



VIII SIMPROD

SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DE SERGIPE

“O empreendedorismo como diferencial competitivo:
Aplicando técnicas e ferramentas para sobreviver à crise”

São Cristovão - SE

20 a 23 de Setembro de 2016

MODELO OLIGOPOLISTA DE REDE DE EMPRESAS COM ESTRUTURA *SMALL-WORLD*

LIMA Jr, Elias da Silva¹; SAKURABA, Celso Satoshi²

¹ Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Sergipe, elias.sl.jr@gmail.com.br

² Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Sergipe, sakuraba@ufs.com

Resumo: *O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático para interação entre empresas baseado na estrutura de redes small-world, e testar a estabilidade de diferentes mercados para diferentes perturbações locais e globais na rede. O fenômeno do pequeno mundo, ou small-world phenomenon (swp), tem despertado a curiosidade e fascínio da comunidade científica nos últimos 40 anos pelo menos. O presente trabalho aponta em sua revisão de literatura vários trabalhos salientando os diferentes estados em que um sistema econômico pode se encontrar dependendo da atitude individual de seus jogadores. A revisão bibliográfica demonstra haver bons indícios para a modelagem de um mercado baseado em uma estrutura small world. Este trabalho tem o intuito de investigar a implicação desta teoria na economia industrial.*

Palavras-chave: Análise de redes, Redes *small-world*, Economia industrial.

BUSINESS NETWORK OLIGOPOLISTIC MODEL WITH SMALL-WORLD STRUCTURE

Abstract: *The objective of this work is to develop a mathematical model for interaction among companies based on the structure of small-world networks, and test the stability of different markets for different local and global disturbances in the network. The small world phenomenon (swp) has attracted the curiosity and fascination of the scientific community over the last 40 years at least. In its literature review, this work points out several studies emphasizing the different states in which an economic system can be found depending on the individual attitude of its players. The literature review shows that there are good evidences to model a market based on a small world structure. This work aims to investigate the implications of this theory in the industrial economy.*

Keywords: Networks analysis, Small-world networks, Industrial economics.

1. Introdução

O fenômeno do pequeno mundo, ou *small-world phenomenon* (swp), tem despertado a curiosidade e fascínio da comunidade científica nos últimos 40 anos. O exemplo que melhor descreve tal fenômeno (e também o mais comum) é uma rede social, quando duas pessoas aparentemente sem nenhuma conexão, ao se encontrarem descobrem que possuem um amigo em comum. “Nossa, que mundo pequeno!”, seria a expressão mais provável de aparecer neste momento específico. Cientistas de diferentes áreas vêm se perguntando se esta é uma mera coincidência ou na verdade uma característica da estrutura das redes sociais abstratas que formam e modelam as relações humanas. Estruturas de redes semelhantes aparecem na ciência em diferentes áreas do conhecimento.

O presente trabalho revisa os trabalhos de Duncan Watts e as definições neles usadas para determinar os tipos de grafos que modelam tais redes. Posteriormente, as definições são usadas como base para um modelo matemático de análise e avaliação de mercado.

A teoria de redes sociais não é recente e remete aos primórdios da filosofia, tendo como sua descendente a sociologia, que nasceu quando o estudo das interações sociais ficou demasiado complexo para ser apenas uma subárea da filosofia e tornou-se por si só uma ciência. Entretanto, apenas nas últimas três décadas a área vem sendo atacada com ferramentas matemáticas. A modelagem matemática de redes permite a análise por uma perspectiva diferente e ainda abre

margem para a análise quantitativa em certos casos, tais como centralidade (FREEMAN, 1979) e eficiência da rede (YAMAGUCHI, 1994a), que seriam análogos a índices de influência individual e estrutura ótima (para difusão de informação) respectivamente. Dessa forma, Watts e Strogatz (1998) apontam que a problemática de analisar redes complexas, assim como seus efeitos de estrutura em processos dinâmicos continua algo relativamente não-explorado. É comum a análise de parâmetros específicos de redes fazendo uso de hipóteses simplificadoras. A rede explorada neste artigo (rede empresarial) é chamada passiva, ou que afeta um sistema passivamente, onde a relação entre estímulo e reação não é controlada externamente. Estas redes têm sido objeto de estudos em diferentes áreas do conhecimento, como osciladores biológicos (STROGATZ & STEWART, 1993), redes neurais (CLICK & KOCH, 1986), redes de controle genético (KAUFFMANN, 1969), epidemiologia (HESS, 1996a; HESS, 1996b), (LONGINI, 1988; KRETZSCHMAR & MORRIS, 1996), e teoria dos jogos (NOWAK & MAY, 1993; HERZ, 1994; COHEN & AXELROD, 1998).

