0 \longrightarrow (I)_M \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{m}}} (I + (r))_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0.$$

Porém $(I + (r))_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}} + (r)_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}}$, ou seja, a última sequência é exata, e pelo princípio *global-local*, a primeira sequência também será exata, logo teremos uma igualdade de R módulos $I = I + (r)$, em particular $r \in I$, o que encerra nossa prova.

□

A proposição seguinte reduzirá nosso estudo de fecho integral, ao caso em que R é um domínio de integração.

Proposição 2.1.9. *Sejam R um anel e I um ideal de R.*
(1) A imagem do fecho integral de I em R_{red} é o fecho integral da imagem de I em R_{red}. Noutras palavras: $\overline{I}R_{red} = \overline{IR_{red}}$.
(2) Um elemento $r \in R$ pertence a $\overline{I}$ se, e somente se, para qualquer primo minimal P de R, a imagem de r em R/P pertence ao fecho integral de (I+P)/P.

Demonstração:

(1) Pela propriedade de persistência (Proposição 2.1.3), $\overline{I}R_{red} \subseteq \overline{IR_{red}}$. Para a outra inclusão, tome $r \in R$ tal que $r + \sqrt{0} \in \overline{IR_{red}}$. Então existirá $n > 0$ em que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = f,$$

com $a_k \in I^k, k = 1, \ldots, n$ e $f \in \sqrt{0}$. Assim existe um $m > 0$ em que $f^m = 0$, expandindo a potência no lado esquerdo da igualdade teremos uma equação de dependência integral (de grau kn) de r sobre I, implicando $r + \sqrt{0} \in \overline{I}R_{red}$.

(2) Pela propriedade de persistência, teremos que a projeção de $\overline{I}$ em R/P está contida no fecho integral de *(I+P)/P*. Para a recíproca considere o seguinte conjunto:

$$S = \{r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n / n \in \mathbb{Z}_+, a_k \in I^k\}.$$

Note que esse conjunto é fechado para o produto, podemos incluir o elemento 1 nesse conjunto, pois caso $1 \notin S$, basta tomar o conjunto $T = S \cup \{1\}$, dessa forma se $P \in \operatorname{Spec} R$ é tal que $P \cap T = \emptyset$, então $P \cap S = \emptyset$. Sendo assim, S é um conjunto multiplicativo. Se $0 \in S$, então r é integral sobre I. Suponha o contrário, ou seja, que $0 \notin S$, logo $S^{-1}R \neq 0$, implicando a existência de ao menos um maximal, que por sua vez será primo. Sabemos que todo primo de $S^{-1}R$ é da forma $S^{-1}Q$, com $Q \in \operatorname{Spec} R$ e $Q \cap S = \emptyset$.

Escolha um primo Q de R no qual $Q \cap S = \emptyset$, tome um primo minimal P contido em Q. Dessa forma $P \cap S \subseteq Q \cap S = \emptyset$, o que é um absurdo, pois por hipótese o lado esquerdo da inclusão é sempre não vazio.

$\square$

Uma situação interessante da proposição anterior ocorre quando $Min(R) < \infty$, pois uma equação de dependência integral de r sobre I, pode ser construída através das equações de dependência de r sobre I módulo cada um dos primos minimais $P_1, \ldots, P_m$. A construção é simples, para cada j, existem $a_{jk} \in I^k$ e $k \in \{1, \ldots, n_j\}$, tais que $f_j \in P_j$ e $f_j = r^{n_j} + a_{j1}r^{n_j-1} + \cdots + a_{jn_j-1}r + a_{jn_j}$. Então $f \in \sqrt{0}$ no qual $f = f_1 f_2 \ldots f_m$, logo existe um inteiro l positivo no qual $f^l = 0$, o que fornecerá uma equação de dependência integral de r sobre I.

A próxima proposição fornecerá uma caracterização interessante para os elementos do fecho integral, que será de fundamental importância para o estudo da seção seguinte.

Proposição 2.1.10. *Sejam R um anel, $r \in R$ e I um ideal de R. Então, $r \in \overline{I}$ se, e somente se, existe um inteiro positivo n tal que $(I + (r))^n = I(I + (r))^{n-1}$.*

Demonstração: Seja $r \in \overline{I}$. Então, para qualquer equação de dependência integral de grau n de r sobre I temos $r^n \in I(I + (r))^{n-1}$. Note que

$$I(I + (r))^{n-1} \subseteq (I + (r))(I + (r))^{n-1} = (I + (r))^n,$$

a inclusão contrária decorre do fato que os elementos de $(I + (r))^n$ são gerados por produtos da forma $i^k r^l$, com $l + k = n$ e $i \in I$, todos os termos mistos e i^n estão em $I(I + (r))^{n-1}$, o termo r^n conseguimos da hipótese.

Reciprocamente, se $(I + (r))^n = I(I + (r))^{n-1}$, então $r^n = b_1 r^{n-1} + \ldots + b_{n-1}r + b_n$, com $b_k \in I^k, k = 1, \ldots, n$, rearranjando a igualdade acima, temos uma equação de dependência integral de r sobre I. $\square$

Corolário 2.1.11. *Sejam R um anel, I um ideal de R e $r \in R$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) r é integral sobre I.

(2) Existe um R-módulo M finitamente gerado tal que $rM \subseteq IM$, e sempre que $aM = 0$ para algum $a \in R$ então $r \in \sqrt{(0 : a)}$. E mais ainda, se I é finitamente gerado e contém um elemento não divisor de zero, r é integral sobre I se, e somente se, existe um R-módulo fiel M, tal que $IM = (I + (r))M$.

Demonstração: Seja $r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$ uma equação de dependência de r sobre I. Como para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos $a_i \in I^i$, segue que a_i é a soma de elementos da forma $x_{1i} x_{2i} \ldots x_{ij}$, no qual cada um dos termos desse produto está em I. Considere J o ideal gerado por todos esses x_{ij}, então $J \subseteq I$ e $a_i \in J^i$. Portanto r é integral sobre J e pela proposição anterior, vai existir um inteiro não negativo n tal que $J(J + (r))^{n-1} = (J + (r))^n$. Seja $M = (J + (r))^{n-1}$, logo

$$rM = r(J + (r))^{n-1} \subseteq (J + (r))(J + (r))^{n-1} = (J + (r))^n = J(J + (r))^{n-1} = JM \subseteq IM.$$

Agora, se existe $a \in R$ tal que $aM = 0$, então tomando $r^{n-1} \in M$ teremos $ar^{n-1} = 0$, o que implica $r \in \sqrt{(0 : a)}$.

Note que quando I é finitamente gerado, basta escolher $I = J$ e $M = (I + (r))^{n-1}$. Seja $aM = 0$ e suponha que I não contém um divisor de zero b, então

$$\begin{aligned} ab^{n-1} = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \\ &\Leftrightarrow ann(M) = 0 \\ &\Leftrightarrow M \text{ é fiel.} \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que (2) é verdade. Seja $M = Rv_1 + Rv_2 + \ldots + Rv_m$, tal que $rM \subseteq IM$, assim, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ teremos $rb_i \in IM$, implicando $rb_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j$ com $a_{ij} \in I$. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - r & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} - r \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$ Então $Av = 0$, multiplicando pela adjunta clássica de A temos: $adj(A)Av = det(A)v = 0$. Portanto para todo $\in \{1, 2, \ldots, m\}$, implicando $det(A)M = 0$, e por hipótese $r \in \sqrt{(0 : det(A))}$. Então existe um $n > 0$ tal que $r^n det(A) = 0$, expandindo o determinante teremos uma equação de dependência integral de r sobre I. □

2.2 Redução de Ideal

O objetivo desta seção será definir o que são reduções de um ideal e ver algumas propriedades básicas. Mostraremos que, no caso finitamente gerado, estudar o fecho integral de um ideal é equivalente a estudar suas reduções. Com isso, podemos finalmente provar que o fecho integral de um ideal é um ideal integralmente fechado. Mostraremos que reduções comportam-se bem diante de localizações (principalmente no caso noetheriano) e morfismos fielmente planos. Provaremos também que reduções são preservadas por soma e produto. Outro resultado importante para o estudo de reduções diz repeito ao anel, em que para o caso noetheriano, podemos considerar o anel como sendo um domínio.

Definição 2.2.1. *Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel R. O ideal J é dito uma* **redução** *de I se existe um inteiro não negativo n tal que $JI^n = I^{n+1}$.*

Corolário 2.2.2. *Sejam R um anel, J ideal de R e $r \in R$. Então, $J \subseteq (J + (r))$ é redução se, e somente se, $r \in \overline{J}$.*

Demonstração: Segue da Proposição 2.1.10. □

Exemplo 2.2.3. *Sejam R um anel e $I = (x^7, x^6y, x^2y^5, y^7)$ um ideal de $R[x, y]$, em que x e y são variáveis sobre R. Então $J = (x^7, y^7)$ e $L = (x^7, x^6y + y^7)$ são reduções de I, pois $JI^4 = I^5$ e $LI^3 = I^4$.*

Exemplo 2.2.4. *Seja x uma variável sobre um anel R. Defina $S = R[x]/(x^2)$. Sejam $I = (x)S$ e $J = (0)$ ideais de S, então $JI = I^2$. Podemos generalizar esse exemplo dizendo que para qualquer anel S, $(0) \subseteq I$ é redução se, e somente se, I é nilpotente.*

Observação 2.2.5. *Agora note que se R é um anel, $J \subseteq I$ são ideais de R e existe algum $n \in \mathbb{Z}$ em que $JI^n = I^{n+1}$, então para todo $m \in \mathbb{Z}_+$ teremos $I^{m+n} = JI^{m+n-1} = J^2I^{m+n-2} = \cdots = J^mI^n$. Em particular $I^{m+n} \subseteq J^m$.*

Proposição 2.2.6. *Sejam $K \subseteq J \subseteq I$ ideais de um anel R.*

(1) Se K é uma redução de J e J uma redução de I, então K é uma redução de I. Chamamos essa propriedade de **transitividade** *de reduções.*

(2) Se K é uma redução de I, então J é uma redução de I.

(3) Se I é finitamente gerado, $J = K + (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ e K é uma redução de I, então K é uma redução de J.

Demonstração:

(1) Como $K \subseteq J$ e $J \subseteq I$ são reduções, segue que existem m e n inteiros não negativos tais que $KJ^n = J^{n+1}$ e $JI^m = I^{m+1}$. Assim $I^{m+(n+1)} = J^{n+1}I^m = KJ^nI^m \subseteq KI^{m+n} \subseteq I^{m+(n+1)}$. Logo $KI^{m+n} = I^{m+n+1}$, implicando que K é uma redução de I.

(2) Como K é uma redução de I, segue que existe $n \geq 0$ tal que $KI^n = I^{n+1}$, mas note que $KI^n \subseteq JI^n$, pois $K \subseteq J$ e $JI^n \subseteq I^{n+1}$. Logo $KI^n = I^{n+1}$.

(3) Por hipótese vai existir um n tal que $KI^n = I^{n+1}$, usando o que foi provado em (2) teremos que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $K + (r_1, r_2, \ldots, r_{i-1})$ é uma redução de I (se $i = 0$ note $(r_1, r_2, \ldots, r_{i-1})$ como o ideal nulo). Como $r_i \in I$ e pela escolha do n temos $r_iI^n \subseteq KI^n \subseteq (K + (r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}))I^n$. Se $aI^n = 0$, para algum $a \in R$, então $ar_i^n = 0$, como I^n é finitamente gerado podemos usar o Corolário 2.1.11 para garantir que r_i é integral sobre $K + (r_1, r_2, \ldots, r_{i-1})$, agora usando o Corolário 2.2.2 temos $K + (r_1, r_2, \ldots, r_{i-1})$ redução de $K + (r_1, r_2, \ldots, r_i)$. Assim temos uma cadeia de reduções:

$$K \subseteq K + (r_1) \subseteq \ldots \subseteq K + (r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}) \subseteq K + (r_1, r_2, \ldots, r_m).$$

Por transitividade K é redução de J.

□

O próximo exemplo ilustra bem o porquê, no item três da proposição anterior, exigirmos que I fosse finitamente gerado e $J = K + (r_1, r_2, \ldots, r_m)$.

Exemplo 2.2.7. *Sejam k um corpo, x e y variáveis sobre k, e $R_n = k[x,y]$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Defina $R = \bigoplus_{i>0} R_i$, $K = \bigoplus_{i>0}(x^i, y^i)$, $J = \bigoplus_{i>0}(x^i, y^i, xy^{i-1})$ e $I = \bigoplus_{i>0}(x,y)^i$. Note que I, J e K são ideais de R, em que $K \subseteq J \subseteq I$. Afirmamos que K é redução de I, mas $K \subseteq J$ não é uma redução.*

De fato, primeiramente mostraremos que $K \subseteq I$ é uma redução. Fixe um $i > 0$, provaremos que $(x^i, y^i)(x,y)^i = ((x,y)^i)^2$. Note que $(x,y)^{2i}$ é gerado por elementos da forma $x^m y^n$, com $m + n = 2i$, assim $m \geq i$ ou $n \geq i$, sem perda de generalidade, suponha $m \geq i$. Dessa forma, $x^m y^n = x^i(x^{m-i})y^n$, e como $m - i + n = i$, segue que $x^{m-i}y^n \in (x,y)^i$, implicando $x^i(x^{m-i})y^n \in (x^i, y^i)(x,y)^i$. Portanto $(x^i, y^i)(x,y)^i \supseteq ((x,y)^i)^2$, como a inclusão contrária é trivial, segue que temos a igualdade, logo $KI = I^2$.

Por fim, suponha que existe $n > 0$ em que $KJ^n = J^{n+1}$. Assim, se tomarmos o $(n+1)$-ésimo somando de R, então teríamos $(x^{n+1}, y^{n+1})(x^{n+1}, y^{n+1}, xy^n)^n = (x^{n+1}, y^{n+1}, xy^n)^{n+1}$. Em particular $x^{n+1}y^{n^2+n} \in (x^{n+1}, y^{n+1})(x^{n+1}, y^{n+1}, xy^n)^n$. Note que (x^{n+1}, y^{n+1}) é gerado por elementos da forma $(x^{n+1})^a(y^{n+1})^b$, em que $a + b = 2$, enquanto que $(x^{n+1}, y^{n+1}, xy^n)^n$ é gerado por $(x^{n+1})^r(y^{n+1})^s(xy^n)^t$, no qual $r + s + t = n$. Noutras palavras, os elementos da forma $x^{a(n+1)+r(n+1)+t}y^{b(n+1)+s(n+1)+tn}$, geram $(x^{n+1}, y^{n+1})(x^{n+1}, y^{n+1}, xy^n)^n$. Como $\deg(x^{n+1}y^{n^2+n}) = (n+1) + (n^2+n)$ e $x^{n+1}y^{n^2+n} \in (x^{n+1}, y^{n+1})(x^{n+1}, y^{n+1}, xy^n)^n$, segue que

$$n^2 + 2n + 1 \geq a(n+1) + r(n+1) + t + b(n+1) + s(n+1) + tn,$$

no qual $a + b = 2$ e $r + s + t = n$. Reescrevendo a desigualdade acima

$$(n+1)^2 \geq (n+1)(a + r + b + s + t),$$

ou seja, $n + 1 \geq (a+b) + (r+s+t) = 2 + n$, o que é um absurdo. Logo, K não pode ser redução de J.

Corolário 2.2.8. *Sejam $K \subseteq I$ ideais em um anel R, tal que I é finitamente gerado. Então K é redução de I se, e somente se, $I \subseteq \overline{K}$.*

Demonstração: Se K é uma redução de I, então pelo item (3) da proposição anterior K é uma redução de $K + (r)$, para todo $r \in I$, e do Corolário 2.2.2 implica $r \in \overline{K}$. Logo $I \subseteq \overline{K}$.

Reciprocamente, suponha $I = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \subseteq \overline{K}$. Então, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, r_j é integral sobre K, consequentemente sobre $K + (r_1, r_2, \ldots, r_{j-1})$. Fazendo uso do Corolário 2.2.2, teremos uma cadeia de reduções:

$$K \subseteq K + (r_1) \subseteq \ldots \subseteq K + (r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) \subseteq K + (r_1, r_2, \ldots, r_n) = I.$$

Por transitividade obteremos o resultado desejado.

$\square$

Corolário 2.2.9. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Então $\overline{I}$ é um ideal e $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$. Noutras palavras, o fecho integral de um ideal é um ideal integralmente fechado.*

Demonstração: Inicialmente mostraremos que $\overline{I}$ é um ideal. Trivialmente $0 \in \overline{I}$. Se $r \in \overline{I}$, então para algum inteiro não negativo n e $a_j \in I^j$ teremos $r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Se $b \in R$, então $b^n r^n + b^n a_1 r^{n-1} + \ldots + b^n a_n = 0$, que pode ser reescrito da seguinte forma: $(rb)^n + ba_1(rb)^{n-1} + \ldots + b^n a_n = 0$. Assim $rb \in \overline{I}$. Falta mostrar que $\overline{I}$ é fechado para soma.

Sejam $r, s \in \overline{I}$ e $r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ uma equação de dependência integral de r sobre I. Podemos tomar um ideal $I' \subseteq I$ finitamente gerado tal que $r \in \overline{I'}$, de forma análoga $s \in \overline{I''}$ em que $I'' \subseteq I$ é ideal finitamente gerado.

Considere o ideal $L = I' + I''$, assim $r, s \in \overline{L}$. Sejam $J = L + (r)$ e $K = L + (r, s) = J + (s)$, pelo Corolário 2.2.2, L é uma redução de J e J uma redução de K, assim L é redução de K. Como J, K e L são finitamente gerados, segue da Proposição 2.2.6 que $L \subseteq L + (r+s) \subseteq K$ são reduções e, pelo Corolário 2.2.2, $r + s \in \overline{L} \subseteq \overline{I}$.

