UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GILDO GOUVEIA DE OLIVEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE: ATIVIDADES PAUTADAS COM FOCO NOS PCNS E NO CURRÍCULO DA REDE ESTADUAL

Itabaiana - SE
2018

GILDO GOUVEIA DE OLIVEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE: ATIVIDADES PAUTADASCOM FOCO NOS PCNS E NO CURRÍCULO DA REDE ESTADUAL

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Mateus Alegri
Coorientador: Prof. Dr. Rafael Neves Almeida

Itabaiana - SE
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Oliveira, Gildo Gouveia de
O48a	Análise combinatória e probabilidade : atividades pautadas com foco nos PCNs e no currículo da rede estadual / Gildo Gouveia de Oliveira ; orientador Mateus Alegri. – Itabaiana, 2018.
	58 f. : il.
	Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2018.
	1. Matemática. 2. Análise combinatória. 3. Probabilidade. 4. Currículos - Planejamento. I. Alegri, Mateus, orient. II. Título.
	CDU: 519.1/.2

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Análise Combinatória e Probabilidade: atividades pautadas com foco nos PCNs e no currículo da Rede Estadual

por

Gildo Gouveia de Oliveira

Aprovada pela banca examinadora:

Mateus Alegri
Prof. Mateus Alegri - UFS
Orientador

Samuel Brito Silva
Prof. Samuel Brito Silva - UFS
Primeiro Examinador

Murilo de Medeiros Sampaio.
Prof. Murilo De Medeiros Sampaio - UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 02 de Março de 2018

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por este presente que é a vida, agradeço também pelas pessoas que o Senhor colocou em meu caminho em especial Elisangela, por todas as coisas que aconteceram. Cada uma delas, ao seu modo, fizeram-me chegar onde cheguei.

À minha mãe Matildes e ao meu pai Francisco pela dedicação, pela amizade, pelo companheirismo, pelos ensinamentos, pelos sermões, pelos castigos, pelas palmadas e, principalmente, pelos exemplos.

Ao professor Dr. Mateus Alegri, seus ensinamentos foram muito além dos conteúdos do currículo, a sua missão vai muito além da missão de um professor, você é um verdadeiro mestre, fez-me acreditar que era capaz de vencer. O meu muito obrigado pela sua dedicação e paciência.

Ao professor Rafael Almeida, o meu muito obrigado, sua maneira de orientar com toda paciência e dedicação, mostrando os caminhos que devia seguir para atingir aquilo que pretendia escrever.

Aos meus irmãos, Messias, Bernadete, Juracy, Terezinha, Pedro, Edluzia, José, Neuza e em especial a essa pessoa que sem ela nada disso estaria acontecendo, minha irmã “Maria Odete”.

Aos meus filhos, Jonatha Antone e Macion Igor, os melhores do mundo, pela paciência, pelo entendimento, pelo carinho e pelo amor.

Aos meus colegas Aedson, Anderson, Arionaldo, Augusto, Djenal, Emerson, Jailson, Mônica, Marcelo, Paulo, Silvanilton, Samilly e Simone. Vocês são criaturas que Deus colocou no meu caminho, dividiram comigo todos os momentos, as alegrias, tristezas, ganhos, perdas que tivemos durante todo período de estudo, o meu muito obrigado por tudo.

RESUMO

Este trabalho tem o propósito de mostrar o ensino da Análise Combinatória e Probabilidade, levando em consideração os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e o Referencial Curricular da Rede Estadual de Sergipe. Mostraremos questões formuladas dos conteúdos acima a partir de notícias midiáticas utilizando conceitos matemáticos em situações problemas para que o professor amplie e diversifique suas estratégias de ensino, considerando as habilidades cobradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Palavras-chave: Análise Combinatória. Atividades Metodológicas. Documentos Oficiais. Probabilidade.

ABSTRACT

This work aims to offer in detail teaching of Combinatorial Analysis and Probability, taking into account the National Curricular Parameters (NCP) and the Curricular Framework of the Sergipe State Network. We will present questions formulated from the above contents from news media using mathematical concepts in problem situations so that the teacher broadens and diversifies his teaching strategies, considering the abilities collected in the National High School Examination (ENEM).

Keywords: Combinatorial Analysis. Methodological Activities. Official Documents. Probability.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre combinatória e probabilidade e de como os documentos oficiais orientam que sejam trabalhados nos Ensinos Fundamental e Médio.