2. Redes small-world

2.1. Definição

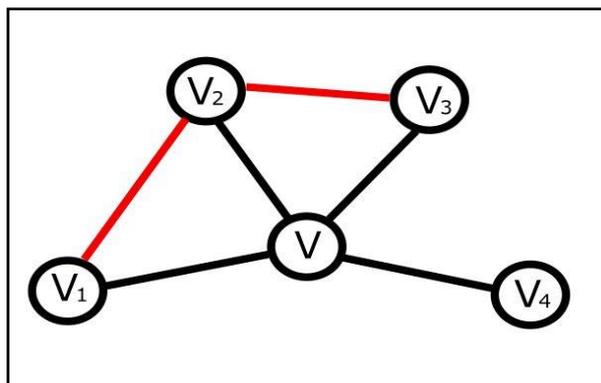
Redes *small-world* são estudadas na literatura em diversas áreas do conhecimento. A estrutura small-world de uma rede foi proposta pela primeira vez por WATTS & STROGATZ (1999) quando estudavam o SWP, propondo assim o modelo Watts-Strogatz. Diante disso, uma rede de interesse comum é a rede social, onde indivíduos são representados por nós e as conexões de ‘amizade’ ou ‘relacionamento’ são representados pelo conjunto de arestas ou arcos. Desta maneira, é possível pensar em algumas características da rede social que modelam a população mundial, que possui alguns bilhões de nós. Nela, estima-se que um número razoável de conexões de uma pessoa popular não passaria da casa dos milhares (KOCHEM, 1989). Estes conceitos abstratos são bases para duas primeiras condições tal que uma rede qualquer possua características de *small-world* (abaixo descritas). Outras duas condições são: mesmo que alguém seja muito popular na rede, suas amizades ainda serão uma minúscula fração da quantidade total de amizades; e o surgimento de uma nova amizade não é totalmente aleatório, assim como não é totalmente tendencioso. Apesar de ser difícil quantificar a probabilidade correspondente à possibilidade de dois amigos inicialmente desconectados iniciarem uma amizade (conexão), ela existe e depende de uma infinidade de variáveis sócio e fisiológicas.

São características gerais de uma rede *small-world* segundo Watts e Strogatz (1998):

- A rede é suficientemente larga, onde o número de indivíduos n é muito grande ($n \gg 1$). No mundo real, n é da ordem de bilhões por exemplo.
- A rede é espaçada, de forma que cada indivíduo tem conexão com um número k relativamente pequeno de outros indivíduos ($n \gg k$). No mundo real k , é da ordem máxima de milhões por exemplo.
- A rede não é centralizada. Não existe um indivíduo suficientemente popular para estar conectado com um número de outros indivíduos de maneira a criar uma situação de dominância, tal como um rei em um reino. Isso implica não apenas em uma rede esparsa, onde o número médio de conexões é muito menor que o número de indivíduos ($n \gg k$), mas também que o número de conexões do indivíduo mais popular (K) deve ser muito menor que o número total de indivíduos ($n \gg K$).
- A rede é extremamente agrupada e a maioria das amizades é sobreposta. No mundo real, significa que a maioria de nossos amigos também são amigos mutuamente, assim como eventualmente algum amigo de amigo é desconhecido.

Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica indagando a possibilidade de uma rede industrial, composta por empresas no lugar de indivíduo e relações comerciais, jurídicas e financeiras no lugar de amizades, possuir também características de *small-world*, e quais contribuições esta área do conhecimento pode trazer para a economia industrial. Assim, é necessário definir coeficientes fundamentais da teoria de redes. Algumas destas medidas de interesse para redes são os valores que Watts e Strogatz (1998) chamam de coeficiente de agrupamento local (C_v) e coeficiente de agrupamento global (C), que são medidas de estrutura da rede. Para definir C como variável que reflete a quão agrupada é uma rede como um todo, é necessário definir os pequenos agrupamentos dentro dela. Definimos os nós vizinhos de um nó v qualquer como os nós diretamente conectados a v , tais como os nós v_1, v_2, v_3 e v_4 na Figura 1.