Note que para mostrar $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$, basta provar que $\overline{\overline{I}} \subseteq \overline{I}$, pois a inclusão contrária segue do item (1) da Proposição 2.1.3. Seja $r \in \overline{\overline{I}}$, então existe um ideal finitamente gerado $J \subseteq \overline{I}$ em que $r \in \overline{J}$. Digamos que $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, de forma análoga para todo $i \in \{1, , 2, \ldots, k\}$ existem $K_i \subseteq I$ finitamente gerados no qual $j_i \in \overline{K_i}$, tome K o ideal gerado por todos os geradores dos K_i, o que implica $j_i \in \overline{K}$. Assim $K + J \subseteq \overline{K}$ e $K + J + (r) \subseteq \overline{K + J}$, pelo Corolário 2.2.8, $K \subseteq K + J$ e $K + J \subseteq K + J + (r)$ são reduções, por transitividade $K \subseteq K + J + (r)$ é uma redução. Pelo Corolário 2.2.8 teremos $K + J + (r) \subseteq \overline{K}$, logo $r \in \overline{K} \subseteq \overline{I}$. □

Exemplo 2.2.10. *Seja $\mathbb{C}[x, y]$ anel de polinômios nas variáveis x e y, sobre o corpo $\mathbb{C}$ e tome o domínio $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2(x+1))$. Nesse exemplo $\overline{x}$ e $\overline{y}$ representarão as imagens de x e y respectivamente em R. Se $\mathfrak{m} = (\overline{x}, \overline{y})$, $I = (\overline{x})$ e $J = (\overline{y})$, então $I \subseteq \mathfrak{m}$ é redução mas $J \subseteq \mathfrak{m}$ não é.*

Primeiramente mostraremos que $\mathfrak{m} \subseteq \overline{I}$. Como $\overline{I}$ é ideal, basta mostrar que $\overline{x}$ e $\overline{y}$ estão em $\overline{I}$. Note que $\overline{y}^2 + 0.\overline{y} - \overline{x}^2(\overline{x} + 1) = 0$ é uma equação de dependência integral de $\overline{y}$ sobre I, como trivialmente $\overline{x} \in \overline{I}$ então temos o resultado desejado. Do fato que $\mathfrak{m}$ é finitamente gerado, pelo Corolário 2.2.8 teremos que $I \subseteq \mathfrak{m}$ é redução.

Para a segunda parte, note que $V(J) = \{\mathfrak{m}, (\overline{x}+1, \overline{y})\}$, logo $\sqrt{J} = ((\overline{x}+1)\overline{x}, \overline{y})$. Faremos mais uma vez uso do Corolário 2.2.8. Se $\mathfrak{m} \subseteq \overline{J} \subseteq \sqrt{J} = ((\overline{x}+1)\overline{x}, \overline{y})$, então da maximalidade de $\mathfrak{m}$ teríamos $\overline{J} = \mathfrak{m}$ e pelo Teorema da correspondência, $(x(x+1), y)$ seria maximal em $\mathbb{C}[x, y]$, o que não é o caso.

Proposição 2.2.11. *Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel R. Considere os seguintes itens:*

(1) J uma redução de I;

(2) $S^{-1}J$ é uma redução de $S^{-1}I$, para qualquer conjunto multiplicativo S de R;

(3) J_P uma redução de I_P para todo $P \in \operatorname{Spec} R$;

(4) $J_\mathfrak{m}$ uma redução de $I_\mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$.

Temos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$. E caso R seja noetheriano temos $(4) \Rightarrow (1)$.

Demonstração:

$(1) \Rightarrow (2)$. Por hipótese existe $n \geq 0$ tal que $JI^n = I^{n+1}$. Visto que localização comuta com produto, temos $(S^{-1}J)(S^{-1}I)^n = S^{-1}(JI^n) = S^{-1}(I^{n+1}) = (S^{-1}I)^{n+1}$.

$(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (4)$. São triviais.

Falta então mostrar que $(4) \Rightarrow (1)$ quando R é noetheriano, para isso tome a seguinte cadeia de ideais em R:

$$(J : I) \subseteq (JI : I^2) \subseteq (JI^2 : I^3) \subseteq \ldots \subseteq (JI^n : I^{n+1}) \subseteq \ldots.$$

Como R é noetheriano, existe um $l \geq 0$ tal que para todo $n \geq l$ obteremos $(JI^l : I^{l+1}) = (JI^n : I^{n+1})$.

Nosso objetivo é mostrar que $(JI^l : I^{l+1}) = R$, então vamos supor o contrário, ou seja, que $(JI^l : I^{l+1})$ é um ideal próprio de R, logo ele vai estar contido em algum maximal, que podemos chamar de $\mathfrak{m}$. Localizando R por $\mathfrak{m}$, temos que $J_\mathfrak{m}$ é uma redução de $I_\mathfrak{m}$, assim existe um n, que podemos supor maior que l, em que $J_\mathfrak{m} I_\mathfrak{m}^n = I_\mathfrak{m}^{n+1}$. Como qualquer ideal de R é finitamente gerado, segue que qualquer localização comuta com o ideal quociente, ou seja,

$$(JI^n : I^{n+1})_\mathfrak{m} = (J_\mathfrak{m} I_\mathfrak{m}^n : I_\mathfrak{m}^{n+1}) = (I_\mathfrak{m}^{n+1} : I_\mathfrak{m}^{n+1}) = R_\mathfrak{m}.$$

Logo $(JI^n : I^{n+1}) \cap (R - \{\mathfrak{m}\}) \neq \emptyset$ implicando $(JI^l : I^{l+1}) \nsubseteq \mathfrak{m}$, o que é uma contradição. Assim $(JI^l : I^{l+1}) = R$. Com isso teremos $1 \in (JI^l : I^{l+1})$, logo $I^{l+1} \subseteq JI^l$, e como trivialmente temos $JI^l \subseteq I^{l+1}$, segue que J é uma redução de I. □

Lema 2.2.12. *Sejam $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis e $J \subseteq I$ ideais de R.*

(1) Se J é uma redução de I, então $\varphi(J).S$ é uma redução de $\varphi(I).S$.

(2) Se S é fielmente plano sobre R e $\varphi(J).S$ é uma redução de $\varphi(I).S$, então J é uma redução de I.

Demonstração:

(1) Como J é uma redução de I, segue que existe $n \geq 0$ tal que $JI^n = I^{n+1}$, aplicando φ temos $\varphi(J)\varphi(I)^n = \varphi(I)^{n+1}$ o que implica $(\varphi(J).S)(\varphi(I).S)^n = (\varphi(I).S)^{n+1}$.

(2) Por hipótese $(\varphi(J).S)(\varphi(I).S)^n = (\varphi(I).S)^{n+1}$, para algum n inteiro não negativo, como S é fielmente plano sobre R, segue que $\varphi(I)^{n+1} = (\varphi(I).S)^{n+1} \cap \varphi(R)$ e $\varphi(J)\varphi(I)^n = (\varphi(J).S)(\varphi(I).S)^n \cap \varphi(R)$. Logo $\varphi(JI^n) = \varphi(I^{n+1})$, como φ é injetora (pois S é fielmente plano sobre R) temos que J é uma redução de I. □

Proposição 2.2.13. *Sejam $J = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \subseteq I$ ideais de R.*

(1) Se J é uma redução de I, então para qualquer $m \geq 0$, J^m e $(a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)$ são reduções de I^m.

(2) Se para algum $m \geq 0$ temos que $(a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)$ ou J^m é redução de I^m, então J é uma redução de I.

Demonstração:

(1) Seja um inteiro $n \geq 0$ tal que $JI^n = I^{n+1}$, assim para todo $m \geq 1$ $J^m I^n = I^{n+m}$. Multiplicando por I^{mn-n} obteremos, $J^m (I^m)^n = (I^m)^{n+1}$, ou seja, J^m é redução de I^m.

Afirmamos que $J^{(m-1)k+1} = (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)(a_1, a_2, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)}$. Para isso será suficiente mostrar que $J^{(m-1)k+1} \subseteq (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)(a_1, a_2, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)}$, porque a inclusão contrária é trivial. Note que os elementos de $J^{(m-1)k+1}$ são gerados por elementos da forma $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$ com $\sum_{i=1}^k n_i = (m-1)k+1$. Se para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tivermos $n_i \leq (m-1)$, então

$$(m-1)k + 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i \leq (m-1)k < (m-1)k + 1,$$

um absurdo. Logo existe um $n_i \geq m$, que podemos supor sem perda de generalidade que $i = 1$. Seja $z \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n_1 = m + z$, assim $m + z + (n_2 + \cdots + n_k) = k(m-1) + 1$, o que implica $z + n_2 + \cdots + n_k = km - k - m + 1 = (k-1)(m-1)$. Dessa forma, $a_1^z a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k} \in (a_1, a_2, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)}$, logo

$$a_1^m a_1^z a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k} \in (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)(a_1, a_2, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)},$$

provando a afirmação.

Multiplicando ambos os lados por J^{m+k-1}, teremos, $J^{mk+m} = (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)J^{mk}$, ou seja, $(J^m)^{k+1} = (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)(J^m)^k$. Com isso temos que $(a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)$ é uma redução de J^m e por transitividade $(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_k^m)$ é uma redução de I^m.

(2) Basta usar o fato de que J^m é redução de I^m, pois caso $(a_1^m, a_2^m, \ldots, a_k^m)$ seja uma redução de I^m, então pela Proposição 2.2.6 temos que J^m é redução de I^m. Logo existe um n tal que $J^m(I^m)^n = (I^m)^{n+1}$, assim $I^{mn+m} \subseteq JI^{mn+m-1} \subseteq I^{mn+m}$. Com isso temos o resultado desejado. $\square$

Proposição 2.2.14. *Sejam R um anel e J_1, J_2, I_1, I_2 ideais de R tais que J_1 é redução de I_1 e J_2 é uma redução de I_2. Então:*

(1) $J_1 + J_2$ é uma redução de $I_1 + I_2$.

(2) $J_1.J_2$ é uma redução de $I_1.I_2$.

Demonstração:

(1) Tome um inteiro $n \geq 0$ tal que $J_1 I_1^n = I_1^{n+1}$ e $J_1 I_1^n = I_1^{n+1}$. Então:

$$(I_1 + I_2)^{2n+1} \subseteq I_1^{n+1}(I_1 + I_2)^n + I_2^{n+1}(I_1 + I_2)^n = J_1 I_1^n (I_1 + I_2)^n + J_2 I_2^n (I_1 + I_2)^n,$$

note que

$$J_1 I_1^n (I_1 + I_2)^n + J_2 I_2^n (I_1 + I_2)^n = (J_1 + J_2)(I_1 + I_2)^{2n} \subseteq (I_1 + I_2)^{2n+1},$$

assim temos o resultado desejado.

(2) Basta tomar um $n \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande, que satisfaça a equação de redução tanto para $J_1 \subseteq I_1$ quanto para $J_2 \subseteq I_2$. Logo, $(I_1 I_2)^{n+1} = J_1 J_2 I_2^n I_2^n$, ou seja, $J_1.J_2$ é uma redução de $I_1.I_2$. $\square$

Teorema 2.2.15. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel local noetheriano e $x_1, x_2, \ldots, x_r$ uma R-sequência. Se $I = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, então $I \cap \overline{I^2} = I\overline{I}$.*

Demonstração: Como I é finitamente gerado, segue do Corolário 2.2.8 que $I \subseteq \overline{I}$ é uma redução. Da proposição 2.2.14, $I^2 \subseteq \overline{I}^2$ é uma redução, novamente pelo Corolário 2.2.8 teremos $\overline{I}^2 \subseteq \overline{I^2}$. Desde que $I\overline{I} \subseteq \overline{I}^2 \subseteq \overline{I^2}$, então $I\overline{I} \subseteq I \cap \overline{I^2}$.

Para a inclusão contrária faremos indução sobre r. Suponha que $r = 1$. Seja $y \in I \cap \overline{I^2}$, então $y = x_1 k$ para algum $k \in R$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_1 k)^n + x_1^2 b_1 (x_1 k)^{n-1} + \ldots + x_1^{2n-2} b_{n-1}(x_1 k) + x_1^{2n} b_n = 0,$$

no qual $b_i \in R$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pela regularidade de x_1,

$$k^n + x_1 b_1 k^{n-1} + \ldots + x_1^{n-1} b_{n-1} k + x_1^n b_n = 0,$$

ou seja, $k \in \overline{I}$. Logo $y \in I\overline{I}$.

Suponha $r > 1$. Seja $y \in I \cap \overline{I^2}$, escreva $S = R/(x_1)$, $J = I/(x_1)$ e w a imagem de y em S. Por indução $w \in J\overline{J}$, ou seja, $y \in I\overline{I} + (x_1)$, assim $y = a + x_1 p$, com $a \in I\overline{I}$ e $p \in R$. Note que $y - a = x_1 p \in I \cap \overline{I^2}$. Defina $T = R/(x_2, x_3, \ldots, x_r)$ e $L = I/(x_2, x_3, \ldots, x_r)$. Denote por

z e q as imagens respectivamente de x_1 e p em T. Como R local, segue do Corolário 1.2.13 que $x_2, x_3, \ldots, x_r, x_1$ é também uma R-sequência. Pelo caso 1 da indução, $zq \in L\overline{L} = (z)\overline{(z)}$. Do fato que z é T-regular teremos $q \in \overline{L}$, ou seja, $p \in \overline{I} + (x_2, x_3, \ldots, x_r)$, dessa forma temos $x_1 p \in x_1\overline{I} + x_1(x_2, x_3, \ldots, x_r) \subseteq I\overline{I} + I^2 = I\overline{I}$. Logo $y \in I\overline{I}$.

□

O teorema acima é um caso particular do que Itoh provou em [7]. No artigo em questão ele mostrou que se R é anel noetheriano e I é ideal de R gerado por uma R-sequência, então $I^n \cap \overline{I^{n+1}} = I^n\overline{I}$ para todo $n \geq 1$.

Lema 2.2.16. *Sejam R um anel noetheriano, $\mathfrak{m}$ o radical de Jacobson, J_1, J_2, I ideais de R e L um ideal contido em $\mathfrak{m}I$. Suponha $J_1 \subseteq I$, $J_2 \subseteq I$ e $J_1 + L = J_2 + L$. Então J_1 é uma redução de I se, e somente se, J_2 é uma redução de I.*

Demonstração: Suponha que J_1 é uma redução de I. Então existe um inteiro não negativo n tal que $J_1 I^n = I^{n+1}$. Logo $I^{n+1} = J_1 I^n \subseteq (J_1 + L)I^n \subseteq (J_2 + \mathfrak{m}I)I^n \subseteq I^{n+1}$, o que vai implicar $J_2 I^n + \mathfrak{m}I^{n+1} = I^{n+1}$, aplicando o Lema de Nakayama (versão global) conseguimos $I^{n+1} = J_2 I^n$ e assim J_2 é redução de I. A recíproca pode ser feita de forma análoga.

□

Lema 2.2.17. *Sejam R um anel e $J \subseteq I$ ideias de R. Se $J \subseteq I$ é uma redução, então $Min(R/I) = Min(R/J)$, $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ e $ht(I) = ht(J)$. Noutras palavras, se $J \subseteq I$ uma redução então I e J definem a mesma variedade em* $\operatorname{Spec} R$. *Em particular, se R é anel noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado em que $IM \neq M$, então* $\operatorname{grade}(I, M) = \operatorname{grade}(J, M)$.

Demonstração: Mostraremos que $V(I) = V(J)$. Como $J \subseteq I$, segue que todo primo contendo I também conterá J, ou seja, $V(I) \subseteq V(J)$. Tome $P \in V(J)$, logo $P \supseteq JI^n = I^{n+1}$ e por P ser primo segue que $P \supseteq I$, assim temos a inclusão contrária.

Como $V(I) = V(J)$ e pelo Teorema da correspondência, conseguiremos $Min(R/I) = Min(R/J)$.

Para ver a segunda igualdade note que:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P = \bigcap_{P \in V(J)} P = \sqrt{J}.$$

Na terceira igualdade temos: $ht(I) = min\{\dim A_P \,|\, P \supseteq I\} = min\{\dim A_P \,|\, P \supseteq J\} = ht(J)$.

Supondo que R é noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado em que $IM \neq M$, então claramente $JM \neq M$, logo o grade está bem definido tanto para I, quanto para J. Completamos o argumento com a Proposição 1.2.29. □

Exemplo 2.2.18. *Sejam $I = (x)$ e $J = (x^2)$ ideais do anel $k[x, y]$, no qual k é um corpo. Claramente $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, porém $J \subseteq I$ não é uma redução, pois caso contrário pelo Corolário 2.2.8 teríamos $I \subseteq \overline{J}$, mas pelo exemplo 2.1.4 temos que $\overline{J} = J$, o que é um absurdo.*

A próxima proposição mostrará que, em anéis artinianos, fecho integral e redução não são conceitos tão interessantes, já que são equivalentes ao radical.

Proposição 2.2.19. *Se R é um anel artiniano e $J \subseteq I$ são ideais de R tais que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, então J é uma redução de I. Em particular, para todo I ideal de R temos $\overline{I} = \sqrt{I}$*

Demonstração: Sendo R é artiniano, segue que R será noetheriano. Se localizarmos R por um de seus maximais teremos duas situações: os maximais contendo I e os que não contém. Pela igualdade dos radicais temos que qualquer maximal não contendo I, necessariamente não conterá J, logo quando localizarmos por esses maximais teremos que tanto J localizado, quanto I localizado serão iguais ao anel localizado e assim temos trivialmente o resultado.

Se $\mathfrak{m}$ é maximal de R tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$ teremos que $I_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$. Como $R_{\mathfrak{m}}$ é também artiniano e o radical de Jacobson será igual ao seu maximal, segue que $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ é nilpotente, logo teremos que $I_{\mathfrak{m}}$ é também nilpotente, implicando $J_{\mathfrak{m}} \subseteq I_{\mathfrak{m}}$ ser redução e assim aplicando a Proposição 2.2.11 temos o desejado.