Para cada nível de ensino existem orientações específicas. No Ensino Fundamental, o estudo de probabilidade deve ser de maneira que os alunos compreendam os fenômenos da natureza, interprete fatos e dados, generalize informações úteis e antecipe possíveis resultados. Em combinatória não utilizar fórmulas e sim elencar todos os casos possíveis numa situação problema.

Já para o Ensino Médio, levando em consideração a importância do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o ingresso dos alunos no Ensino Superior, o tema proposto será abordado com o intuito de compreender corretamente a postura docente ao trabalhar tais conteúdos, tentando sanar as dificuldades encontradas pelos alunos na compreensão e aplicação da matemática cobrada no exame, de maneira que entendam a importância destes não só para a matemática, mas para outras áreas do conhecimento.

Neste trabalho terá a oportunidade de ver questões de combinatória e probabilidade formuladas a partir de notícias que circulam na mídia, possibilitando assim ao aluno vivenciar situações reais não somente de matemática exata, mas como base para as demais ciências, mostrando os conteúdos acima citados atendendo as orientações dos PCNs

O primeiro capítulo desta dissertação contempla o estudo de combinatória, iniciando com o princípio de contagem e a partir deste é mostrado os demais conteúdos e fórmulas referentes à análise combinatória.

Para iniciar estes assuntos partimos de problemas motivadores e na sequência foram mostradas sua definição e respectivas fórmulas. Em cada conteúdo há questões que atendem às orientações dos PCNs.

No segundo capítulo, além dos conteúdos programados pelo Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Sergipe, para o estudo de probabilidade temos também o estudo de Variável Aleatória Discreta, com foco no Modelo Binomial e Modelo Geométrico, fazendo uma transposição de didática onde formulamos questões que atendem às orientações dos PCNs e assim, este conteúdo, pode ser trabalhado também no Ensino Médio.

No terceiro capítulo, veremos o que diz os documentos oficiais sobre o estudo destes conteúdos, analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e Referencial Curricular da Rede Estadual de Sergipe.

No quarto capítulo, mostraremos questões elaboradas de combinatória e probabilidade, de acordo com os conteúdos programados pelo Referencial Curricular da Rede Estadual de Sergipe.

E para concluir este trabalho finalizo com as considerações finais, onde faço um breve resumo do que foi mostrado nesta dissertação.

CAPÍTULO 1: COMBINAÇÕES, ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

Neste capítulo discutiremos conceitos envolvendo combinações, arranjos e permutações. Introduziremos cada conteúdo discutido com um problema motivador e a partir deste, intuitivamente, mostraremos técnicas de como solucioná-los.

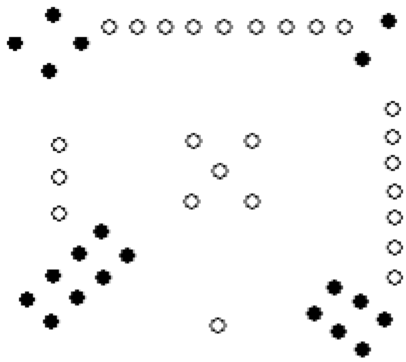
Iniciaremos com o princípio de contagem onde abordamos os princípios aditivo e multiplicativo e, na sequência, utilizamos estes princípios para resolver problemas mais complexos, onde, a partir daí forneceremos as fórmulas de combinações e permutações de *n* elementos.

Através de exemplos vamos mostrar que o conteúdo discutido aqui não é somente aplicação de regras, mas exige também engenhosidade para solucionar determinados problemas.

1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

O quadrado mágico conhecido como Lo Shu é considerado o problema mais antigo relacionado à combinatória segundo (Berge, 1971): este pode ter sido escrito 2 000 a.C.

Quadrado mágico



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: (VAZQUEZ e NOGUTI 2017)

Este diagrama acima está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado Saturn.

Acredita-se que a ideia dos quadrados mágicos foi transmitida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo Lo Shu.

No livro Líber Abaci, escrito por Leonardo de Pisa tem o seguinte problema relacionado à combinatória “Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?”.

Com esses dados históricos percebemos que a ideia de contar é muito antiga e que problemas aparentemente simples de enunciar exige certa engenhosidade para serem solucionados.

O desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ também está associado entre os mais antigos estudos combinatórios. O caso $(1 + x)^2$ foi encontrado nos livros de Euclides (300 a.c).

Michael Stifel em torno de 1550 mostrou, de forma recursiva, como calcular $(1 + x)^n$ a partir de $(1 + x)^{n-1}$.

Isaac Newton (1646-1727) foi mais além e mostrou como calcular $(1+x)^n$ sem antes calcular $(1 + x)^{n-1}$, ou seja, de maneira não recursiva, através da fórmula $\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$.

1.2 OS PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

Para facilitar o entendimento deste conteúdo vamos iniciar com um problema motivador e na sequencia mostraremos técnicas de resolver problemas de princípio aditivo e princípio multiplicativo usando este problema como referência.

Miguel olha para três azulejos em linha que cobrem uma parede, e nela nota que há certas figuras desenhadas neles, um com três losangos, outro com quatro retângulos e um com cinco pentágonos, todos com tamanhos distintos. Quantas figuras, nestes três azulejos, Miguel observou?

Afirmamos que a solução deste simples problema está relacionada com o princípio aditivo, pois iremos contar os desenhos geométricos que estão nestes azulejos.

1.2.1 O PRINCÍPIO ADITIVO

Dados conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dois a dois disjuntos, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$, o número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é dado por $n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_n)$.

No caso dos azulejos temos a seguinte situação:

No azulejo (1) temos 3 losangos de tamanho diferentes;

No azulejo (2) temos 4 retângulos de tamanho diferentes;

No azulejo (3) temos 5 pentágonos de tamanho diferentes.

Assim podemos dizer que Miguel observou 12 figuras diferentes.

Observe que para encontrar a quantidade total de figuras usamos o princípio aditivo onde:

$n(A_1) = número\ de\ elementos\ do\ azulejo$ (1);

$n(A_2) = número\ de\ elementos\ do\ azulejo\ (2)$;

$n(A_3) = número\ de\ elementos\ do\ azulejo\ (3)$.

Pelo princípio aditivo, temos $n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 12$ azulejos.

1.2.2 O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Suponha ainda que Miguel continue contando azulejos e perceba que há 15 azulejos em cada linha e nesta parede há 12 linhas. Quantas figuras geométricas contêm esta parede?

A resposta desta pergunta está ligada ao que chamamos de princípio multiplicativo.

Dados conjuntos finitos $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$, o número de elementos no produto cartesiano $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_\mathrm{n}$ é dado $\mathrm{n}(\mathrm{A}_1).\mathrm{n}(\mathrm{A}_2) \ldots \mathrm{n}(\mathrm{A}_\mathrm{n})$.

Percebendo que a sequência de azulejos com losangos, retângulos e pentágonos se repete em todas as linhas, assim para calcular o total de figuras basta encontrar a quantidade de figuras em cada coluna e multiplicar pelo número de linhas, vamos encontrar usando o princípio multiplicativo.

Supondo $n(x)$ o número de figuras em cada coluna e $n(y)$ o número de linhas que há nesta parede, temos assim que o total de figuras pode ser calculado por:

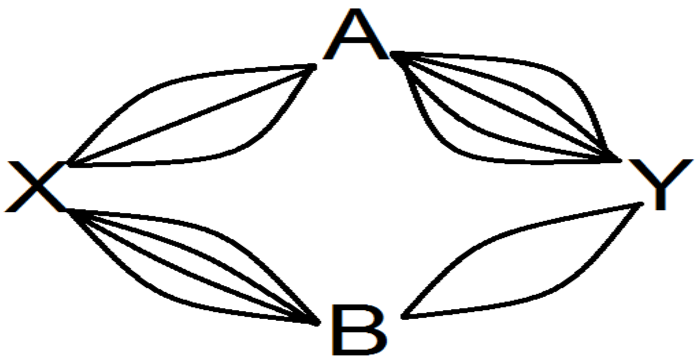
$n(x).n(y) = 48.15 = 720$.

<u>Observação</u>

Podemos definir o princípio multiplicativo de forma equivalente:

Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão de $m_1 . m_2 \ldots m_n$ maneiras diferentes.

EXEMPLO 1. João mora na cidade X e sua namorada mora na cidade Y. De quantas maneiras João pode sair da cidade dele e ir até a cidade da namorada utilizando os caminhos indicados na figura?