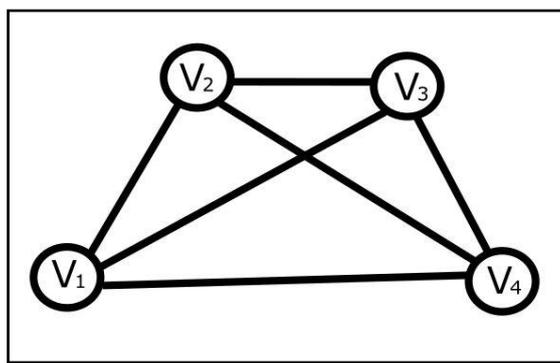
Figura 1 – Exemplo de um nó v e seus vizinhos v_i



Fonte: Autoria própria

Watts e Strogatz (1998) sugerem que um indicador interessante de agrupamento local em torno de um nó v seja a razão entre o número de conexões entre os vizinhos de v (links em vermelho na Figura 1) e número máximo de conexões que esses vizinhos poderiam ter entre si (Figura 2). Por exemplo, considere uma sub-rede, com um nó v , central, com quatro vizinhos imediatos como mostrado na Figura 1, onde há apenas dois arcos (em vermelho) ligando dois destes três vizinhos. Ou seja, se v fosse retirado da rede juntamente com todas as suas conexões, apenas três de seus vizinhos permaneceriam conectados através das ligações destacadas em vermelho na figura.

Figura 2 – Número máximo de conexões entre os vizinhos de v



Fonte: Autoria própria

O número máximo de conexões possíveis entre os vizinhos de v é alcançado quando conectamos todos estes vizinhos entre si, conforme mostra a Figura 2.2. Se definirmos K_v como o número de links associados ao nó v (Na Figura 2.1, $K_v = 4$) e K_{max} como o número máximo de links que podem existir entre todos os nós adjacentes a v , ou seja, em sua vizinhança, temos:

$$K_{max} = \frac{K_v(K_v-1)}{2}. \quad (1)$$

Watts (1998) define o coeficiente de agrupamento local C_v para qualquer nó v da rede como sendo a razão entre K_v e K_{max} , conforme descrito na Equação 2.

$$C_v = \frac{2K_v}{K_v(K_v-1)} \quad (2)$$

O coeficiente de agrupamento global da rede C pode ser definido pela Equação 3 como a média de todos os C_v da rede.

$$C = \frac{\sum_1^n C_v}{n} \quad (3)$$

A partir das definições acima, é possível citar os dois extremos da rede definida nesta seção: quando $C = 1$, o grafo é completo; quando $C = 0$, o grafo é vazio, com zero conexões. Diante destas definições, Watts e Strogatz (1998) afirmam que C é uma medida de nível de agrupamento global, de forma que o grafo será mais agrupado quanto maior for o coeficiente C da rede em relação à medida n/m , onde n e m representam respectivamente o número de nós e de conexões da rede. Estes coeficientes são indicadores que fornecem informação sobre quão próximo uma rede está da estrutura *small-world*, que possui coeficiente de agrupamento global significativamente maior do que uma rede construída aleatoriamente. Uma rede *small-world* é tal que os nós têm uma grande probabilidade de estarem muito interconectados entre si, assim como em uma rede aleatória, mantendo, porém, características de agrupamentos locais diferentemente de uma rede aleatória.

A partir deste ponto, várias perguntas podem ser feitas e vários modelos podem ser desenvolvidos sobre essas bases. Watts e Strogatz (1998) propõem uma extensiva análise qualitativa e quantitativa destes tipos de grafos, levando em consideração a sua frequentemente aparição em diferentes áreas do conhecimento, como descrito na introdução deste trabalho. Um dos objetivos específicos deste trabalho é fornecer uma base metodológica de análise de redes no âmbito da economia industrial. Os coeficientes aqui descritos são parâmetros de caracterização de redes. Tais coeficientes vêm se mostrando razoáveis na descrição de redes em relação a fluxo, agrupamento e identificação de *hubs* desde que foram propostos por Watts e Strogatz (1998). Entretanto, os mesmos só podem ser calculados uma vez que a rede é mapeada, o que pode ser um fator limitante a depender do custo e da sua complexidade. Deste modo, os autores discutem a geração de rede artificiais com fluxos definidos por leis bem conhecidas na literatura da economia industrial como proposta para simular organizações industriais de médio e grande porte.

3. Economia industrial

Nesta seção serão definidos conceitos para a determinação das interações entre as empresas, e conceitos base usados na literatura de economia industrial necessárias para o desenvolvimento de um modelo matemático. O objetivo principal desta seção é a determinação da base teórica referente à economia industrial.