A segunda parte, basta ver que para todo I ideal de R teremos $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$, logo $I \subseteq \sqrt{I}$ é uma redução, como R é noetheriano podemos usar Corolário 2.2.8 para obter $\sqrt{I} \subseteq \overline{I}$, a inclusão contrária segue da Proposição 2.1.3 item (3). □

Lema 2.2.20. *Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel noetheriano R. Então $J \subseteq I$ é redução se, e somente se, $J(R/P) \subseteq I(R/P)$ é redução para todo $P \in Min(R)$.*

Demonstração: Suponha que $J \subseteq I$ é uma redução e P um ideal qualquer. Aplicando o Lema 2.2.12 na projeção canônica em R/P, segue que $J(R/P) \subseteq I(R/P)$ é uma redução.

Reciprocamente, suponha que para todo primo minimal P de R, $J(R/P) \subseteq I(R/P)$ é uma redução. Como R/P é noetheriano, então segue do Corolário 2.2.8 que $I(R/P) \subseteq \overline{J(R/P)}$. Se $r \in I$, então a imagem de r em R/P está em $\overline{J(R/P)}$, pela Proposição 2.1.9 $r \in \overline{J}$, logo $I \subseteq \overline{J}$ e novamente pelo Corolário 2.2.8 segue o resultado.

□

2.3 Conexões com a Álgebra de Rees

No ano de 1954, Oscar Zariski conjecturou uma generalização para o 14º Problema de Hilbert. Entretanto em 1958, David Rees constrói uma álgebra que tornaria a conjectura falsa. Essa álgebra foi generalizada e recebeu o nome de Álgebra de Rees, ou em termos geométricos, Álgebra do Blow-up. Na Geometria Algébrica ela se tornou fundamental para o estudo de pontos singulares de uma curva.

Num primeiro momento definiremos a Álgebra de Rees Clássica e Estendida, relacionaremos esses novos objetos com o graduado associado e então calcularemos a dimensão dessas álgebras. Também trataremos da Fibra Especial, um conceito derivado da Álgebra de Rees. Provaremos que a dimensão da fibra, chamado de *analitic spread*, é limitado pela dimensão do anel, que por sua vez, será igual a dimensão do graduado associado.

Nosso objetivo nessa seção será relacionar essa álgebra com o conceito de redução. Mostraremos algumas relações com a fibra especial, mais ainda, que o número minimal de geradores de um ideal é no mínimo o *analitic spread*.

2.3.1 Dimensão da Álgebra de Rees

Definição 2.3.1. *Sejam I um ideal de um anel R e $R[t]$ o anel de polinômios na variável t. A* **álgebra de Rees** *do ideal I é o subanel de $R[t]$ dado por:*

$$R[It] := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n t^n.$$

Definimos também a **álgebra de Rees estendida** *do ideal I por:*

$$R[It,t^{-1}] := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n t^n.$$

Convencionaremos $I^n = R$, para todo inteiro n não positivo.

Observação 2.3.2. *Seja I um ideal do anel R. Note que $gr_I(R) \cong R[It]/IR[It]$, pois se definirmos o morfismo canônico de álgebras graduadas, que mapeia I^nt^n em I^n/I^{n+1}, podemos ver que o núcleo dessa aplicação é $IR[It]$. Temos também que $gr_I(R) \cong R[It,t^{-1}]/t^{-1}R[It,t^{-1}]$, basta usar o mesmo morfismo, porém quando $n < 0$ teremos $I^n/I^{n+1} = (R/R) = 0$, ou seja, $t^{-1}R[It,t^{-1}]$ será o núcleo dessa aplicação.*

Observação 2.3.3. *Note que $R[It,t^{-1}]_{t^{-1}} = R[t,t^{-1}]$. De fato, como $R[It,t^{-1}] \subseteq R[t,t^{-1}]$, segue que $R[It,t^{-1}]_{t^{-1}} \subseteq R[t,t^{-1}]_{t^{-1}} = R[t,t^{-1}]$. Note que $t^n \in R[It,t^{-1}]_{t^{-1}}$ para todo $n \leq 0$, como o conjunto multiplicativo escolhido foi $\{1,t^{-1},t^{-2},t^{-3},\ldots\}$, então $t^n \in R[It,t^{-1}]_{t^{-1}}$ para todo $n > 0$. Como todo elemento de $R[t,t^{-1}]$ é soma formas do tipo a_nt^n, com $n \in \mathbb{Z}$ e $a_n \in R$, logo $R[t,t^{-1}] \subseteq R[It,t^{-1}]_{t^{-1}}$.*

Lema 2.3.4. *Seja I um ideal de um anel R. Então*

$$\dim R[It] = max\left\{ \dim\left(\frac{R}{P}\left[\frac{I+P}{P}t\right]\right) \,\middle|\, P \in Min(R)\right\}$$

e

$$\dim R[It,t^{-1}] = max\left\{ \dim\left(\frac{R}{P}\left[\frac{I+P}{P}t,t^{-1}\right]\right) \,\middle|\, P \in Min(R)\right\}.$$

Demonstração: Inicialmente note que $R \longrightarrow R[t,t^{-1}]$ é uma álgebra fielmente plana, então para todo ideal J de R temos que $JR[t,t^{-1}] \cap R = J$, logo:

$$J \subseteq JR[It] \cap R \subseteq JR[It,t^{-1}] \cap R \subseteq JR[t,t^{-1}] \cap R = J.$$

Assim, J será a contração de ideais de $R[It]$ e $R[It,t^{-1}]$. Dessa forma temos

$$\frac{R}{J} \subseteq \frac{R[It]}{JR[It,t^{-1}] \cap R[It]} \subseteq \frac{R[It,t^{-1}]}{JR[It,t^{-1}] \cap R[It,t^{-1}]} \subseteq \frac{R[t,t^{-1}]}{JR[t,t^{-1}]}.$$

Em particular se $P \in Min(R)$, então $PR[t,t^{-1}] \cap R[It]$ e $PR[t,t^{-1}] \cap R[It,t^{-1}]$ serão primos minimais de seus respectivos anéis. Como qualquer elemento nilpotente tanto de $R[It]$, quanto de $R[It,t^{-1}]$, serão nilpotentes em $R[t,t^{-1}]$, segue que esse elemento estará em $\cap PR[t,t^{-1}]$, com P variando sobre todos os primos minimais de R. Logo cada primo minimal de $R[It]$ ou de $R[It,t^{-1}]$ é a contração de $PR[t,t^{-1}]$, que por sua vez será primo minimal de $R[t,t^{-1}]$, no qual $P \in Min(R)$. Implicando

$$Min(R[It]) = \{PR[It,t^{-1}] \cap R[It] \mid P \in Min(R)\}$$

e

$$Min(R[It,t^{-1}]) = \{PR[It,t^{-1}] \cap R[It,t^{-1}] \mid P \in Min(R)\}.$$

Defina o morfismo canônico

$$\varphi : R[It] \longrightarrow \frac{R}{J}\left[\frac{I+J}{J}t\right]$$

que mapeia $I^n t^n$ em $((I^n+J)/J)t^n$. Se $\sum_{i=0}^n a_i t^i \in R[It]$ é tal que $\varphi(\sum_{i=0}^n a_i t^i) = 0$, então $a_i \in J$ para todo $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Como $J = JR[It,t^{-1}] \cap R$, segue que $\ker\varphi \subseteq JR[It,t^{-1}] \cap R[It]$, a inclusão contrária é trivial, logo temos a igualdade. Pelo Teorema do Isomorfismo:

$$\frac{R}{J}\left[\frac{I+J}{J}t\right] \cong \frac{R[It]}{JR[It,t^{-1}] \cap R[It]}.$$

Por uma argumentação análoga ao caso anterior:

$$\frac{R}{J}\left[\frac{I+J}{J}t,t^{-1}\right] \cong \frac{R[It,t^{-1}]}{JR[It,t^{-1}] \cap R[It,t^{-1}]}.$$

Assim temos o desejado. □

Teorema 2.3.5. *Sejam R um anel noetheriano e I um ideal de R. Então R tem dimensão finita se, e somente se, $R[It]$ ou $R[It,t^{-1}]$ tem dimensão finita. Caso $\dim R < \infty$, então*

(1) $\dim R[It] = \begin{cases} \dim R + 1, & \text{se } I \nsubseteq P, \text{ no qual } P \in \operatorname{Spec} R \text{ e } \dim(R/P) = \dim R. \\ \dim R, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(2) $\dim R[It,t^{-1}] = \dim R + 1$.

(3) Se $\mathfrak{m}$ é o único maximal de R e $I \subseteq \mathfrak{m}$, então $\mathfrak{m}R[It,t^{-1}] + ItR[It,t^{-1}] + t^{-1}R[It,t^{-1}]$ é um maximal de $R[It,t^{-1}]$ com altura $\dim R + 1$.

Demonstração:

(1) Pelo Lema 2.3.4, podemos supor que R é um domínio, sendo assim iremos mostrar que $\dim R[It] = \dim R$, caso I seja o ideal nulo, e $\dim[It] = \dim R + 1$ caso contrário. Claramente se $I = (0)$, então $\dim R[It] = \dim R$. Suponha que I não seja o ideal nulo. Se $P \in \operatorname{Spec}(R[It])$, então pelo Teorema da desigualdade das dimensões temos

$$\operatorname{ht}(P) + \operatorname{gr.tr}_{\kappa(P\cap R)}(\kappa(P)) \leq \operatorname{ht}(P\cap R) + \operatorname{gr.tr}_R(R[It]).$$

Note que $R/(P\cap R) \subseteq R[It]/P \subseteq R[t]/PR[t]$, logo $\operatorname{gr.tr}_{\kappa(P\cap R)}(\kappa(P)) \leq \operatorname{gr.tr}_{\kappa(P\cap R)}(\kappa(PR[t]))$. Como $\operatorname{gr.tr}_{\kappa(P\cap R)}(\kappa(PR[t])) = 0$, segue que $\operatorname{gr.tr}_{\kappa(P\cap R)}(\kappa(P)) = 0$. Agora note que, $R[It] \subseteq R[t]$ e $\operatorname{gr.tr}_R(R[t]) = 1$, pelo fato do I ser não nulo, seque que $\operatorname{gr.tr}_R(R[It]) = 1$. Logo, $\operatorname{ht}(P) \leq \operatorname{ht}(P\cap R) + 1$. Escolha $P \in \operatorname{Spec}(R[It])$ tal que $\operatorname{ht}(P) = \dim R[It]$, assim

$$\dim R[It] \leq \operatorname{ht}(P\cap R) + 1 \leq \dim R + 1.$$

Para provar a desigualdade contrária vamos definir $P_0 = ItR[It]$. Podemos ver que $P_0 \cap R = (0)$. Como $It \subseteq P_0$, segue que $\mathrm{ht}(P_0) > 0$. Seja $\psi : R[It] \longrightarrow R$ o morfismo sobrejetor de anéis, definido por $\psi(a_0 + a_1t + \cdots + a_kt^k) = a_0$, então teremos que $\ker \psi = P_0$ e pelo Teorema do Isomorfismo temos $R[It]/P_0 \cong R$, ou seja, $P_0 \in \mathrm{Spec}(R[It])$. Logo teremos

$$\dim R[It] \geq \dim(R/P_0) + \mathrm{ht}(P_0) = \dim R + \mathrm{ht}(P_0) \geq \dim R + 1.$$

(2) Mais uma vez faremos uso do Teorema da desigualdade das dimensões, no qual teremos $\dim R[It, t^{-1}] \leq \dim R + 1$. Seja $S = \{1, t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}, \ldots\}$, da Observação 2.3.3 temos que $S^{-1}(R[It, t^{-1}]) = R[t, t^{-1}]$, logo

$$\dim R[It, t^{-1}] \geq \dim R[t, t^{-1}] = \dim R + 1,$$

nos fornecendo o resultado desejado.

(3) Seja $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_h = \mathfrak{m}$ uma cadeia saturada de primos em R, com $h = \dim R$. Defina $Q_i = P_iR[It, t^{-1}] \cap R[It, t^{-1}]$. Como $Q_i \cap R = P_i$, segue que $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_h$ é uma cadeia de primos em $R[It, t^{-1}]$. Podemos notar que $Q_h = \mathfrak{m}R[t, t^{-1}] \cap R[It, t^{-1}] = \mathfrak{m}R[It, t^{-1}] + ItR[It, t^{-1}]$, mais ainda, Q_h está estritamente contido no ideal $Q_h + t^{-1}R[It, t^{-1}]$, que por sua vez é primo, pois $(R[It, t^{-1}])/(Q_h + t^{-1}R[It, t^{-1}]) \cong (R[It])/(P_hR[It])$. Como $P_hR[It] \in \mathrm{Spec}(R[It])$, segue que esse quociente é um domínio. Logo $\mathrm{ht}(Q_h + t^{-1}R[It, t^{-1}]) = \dim R + 1$, ou seja, $Q_h + t^{-1}R[It, t^{-1}]$ é ideal maximal de $R[It, t^{-1}]$. □

Definição 2.3.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e I um ideal de R. A* **fibra especial** com respeito a I é dada por:

$$\mathcal{F}_I(R) := \frac{R[It]}{\mathfrak{m}R[It]}.$$

Definimos também o **analitic spread**, com respeito a I, como a dimensão de Krull de $\mathcal{F}_I(R)$ e denotaremos por $\ell(I)$.

Observação 2.3.7. *Note que na fibra especial temos*

$$\frac{R[It]}{\mathfrak{m}R[It]} \cong \frac{R}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{I}{\mathfrak{m}I} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2} \oplus \frac{I^3}{\mathfrak{m}I^3} \oplus \cdots.$$

Para ver isto basta definir o homomorfismo sobrejetor de $R[It]$ no somatório do lado direito, que mapeia os elementos do tipo a_kt^k em $a_k + \mathfrak{m}I^k$. Note que o núcleo desse homomorfismo é $\mathfrak{m}R[It]$, e pelo Teorema do Isomorfismo temos o resultado.

Observação 2.3.8. *Segue da Observação 2.3.2 e do Teorema do Isomorfismo que:*

$$\mathcal{F}_I(R) \cong \frac{gr_I(R)}{\mathfrak{m}gr_I(R)}.$$

Proposição 2.3.9. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. Então para qualquer ideal I de R teremos*

$$\ell(I) \leq \dim(gr_I(R)) = \dim R.$$

Demonstração: pela Observação 2.3.8, teremos $\dim(\mathcal{F}_I(R)) = \dim(gr_I(R)/\mathfrak{m}gr_I(R))$, ou seja, $\ell(I) \leq \dim(gr_I(R))$. Como t^{-1} é não divisor de zero em $R[It, t^{-1}]$, segue que ele não pertence a nenhum primo minimal de $R[It, t^{-1}]$, logo $\dim(R[It, t^{-1}]/t^{-1}R[It, t^{-1}]) \leq \dim(R[It, t^{-1}]) - 1$. Pela Observação 2.3.2 temos $gr_I(R) = R[It, t^{-1}]/t^{-1}R[It, t^{-1}]$. Agora usando o item (2) do Teorema 2.3.5 teremos $\dim(gr_I(R)) \leq \dim R$.

Seja $Q = \mathfrak{m}R[It, t^{-1}] + ItR[It, t^{-1}] + t^{-1}R[It, t^{-1}]$, então $\dim(gr_I(R)) \geq \dim((gr_I(R))_Q)$. Desde que $t^{-1} \in QR[It, t^{-1}]_Q$, então podemos usar o item (b) do Lema 1.1.23 e o Teorema 1.1.26 para garantir que

$$\dim((R[It, t^{-1}])_Q/(t^{-1}R[It, t^{-1}])_Q) = \dim((R[It, t^{-1}])_Q) - 1 = \mathrm{ht}Q - 1.$$

Segue do item (3) do Teorema 2.3.5 que $\mathrm{ht}Q - 1 = \dim R$, logo $\dim(gr_I(R)) \geq \dim R$.

□

2.3.2 Álgebras de Rees e Reduções

Teorema 2.3.10. *Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel noetheriano R. Então J é uma redução de I se, e somente se, $R[It]$ é um $R[Jt]$-módulo finitamente gerado.*

Demonstração: Suponha que J é uma redução de I, então existe um inteiro não negativo n tal que $I^{n=1} = JI^n$, assim para todo $k \geq 0$ temos $I^{n+k} = J^kI^n$. Com isso temos $(R[It])_{k+n} = I^{k+n}t^{k+n} = J^kI^nt^kt^n = J^kt^kI^nt^n = (R[Jt])_kI^nt^n$. Como R é noetheriano, segue que todo ideal é finitamente gerado, digamos que $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik_i}$ sejam os geradores de I^i para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Assim $\{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k_1}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2k_2}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n}\}$ geram $R[It]$ como $R[Jt]$-módulo.

Reciprocamente, suponha que $R[It]$ seja um $R[Jt]$-módulo finitamente gerado. Como ambos esses anéis são $\mathbb{N}$-graduados, segue que existe um conjunto finito de geradores homogêneos de $R[It]$ sobre $R[Jt]$, tome n o maior grau dentre os elementos desse conjunto gerador. Por questões de grau $I^{n+1}t^{n+1} = (R[It])_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} J^it^i(I^{n+1-i}t^{n+1-i})$. Se tomarmos um termo desse somatório, teremos

$$J^it^i(I^{n+1-i}t^{n+1-i}) = J^iI^{n+1-i}t^{n+1} = J^{i-1}JI^{n+1-i}t^{n+1} \subseteq J^{i-1}I^{n+1-i+1}t^{n+1}$$

Repetindo o processo acima, $(i-1)$-vezes, obtemos:

$$J^iI^{n+1-i}t^{n+1} \subseteq J^{i-1}I^{n+1-i+1}t^{n+1} \subseteq \cdots \subseteq J^{i-(i-1)}I^{n+1-i+(i-1)}t^{n+1} = JI^nt^{n+1}$$

Como $JI^nt^{n+1} \subseteq I^{^{n+1}}t^{n+1}$, logo teremos a igualdade, implicando $JI^n = I^{n+1}$, o que nos dá o resultado desejado.