Fonte: própria, 2017

Solução:

Vamos encontrar o número de caminhos da seguinte maneira:

$\mathrm{n(x)}$ é o número de maneira de João ir de X a Y passando por A, então

$\mathrm{n(x)} = 3 . 5 = 15$.

$\mathrm{n(y)}$ é o número de maneira de João ir de X a Y passando por B, então

$\mathrm{n(y)} = 4 . 2 = 8$.

Para encontrar o total de maneiras que João tem de sair de sua casa e ir à casa da namorada usamos o princípio aditivo.

$\mathrm{n(x)} + \mathrm{n(y)} = 15 + 8 = 23$

EXEMPLO 2. Para ir a uma festa José dispõe de duas calças e três camisas de quantas maneiras ele pode se vestir usando uma calça e uma camisa?

Solução:

Vamos calcular o total de possibilidades da seguinte maneira:

$\mathrm{n(x)}$ é a quantidade de calças que José tem, logo $\mathrm{n(x)} = 2$.

$\mathrm{n(y)}$ é a quantidade de camisas que José tem, logo $\mathrm{n(y)} = 3$.

Para encontrar o total de possibilidades que José tem de escolher uma calça e uma camisa, devemos usar o princípio multiplicativo.

$\mathrm{n(x)} . \mathrm{n(y)} = 3. 2 = 6$

EXEMPLO 3. O mercado de trabalho brasileiro encerrou o segundo trimestre do ano com 26,3 milhões de trabalhadores desocupados e subocupados – cerca de 200 mil a menos que no trimestre anterior. É o que aponta a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) divulgada nesta quinta-feira (17) pelo Instituto Nacional de Geografia e Estatística (IBGE).

Fonte: (SILVEIRA, 2017)

Suponha que um supermercado esteja precisando de trabalhadores para meio expediente e fez a seguinte propaganda em um determinado jornal:

Horário	Profissão		
Manhã	Faxineiro	Porteiro	Recepcionista
Tarde	Repositor	Motorista	Entregador

Fonte: própria, 2017

A ficha de cadastro só permite que o candidato faça a escolha de apenas um horário e uma profissão, o Sr. José está desempregado e pode exercer qualquer uma das profissões em ambos os horários e vai se candidatar.

a) Suponha que ele deseje um horário e uma profissão de quantas maneiras ele pode preencher a ficha de cadastro?

Solução:

Chamando de $\mathrm{n(m)}$ a quantidade de profissões do turno da manhã e $\mathrm{n(t)}$ a quantidade de profissões do turno da tarde, como ele vai escolher um horário e uma profissão, ele tem as seguintes opções:

Pela manhã $\mathrm{n(m)} = 3$, e pela tarde $\mathrm{n(t)} = 3$.

Utilizando o princípio aditivo temos:

$\mathrm{n(m)} + \mathrm{n(t)} = 3 + 3 = 6$.

b) Suponha agora que ele vai se candidatar a dois cargos um pela manhã e um pela tarde, de quantas maneiras ele pode preenche as fichas?

Solução:

Usando a notação anterior temos que o Sr. José pode escolher uma entre as três profissões da manhã e uma entre as três profissões da tarde como terá que preencher uma ficha escolhendo uma profissão da manhã e uma escolhendo a profissão da tarde para calcular o total de possibilidades, precisamos utilizar o princípio multiplicativo.

$\mathrm{n(m)} \,.\, \mathrm{n(t)} = 3.3 = 9$.

1.3 ARRANJOS E PERMUTAÇÕES SIMPLES

Para compreendermos melhor este conteúdo vamos começar com um problema que possibilita entendermos na prática o conteúdo de Arranjos e permutações simples

Os times A, B, C e D, jogam um campeonato em turno e returno como o brasileirão da série ‘A’ do ano 2017, onde todos os times se encontram em ambos os turnos. Quantos jogos haverá nesse campeonato?

Este problema possibilita exemplificar o conteúdo de arranjos de forma prática. Inicialmente vamos definir o que é um arranjo de n elementos tomados k a k e mostrar uma fórmula para o número de arranjos de n elementos tomados k a k.