Economia industrial (EI) é a área de estudo relacionada às interações estratégicas entre empresas e indústrias. O estudo da EI baseia-se nos diferentes tipos de competição e concorrência, formulando modelos e analisando as estruturas sob diferentes hipóteses. Também é do interesse da EI a forma como as empresas estão organizadas e competem. Segundo Schmalensee (1987), tais processos não podem facilmente ser analisados usando o modelo competitivo padrão dos livros de economia. O desenvolvimento moderno da organização industrial como um campo separado se deve muito a Edward Chamberlin, Edward S. Mason e Joe S. Bain. Há duas abordagens principais para o estudo da organização industrial. A primeira abordagem é essencialmente descritiva e fornece uma visão geral da mesma. A segunda, uma teoria de preço, usa modelos microeconômicos para explicar o comportamento e estrutura de mercado da firma (Carlton & Perloff, 2004). Este trabalho está focado primordialmente na segunda abordagem.

3.1. Empresa individual

Variáveis de controle individuais em um modelo com simplificações podem ser a quantidade e preço definidos pelo produtor, q e p respectivamente. As decisões sobre q e p no tempo t dependem do lucro da empresa (π) e do desempenho da indústria em $t - 1$ (período de tempo anterior).

$$p^t = f(\pi^{t-1}) ; q^t = g(\pi^{t-1}) \quad (4)$$

As equações 4 definem que preço e quantidade em t são funções do lucro da empresa em $t - 1$, uma vez que o lucro no momento de tempo anterior é resultado das decisões tomadas em $t - 1$ em relação a preço e quantidade.

3.2. Indústria

A oferta total Q de uma indústria formada por n firmas é definida com:

$$Q = \sum_{j=1}^n q_j, \quad (5)$$

onde Q representa a quantidade total de produtos da indústria, e q_j representa a quantidade individual produzida pela empresa j . Dessa forma, a oferta agregada das empresas concorrentes do produtor i é definida como:

$$Q_{-i} = \sum_{j(j \neq i)} q_j = Q - q_i. \quad (6)$$

3.3. Dinâmica empresa individual – indústria

Diante de decisões sobre q e p , cada empresa i possui uma resposta em um tempo posterior, que é um lucro associado à sua decisão no momento de tempo anterior somado à influência de todas as outras decisões tomadas na indústria. Em geral, a empresa i tem algum conhecimento do preço praticado pelas concorrentes mais próximas, o que gerará uma influência sobre o preço que a empresa irá praticar. Define-se a função lucro individual da empresa i , π_i :

$$\pi_i = p_i q_i - C_i, \quad (7)$$

onde C_i é a função custo do produtor i , e p_i e q_i são o preço praticado e quantidade fabricada pela empresa i (BOFF, 2002). A variável custo possui duas naturezas: os custos fixos e variáveis. Custos fixos são o grupo de despesas que não sofrem alteração quantitativa em caso de variação da quantidade produzida q , sendo, portanto, independentes do nível de atividade. Por sua vez, os custos variáveis são aqueles que variam em relação a q . Seus valores dependem diretamente do volume produzido. Assim, podemos definir tais custos como:

$$Ct(q) = CF + CV \quad (8)$$

$$CV = F(q) \quad (9)$$

Onde: Ct = Custo Total

CF = Custo Fixo

CV = Custo Variável

4. Redes *small-world* na organização industrial

As redes *small-world* estão potencialmente presentes em vários âmbitos da economia industrial: dentro da empresa, como a redes sociais abstratas de funcionários e sua organização formal e informal; como redes de empresas em complexos industriais; como redes de cadeias de suprimentos; ou ainda como redes de tecnologias correlacionadas em relação à gestão do conhecimento em complexos empresariais. A revisão bibliográfica feita neste trabalho converge para a conclusão de que as redes *small-world* têm grande aplicabilidade na

modelagem de redes de empresas, o que por sua vez, pode ter grande importância na determinação de influências estratégicas das empresas. Nas últimas décadas, resultados sobre como agentes dentro de redes do tipo *small-world* sofrem grande influência de todos os demais indivíduos do sistema são motivação de pesquisa na identificação de redes com tais propriedades como também na quantificação das características destas redes.