□

Corolário 2.3.11. *Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel noetheriano R. Então o menor inteiro tal que $I^{n+1} = JI^n$ é o maior grau de um elemento em um conjunto minimal de geradores homogêneos de $R[It]$ sobre $R[Jt]$.*

Demonstração: Segue por uma argumentação similar a que foi usada na demonstração do teorema anterior. □

Proposição 2.3.12. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano com corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$, n um inteiro positivo, J e I ideais de R, com $J \subseteq I^n$ e B uma k-subálgebra de $\mathcal{F}_{I^n}(R)$ gerado por $(J + \mathfrak{m}I^n)/\mathfrak{m}I^n$. Então $J \subseteq I^n$ é uma redução se, e somente se, $\mathcal{F}_I(R)$ é um B-módulo finitamente gerado.*

Demonstração: Suponha que J é uma redução de I^n, pelo Teorema 2.3.10 temos que $R[I^n t]$ é um $R[Jt]$-módulo finitamente gerado, ou seja, $R[Jt] \subseteq R[I^n t]$ é uma extensão finita de anéis, logo

$$\frac{R[Jt]}{R[Jt] \cap \mathfrak{m}R[I^n t]} \subseteq \frac{R[I^n t]}{\mathfrak{m}R[I^n t]} = \mathcal{F}_{I^n}(R)$$

é também uma extensão finita. Afirmamos que

$$B \cong \frac{R[Jt]}{R[Jt] \cap \mathfrak{m}R[I^n t]},$$

de fato, basta definir o homomorfismo canônico sobrejetor $R[Jt] \longrightarrow B$, que mapeia os elementos $a_k t^k$ em $\overline{a_k} t^k$, no qual a barra representa a projeção em B. Note que o núcleo desse morfismo é $R[Jt] \cap \mathfrak{m}R[I^n t]$ e pelo Teorema do Isomorfismo temos o resultado. Dessa forma temos que $B \subseteq \mathcal{F}_{I^n}(R)$ é uma extensão finita de anéis. Pela Observação 2.3.7 podemos ver que $\mathcal{F}_I(R)$ é um módulo finitamente gerado sobre $\mathcal{F}_{I^n}(R)$. Por transitividade teremos que $\mathcal{F}_I(R)$ é finitamente gerado sobre B.

Reciprocamente suponha que $\mathcal{F}_I(R)$ é um B-módulo finitamente gerado. Note podemos supor sem perda de generalidade que $n = 1$, pois se provarmos que $J \subseteq I$ é uma redução então, pela Proposição 2.2.6, $J \subseteq I^n$ é uma redução. Escolha um conjunto finito de geradores homogêneos de $\mathcal{F}_I(R)$ tal que d é o máximo dos graus. Logo teremos

$$\frac{I^{d+1}}{\mathfrak{m}I^{d+1}} \subseteq \left(\frac{(J + \mathfrak{m}I)}{\mathfrak{m}I}\right)\left(\frac{I^d}{\mathfrak{m}I^d}\right) \subseteq \frac{I^{d+1}}{\mathfrak{m}I^{d+1}}$$

implicando $I^{d+1} = JI^d + \mathfrak{m}I^{d+1}$. Usando o Lema de Nakayama teremos $I^{d+1} = JI^d$, isto é, J é uma redução de I. $\square$

Corolário 2.3.13. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, J e I ideais de R. Suponha que $J \subseteq I$ é uma redução, então o número minimal de geradores de J é pelo menos $\ell(I)$.*

Demonstração: Como J é uma redução de I, segue da proposição anterior que $B \subseteq \mathcal{F}_I$ é extensão finita de anéis, o que implica $\dim B = \dim \mathcal{F}_I = \ell(I)$. Seja $J = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ e $x_1, x_2, \ldots, x_d$ variáveis sobre $R/\mathfrak{m}$ no qual $d = \mu(J)$. Dessa forma teremos um morfismo sobrejetor de $R/\mathfrak{m}$-álgebras graduadas $\varphi : (R/\mathfrak{m})[x_1, x_2, \ldots, x_d] \longrightarrow B$, que mapeia x_i em $a_i + \mathfrak{m}I$. Logo $\ell(I) = \dim B \leq \dim((R/\mathfrak{m}))[x_1, x_2, \ldots, x_d]) = \dim((R/\mathfrak{m})) + d = 0 + \mu(J)$. $\square$

2.4 Redução Minimal

Em geral, nos anéis noetherianos, não há nenhuma condição sobre cadeias descendentes. Assim, dado uma cadeia descendente de reduções não temos garantia que ela estacionará, ou seja, que existe uma redução que é minimal com respeito a inclusão. O exemplo abaixo ilustra bem esse fato.

Exemplo 2.4.1. *Defina $R = k[x,y,z]$ o anel de polinômios sobre o corpo k nas variáveis x, y e z. Sejam $I = (x^5z, y^5(z-1), x^3y^2z, x^2y^3(z-1))$ e $J_l = (x^5z - y^5(z-1), x^3y^2z^l, x^2y^3(z-1)^l)$ ideais de R. Afirmamos que J_l é redução de I para todo $l > 0$, mas $\cap_{l>0} J_l$ não é redução de I.*

Inicialmente veremos que se $l \in \mathbb{Z}_+$, então $J_l \subseteq I$ é uma redução. Se $l = 1$, temos a seguinte equação de dependência integral

$$(x^5z)^2 - (x^5z - y^5(z-1))x^5z - (x^3y^2z)(x^2y^3(z-1)) = 0,$$

ou seja, $x^5z \in \overline{J_1}$ e desde que $x^5z - y^5(z-1) \in \overline{J_1}$, então $y^5(z-1) \in \overline{J_1}$. Dessa forma, $I \subseteq \overline{J_1}$, assim o Corolário 2.2.8 nos garante que $J_1 \subseteq I$ é uma redução. Agora provaremos que $(J_l)_\mathfrak{m} \subseteq (J_1)_\mathfrak{m}$ é uma redução, para todo $l > 0$ e $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$, por consequência da Proposição 2.2.11 teremos que $J_l \subseteq J_1$ é uma redução e por transitividade teremos o resultado esperado.

Como $\sqrt{J_l} = \sqrt{J_1}$, segue que só é necessário nos preocuparmos com os ideais maximais que contém J_1. Nessa situação, se $\mathfrak{m}$ é um maximal contendo J_1, então teremos três possibilidades:

- *z e $z-1$ não estão contidos em $\mathfrak{m}$;*
- *$\mathfrak{m}$ contém z;*
- *$\mathfrak{m}$ contém $z-1$.*

No primeiro caso, temos $(J_l)_\mathfrak{m} = (x^5z - y^5(z-1), x^3y^2, x^2y^3)_\mathfrak{m}$ para todo $l > 0$, nos fornecendo trivialmente o resultado.

Para o caso em que $z \in \mathfrak{m}$, segue da maximalidade do ideal que $z - 1 \notin \mathfrak{m}$, assim $(J_l)_\mathfrak{m} = (x^5z - y^5(z-1), x^3y^2z^l, x^2y^3)_\mathfrak{m}$. Primeiro analisaremos o caso em que $l = 2$. Pela equação de dependência integral

$$(x^5z^2)^2 - (x^5z^2 - y^5z(z-1))x^5z^2 - (x^3y^2z^2)(x^2y^3)(z^2 - z) = 0,$$

segue que $x^5z^2 \in \overline{(J_2)_\mathfrak{m}}$. Dessa forma teremos que $x^3y^2z \in \overline{\overline{(J_2)_\mathfrak{m}}}$, pois

$$(x^3y^2z)^3 - (x^2y^3)(x^2y^3)(x^5z^2)z = 0.$$

Pelo Corolário 2.2.9, $\overline{\overline{(J_2)_\mathfrak{m}}} = \overline{(J_2)_\mathfrak{m}}$, assim $(J_1)_\mathfrak{m} \subseteq \overline{(J_2)_\mathfrak{m}}$, ou seja, $(J_2)_\mathfrak{m}$ é uma redução de $(J_1)_\mathfrak{m}$. Note que

$$(x^5z - y^5(z-1), x^2y^3) + (x^3y^2z^2) = (J_2)_\mathfrak{m} + (x^3y^2z^2),$$

como $z \in \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ e $x^3y^2z \in (J_1)_\mathfrak{m}$, segue do Lema 2.2.16 que $(x^5z - y^5(z-1), x^2y^3)_\mathfrak{m} \subseteq (J_1)_\mathfrak{m}$ é uma redução. Como $(x^5z - y^5(z-1), x^2y^3)_\mathfrak{m} \subseteq (J_l)_\mathfrak{m} \subseteq (J_1)_\mathfrak{m}$, segue da Proposição 2.2.6 que $(J_l)_\mathfrak{m}$ é uma redução $(J_1)_\mathfrak{m}$.

O último caso, no qual $z - 1 \in \mathfrak{m}$, podemos fazer uma argumentação análoga ao caso anterior, para conseguirmos o resultado desejado. Logo temos provado a primeira parte do exemplo.

Para a segunda parte do exemplo, denote $J = (x^5z - y^5(z-1), x^6y^2z, x^2y^6(z-1), x^3y^3)$, *mostraremos que* $\cap_{l>0}J_l \subseteq J$. *Antes de tudo, mostraremos que* $x^3y^3 \in \cap_{l>0}J_l$, *para isso fixe um* $l > 0$ *e seja* $\mathfrak{m}$ *um maximal de* R. *Temos duas possibilidades:* $z \in \mathfrak{m}$ *ou* $z \notin \mathfrak{m}$. *Pelo primeiro caso teremos* $z-1 \notin \mathfrak{m}$, *o que implica* $(J_l)_{\mathfrak{m}} = (x^5z-y^5(z-1), x^3y^2z^l, x^2y^3)_{\mathfrak{m}}$, *assim* $x^3y^3 \in (J_l)_{\mathfrak{m}}$. *Caso* $z \notin \mathfrak{m}$, *então* $(J_l)_{\mathfrak{m}} = (x^5z - y^5(z-1), x^3y^2, x^2y^3(z-1)^l)_{\mathfrak{m}}$, *implicando* $x^3y^3 \in (J_l)_{\mathfrak{m}}$. *Pelo princípio global-local temos* $x^3y^3 \in J_l$, *como* l *foi tomado arbitrário, segue que* $x^3y^3 \subseteq \cap_{l>0}J_l$.

Seja $a \in \cap_{l>0}J_l$, *em particular* $a \in J_1$, *ou seja, existem* $f_1, f_2, f_3 \in R$ *tais que*

$$a = f_1(x^5z - y^5(z-1)) + f_2x^3y^2z + f_3x^2y^3(z-1),$$

multiplicando a equação por x, *obtemos* $f_2x^4y^2z = ax - f_1x(x^5z - y^5(z-1)) - f_3x^3y^3(z-1)$, *assim* $f_2x^4y^2z \in \cap_{l>0}J_l$. *Para todo* $f \in R$ *denotaremos por* $\deg_z(f)$ *o grau da variável* z *do polinômio* f . *Seja* $\deg_z(f_2) = n$. *Como* $f_2x^4y^2z \in J_{n+2}$, *segue que*

$$f_2x^4y^2z = g_1(x^5z - y^5(z-1)) + g_2x^3y^2z^{n+2} + g_3x^2y^3(z-1)^{n+2},$$

em que $g_1, g_2, g_3 \in R$. *Como* x *e* y *não dividem* $(x^5z - y^5(z-1))$, *segue de suas primalidades que ambos dividirão* g_1, *assim existe* $g_1' \in R$ *no qual* $g_1 = g_1'x^2y^2$. *Dessa forma, podemos reescrever a equação acima como*

$$f_2x^2z = (x^5z - y^5(z-1))g_1' + xz^{n+2}g_2 + y(z-1)^{n+2}g_3,$$

equivalentemente

$$xz(f_2x - x^4g_1' - z^{n+1}g_2) = y(y^4(1-z)g_1' + (z-1)^{n+2}g_3),$$

por y *ser um elemento primo que não divide* xz, *segue que* y *divide* $(f_2x - x^4g_1' - z^{n+1}g_2)$, *ou seja, existe* $h \in R$, *no qual* $f_2x = x^4g_1' + z^{n+1}g_2 + yh$. *Dividindo* h *e* g_1' *por* z^{n+1} *obtemos:*

$h = z^{n+1}q + r$, *com* $q, r \in R$ *e* $r = 0$ *ou* $\deg_z r < n+1$.

$g_1' = z^{n+1}q' + r'$, *com* $q', r' \in R$ *e* $r' = 0$ *ou* $\deg_z r' < n+1$.

Portanto, $f_2x = x^4r' + yr + z^{n+1}(x^4q' + g_2 + yq)$. *Como supomos que* $\deg_z(f_2x) = n$, *segue que* $z^{n+1}(x^4q' + g_2 + yq) = 0$. *Assim* $f_2x = x^4r' + yr$. *Como* x *é um elemento primo que não divide* y, *segue que* x *divide* r, *isto é, existe* $s \in R$ *tal que* $r = xs$. *Portanto* $f_2 = x^3y^2z + ys$, *implicando* $f_2x^3y^2z = x^6y^2zr' + x^3y^3zs$, *isto é* $f_2x^3y^2z \in (x^6y^2z, x^3y^3)$. *Agora note que se multiplicarmos* a *por* y *teremos* $f_3x^2y^4(z-1) \in \cap_{l>0}J_l$, *assim podemos fazer uma argumentação análoga ao caso anterior para termos* $f_3x^2y^3(z-1) \in (x^2y^6(z-1), x^3y^3)$. *Logo* $a \in J$, *ou seja,* $\cap_{l>0}J_l \subseteq J$.

Finalmente provaremos que $\cap_{l>0}J_l$ *não é redução de* I. *Suponha o contrário, ou seja,* $\cap_{l>0}J_l$ *é uma redução de* I, *assim teremos* $\cap_{l>0}J_l \subseteq J \subseteq J_1 \subseteq I$. *Pela Proposição 2.2.6,* J *é uma redução de* J_1. *Seja* $\mathfrak{m} = (x, y, z)$, $S = R_{\mathfrak{m}}/(x^5z - y^5(z-1))_{\mathfrak{m}}$, $L = JS$, $K = (J_1)S$ *e* $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}S$. *Como* $x^5z - y^5(z-1)$ *é elemento primo de* R, *segue que* $(x^5z - y^5(z-1))$ *é ideal primo, pois* R *é DFU, assim* S *é um domínio local. Se* X, Y *e* Z *são respectivamente as imagens de* x, y *e* z *em* S, *então* $L = (X^3Y^3, X^6Y^2Z, X^2Y^6)$, $K = (X^3Y^2Z, X^2Y^3)$ *e* $\mathfrak{n} = (X, Y, Z)$.

Como já vimos que reduções se comportam bem diante de localização e quociente, assim segue que L é redução de K. Note que $X^3Y^3 = (X^2Y^3)(X)$, $X^6Y^2Z = (X^3Y^2Z)(X^3)$ e $X^2Y^6 = (X^2Y^3)(Y^3)$, ou seja, todos os geradores de L estão em $\mathfrak{n}K$, implicando $L \subseteq \mathfrak{n}K$. Desde que $L + L = L + (0)$, então pelo Lema 2.2.16 temos que (0) é redução de K, mas pelo que foi comentado no Exemplo 2.2.4, isso só é possível quando K é nilpotente. Pelo fato de S ser domínio temos que seu único ideal nilpotente é o nulo, logo $K = (0)$, implicando $J_1 \subseteq (x^5z - y^5(z-1))$, o que é um absurdo. Enfim, concluímos nosso exemplo.

Durante essa seção mostraremos que se R é anel é local noetheriano e I ideal de R, então I contém uma redução minimal. Provaremos também que qualquer redução de I gerada por $\ell(I)$ elementos será uma redução minimal, com a recíproca sendo verdadeira sempre que o corpo residual de R for infinito. Por fim, exibiremos uma estimativa para o *analitic spread* de I.

Definição 2.4.2. *Uma redução J de I é dita* **minimal** se não estiver estritamente contida em nenhum ideal que também seja redução de I. O conjunto de todas as reduções minimais de I é denotado por MR(I). Se I não possui nenhuma redução a não ser ele mesmo, chamamos I de **básico**.

Exemplo 2.4.3. *Todo ideal de $\mathbb{Z}$ é básico. De fato, sejam (a) e (b) ideais de $\mathbb{Z}$, e suponha $(b) \subseteq (a)$ uma redução, seja $n \geq 0$ um inteiro tal que $(b)(a)^n = (a)^{n+1}$, o que implica $(ba^n) = (a^{n+1})$. Logo existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $a^{n+1} = ba^nj$, ou seja, $a = bj$ e assim teremos $(a) \subseteq (b)$.*

Note que esse exemplo pode ser generalizado para todo R que seja *DIP*, e mais ainda, pelo Corolário 2.2.2, teremos que todo ideal de R é integralmente fechado (consequentemente normal). Porém o mesmo não acontece com *DFU*, para isso basta tomar $R = \mathbb{C}[x, y]$, teremos que pelo exemplo 2.1.2 que $x, y \in R$, $xy \in \overline{(x^2, y^2)}$ e pelo Corolário 2.2.2 temos que $(x^2, y^2) \subseteq (x^2, xy, y^2)$ é uma redução.

Definição 2.4.4. *Seja J uma redução de I. O* **número de redução** de I com respeito a J é:

$$r_J(I) := min\{n \in \mathbb{N} \mid I^{n+1} = JI^n\}.$$

Definimos também o **número (global) de redução de I**, como:

$$r(I) := min\{r_J(I) \mid J \in MR(I)\}.$$

Proposição 2.4.5. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. Suponha que J é uma redução minimal de I, então:*

(1)$J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$.