Definição: Seja $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto arbitrário de n elementos. Para $0 < k \leq n$, um arranjo de n elementos de A_n tomados k a k (ou simplesmente um arranjo de n elementos tomados k a k) é uma k-upla de elementos não repetidos de A_n. Como por exemplo, para $n = 4$, e $k = 2$, $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, os arranjos de A_4 tomados 2 a 2 são:

$(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_3, a_1), (a_1, a_3), (a_4, a_1), (a_1, a_4), (a_3, a_2), (a_2, a_3),$
$(a_3, a_2), (a_4, a_2), (a_2, a_4)$ e (a_4, a_3).

Estamos interessados no número de arranjos de n tomados k a k, e para tanto, lançamos mão do seguinte teorema.

Teorema 1. Sendo $0 < k \leq n$, o número de arranjos de n elementos tomados k a k, $A(n, k)$ é dado por

$$A(n, k) = n(n-1)(n-2)\dots\big(n-(k-1)\big) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Demonstração

Considere um arranjo de n elementos tomados k a k, como $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. A primeira entrada x_1 pode ser escolhida de n maneiras em $B_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Escolhida a primeira entrada podemos escolher a segunda de $n-1$ maneiras em $B_1 = B_0 - \{x_1\}$. De maneira geral podemos fazer $n - j$ escolhas em B_j, para $0 \leq j \leq k-1$. Pelo princípio multiplicativo o número de k - Arranjos de n elementos de B_0, que é igual a $A(n, k)$ é dado por

$$A(n, k) = n(B_0)n(B_1)\dots n(B_j) = n(n-1)(n-2)\dots\big(n-(k-1)\big) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

No problema dos jogos podemos distribuir e encontrar todos os possíveis confrontos entre as quatro equipes nos dois turnos como veremos abaixo.

$1^{\underline{a}}$ turno (A, B); (A, C); (A, D); (B, C); (B, D) e (C, D),

$2^{\underline{o}}$ turno (B, A); (C, A); (D, A); (B, C) ; (B, D); e (D, C)

Totalizando 12 jogos.

Este total de jogos pode ser calculado utilizando a ideia de arranjos, pois a ordem entre os elementos faz diferença, observe que o jogo $(A, B) \neq (B, A)$, pois o jogo (A, B) é jogo do 1º turno e (B, A) é jogo do 2º turno. Podemos calcular o total de jogos utilizando a fórmula do número de arranjos da seguinte maneira.

$$A(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ jogos.}$$

Definição: Dado um conjunto arbitrário de n elementos, $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, uma permutação simples dos elementos de A_n, ou simplesmente uma permutação de n elementos, é uma n-upla de elementos de A_n. Por exemplo, $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1)$, são as permutações de três elementos.

Deste modo, uma permutação de n elementos é um arranjo de n elementos tomados n a n. Assim o número de permutações de n elementos, denotado por P_n, é dado por

$$P_n = A(n, n) = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!.$$

Por exemplo, se em um posto de saúde há um bloco de cadeiras com dez lugares e há dez pessoas para se sentar. De quantas maneiras as pessoas podem se sentar?

Cada maneira que as dez pessoas se sentam nas dez cadeiras pode ser entendida como uma 10-upla dos elementos de $\{1,2, \ldots, 10\}$, logo, temos

$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ maneiras das pessoas se sentarem.

1.4 COMBINAÇÃO SIMPLES

O conteúdo agora discutido será introduzido com um problema motivador e a partir dele mostrar a definição e a demonstração de combinação simples.

Suponha que André, Bernardo, Carlos e Daniel participam de uma reunião onde todos se cumprimentam com apertos de mão, ao término da reunião quantos apertos de mão ocorreram?

Este é um problema de combinação, pois a ordem não vai alterar o conjunto, com isso, podemos definir combinação da seguinte maneira.

Definição: Seja $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto arbitrário com n elementos. Para $0 < k \leq n$, uma combinação de elementos de A_n tomados k a k (ou simplesmente uma combinação de n elementos tomados k a k) é um subconjunto com k elementos não repetidos de A_n.

Como feito na seção de permutações, estamos interessados em calcular o número de combinações de n elementos tomados k a k.

Teorema 2. Para $0 \leq k \leq n$, o número de k-combinações de n elementos, $C(n, k)$ é dado por

$$C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Demonstração

Considere um conjunto arbitrário de n elementos A_n. Para cada subconjunto com k elementos de A_n, como $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, há $k!$ uplas de k entradas com os elementos de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Deste modo podemos estabelecer uma relação (bijeção) entre o número de subconjuntos com k elementos e o número de k-uplas, de modo que para cada subconjunto há k! uplas. Como o número de subconjuntos é dado por $C(n, k)$, temos: $k!\,C(n, k) = P(n, k)$ e assim..