Fato de interesse desta abordagem é que as relações empresariais não são definidas aleatoriamente. No caso de um jogador ser uma empresa em busca de um novo produto, na prática um contrato com valores mais interessantes ou produto de maior qualidade podem ficar em segundo plano em relação a outro contrato que seja ofertado por um vendedor já conhecido ou indicado por razões como confiabilidade e manutenção de relações econômicas.

Utiliza-se do modelo Wattz-Strogatz para definir o ambiente de interação entre empresas e as teorias da economia industrial para definir a dinâmicas das interações e as relações entre as variáveis de interesse do sistema. O sistema é definido como a rede de empresas. De posse das definições da seção 2 percebe-se que, de fato, indícios de redes industriais com estrutura *small-world* já foram sinalizados em trabalhos como de Uzzi & Reed-Tsochas (2007), onde é indicado que redes industriais, a depender da complexidade, podem apresentar características de redes *small-world*. Diversas pesquisas aplicadas sobre redes *small-world* na indústria são apresentadas no Quadro 1, no qual se destaca o caso de firmas alemãs com $n=291$ e $K=2.02$.

Quadro 1 – Coeficientes de redes

Table 1 Small world studies

Authors	Network	Period	N	k	L Actual	L Random	CC Actual	CC Random	Lr	CCr	Q
<i>Organizations</i>											
Kogut and Walker (2001)	German firms	1993-1997	291	2.02	5.64	3.01	0.84	0.022	1.87	38.18	20.38
Baum et al. (2003)	Canadian I-banks	1952-1957	53	1.36	3.21	4.556	0.023	0.027	0.70	0.85	1.21
		1969-1974	41	2.22	2.82	3.176	0.283	0.054	0.89	5.24	5.90
		1985-1990	142	3.83	2.95	3.144	0.273	0.027	0.94	10.11	10.78
Davis et al. (2003)	US Co. interlocks	1982	195	6.8	3.15	2.7	0.24	0.039	1.17	6.15	5.27
		1999	195	7.2	2.98	2.64	0.2	0.039	1.13	5.13	4.54
Verspagen and Duyster (2004)	Strategic alliances*	1980-1996	5504	5.29	4.2	5.25	0.34	0.0008	0.80	425.00	531.25
Schilling and Phelps, (forthcoming)	US alliances in 11 2-digit SIC codes**	1992-2000	171 (157)	3.11 (1.42)	20.39 (18.69)	5.62 (3.01)	0.26 (0.18)	0.04 (0.039)	3.85 (2.84)	10.44 (7.53)	2.71 (2.65)

Fonte: Uzzi & Reed-Tsochas (2007)

4.1. Discussão

O entendimento de impactos dos objetivos individuais de jogadores no sistema econômico é crucial para empresas e governos, tendo relação com a determinação de estratégias empresariais e subsidiando decisões sobre políticas econômicas. Dessa forma, o presente trabalho propõe uma modelagem onde jogadores estão conectados em uma rede de estrutura *small-world* para a investigação da influência sobre preço praticado que um agente pode ter sobre os vizinhos, clusters e sobre todo o sistema, assim como o inverso. O modelo deve responder perguntas do tipo: Qual a influência de uma variação do preço de um agente sobre todos os agentes da rede? Qual a influência de uma variação mínima no sistema global sobre um aglomerado local, ou ainda, sobre um indivíduo?

O estudo da influência exercida por uma determinada empresa em uma indústria é também importante na compreensão das estruturas de mercados e conseqüentemente nas decisões sobre as melhores estratégias. A influência intangível de agentes de mercado está presente na ideologia, estratégia e conduta empresarial do ambiente onde a empresa está inserida. Este trabalho está inicialmente interessado em modelar agentes oligopolistas agindo em um mercado fechado, as respostas do sistema frente as decisões individuais, e também a influência sofrida pela empresa i diante de perturbações no preço da outra empresa j . Dessa forma, dentro de uma indústria oligopolista modelada, é possível investigar o poder de mercado, ou seja, a capacidade em controlar preços de uma empresa.

O modelo proposto se aproxima do modelo de Bertrand, onde empresas competem via preço, produzem a mesma mercadoria e tomam decisões ao mesmo tempo. Neste caso, todas as empresas irão tomar decisões com informações quase completas em relação ao período anterior $t - 1$. O modelo de Bertrand diz que, como os produtos são homogêneos, a empresa que praticar o maior preço não venderá nada. Para ajustar esta situação à realidade no modelo de simulação, é proposto que a empresa que praticar maior preço tenha menor probabilidade de venda, porém ainda continue com chances. Este é o caso, por exemplo, de um mercado local vendendo o mesmo produto que um mercado maior: O mercado maior tende a possuir preço mais interessante, porém por comodidade algum consumidor pode optar por comprar os produtos mais caros, e isto dará dinâmica ao preço para não estagnar no custo marginal. Sugere-se o uso de operadores do tipo roleta neste caso, ainda que existam muitos outros operadores de seleção por critério na literatura.