(2) Para qualquer ideal K de R em que $J \subseteq K \subseteq I$, teremos que qualquer conjunto minimal de geradores de J pode ser estendido para um conjunto minimal de geradores de K.

Demonstração:

(1) Inicialmente note que a mesma ação que define $J/J \cap \mathfrak{m}I$ como um R-módulo finitamente gerado, também vai torná-lo um $(R/\mathfrak{m})$-espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que $\dim_{R/\mathfrak{m}}(J/J \cap \mathfrak{m}I) = t$, assim teremos um isomorfismo de $(R/\mathfrak{m})$-espaços vetoriais $(R/\mathfrak{m})^t \cong J/J \cap \mathfrak{m}I$. Logo $J = (x_1, x_2, \ldots, x_t) + J \cap \mathfrak{m}I$, no qual $x_1, x_2, \cdots, x_t \in J$.

Podemos escrever a última igualdade como $J + J \cap \mathfrak{m}I = (x_1, x_2, \ldots, x_t) + J \cap \mathfrak{m}I$. Desde que $J \cap \mathfrak{m}I \subseteq \mathfrak{m}I$ e $J \subseteq I$ é uma redução, então pelo Lema 2.2.16, $(x_1, x_2, \ldots, x_t) \subseteq I$ é também uma redução, mas pela minimalidade de J, segue que $J = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$. Assim t é o número minimal de geradores de J, pelo Lema de Nakayama, $\dim_{R/\mathfrak{m}}(J/\mathfrak{m}J) = t$. Dessa forma $J/\mathfrak{m}J \cong J/J \cap \mathfrak{m}I$, como $\mathfrak{m}J \subseteq J \cap \mathfrak{m}I$, segue que teremos a igualdade esperada.

Para provar (2) note que $\mathfrak{m}J \subseteq J \cap \mathfrak{m}K \subseteq J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$, sendo a última igualdade obtida a partir do item (1). Assim

$$\frac{J + \mathfrak{m}K}{\mathfrak{m}K} \cong \frac{J}{J \cap \mathfrak{m}K} \cong \frac{J}{\mathfrak{m}J},$$

com isso, qualquer base de $(J + \mathfrak{m}K)/\mathfrak{m}K$ pode ser estendida para uma base de $K/\mathfrak{m}K$. Por fim, se J é minimalmente gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_r$, então pelo Lema de Nakayama, $x_1 + \mathfrak{m}J, x_2 + \mathfrak{m}J, \ldots, x_r + \mathfrak{m}J$ é uma base para $J/\mathfrak{m}J$, pelo isomorfismo acima teremos que $x_1 + \mathfrak{m}K, x_2 + \mathfrak{m}K, \ldots, x_r + \mathfrak{m}K$ é conjunto linearmente independente de $\mathfrak{m}K$. Portanto existem $x_{r+1} + \mathfrak{m}K, x_{r+2} + \mathfrak{m}K, \ldots, x_s + \mathfrak{m}K \in K/\mathfrak{m}K$ tais que $x_1 + \mathfrak{m}K, x_2 + \mathfrak{m}K, \ldots, x_s + \mathfrak{m}K$ formam uma base para $K/\mathfrak{m}K$, recorrendo mais uma vez ao Lema de Nakayama teremos que K é minimalmente gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_s$, o que prova do item (2). □

Teorema 2.4.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, I e J ideais de R. Se J é uma redução de I, então existe um ideal $K \subseteq J$ tal que K é uma redução minimal de I.*

Demonstração: Seja L o conjunto de todas as reduções de I contidas em J. Como $J \in L$, teremos $L \neq \emptyset$. Pelo fato de R ser noetheriano, segue que I é finitamente gerado, pelo Lema de Nakayama, $I/\mathfrak{m}I$ é um $(R/\mathfrak{m})$-espaço vetorial de dimensão finita, em particular é um $(R/\mathfrak{m})$-módulo artiniano. Defina por S o conjunto dos subespaços de $I/\mathfrak{m}I$ que são obtidos a partir dos ideais de L, já que $(J + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I \in S$, teremos $S \neq \emptyset$, logo existe um $K \in L$ tal que $(K + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$ é o menor desses subespaços com respeito a inclusão.

Seja $n = \dim_{R/\mathfrak{m}}((K + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I)$, escolha $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ as pré-imagens de uma base de $(K + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$. Escrevendo $K_0 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ teremos que $K_0 + \mathfrak{m}I = K + \mathfrak{m}I$ e pelo Lema 2.2.16, K_0 é uma redução de I. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $K_0 = K$. Com isso teremos que $K/\mathfrak{m}K$ e $(K + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$ são $(R/\mathfrak{m})$-espaços vetoriais de dimensão n, ou seja, $K/\mathfrak{m}K \cong (K + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I \cong K/K \cap \mathfrak{m}I$, logo $K \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}K$.

Afirmamos que K é uma redução minimal de I. Suponha que $K' \subseteq K$ é uma redução de I, pela minimalidade de K com relação a L teremos $(K + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I = (K' + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$, implicando $K + \mathfrak{m}I = K' + \mathfrak{m}I$. Logo $K \subseteq (K' + \mathfrak{m}I) \cap K = K' + (\mathfrak{m}I \cap K) \subseteq K$, assim pelo que foi provado no parágrafo anterior $K = K' + (\mathfrak{m}I \cap K) = K' + \mathfrak{m}K$ e por Nakayama $K = K'$.

□

Corolário 2.4.7. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e $J \subseteq I$ uma redução tal que $\mu(J) = \ell(I)$. Então:*

(1) J é redução minimal de I.

(2) $\mathcal{F}_J$ é canonicamente isomorfo a subálgebra de $\mathcal{F}_I$ gerada por $(J + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$ sobre $R/\mathfrak{m}$, que por sua vez será isomorfo a um anel de polinômios com $\ell(I)$ variáveis sobre $R/\mathfrak{m}$.

(3) Para todo inteiro positivo k, teremos $J^k \cap \mathfrak{m}I^k = \mathfrak{m}J^k$.

Demonstração: Seja B a subálgebra de $\mathcal{F}_I$ gerada por $(J + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$ sobre $R/\mathfrak{m}$, pela Proposição 2.3.12, $\mathcal{F}_I$ é um módulo finito sobre B, implicando $\dim B = \dim \mathcal{F}_I = \ell(I)$. Por hipótese, J é gerado por $\ell(I)$ elementos, então B é isomorfo a um anel de polinômios com $\ell(I)$ variáveis sobre $R/\mathfrak{m}$.

Note que podemos definir um mapa sobrejetor de álgebras graduadas $\mathcal{F}_J \longrightarrow B$, que manda os elementos da forma $a_k + \mathfrak{m}J^k$ em $a_k + \mathfrak{m}I^k$. Como $\mathcal{F}_J$ é gerado sobre $R/\mathfrak{m}$ por $\ell(J)$ elementos, segue que a aplicação que acabamos de definir é um isomorfismo, assim temos provado o item (2). Em particular, o núcleo da aplicação $J^k/\mathfrak{m}J^k \longrightarrow (J^k + \mathfrak{m}I^k)/\mathfrak{m}I^k$ é 0 para todo $k \geq 0$. Como $(J^k + \mathfrak{m}I^k)/\mathfrak{m}I^k \cong J^k/(J^k \cap \mathfrak{m}I^k)$, segue que $\mathfrak{m}J^k = J^k \cap \mathfrak{m}I^k$, provando assim (3).

Se $L \subseteq J$ e L é uma redução minimal de I (que pelo Teorema 2.4.6 sabemos que existe), então pela Proposição 2.4.5, o conjunto minimal de geradores de L pode ser estendido para um conjunto minimal de geradores de J, ou seja, $\mu(L) \leq \mu(J)$. Pelo Corolário 2.3.13 teremos $\mu(L) \geq \ell(I) = \mu(J)$, assim $\mu(L) = \mu(J)$. Com isso teremos $J = L$, implicando J ser redução minimal de I, provando o item (1). □

Proposição 2.4.8. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano com corpo residual infinito, I um ideal de R e $r = \ell(I)$. Então toda redução minimal de I é gerada por exatamente r elementos.*

Demonstração: Seja J uma redução de I e B a subálgebra de $\mathcal{F}_I$ gerada por $(J + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$ sobre $R/\mathfrak{m}$. Pela Proposição 2.3.12, $\mathcal{F}_I$ é um B-módulo finitamente gerado, ou equivalentemente, $B \subseteq \mathcal{F}_I$ é uma extensão finita de anéis. Pelo Teorema da normalização, existem $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_r} \in (J + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$ tais que $A = (R/\mathfrak{m})[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_r}]$ é um subanel de B, no qual $A \subseteq B$ é extensão finita de anéis. Logo $\mathcal{F}_I$ é um A-módulo finitamente gerado.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ escolha $a_i \in J$ a pré imagem de $\overline{a_i}$, defina $L = (a_1, a_2, \ldots, a_r)R$. Pela Proposição 2.3.12, $L \subseteq I$ é redução, pela independência integral de $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_r}\}$ sobre $R/\mathfrak{m}$ teremos que $\mu(L) = r$, usando o Corolário 2.4.7, garantimos que L é redução minimal de I. Assim temos o resultado. □

Proposição 2.4.9. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, I um ideal de R e $r = \ell(I)$. Então existe um inteiro não negativo n tal que I^n tem uma redução minimal gerada por r elementos.*

Demonstração: Pela versão graduada do Teorema da normalização de Noether, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ e elementos $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_r} \in (\mathcal{F}_I)_n = I^n/\mathfrak{m}I^n$, tais que $A = (R/\mathfrak{m})[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_r}]$ é um subanel de $\mathcal{F}_I$, também temos que $\mathcal{F}_I$ é um A-módulo finitamente gerado. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ escolha $a_i \in I^n$ a pré imagem de $\overline{a_i}$, defina $J = (a_1, a_2, \ldots, a_r)R$. Pela Proposição 2.3.12, $J \subseteq I^n$ é redução, pela independência integral de $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_r}\}$ sobre $R/\mathfrak{m}$ teremos que $\mu(J) = r$, usando o Corolário 2.4.7 garantimos que J é redução minimal de I^n. □

Corolário 2.4.10. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e I um ideal de R. Então*

$$\dim R \geq \ell(I) \geq \mathrm{ht} I.$$

Demonstração: A primeira desigualdade segue da Proposição 2.3.9. Pela proposição anterior, existe um inteiro não negativo n tal que I^n tem uma redução minimal J, que por sua vez é gerada por $\ell(I)$ elementos, pelo Teorema do ideal principal de Krull existe um $P \in V(J)$ tal que $\mathrm{ht}P \leq \ell(I)$, assim $\mathrm{ht}J \leq \ell(I)$, pelo Lema 2.2.17 teremos $\mathrm{ht}J = \mathrm{ht}I^n$ e como trivialmente $\mathrm{ht}I^n = \mathrm{ht}I$ segue que $\ell(I) \geq \mathrm{ht}I$. □

Exemplo 2.4.11. *Seja $k[x,y,z]$ o anel de polinômio nas variáveis x, y e z sobre o corpo k. Defina $R = k[x,y,z]_{(x,y,z)}$, $I = (x^5z, y^5(z-1), x^3y^2z, x^2y^3)R$ e $J = (x^5z - y^5(z-1), x^2y^3)R$. Afirmamos que J é uma redução minimal de I. De fato, note que no Exemplo 2.4.1 já provamos que J é redução de I. Pelos Corolários 2.3.13 e 2.4.10 temos $\mu(J) \geq \ell(I) \geq \mathrm{ht}(I)$, como $\mu(J) = \mathrm{ht}(I) = 2$, ou seja, $\mu(J) = \ell(I)$. Por fim, o Corolário 2.4.7 nos garante a minimalidade de J.*

Corolário 2.4.12. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. Se I é um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R, então $\ell(I) = \dim R$.*

Demonstração: Como $V(I) = \mathfrak{m}$, então $\mathrm{ht}(I) = \dim R$, pela desigualdade do Corolário 2.4.10 segue o resultado. $\square$

Corolário 2.4.13. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel local noetheriano de dimensão d e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Suponha que R é Cohen-Macaulay e tenha corpo residual infinito. Então toda redução minimal de I é gerada por uma sequência regular de comprimento d.*

Demonstração: Da Proposição 2.4.8 e do Corolário 2.4.12 sabemos que toda redução minimal J de I é gerada por d elementos. Usando o Lema 2.2.17 temos que J também será $\mathfrak{m}$-primário, sendo assim, da Observação 1.1.14, segue que R/J é artiniano, ou seja, $\dim(R/J) = 0$ e com auxílio do Teorema 1.2.35 finalizamos nossa prova.

$\square$

2.5 Sequências Superficiais e Reduções

Agora daremos continuidade a seção 1.3, porém sob a luz de reduções. Nosso objetivo será mostrar que, em determinadas condições, todo ideal possui uma redução minimal formada por uma sequência superficial.

Definição 2.5.1. *Sejam R um anel, I um ideal e M um R-módulo. Uma sequência $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de I é dita ser superficial para I com respeito a M, se para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a imagem de x_i em $R/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ é superficial para $I/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ com respeito a $M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M$.*

Lema 2.5.2. *Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R, M um R-módulo finitamente gerado e $x_1, x_2, \ldots, x_s$ uma sequência superficial para I com respeito a M. Então para todo n suficientemente grande teremos $I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_s)M = (x_1, x_2, \ldots, x_s)I^{n-1}M$.*

Demonstração: Provaremos apenas que $I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_s)M \subseteq (x_1, x_2, \ldots, x_s)I^{n-1}M$, pois a inclusão contrária é trivial, para isso faremos por indução sobre s. Para $s = 1$, por hipótese de superficialidade $(I^{n+1}M :_M x_1) \cap I^cM = I^nM$, para todo $n \geq c$. Por Artin-Rees existe $l \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq l$ teremos $I^nM \cap x_1M \subseteq x_1I^{n-l}M$.

Seja $n > c+l$ e $y \in I^nM \cap x_1M$, assim $y = ax_1$ com $a \in M$ em particular $a \in (I^nM :_M x_1)$, pois $y \in I^nM$. Como $I^nM \cap x_1M \subseteq x_1I^{n-l}M$, então $y = x_1b$, em que $b \in I^{n-l}M$, mas pelo n tomado, segue que b estará em I^cM. Logo $x_1(a-b) = 0$, isto é, $a - b \in (0 :_M x_1)$, como trivialmente $(0:_M x_1) \subseteq (I^nM :_M x_1)$ e $b = a-(a-b)$, então $b \in (I^nM :_M x_1)$. Com isso, $y \in x_1((I^nM :_M x_1) \cap I^cM)$ e pela superficialidade de x_1 sabemos que

$$x_1((I^nM :_M x_1) \cap I^cM) = x_1(I^{n-1}M).$$

Logo $I^nM \cap x_1M \subseteq x_1(I^{n-1}M)$, encerrando a prova do caso $s = 1$.

Suponha que $s > 1$. Por hipótese de indução, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$, $I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M = (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})I^{n-1}M$. Defina $\overline{I} = I/(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})$, $\overline{M} = M/(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M$ e $\overline{x_s}$ a imagem de x_s em $\overline{I}$. Aplicando o primeiro caso da indução em $\overline{x_s}$, temos que existe $c \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq c$ é válido que $\overline{I}^nM \cap \overline{x_s}\overline{M} = \overline{x_s}\overline{I}^{n-1}\overline{M}$, sendo assim $(I^nM+(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M) \cap (x_1, x_2, \ldots, x_s)M = x_sI^{n-1}M+(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M$. Logo para todo $n \geq k+c$ é verdade que $I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_s)M \subseteq I^nM$ e ainda

$$I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_s)M \subseteq (I^nM + (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M) \cap ((x_1, x_2, \ldots, x_s)M),$$

como $(I^nM + (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M) \cap ((x_1, x_2, \ldots, x_s)M) = (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M + x_sI^{n-1}M$, então $I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_s)M \subseteq I^nM \cap ((x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M + x_sI^{n-1}M)$. Note que

$$I^nM \cap ((x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M + x_sI^{n-1}M) = I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M + x_sI^{n-1}M$$

e pela hipótese de indução temos

$$I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})M + x_sI^{n-1}M = (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})I^{n-1}M + x_sI^{n-1}M.$$

Por fim, temos $I^nM \cap (x_1, x_2, \ldots, x_s)M \subseteq (x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})I^{n-1}M + x_sI^{n-1}M$, o que encerra nossa prova, pois $(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})I^{n-1}M + x_sI^{n-1}M = (x_1, x_2, \ldots, x_s)I^{n-1}M$.

□

Corolário 2.5.3. *Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Suponha que $x \in I$ é superficial para I com respeito a M. Defina x^* a imagem de x na componente homogênea de grau 1 de $gr_I(R)$, $\overline{I} = I/(x)$ e $\overline{M} = M/xM$. Então para todo $n >> 0$,*

$$\left[\frac{gr_I(M)}{x^*gr_I(M)}\right]_n \cong [gr_{\overline{I}}(\overline{M})]_n$$

Demonstração: Inicialmente, note que se $m \in I^nM$, então $(x+I^2)(m+I^{n+1}M) = xm + I^{n+2}M$, logo $[x^*gr_I(M)]_n = (xI^{n-1}M + I^{n+1}M)/(I^{n+1}M)$, implicando

$$\left[\frac{gr_I(M)}{x^*gr_I(M)}\right]_n \cong \frac{(I^nM)/(I^{n+1}M)}{(xI^{n-1}M + I^{n+1}M)/(I^{n+1}M)} \cong \frac{I^nM}{xI^{n-1}M + I^{n+1}M}.$$

Defina o morfismo sobrejetor de R-módulos

$$\varphi : \left[\frac{gr_I(M)}{x^*gr_I(M)}\right]_n \longrightarrow [gr_{\overline{I}}(\overline{M})]_n$$

que é induzido pelas projeções canônicas, noutras palavras, dado um elemento homogêneo $m + xI^{n-1}M + I^{n+1}M$, então $\varphi(m + xI^{n-1}M + I^{n+1}M) = \overline{m} + \overline{I}^{n+1}\overline{M}$. Note que,

$$\varphi(m + xI^{n-1}M + I^{n+1}M) = 0 \Longleftrightarrow \overline{m} \in \overline{I}^{n+1}\overline{M} \Longleftrightarrow m \in I^{n+1}M + xM,$$

assim $m \in I^nM \cap (I^{n+1}M + xM) = I^{n+1}M + (xM \cap I^nM)$. Logo

$$\ker \varphi = \frac{I^{n+1}M + (xM \cap I^nM)}{xI^{n-1}M + I^{n+1}M}.$$

Do Lema 2.5.2 sabemos que $xM \cap I^nM = xI^{n-1}M$ para todo $n >> 0$, então a partir desse n conseguimos que $\ker \varphi = 0$, como desejado.

$\square$

Já vimos que em anéis noetherianos um ideal é redução do outro se, e somente se, ele é redução módulo todos os primos minimais. Agora com ajuda de sequência superficial provaremos um resultado similar.

Proposição 2.5.4. *Sejam R um anel noetheriano, $J \subseteq I$ ideais de R e $x_1, x_2, \ldots, x_s$ uma sequência superficial para I contida em J. Defina $K = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Então $J \subseteq I$ é uma redução se, e somente se, $J(R/K) \subseteq I(R/K)$ é uma redução.*

Demonstração: Tal qual o Lema 2.2.20, a ida é trivial, sendo assim, mostraremos apenas a recíproca.

Seja $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I^{n+1}(R/K) = JI^n(R/K)$. Então

$$I^{n+1} \subseteq (JI^n + K) \cap I^{n+1} = JI^n + K \cap I^{n+1}.$$

Pelo Lema 2.5.2 existe um n suficientemente grande tal que $K \cap I^{n+1} = KI^n$. Se tomarmos um $n >> 0$ satisfazendo a equação de redução e o lema teremos

$$I^{n+1} \subseteq JI^n + KI^n = JI^n.$$

$\square$

Teorema 2.5.5. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ uma anel local noetheriano, I ideal de R e $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma redução minimal de I, no qual $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é sequência superficial para I. Fixe $r \leq n$ e suponha* $\operatorname{grade}(gr_I(R)^+) \geq r$. *Então $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$ é uma sequência regular de $gr_I(R)$.*

Demonstração: Para o caso em que I é nilpotente temos $\operatorname{grade}(gr_I(R)^+) = 0$ e (0) será a única redução minimal de I, logo temos trivialmente o resultado. Suponhamos então que I não é nilpotente.

Afirmação: seja $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$, defina $S_i = R/(x_1, x_2, \ldots, x_i)$, $J_i = I/(x_1, x_2, \ldots, x_i)$. Então a imagem de x_{i+1} em S_i pertence a $J_i \backslash J_i^2$. De fato, sabemos da Proposição 1.3.4, que $x_1 \in I \backslash I^2$, se provarmos que J_i não é nilpotente, então podemos recorrer a esta mesma proposição para concluir o resultado. Caso $J_i^l = 0$ para algum $l \in \mathbb{N}$, então $I^l \subseteq (x_1, x_2, \ldots, x_i)$. Pela proposição 2.5.2 podemos tomar um n maior que l e suficientemente grande, onde $I^n \cap (x_1, x_2, \ldots, x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_i)I^{n-1}$, mas com isso temos $(x_1, x_2, \ldots, x_i)I^{n-1} = I^n$, quebrando a minimalidade de $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

Faremos a prova por indução sobre r. Suponha $r = 1$. Como $x_1 \in I \backslash I^2$, segue da Proposição 1.3.3 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(0 :_{gr_I(R)} x_1^*)_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. Seja $p \in gr_I(R)$ homogêneo em que $px_1^* = 0$. Desde que $\operatorname{grade}(gr_I(R)^+) > 0$, então podemos tomar $y \in gr_I(R)^+$ elemento homogêneo que não é divisor de zero em $gr_I(R)$. Seja $c =$

$s \deg y + \deg p$, onde s é tomado de forma que $c \geq n_0$. Claramente $py^s x_1^* = 0$, implicando que $py^s \in (0 :_{gr_I(R)} x_1^*)_c = 0$ e como y^s é também regular (Corolário 1.2.11), segue que $p = 0$.

Suponha $r > 1$. Por hipótese de indução $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{r-1}^*$ é $gr_I(R)$-sequência, logo da Proposição 1.2.18, segue que

$$\frac{gr_I(R)}{(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{r-1}^*)gr_I(R)} \cong gr_{J_{r-1}}(S_{r-1}).$$

Com a Proposição 1.2.30 temos grade $(gr_{J_{r-1}}(S_{r-1})^+) =$ grade $(gr_I(R)^+) - (r-1) \geq 1$. Seja $\overline{x_r}$ a imagem de x_r em S_{r-1}. Da nossa afirmação conseguimos que $\overline{x_r}$ é elemento superficial de J_{r-1} que não está contido em J_{r-1}^2. Temos ainda que o ideal $x_r S_{r-1}$ é redução minimal de J_{r-1}, pois caso contrário, se existisse $K/(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$ redução de J_{r-1} contida estritamente em $x_r S_{r-1}$, teríamos $K \subsetneq (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e a Proposição 2.5.4 nos diz que K seria redução de I, quebrando a minimalidade de $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

Por fim, como estamos equipados com as hipótese do teorema, podemos usar o caso 1 da indução para garantir que x_r^{**} (imagem de $\overline{x_r}$ em $gr_{J_{r-1}}(S_{r-1})$) é regular em $gr_{J_{r-1}}(S_{r-1})$, do isomorfismo acima temos que x_r* é $(gr_I(R))/((x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{r-1}^*)gr_I(R))$-regular, assim encerramos a prova.

□

Por fim chegamos ao principal resultado dessa seção.

Teorema 2.5.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano com corpo residual infinito e I um ideal de R. Então existe uma sequência superficial $x_1, x_2, \ldots, x_l$ para I, com comprimento $l = \ell(I)$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ é uma redução minimal de I.*

Demonstração: Faremos indução sobre $\ell(I)$. Se $\ell(I) = \dim \mathcal{F}_I = 0$, então pela Proposição 2.4.8 temos que (0) é redução minimal de I, implicando I ser nilpotente. Sendo assim, a sequência nula, que gera o ideal (0), será superficial para I, logo segue o resultado.

Suponha que $\ell(I) > 0$. Da Proposição 1.3.12 sabemos que existe um aberto (topologia de Zariski) U de $I/\mathfrak{m}I$, com a propriedade de sempre que $x \in I$ com $x + \mathfrak{m}I \in U$, então x é superficial para I. Como $\mathcal{F}_I$ é uma $(R/\mathfrak{m})$-álgebra gerada por $I/\mathfrak{m}I$ e $\dim \mathcal{F}_I > 0$, segue que nenhum primo minimal de $\mathcal{F}_I$ contém todos os elementos de $I/\mathfrak{m}I$.

Como $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então existe um elemento $x_1 + \mathfrak{m}I$ de U evitando todos os primos minimais de $\mathcal{F}_I$. Seja $J = I/(x_1)$ ideal de $R/(x_1)$. Note que

$$[\mathcal{F}_J]_n = \frac{(I^n + x_1 R)/(x_1 R)}{(\mathfrak{m}I^n + x_1 R)/(x_1 R)} \cong \frac{I^n + x_1 R}{\mathfrak{m}I^n + x_1 R} \qquad e$$

$$\left[\frac{\mathcal{F}_I}{x_1 \mathcal{F}_I}\right]_n = \frac{I^n/\mathfrak{m}I^n}{(x_1 I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n)/\mathfrak{m}I^n} \cong \frac{I^n}{x_1 I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}.$$

Como $x_1 I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n \subseteq \mathfrak{m}I^n + x_1 R$, então temos um morfismo canônico sobrejetor de R-álgebras graduadas

$$\varphi : \frac{\mathcal{F}_I}{x_1 \mathcal{F}_I} \longrightarrow \mathcal{F}_J,$$

definido nos elementos homogêneos por $\varphi(a + x_1 I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n) = a + x_1 R + \mathfrak{m}I^n$, no qual $a \in I^n$. Do Teorema do Isomorfismo sabemos que $\mathcal{F}_J$ é isomorfo ao quociente de $\mathcal{F}_I/x_1\mathcal{F}_I$ por $\ker \varphi$, logo $\dim \mathcal{F}_J \leq \dim(\mathcal{F}_I/x_1\mathcal{F}_I)$. Como x_1 foi tomado fora de todos os primos minimais de $\mathcal{F}_I$, então $\dim(\mathcal{F}_I/x_1\mathcal{F}_I) \leq \dim \mathcal{F}_I - 1 = \ell(I) - 1$. Logo $\dim \mathcal{F}_J \leq \ell(I) - 1$.

Por hipótese de indução existem $\overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \overline{x_l}$ elementos superficiais de J, com $l = \ell(J)$ e $(\overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \overline{x_l}) \subseteq J$ é uma redução minimal. Logo $J^{n+1} = J^n(\overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \overline{x_l})$, para algum $n \in \mathbb{Z}_+$, ou seja, $I^{n+1} \subseteq I^n(x_2, x_3, \ldots, x_l) + (x_1)$. O que implica

$$I^{n+1} \subseteq (I^n(x_2, \ldots, x_l) + (x_1)) \cap I^{n+1} = (I^n(x_2, \ldots, x_l)) \cap I^{n+1} + (x_1) \cap I^{n+1},$$

como $(I^n(x_2, \ldots, x_l)) \cap I^{n+1} \subseteq I^n(x_2, \ldots, x_l)$ e do Lema 2.5.2 temos que para todo $n >> 0$, $(x_1) \cap I^{n+1} = (x_1)I^n$. Assim, tomando um n suficientemente grande

$$I^{n+1} \subseteq I^n(x_2, \ldots, x_l) + (x_1)I^n + I^n(x_1, \ldots, x_l) = I^n(x_1, x_2, \ldots, x_l).$$

Logo $(x_1, x_2, \ldots, x_l) \subseteq I$ é uma redução e por construção $l \leq \ell(I)$. Seja K uma redução minimal de $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$, que por transitividade será redução minimal de I, pelo item (2) da Proposição 2.4.5 sabemos que $\mu(K) \leq l$, da Proposição 2.4.8 temos que $\mu(K) = \ell(I)$, assim $l = \ell(I)$ e do item (1) do Corolário 2.4.7 conseguimos o desejado. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

Até o momento, as seções 1.1 e 1.2 deste trabalho quase não tem relação com o Capítulo 2. Neste último capítulo, voltaremos a trabalhar no polinômio de Hilbert-Samuel, em que apresentaremos dois novos conceitos que são derivados dele. O primeiro deles é multiplicidade de um ideal, que será brevemente estudado na seção 3.1. O segundo conceito será número de postulação, que será discutido na seção 3.2 e daremos um enfoque maior. Por fim, sob a luz do número de redução, faremos a conexão entre os Capítulos 1 e 2.

3.1 Multiplicidade de um Ideal

A teoria moderna de multiplicidade, na álgebra comutativa surgiu com o estudo do polinômio de Hilbert para anéis locais. Durante essa seção definiremos a multiplicidade de um ideal (também conhecida como multiplicidade de Samuel), apresentaremos algumas propriedades básicas e por fim, mostraremos como esse conceito se relaciona com reduções minimais.

Definição 3.1.1. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano de dimensão d, I um ideal $\mathfrak{m}$-primário e M um R-módulo finitamente gerado. Definimos a multiplicidade de I em M, como sendo $d!$ vezes o coeficiente de grau d do polinômio $P_{I,M}$. Denotaremos a multiplicidade por $e_R(I; M)$, caso não haja confusão com o anel escreveremos apenas $e(I; M)$. Se $M = R$, então escreveremos $e(I)$, enquanto que se $I = \mathfrak{m}$ e $R = M$, então $e(\mathfrak{m}) = e(R)$ denotará a multiplicidade de R.*

Se M for um módulo finitamente gerado sobre um anel local noetheriano R, no qual d' é a dimensão de M e d é a dimensão de R, então, pelo Teorema da dimensão de Krull, sabemos que $P_{I,M}$ é um polinômio de grau d'. Com auxílio da Proposição 1.1.5 podemos escrevê-lo de forma conveniente:

$$P_{I,M}(n) = \sum_{i=0}^{d'} (-1)^{d'-i} e_{d'-i} \binom{n-1+i}{i}.$$

Como $\dim M = \dim(R/(0 :_R M))$, segue que $d' \leq d$. Dessa forma, para obter o coeficiente de grau d de $P_{I,M}$, basta dividir por n^d e fazer n tender ao infinito, noutras palavras, podemos definir a multiplicidade por:

$$e(I; M) = \lim_{n\to\infty} d! \frac{\lambda(M/I^n M)}{n^d}.$$

Logo

$$e_R(I;M) = \begin{cases} 0, & \text{se } \dim M < \dim R \\ e_0, & \text{se } \dim M = \dim R \end{cases}.$$

Note que da Observação 1.1.6 teremos que $e_0 > 0$, logo $e_R(I;M) \geq 0$. Os casos que estudaremos no restante desse trabalho será quando $\dim R = \dim M$. Na maioria das vezes teremos $R = M$, por isso denotaremos $e_R(I;M)$ por $e_0(I)$ ou apenas e_0.

Teorema 3.1.2. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel local noetheriano e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R. Se*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados, então $e(I;M) = e(I;K) + e(I;N)$.

Demonstração: Pelo Teorema 1.1.24, segue que $P_{I,K}(n) + P_{I,N}(n) = P_{I,M}(n) + r(n)$, em que $r(n)$ é tipo-polinomial de grau menor que $\deg(P_{I,M}(n))$. Logo

$$\begin{aligned} e(I;K) + e(I;N) &= \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{I,K}(n)}{n^d} + \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{I,N}(n)}{n^d} \\ &= \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{I,K}(n) + P_{I,N}(n)}{n^d} \\ &= \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{I,M}(n) + r(n)}{n^d} \\ &= \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{I,M}(n)}{n^d} + \lim_{n\to\infty} d!\frac{r(n)}{n^d} \\ &= \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{I,M}(n)}{n^d} + 0 \\ &= e(I;M). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.3. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano de dimensão d e $I = (x_1, \ldots, x_d)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R.*

(1) Se M é um R-módulo finitamente gerado, então para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos:

$$\lambda\left(\frac{M}{I^n M}\right) \leq \lambda\left(\frac{M}{IM}\right)\binom{n+d-1}{d}.$$

Em particular $e(I;M) \leq \lambda(M/IM)$.

(2) Se R é Cohen-Macaulay, então

$$\lambda\left(\frac{R}{I^n}\right) = \lambda\left(\frac{R}{I}\right)\binom{n+d-1}{d}.$$

Em particular $e(I;R) = \lambda(R/I)$.

Demonstração:

(1) Inicialmente mostraremos que $\lambda(M/I^nM) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(I^iM/I^{i+1}M)$, para todo $n > 0$. Para tal, faremos indução sobre n. O caso $n = 1$ é trivial, por isso suponha $n > 1$. Da sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I^{n-1}M}{I^nM} \longrightarrow \frac{M}{I^nM} \longrightarrow \frac{M}{I^{n-1}M} \longrightarrow 0$$

obtemos $\lambda(M/I^nM) = \lambda(I^{n-1}M/I^nM) + \lambda(M/I^{n-1}M)$, por hipótese de indução temos que $\lambda(M/I^{n-1}M) = \sum_{i=0}^{n-2} \lambda(I^iM/I^{i+1}M)$, logo obtemos o desejado.

Denote $I^i = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, no qual $k = \mu(I^i)$. Tome o morfismo sobrejetor de R-módulos $\varphi : [M/IM]^k \longrightarrow I^iM/I^{i+1}M$ que mapeia as k-uplas $(m_1 + IM, \ldots, m_k + IM)$ em $a_1m_1 + \ldots + a_km_k + I^{i+1}M$. Assim $\lambda(I^iM/I^{i+1}M) \leq \lambda([M/IM]^k) = \mu(I^i)\lambda(M/IM)$. Como $\{x_1^{n_1}x_2^{n-2}\cdots x_d^{n_d} \mid n_1 + n_2 + \cdots + n_d = i\}$ gera I^i e esse conjunto tem cardinalidade $\binom{d+i-1}{d-1}$, segue que

$$\lambda(M/I^nM) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(I^iM/I^{i+1}M) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(M/IM)\mu(I^i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(M/IM)\binom{d+i-1}{d-1}.$$

Note que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda(M/IM)\binom{d+i-1}{d-1} = \lambda(M/IM)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{d+i-1}{d-1} = \lambda(M/IM)\binom{n+d-1}{d}.$$

Assim teremos a primeira desigualdade do item (1). Desde que o lado esquerdo da desigualdade é o polinômio de Hilbert-Samuel, então basta multiplicar ambos os lados por $d!/n^d$ e fazer n tender a infinito que obtemos $e(I; M) \leq \lambda(M/IM)$.

(2) Como I é $\mathfrak{m}$-primário, sabemos da Observação 1.1.14 que R/I é artiniano, ou seja, $\dim(R/I) = 0$ e do item (3) do Teorema 1.2.35 temos que I é gerado por uma sequência regular, o que implica, do Teorema 1.2.16, que $gr_I(R)$ é isomorfo a um anel de polinômios com d variáveis sobre R/I. Dessa forma I^i/I^{i+1} é um R/I-módulo livre, cujo posto é igual ao número de monomiais em d variáveis de grau i, ou seja, o posto é igual a $\binom{d+i-1}{d-1}$. Logo usando uma argumentação similar ao item anterior temos:

$$\lambda(R/I^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(I^i/I^{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(R/I)\binom{d+i-1}{d-1} = \lambda(R/I)\binom{n+d-1}{d}.$$

Com isso temos a primeira igualdade, mais uma vez, multiplicando ambos os lados por $d!/n^d$ e fazendo $n \to \infty$, conseguimos $e(I) = \lambda(R/I)$.