A estratégia da empresa e sua postura frente ao mercado, analogamente à um indivíduo, pode ser compreendida como sendo o seu conjunto moral somado aos reflexos comportamentais do

mesmo frente a estímulos externos. Desta maneira, a estratégia é fruto do acúmulo cultural da alta gestão somada ao que se entende ser a melhor postura visando a maximização do lucro. No modelo, é definido como uma função-preço do lucro, ou seja, em como o preço será ajustado dado a influência do mercado e o lucro no período anterior.

4.2. Modelo proposto

No modelo simplificado proposto neste artigo, a variável preço será a única variável de controle em um ambiente com produto homogêneo, onde qualquer variação mínima do preço altera a probabilidade de venda. A quantidade da demanda inicialmente será assumida como fixa e a venda de um produto dependerá do preço praticado: quanto menor o preço maior a probabilidade de venda. O trabalho de Almudi & Izquierdo (2013) analisa a interação do preço com a demanda em diferentes cenários de inovação. Através com testes com o modelo, foi concluído que o preço tem forte influência sobre a demanda mesmo sobre fortes condições de inovação tecnológica, ou seja, que a dinâmica econômica em vários cenários se mostra muito dependente do preço. Esta conclusão sustenta a proposta de simplificar o modelo proposto de modo que o preço seja a única variável de controle de cada empresa no mercado.

Dessa forma, dado um mercado com produto homogêneo, com preço praticado p , qualquer variação positiva desse preço levaria o consumidor a optar pelo preço praticado pelo concorrente, e qualquer valor abaixo deste valor levaria ao prejuízo, já que no modelo será assumida a priori a estrutura de oligopólio. A empresa individual tem informação sobre o lucro e quantidade praticados das empresas vizinhas. Além disso, são definidas as seguintes hipóteses simplificadoras do modelo:

- A empresa apenas decide sobre o preço e a quantidade e determinada pelo mercado;
- A empresa apenas sofre influência das empresas nas quais ela está conectada;
- A demanda total é constante, mas a individual variável;
- O sistema de organização industrial é fechado, ou seja, não existe ambiente externo a essa indústria.

Então, define-se o preço da empresa i em tempo t como sendo:

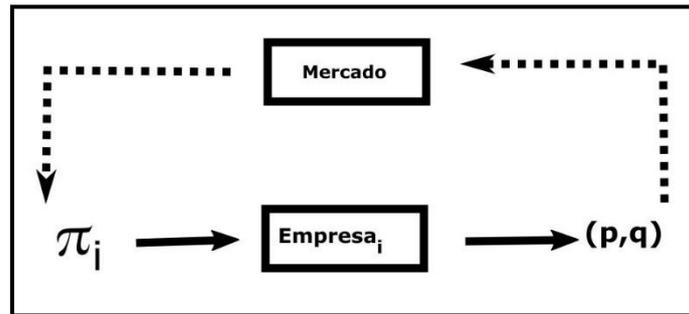
$$p_i^t = (p_i^{t-1} + \Delta), \quad (10)$$

onde

$$\Delta (d_i^{t-1}, I^{t-1}). \quad (11)$$

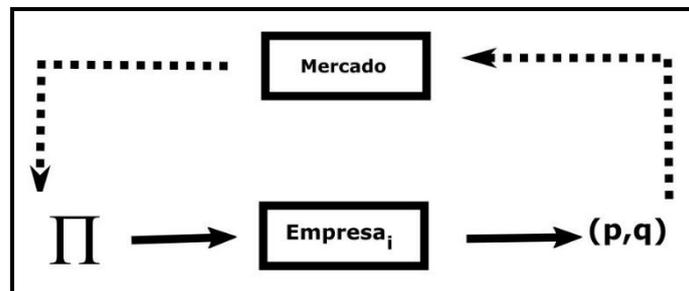
Δ é a função que define a influência de todos os vizinhos sobre a empresa i . A decisão sobre melhor preço praticado ficará sujeita a uma função definida para dois casos de interesse: Empresa individual com objetivo de maximização do lucro individual (regime não cooperativo), e empresa individual com objetivo de maximização da função excedente de mercado (regime cooperativo). Em cada um dos casos, a variável de retorno será lucro individual ou excedente de mercado, como mostrado nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 – Regime cooperativo do modelo