□

Proposição 3.1.4. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, $J \subseteq I$ ideais de R e M um R-módulo finitamente gerado. Se J é uma redução de I, então $e(I; M) = e(J; M)$.*

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $I^{k+1} = JI^k$. Note que para todo $n \geq k + 1$ teremos da Observação 2.2.5 que $I^{k+(n-k)} = J^{n-k}I^k$, em particular $I^n \subseteq J^{n-k}$, o que induz uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{J^{n-k}M}{I^nM} \longrightarrow \frac{M}{I^nM} \longrightarrow \frac{M}{J^{n-k}M} \longrightarrow 0$$

e pelo fato que $J^n \subseteq I^n$ temos outra sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I^nM}{J^nM} \longrightarrow \frac{M}{J^nM} \longrightarrow \frac{M}{I^nM} \longrightarrow 0.$$

Pelas duas sequências tiramos que $\lambda(M/I^nM) \geq \lambda(M/J^{n-k}M)$ e $\lambda(M/J^nM) \geq \lambda(M/I^nM)$.

Podemos tomar um n suficientemente grande, onde $P_{J,M}(n) \geq P_{I,M}(n) \geq P_{J,M}(n-k)$. Como já sabemos (Observação 1.1.18), o grau de $P_{I,M}$ e $P_{J,M}$ são os mesmos. Podemos ver que $P_{J,M}(n)$ e $P_{J,M}(n-k)$ possuem o mesmo coeficiente líder, ou seja,

$$e(J;M) = \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{J,M}(n)}{n^d} = \lim_{n\to\infty} d!\frac{P_{J,M}(n-k)}{n^d}.$$

Logo, $e(J;M) \geq e(I;M) \geq e(J;M)$, como desejado. □

Proposição 3.1.5. *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R. Se J é uma redução minimal de I então $e(I) = \lambda(R/J)$.*

Demonstração: Do Corolário 2.4.13 sabemos que J é gerado por $(\dim R)$-elementos, que pela Proposição 3.1.3 nos dá $e(J) = \lambda(R/J)$. Por fim, usando a Proposição 3.1.4 teremos que $e(I) = e(J) = \lambda(R/J)$.

□

3.2 Reduções Minimais e o Número de Postulação

Durante todo nosso trabalho, vimos a riqueza de informação que o polinômio de Hilbert-Samuel oferece, tais como a dimensão do módulo e a multiplicidade do ideal. Sabemos que a partir de um certo número a função se torna um polinômio, assim é natural nos perguntarmos qual relevância esse número tem nessa dissertação.

Nessa última seção investigaremos a relação entre o número de redução global e o maior n em que $H_I(n) \neq P_I(n)$, ao qual chamamos de número de postulação. O principal objetivo será dar condições suficientes para que tal relação ocorra. Por fim, apresentaremos alguns artigos que são de grande ajuda nesse estudo.

Definição 3.2.1. *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Definimos o* **número de postulação** *de I por $n(I) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid P_I(n) \neq H_I(n)\}$.*

Exemplo 3.2.2. *Quando $(R,\mathfrak{m})$ é anel local noetheriano de dimensão zero, então $\mathfrak{m}$ é nilpotente, isso porque R será artiniano e por ser local temos que o radical de Jacobson será igual ao seu único maximal. Em particular, todo ideal $\mathfrak{m}$-primário I também será nilpotente, logo o ideal nulo será a única redução minimal de I, implicando $r(I) = \min\{n \in \mathbb{N} | I^{n+1} = 0\}$. Com isso $P_I(n) = \lambda(R)$, para todo $n \geq r(I)+1$. Seja $k < r(I)+1$ e suponha que $\lambda(R) = P_I(k)$, então passando por uma sequência exata temos $\lambda(R) = \lambda(R/I^k) + \lambda(I^k)$, o que implica $\lambda(I^k) = 0$, mas com isso teremos $I^k = 0$, contrariando a minimalidade de $r(I)$. Logo $r(I) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid P_I(n) \neq H_I(n)\} = n(I)$.*

Note que no exemplo anterior conseguimos uma fórmula relacionando o número de redução minimal e o número de postulação, um ponto fundamental para o resultado foi saber a dimensão do anel. Mostraremos durante essa seção que esse caso não é particular, claramente com algumas hipóteses extras.

Observação 3.2.3. *Como o caso* $\dim R = 0$ *foi descrito no exemplo, então a partir de agora estaremos trabalhando com anéis de dimensão positiva. Estaremos supondo também que todos os anéis em questão terão corpo residual infinito. Por simplicidade denotaremos* $\gamma(I)$ *o grade de* $gr_I(R)^+$. *Note que* $\gamma(I) \leq \dim R$, *pois se* $\boldsymbol{x}$ *é uma sequência* $gr_I(R)$*-regular contida em* $gr_I(R)^+$, *então do Corolário 1.2.6 teremos que* $\boldsymbol{x}$ *é uma* $gr_I(R)_{\mathfrak{M}}$*-sequência e do Teorema 1.2.32,* $\operatorname{depth}(gr_I(R)_{\mathfrak{M}}) \leq \dim(gr_I(R)_{\mathfrak{M}})$, *Como* $\operatorname{ht}(\mathfrak{M}) = \dim(gr_I(R)) = \dim R$, *segue que* $\gamma(I) \leq \operatorname{depth}(gr_I(R)_{\mathfrak{M}}) \leq \dim R$.

Em algumas bibliografias é dito profundidade de $gr_I(R)$ como sendo $\operatorname{depth}(gr_I(R)_{\mathfrak{M}})$, nesses casos $gr_I(R)$ é Cohen-Macaulay sempre que sua profundidade é igual a $\operatorname{ht}(\mathfrak{M})$. Em alguns resultados dessa seção, o trabalho original refere-se a $\operatorname{depth}(gr_I(R))$, mas decidimos por adaptar esses resultados a nossa dissertação, pois o principal teorema dessa seção refere-se ao grade de $gr_I(R)^+$.

Lema 3.2.4. (Northcoth) *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel Cohen-Macaulay de dimensão 1 e* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário. Escreva* $P_I(n) = e_0 n - e_1$, *então:*

(1) $P_I(n+1) - H_I(n+1) \geq P_I(n) - H_I(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$;

(2) $\lambda(R/I) \geq e_0 - e_1$;

(3) $e_1 \geq 0$.

Demonstração:

(1) Seja J uma redução minimal de I, pelo Corolário 2.4.13 teremos que $J = (x)$, com x elemento regular de R. Pela Proposição 3.1.5 sabemos que $e_0(I) = \lambda(R/(x))$. Da sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I^{n+1}}{(x)I^n} \longrightarrow \frac{R}{(x)I^n} \longrightarrow \frac{R}{I^{n+1}} \longrightarrow 0$$

e da aditividade do comprimento, segue que $\lambda(R/(x)I^n) \geq \lambda(R/I^{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim

$$\begin{aligned} P_I(n+1) - H_I(n+1) &= (n+1)e_0 - e_1 - \lambda(R/I^{n+1}) \\ &\geq ne_0 + e_0 - e_1 - \lambda(R/(x)I^n) \\ &= ne_0 - e_1 + \lambda(R/(x)) - \lambda(R/(x)I^n). \end{aligned}$$

Passando por uma sequência exata temos $\lambda((x)/(x)I^n) = \lambda(R/(x)) - \lambda(R/(x)I^n)$.

Seja $\varphi : R \longrightarrow (x)/(x)I^n$ o morfismo sobrejetor de R-módulos definido por $\varphi(r) = rx + (x)I^n$. Podemos observar que todo elemento de I^n pertence a $\ker\varphi$, sendo assim, tome $r \in R$ tal que $\varphi(r) = 0$, ou seja, $rx \in (x)I^n$ e pela regularidade de x, segue que $r \in I^n$. Com isso temos um isomorfismo de R-módulos, $R/I^n \cong (x)/(x)I^n$ implicando $\lambda((x)/(x)I^n) = \lambda(R/I^n)$ para todo n. Logo

$$\begin{aligned} P_I(n+1) - H_I(n+1) &\geq ne_0 - e_1 + \lambda(R/(x)) - \lambda(R/(x)I^n) \\ &= ne_0 - e_1 - \lambda((x)/(x)I^n) \\ &= ne_0 - e_1 - \lambda(R/I^n) \\ &= P_I(n) - H_I(n). \end{aligned}$$

(2) Seja $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $P_I(n) = H_I(n)$ para todo $n \geq n_0$. Pelo item (1) conseguimos que $P_I(n) - H_I(n) \leq P_I(n_0) - H_I(n_0)$ para todo $n \leq n_0$. Logo $P_I(n) - H_I(n) \leq 0$ para todo n, em particular $P_I(1) - H_I(1) = e_0 - e_1 - \lambda(R/I) \leq 0$.

(3) Do item anterior temos $e_1 \geq e_0 - \lambda(R/I) = \lambda(R/(x)) - \lambda(R/I)$. Passando por uma sequência exata canônica temos $\lambda(R/(x)) - \lambda(R/I) = \lambda(I/(x)) \geq 0$, finalizando a prova.

□

Lema 3.2.5. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel local noetheriano, I ideal $\mathfrak{m}$-primário e $x \in I \backslash I^2$ tal que x^* é $gr_I(R)$-regular. Defina $S = R/(x)$ e $J = I/(x)$. Então $H_J(n) = \Delta H_I(n-1)$ e $P_J(n) = \Delta P_I(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Por argumentos similares aos usados na demonstração da afirmação 1 da Proposição 1.2.18, temos que $(I^n : x) = I^{n-1}$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Seja $\varphi_x : R/I^n \longrightarrow R/I^n$ o morfismo produto por x, ou seja, $\varphi_x(a + I^n) = ax + I^n$. Desde que $I^n \subseteq (x) + I^n$, então definimos também $\psi : R/I^n \longrightarrow R/(I^n + (x))$ o morfismo mudança de classe, isto é, $\psi(a + I^n) = a + I^n + (x)$. Podemos ver que $\text{Im}\varphi_x = \ker \psi$ e ainda, se $\varphi_x(a + I^n) = 0$, então $ax \in I^n$ e com isso $\ker \varphi_x = (I^n : x)/I^n$. Logo temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{(I^n : x)}{I^n} \xrightarrow{\iota} \frac{R}{I^n} \xrightarrow{\varphi_x} \frac{R}{I^n} \xrightarrow{\psi} \frac{R}{I^n + (x)} \longrightarrow 0.$$

Da aditividade do comprimento, $\lambda((I^n : x)/I^n) - \lambda(R/I^n) + \lambda(R/I^n) - \lambda(R/(I^n + (x))) = 0$, ou seja, $\lambda((I^n : x)/I^n) = \lambda(R/(I^n + (x)))$. Logo

$$\begin{aligned} H_J(n) &= \lambda(S/J^n) \\ &= \lambda(R/(I^n + (x))) \\ &= \lambda((I^n : x)/I^n) \\ &= \lambda(I^{n-1}/I^n). \end{aligned}$$

Passando por uma sequência exata trivial temos $\lambda(I^{n-1}/I^n) = \lambda(R/I^n) - \lambda(R/I^{n-1})$. Logo $H_J(n) = \lambda(R/I^n) - \lambda(R/I^{n-1}) = H_I(n) - H_I(n-1)$. Podemos tomar $n >> 0$ para que ambos os lados da equação concordem com seus respectivos polinômios, isto é, $P_J(n) = \Delta P_I(n-1)$ para todo n suficientemente grande. Como temos dois polinômios de $\mathbb{Q}[x]$ concordando em uma infinidade de pontos, logo eles são iguais, ou seja, $P_J(n) = \Delta P_I(n-1)$ para todo n.

□

Teorema 3.2.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay de dimensão d e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Suponha que $\gamma(I) \geq d - 1$. Então para todo $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$ temos*

$$(-1)^{d-i} \Delta^i (P_I(n) - H_I(n)) \geq 0.$$

Demonstração: Inicialmente, note que é suficiente provar o caso em que $i = d$. Para isso, seja $f(n) = P_I(n) - H_I(n)$. Suponha que $(-1)^{d-i}\Delta(f(n)) \geq 0$ para algum $i > 0$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. Então

$$(-1)^{d-i} \Delta^i (f(n)) = \Delta^1 [(-1)^{d-i} \Delta^{i-1} (f(n))] \geq 0.$$

Contudo, $f(n) = 0$ para todo $n >> 0$, implicando $(-1)^{d-i}\Delta^{i-1}(f(n)) = 0$. Escreva $g(n) = (-1)^{d-i}\Delta^{i-1}(f(n))$, assim $\Delta^1(g(n)) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, $g(n+1) \geq g(n)$. Tome $n_0 \in \mathbb{Z}$ no qual $f(n) = 0$ para todo $n \geq n_0$, logo

$$0 \geq g(n_0) \geq g(n_0 - 1) \geq g(n_0 - 2) \geq \cdots$$

implicando $g(n) \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, obtemos $(-1)^{d-(i-1)}\Delta^{i-1}(f(n)) \geq 0$, logo o resultado é válido para $i - 1$.

Para provar que $\Delta^d(P_I(n) - H_I(n)) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ faremos indução sobre d. Suponha $d = 1$. Do Lema 3.2.4, segue que $P_I(n+1) - H_I(n+1) \geq P_I(n) - H_I(n)$ e com isso temos o resultado.

Suponha $d > 1$. Como $\gamma(I) > 0$, então existe um elemento não divisor de zero de $gr_I(R)^+$, ou seja, evitando todos os primos minimais de $gr_I(R)$ e desde que $R/\mathfrak{m}$ é infinito, podemos tomar esse elemento tendo grau 1. Digamos que $x \in I \backslash I^2$ seja tal elemento, do Teorema 1.2.20 sabemos que x é elemento regular de R.

Defina $J = I/(x)$ e $S = R/(x)$. Pelo Teorema 1.2.36 sabemos que S é um anel Cohen-Macaulay de dimensão $(d-1)$. Pela Proposição 1.2.18 temos que $gr_J(S) \cong gr_I(R)/(x^* gr_I(R))$ e da Proposição 1.2.30 temos $\gamma(J) = \gamma(I) - 1 \geq d - 2$. Por indução $\Delta^{d-1}(P_J(n) - H_J(n)) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Do Lema 3.2.5 sabemos que $H_J(n) = H_I(n) - H_I(n-1)$ e $P_J(n) = P_I(n) - P_I(n-1)$. Logo

$$\begin{aligned}
\Delta^d(P_I(n) - H_I(n)) &= \Delta^{d-1}[\Delta^1(P_I(n) - H_I(n))] \\
&= \Delta^{d-1}[(P_I(n+1) - H_I(n+1)) - (P_I(n) - H_I(n))] \\
&= \Delta^{d-1}(P_J(n) - H_J(n)) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.7. *Sejam* (R, m) *um anel Cohen-Macaulay de dimensão* d *e* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário no qual* $\gamma(I) \geq d - 1$. *Suponha* $P_I(k) = H_I(k)$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Então* $P_I(n) = H_I(n)$ *para todo* $n \geq k$.

Demonstração: Pelo teorema anterior temos $(-1)^{d-1}\Delta^1(P_I(n) - H_I(n)) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sabemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $P_I(n) = H_I(n)$ para todo $n \geq m$. Se $k \geq m$ não há o que fazer, sendo assim suponha $k < m$, logo

$$(-1)^{d-1}(P_I(k) - H_I(k)) \leq (-1)^{d-1}(P_I(k+1) - H_I(k+1)) \leq \cdots \leq (-1)^{d-1}(P_I(m) - H_I(m)).$$

Implicando $(-1)^{d-1}(P_I(n) - H_I(n)) = 0$, para todo $n \geq k$, ou seja, $P_I(n) = H_I(n)$.

□

Sobre as hipóteses do corolário anterior, podemos redefinir o número de postulação da seguinte forma: $n(I) = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid P_I(k+1) = H_I(k+1)\}$.

Lema 3.2.8. *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *anel local noetheriano com corpo residual não necessariamente infinito. Tome* I *ideal* $\mathfrak{m}$*-primário,* $x \in I \backslash I^2$ *e suponha* x^* *é* $gr_I(R)$*-regular. Defina* $S = R/(x)$ *e* $J = I/(x)$*, então* $n(J) = n(I) + 1$.

Demonstração: Pelo Lema 3.2.5, sabemos que $H_J(n) = H_I(n) - H_I(n-1)$ e $P_J(n) = P_I(n) - P_I(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se $n > n(I)+1$, então

$$H_J(n) = H_I(n) - H_I(n-1) = P_I(n) - P_I(n-1) = P_J(n),$$

ou seja, $n(J) \leq n(I)+1$.

Se $n(J) < n(I)+1$, então $n(J)+1 \leq n(I)+1$. Assim, $H_J(n(I)+1) = P_J(n(I)+1)$, com isso, $H_I(n(I)+1) - H_I(n(I)) = P_I(n(I)+1) - P_I(n(I))$, implicando $H_I(n(I)) = P_I(n(I))$ contrariando a definição de $n(I)$.

$\square$

Lema 3.2.9. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ anel local noetheriano com corpo residual não necessariamente infinito. Tome I ideal de R e J uma redução minimal de I. Suponha $x \in J \backslash I^2$ tal que x^* é $gr_I(R)$-regular. Então*

$$r_{J/(x)}(I/(x)) = r_J(I).$$

Demonstração: Defina $S = R/(x)$, $K = I/(x)$, $L = J/(x)$, $n = r_J(I)$ e $m = r_L(K)$. Como $JI^n = I^{n+1}$, segue que $LK^n = K^{n+1}$. Relembrando a demonstração da Proposição 1.2.18, afirmação 1, sabemos que $(I^n : x) = I^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que é equivalente a dizer que x é elemento superficial de I. Logo podemos afirmar que L é redução minimal de K, pois caso contrário, se $A \subsetneq L$ é uma redução no qual $A = B/(x)$ para algum ideal B de R, então da Proposição 2.5.4 teríamos $B \subsetneq J$ redução, contrariando a minimalidade de J. Dessa forma $m \leq n$.