Fonte: Autoria própria

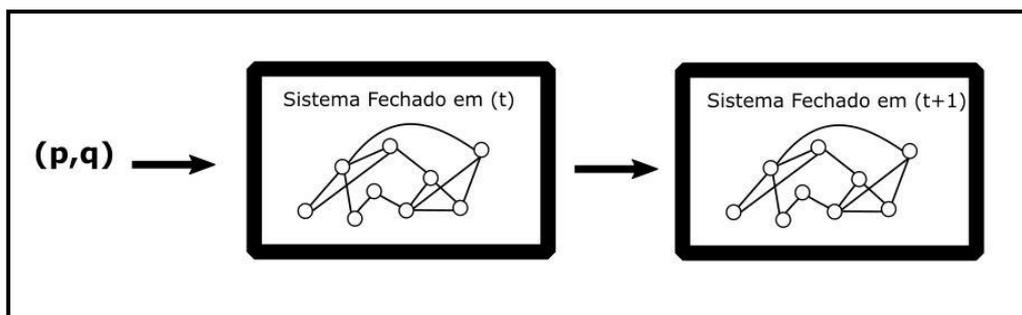
Figura 4 – Regime não-cooperativo do modelo



Fonte: Autoria própria

Dadas as condições iniciais do sistema, as decisões sobre o preço de cada empresa individualmente definirão o estado inicial do sistema, como mostrado na Figura 5. Um prejuízo recorrente pode culminar na retirada de empresa do sistema.

Figura 5 – Variáveis de controle e resposta sobre os sistemas



Fonte: Autoria própria

Uma vez definida a interação de uma empresa com o mercado, a interação entre empresas será dada através do conhecimento do preço praticado e lucro alcançado pelas outras empresas. Entretanto, só serão de conhecimento da empresa i os valores de empresas conectadas a esta. As conexões entre empresas serão dadas pelo modelo de Watts-Strogatz de um grafo. O algoritmo de construção do grafo é apresentado a seguir:

Dados:

- O número desejado de empresas n (nós)
 - O grau médio K de conexões de uma empresa individual (assumido como sendo um inteiro par).
 - Um parâmetro de probabilidade β , satisfazendo $0 \leq \beta \leq 1$ e $V \gg K \gg \ln(V) \gg 1$.
1. Criar uma estrutura de anel com n nós de grau médio $2K$. Cada nó está conectado aos vizinhos mais próximos em ambos os lados.
 2. Para cada nó V_i , religar este com um nó qualquer aleatório com probabilidade β . A nova conexão não pode ser uma repetição da iteração anterior nem uma ligação de V_i com ele mesmo.
 3. Repetir o Passo 2 para do nó V_{i+1} até o nó V_v .

Tal algoritmo permite a geração de redes *small-world*, que podem ser utilizadas para a modelagem das relações entre empresas descritas ao logo da presente seção.

5. Conclusão

A revisão bibliográfica apresentada nesse trabalho demonstra haver bons indícios para a modelagem de um mercado baseado em uma estrutura *small-world*. As definições e sugestões tangentes a economia industrial para o modelo mostraram-se relevantes, uma vez que diversos autores encontraram resultados interessantes com sistemas econômicos similares a este. O trabalho de Uzzi e Reed-Tsochas (2007) aponta indícios de que redes empresariais, a depender da complexidade, formem uma rede de estrutura *small-world*. Dentre as duas redes com maior número n no trabalho de Uzzi & Reed-Tsochas (2007) mostrados na figura 5.3, uma apresenta características *small-world*, a rede composta empresas alemãs. A outra rede que apresenta $n=5504$ é a rede de alianças estratégicas e suas conexões são baseadas em pré-intenções estratégicas com pouco espaço para novas ligações aleatórias, o que justifica o não

aparecimento de características de rede *small-world*. Deste modo, Uzzi & Reed-Tsochas (2007) apresenta indícios de que quando rede de empresas crescem naturalmente e superam um número mínimo de empresas sua estrutura se aproxima de uma rede *small-world*. Destarte, as equações propostas modelam relativamente bem um mercado com características do modelo de Bertrand no qual os jogadores interagem no mercado em uma rede de estrutura *small-world*. A conclusão das teorias aqui discorridas são ponto de partida para um modelo de simulação. Como sugestão para trabalhos futuros aponta-se:

- A inclusão do variável preço interagindo de alguma forma com a qualidade do produto e conseqüentemente com a probabilidade de venda (métodos utilizando roleta). O princípio comum diz que o baixo custo tende a comprometer a qualidade do produto. Entretanto, existem ainda os casos de aumento ou manutenção da qualidade independente da diminuição do custo, quando é preciso avaliar a inserção da variável inovação.
- Inserção da variável q (quantidade produzida) como variável de controle da empresa individual.
- Inserção da função custo. A função custo dentro do modelo aproxima-o da realidade e adiciona um grau a mais de liberdade para o conjunto de eventos possíveis. Uma organização então passará a poder decidir sobre aumentar capacidade (e aumentar custo fixo) para diminuir custo variável, ou diante de um aumento de demanda, manter aumento do custo variável e não arriscar investimentos.

Referências Bibliográficas

- ALMUDI, I.; FATAS-VILLAFRANCA, F. e IZQUIERDO, L. R. Industry dynamics, technological regimes and the role of demand. *Journal of Evolutionary Economics*, v.23, n. 5, p. 1073-1098, 2013.
- BOFF, H. P. Modelos de concorrência em oligopólio. In: Kupfer, D. e Hasenclever, L. eds., *Economia Industrial: Fundamentos Teóricos e Práticas no Brasil*. Editora Campus, p. 183-216, 2002.
- CARLTON, D. W. e PERLOFF, J. M. *Modern Organization*, Pearson Education Limited, 2004.
- CLICK, F. e KOCH, C. Constraints on Cortical and Thalamic Projections: The no-strong-loops hypothesis. *Nature*, v. 50, p. 391-245, 1986.
- COHEN, M. D., RIOLO, R. L. e AXELROD, R. The emergence of Social Organization in the Prisoner's Dilemma: Context-Preservation and Others Factors Promote Cooperation. Working Paper - Santa Fe Institute, 99-01-002, 1999.
- FREEMAN, L. C. Centrality in Social Networks: Conceptual Clarification. *Social Networks*, v. 1, p. 215-39, 1979.
- HERZ, A. V. Collective Phenomena in Spatially-Extended Evolutionary Games. *Journal of Theoretical Biology*, v. 169, p. 65-87, 1994.
- HESS, G. Disease in Metapopulation Models: Implications for Conservation. *Ecology*, v. 77, n. 5, p. 1617-1632, 1996a.

- HESS, G. Linking Extinction to Connectivity and Habitat Destruction in Meta-population Models. *American Naturalist*, v. 148, n. 1, p. 226-236, 1996b.
- KAUFFMAN, S. A. Metabolic Stability and Epigenesis in Randomly Constructed Genetic Nets. *Journal of Theoretical Biology*, v.22, p. 437-467, 1969.
- KOCHEN, M. Toward Structural Sociodynamics. In: Kochen, M. ed. *The small World*. Norwood, USA: Ablex, p. 52-64, 1989.
- KRETZSCHMAR, M. e MORRIS, M. Measures of concurrency in Networks and the Spread of Infectious Disease. *Mathematical Biosciences*, v. 133, p. 165-195, 1996.
- LONGINI, I. M. A Mathematical Model for Predicting the Geographic Spread of New Infectious Agents. *Mathematical Biosciences*, v. 90, p. 367-383, 1988.
- NOWAK, M. A. e MAY, R. M. The Spatial Dilemmas of Evolution. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, v. 3, n. 1, p. 35-78, 1993.
- SCHMALENSEE, R. Industrial Organization. In: EATWELL, J., MILGATE, M. and NEWMAN, P. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Basingstoke: Palgrave Macmillan, 1987.
- STROGATZ, S. H., & STEWART, I. Coupled Oscillators and biological synchronization. *Scientific American*, v. 269, n. 6, p. 102-109, 1993.
- UZZI, B., AMARAL, L. A. e REED-TSOCHAS, F. Small-world networks and management science research: a review. *European Management Review*, v. 4, p. 77-91, 2007.
- YAMAGUCHI, K. The flow of Information through Social Networks Diagonal-Free Measures of Inefficiency and the Structural Determinants of Inefficiency and the Structural Determinants of Inefficiency. *Social Networks*, v. 16, p. 57-86, 1994.
- WATTS, D. e STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, v. 393, n. 6684, p. 440-442, 1998.