Tome $y \in I^{m+1}$ e escreva $\overline{y}$ a imagem de y em S, logo $\overline{y} \in LK^m$. Portanto, $y \in JI^m + (x)$, ou seja, existem $a \in JI^m$ e $b \in R$ no qual $y = a + bx$. Como $bx = y - a$, segue que $bx \in I^{m+1}$, isto é, $b \in (I^{m+1} : x)$ e pelo que foi comentado $b \in I^m$. Por fim, teremos $bx \in JI^m$, implicando $y \in JI^m$, logo $JI^m = I^{m+1}$.

$\square$

Enfim, chegamos ao principal teorema dessa seção e um dos mais importantes de nosso trabalho.

Teorema 3.2.10. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay de dimensão d e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R. Suponha que $\gamma(I) \geq d-1$. Então $r(I) = n(I) + d$.*

Demonstração: Mostraremos que se J é uma redução minimal I, então $r_J(I) = n(I) + d$, para isso faremos indução sobre d. Suponha que $d = 1$ e escreva $r = r_J(I)$ e $k = n(I)$. Pelo Corolário 2.4.13, sabemos que $J = (x)$, no qual x é elemento regular, assim $(x)I^r = I^{r+1}$. Pela Observação 2.2.5, $I^n = (x^{n-r})I^r$ para todo $n \geq r$. Dessa forma para todo $n \geq r$ teremos que $\lambda(R/I^n) = \lambda(R/(x^{n-r})I^r)$. Passando por uma sequência exata trivial temos

$$\lambda(R/(x^{n-r})I^r) = \lambda(R/(x^{n-r})) + \lambda((x^{n-r})/(x^{n-r})I^r).$$

Seja $\varphi : R \longrightarrow (x^{n-r})/(x^{n-r})I^r$ o morfismo sobrejetor de R-módulos definido por $\varphi(a) = ax^{n-r} + (x^{n-r})I^r$. Note que $I^r \subseteq \ker \varphi$, agora se $\varphi(a) = 0$, então $ax^{n-r} \in (x^{n-r})I^r$ e pela regularidade de x temos que $a \in I^r$. Logo temos um isomorfismo de R-módulos

$$\frac{R}{I^r} \cong \frac{(x^{n-r})}{(x^{n-r})I^r}.$$

Por argumentação similar ao exemplo 1.1.19 temos $\lambda(R/(x^{n-r})) = (n-r)\lambda(R/(x))$, logo

$$\lambda(R/I^n) = \lambda(R/(x^{n-r})) + \lambda((x^{n-r})/(x^{n-r})I^r) = (n-r)\lambda(R/(x)) + \lambda(R/I^r).$$

Como o último termo da igualdade é um polinômio em $\mathbb{Q}[x]$, segue da unicidade do polinômio de Hilbert-Samuel que $\lambda(R/I^n) = P_I(n)$ para todo $n \geq r$. Dessa forma $k \leq r-1$. Agora seja $\lambda(R/I^{k+1}) = (k+1)e_0 - e_1$, como da Proposição 3.1.5 temos $e_0 = \lambda(R/(x))$, segue que $\lambda(R/I^{k+1}) = (k+1)\lambda(R/(x)) - e_1$. Passando por uma sequência exata trivial conseguimos $\lambda(R/I^{k+1}) = \lambda(R/(x^{k+1})) - \lambda(I^{k+1}/(x^{k+1}))$. Logo

$$\begin{aligned}\lambda(R/I^{k+1}) &= \lambda(R/(x^{k+1})) - \lambda(I^{k+1}/(x^{k+1}))\\ &= (k+1)\lambda(R/(x)) - \lambda(I^{k+1}/(x^{k+1}))\\ &= (k+1)\lambda(R/(x)) - e_1.\end{aligned}$$

Desde que $(k+1)\lambda(R/(x)) = \lambda(R/(x^{k+1}))$, então $e_1 = \lambda(I^{k+1}/x^{k+1})$. Portanto, $\lambda(R/I^{k+2}) = (k+2)\lambda(R/(x)) - \lambda(I^{k+1}/(x^{k+1}))$.

Seja $\psi : I^{k+1} \longrightarrow (x)I^{k+1}/(x^{k+2})$ o morfismo sobrejetor de R-módulos definido por $\psi(a) = ax + x^{k+2}$, pela regularidade de x temos que $\ker\psi = x^{k+1}$. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo, $\lambda(I^{k+1}/(x^{k+1})) = \lambda((x)I^{k+1}/(x^{k+2}))$. Logo $\lambda(R/I^{k+2}) = \lambda(R/(x^{k+2})) - \lambda((x)I^{k+1}/(x^{k+2}))$.

Da sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{(x)I^{k+1}}{(x^{k+2})} \longrightarrow \frac{R}{(x^{k+2})} \longrightarrow \frac{R}{((x)I^{k+1})} \longrightarrow 0$$

temos que $\lambda(R/(x)I^{k+1}) = \lambda(R/(x^{k+2})) - \lambda((x)I^{k+1}/(x^{k+2}))$, que implica $\lambda(R/I^{k+2}) = \lambda(R/(x)I^{k+1})$. Por uma nova sequência exata,

$$0 \longrightarrow \frac{I^{k+2}}{(x)I^{k+1}} \longrightarrow \frac{R}{(x)I^{k+1}} \longrightarrow \frac{R}{I^{k+2}} \longrightarrow 0,$$

temos que $\lambda(R/(x)I^{k+1}) = \lambda(I^{k+2}/(x)I^{k+1}) + \lambda(R/I^{k+2})$. Portanto, $\lambda(I^{k+2}/(x)I^{k+1}) = 0$, ou seja, $(x)I^{k+1} = I^{k+2}$. Logo $r \leq k+1$.

Suponha $d > 1$. Se J é redução minimal de I, então pelo Corolário 2.4.13 temos que $J = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ no qual $x_1, x_2, \ldots, x_d$ é R-sequência. Temos do Teorema 2.5.6, que $x_1, \ldots, x_d$ é sequência superficial para I. Pela hipótese de que $\gamma(I) \geq d-1 > 0$, temos pelo Teorema 2.5.5 que $x_1^*, \ldots, x_{d-1}^*$ é $gr_I(R)$-sequência. Denote $S = R/(x_1)$, $L = I/(x_1)$ e $K = J/(x_1)$. Por argumentos similares aos que foram usados na prova do lema anterior, temos que K redução minimal de L.

Da Proposição 1.2.30, $\gamma(L) = \gamma(I) - 1 \geq d-2$ e o Teorema 1.2.36 nos diz que S é anel Cohen-Macaulay de dimensão $d-1$. Por indução $r_K(L) = n(L)+d-1$, pela Proposição 1.2.29 tem-se que grade $(I, R) =$ grade $(\mathfrak{m}, R)$. Como R é Cohen-Macaulay, segue que grade $(\mathfrak{m}, R) = \dim R = d$, e mais ainda, temos por hipótese geral que $d > 0$, logo I não é nilpotente. Pela Proposição 1.3.4, $x_1 \notin I^2$, logo dos Lemas 3.2.8 e 3.2.9 segue o resultado.

□

Uma das hipóteses do teorema anterior foi de que $\gamma(I) \geq d-1$, com exceção do caso em que $d = 1$, essa condição não é tão trivial de ser satisfeita. Note que o Teorema 1.2.20

nos forneceu condições suficientes para o cálculo de $\gamma(I)$. Sendo assim, o Teorema de Valla e Valabrega será fundamental importância para o restante desse trabalho.

Observação 3.2.11. *Relembrando que quase todas nossas hipóteses são sempre* $(R/\mathfrak{m})$ *é anel Cohen-Macaulay de dimensão positiva e corpo residual infinito. Assim, se* I *é ideal* $\mathfrak{m}$*-primário de* R *e* J *redução minimal de* I*, então o Teorema 2.5.6 nos diz que* J *é gerado por uma sequência superficial de comprimento* $\ell(I)$*, o Corolário 2.4.12 nos diz que* $\ell(I) = d$*, sendo assim, digamos que* $x_1, x_2, \ldots, x_d$ *seja tal sequência gerando* J*. Pelo Teorema 1.2.35,* $x_1, x_2, \ldots, x_d$ *é uma sequência regular.*

Escreva $S_r = R/(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *e* $I_r = I/(x_1, x_2, \ldots, x_r)$*, para todo* $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$*, no qual* $I_0 = I$ *e* $S_0 = R$*. Como* $\operatorname{grade}(I_r) = \operatorname{depth} S_r = d - r > 0$*, segue que* I_r *não é ideal nilpotente de* S_r*, e pela Proposição 1.3.4 temos que a imagem de* x_{i+1} *em* S_i *não está em* I_i^2*, em particular* $x_{i+1} \notin I^2$*, para todo* $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$*, ou seja,* $\operatorname{ord}_I(x_{i+1}) = 1$*.*

Logo, para podermos aplicar o Teorema de Valabrega-Valla basta encontrar uma redução minimal J *de* I *em que* $I^n \cap J = JI^{n-1}$ *para todo* $n \geq 1$*.*

Proposição 3.2.12. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *é anel Cohen-Macaulay de dimensão* d *e* I *é um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário em que* $r(I) \leq 1$*. Então* $\gamma(I) = d$*, em particular* $P_I(n) = H_I(n)$ *para todo* $n \geq 1$*.*

Demonstração: Se J é redução minimal de I no qual $r_J(I) \leq 1$, então $I^n = JI^{n-1}$ para todo $n > 1$. Dessa forma $J \cap I^n = J \cap JI^{n-1} = JI^{n-1}$ para todo $n > 1$. Como é trivial que $I \cap J = J$, pela Observação 3.2.11 temos o resultado.

Pelo Teorema 3.2.10, $r(I) = n(I) + d$, implicando $n(I) + d \leq 1$. Como por hipótese geral estamos supondo $d \geq 1$, segue que $n(I) \leq 0$, logo $P_I(n) = H_I(n)$ para todo $n \geq 1$.

□

Lema 3.2.13. (Valla) *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *anel Cohen-Macaulay de dimensão* d *e* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário. Se* J *é uma redução minimal* I*, então*

$$\lambda(I/I^2) = e(I) + (d-1)\lambda(R/I) - \lambda(I^2/IJ).$$

Demonstração: Como $J \subseteq I$, segue que temos sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I^2}{JI} \longrightarrow \frac{I}{JI} \longrightarrow \frac{I}{I^2} \longrightarrow 0,$$

implicando $\lambda(I/IJ) = \lambda(I^2/JI) + \lambda(I/I^2)$. Da sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I}{JI} \longrightarrow \frac{R}{JI} \longrightarrow \frac{R}{I} \longrightarrow 0$$

temos $\lambda(R/IJ) = \lambda(R/I) + \lambda(I/IJ)$, por uma sequência análoga teremos $\lambda(R/IJ) = \lambda(R/J) + \lambda(J/IJ)$. Portanto

$$\begin{aligned}\lambda(I/I^2) &= \lambda(I/IJ) - \lambda(I^2/JI) \\ &= \lambda(R/IJ) - \lambda(R/I) - \lambda(I^2/JI) \\ &= \lambda(R/J) + \lambda(J/IJ) - \lambda(R/I) - \lambda(I^2/JI).\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1.5, $e(I) = \lambda(R/J)$. Se mostrarmos que $\lambda(J/IJ) = d\lambda(R/I)$, então teremos o resultado.

Sabemos do Corolário 2.4.13 que J é gerado por uma sequência regular de comprimento d, digamos que $J = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$. Seja $\varphi : [R/I]^d \longrightarrow J/IJ$ o morfismo sobrejetor de R-módulos definido por $\varphi(a_1 + I, a_2 + I, \ldots, a_d + I) = \sum_{i=1}^{d} a_i x_i + IJ$.

Se $\varphi(a_1 + I, a_2 + I, \ldots, a_d + I) = 0$, então $\sum_{i=1}^{d} a_i x_i \in IJ$. Note que um elemento de IJ é da forma $\sum_{i=1}^{n} c_i d_i$, no qual $c_i \in I$ e $d_i \in J$ para todo i, note também que $d_i = \sum_{i=1}^{d} c_{ij} x_j$ com $c_{ij} \in R$. Sendo assim, $\sum_{i=1}^{d} a_i x_i = \sum_{i=1}^{d} b_i x_i$, no qual $b_i \in I$, reescrevendo de outra forma, $\sum_{i=1}^{d} (a_i - b_i) x_i = 0$. Como R é local, segue do Corolário 1.2.13 , que $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d, x_i$ é também uma R-sequência para todo i. Portanto $(\overline{a_i} - \overline{b_i})\overline{x_i} = 0$ em R/J_i, no qual $J_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$, e da regularidade de x_i temos $a_i - b_i \in J_i$. Desde que $J_i \subseteq J \subseteq I$ e $b_i \in I$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, então $a_i \in I$, portanto $\ker \varphi = 0$. Pelo Teorema do Isomorfismo, $[R/I]^d \cong J/IJ$, logo $d\lambda([R/I]) = \lambda([R/I]^d) = \lambda(J/IJ)$.

□

Teorema 3.2.14. (Valla) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel Cohen-Macaulay de dimensão d e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Se J é uma redução minimal I, então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $\lambda(I/I^2) = e(I) + (d-1)\lambda(R/I)$;

(2) $r_J(I) \leq 1$.

Em particular, se um dos itens acima ocorrerem, então $\gamma(I) = d$.

Demonstração:

(1) $\Longrightarrow$ (2). Pelo Lema 3.2.13 teremos $\lambda(I^2/IJ) = 0$, ou seja, $I^2 = IJ$, logo $r_J(I) \leq 1$ e da Proposição 3.2.12, segue que $\gamma(I) = d$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Como $r_J(I) \leq 1$, segue que $I^2 = JI$, portanto $\lambda(I^2/IJ) = 0$ e do Lema 3.2.13 segue o resultado.

□

Teorema 3.2.15. (Mafi-Naderi) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel Cohen-Macaulay de dimensão d e I ideal $\mathfrak{m}$-primário de R, no qual $I = \overline{I}$. Se $r(I) \leq 2$, então $P_I(n) = H_I(n)$ para todo $n \geq 2$. Em particular, $\gamma(I) = d$.*

Demonstração: A ideia da prova será usar o Teorema de Valabrega-Valla da forma que foi descrito na Observação 3.2.11. Sendo assim, seja $J = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ uma redução minimal de I em que $r_J(I) \leq 2$. Pelo Teorema 2.2.15, $J \cap \overline{J^2} = J\overline{J}$, pela Proposição 2.2.13, J^2 é uma redução de I^2. Pelo Corolário 2.2.8 teremos $\overline{I} = \overline{J}$ e $\overline{I^2} = \overline{J^2}$, implicando $J \cap \overline{I^2} = J\overline{I}$. Pelo fato de I ser integralmente fechado temos $J\overline{I} = JI$, e como $JI \subseteq J \cap I^2 \subseteq J \cap \overline{I^2}$, segue que $J \cap I^2 = JI$.

Pelo fato de $r_J(I) \leq 2$, segue que $JI^n = I^{n+1}$ para todo $n \geq 2$, assim $I^n \cap J = I^{n-1}J$ para todo $n \geq 1$. A Observação 3.2.11 nos diz que $\gamma(I) = d$, e usando o Teorema 3.2.10 temos $r(I) = n(I) + d$, implicando $n(I) + d \leq 2$, ou seja, $n(I) \leq 1$, logo $P_I(n) = H_I(n)$ para todo $n \geq 2$. □

Mafi e Naderi provaram em [9] que se $d \geq 2$, então temos a recíproca desse teorema.

Referências Bibliográficas

[1] ASH, R. B. *Dimension Theory* / Class notes. Urbana: University of Illinois, 2006.

[2] ATIYAH, M. F. e MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. MA: Addison-Wesley, 1969.

[3] BORGES, H. e TENGAN E. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos* / Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[4] BRUNS, W. e HERZOG, H. J. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998.

[5] EISENBUD, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1995.

[6] HUNEKE C. e SWANSON I. *Integral Closure of Ideals, Rings and Modules*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006.

[7] ITOH, S. *Integral Closures of Ideals Generated by Regular Sequences*. J Algebra 1988; 117: 390-401.

[8] MACEDO, R. B. C. *Álgebras de Rees* / Dissertação. João Pessoa-PB, 2013.

[9] MAFI A. e NADERI D. *A Note on Reduction Numbers and Hilbert-Samuel Functions of Ideals Over Cohen-Macaulay Rings*. Turk J Math 2016; 40: 766 - 769.

[10] MARLEY, T.J. *Hilbert Functions of Ideals in Cohen-Macaulay Rings* / Tese. Purdue University, 1989.

[11] NORTHCOTT D.G e REES D. *Reduction of Ideals in Local Rings*. P Camb Philos Soc 1954; 50: 145-158.

[12] PUTHENPURAKAL T.J. *Hilbert Coefficients of a Cohen–Macaulay Module*. J Algebra 2003; 264: 82 - 97.

[13] RENZ, C. N. *Sobre anéis locais Cohen-Maucaulay com Dimensão de Imersão e + d - 2. Uma Conjectura de Sally* / Dissertação. Porto Alegre-RS, 2010.

[14] SANTANA, J. R. S. *Álgebra de Rees de ideais* / Dissertação. São Cristóvão-SE, 2014.

[15] VALABREGA P. e VALLA G. *Form Rings and Regular Sequences*. Nagoya Math J 1978; 72: 93-101.

[16] VALLA G. *On Form Rings Which Are Cohen-Macaulay.* J. Algebra 1979; 58: 247-250.

[17] VASCONCELOS W. *Integral Closure: Rees Algebra, Multiplicities, Algorithms.* Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2005.