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \blacksquare$$

Voltando para o problema dos apertos de mão, note que podemos representar cada par de aperto de mão da maneira que segue abaixo, vamos usar as letras iniciais de seu nome para mostrar os possíveis cumprimentos

$\{A, B\};\ \{A, C\};\ \{A, D\};\ \{B, C\};\ \{B, D\}\ e\ \{C, D\}$

$\{B, A\};\ \{C, A\};\ \{D, A\};\ \{B, C\};\ \{B, D\}\ e\ \{D, C\}$

Totalizando 12 apertos de mãos, como os apertos de mãos entre $A\ e\ B, B\ e\ A$, são os mesmos, temos um total de $C(4,2) = 6$ apertos de mão.

EXEMPLO 4. As quartas de final da Libertadores, desenhada para ter apenas clubes brasileiros e argentinos, ganha os intrusos Barcelona do Equador e Jorge Wilsterman da Bolívia. Os dois conseguiram a proeza de eliminar Palmeiras e Atlético-MG fora de casa e se juntam a Grêmio, River Plate e Lanús, classificados. As outras vagas foram definidas nesta quinta-feira (10/8). Botafogo confirmou a sina de demolidor de campeões e despachou o Nacional, do Uruguai, no Engenhão. O

Santos, com algum sofrimento, confirmou a vaga eliminando o Atlético-PR. San Lorenzo teve de se submeter ao martírio dos pênaltis para tirar o Emelec, do Equador, e subir o degrau.

Fonte: (CHUTEIRAFC, 2017)

Na Copa Libertadores da América de 2017 as quartas de finais serão disputados pelos seguintes times e os respectivos países a qual pertencem:

Brasil (Botafogo, Grêmio e Santos), Argentina (San Lorenzo, Lanús, River Plate), Bolívia (Jorge Wilstermann) e Equador (Barcelona).

Sabe-se que nesta fase o país que tiver mais de um clube classificado terá, obrigatoriamente, confrontos entre si, com isso, de quantas maneiras distintas poderá acontecer os confrontos para a disputa dessa fase?

Solução:

Como tem 3 times brasileiros, terá que ter um confronto entre eles, logo $\mathrm{C}(3,2) = 3$ possibilidades. São eles:

$\text{Botafogo x Grêmio, Botafogo x Santos e Grêmio x Santos}$.

Como tem 3 times argentinos terá que haver um confronto entre eles de $\mathrm{C}(3,2) = 3$ maneiras. Seguem elas:

$\text{San Lorenzo x Lanús, San Lorenzo x River Plate e Lanús x River Plate}$.

Das combinações acima vão sobrar um time brasileiro, um time argentino, um time equatoriano e um time boliviano.

Com esses quatro times serão formados $\mathrm{C}(4,2)$ combinações possíveis, pois vão ficar um time de cada país. Vamos fazer as combinações com os times da Bolívia (Jorge Wilstermann), Equador (Barcelona). Com um time brasileiro e um time argentino, vamos fazer as combinações com o nome dos países representado os times

$\text{Brasil X Argentina; Brasil X Bolívia; BrasilX Equador; Argentina X Bolívia;}$

$\text{Argentina X Equador; Bolívia X Equador}$

Uma maneira de resolver esse problema é usando o princípio multiplicativo, de modo que o total de confrontos será calculado por.

$C(3,2).C(3,2).C(4,2) = 3.3.6 = 54$ Confrontos possíveis.

EXEMPLO 5. Um e-mail da Embaixada Norte-americana levou a vida do amapaense Lucas Coutinho, de 21 anos, a um novo horizonte. A mensagem informava que o universitário foi selecionado para participar do programa Internacional Young Leaders of Americans (Jovens Líderes das Américas - YLAI), criado pelo ex-presidente dos Estados Unidos, Barack Obama.

Segundo Coutinho, que faz letras na Universidade Federal do Amapá (Unifap), cerca de quatro mil candidatos participaram da seleção, que contou com avaliações on-line de leitura, redação e conversação em inglês. O programa vai levar 20 brasileiros para um intercâmbio de cinco semanas com representantes do governo americano e lideranças globais, por meio de conferências em Atlanta, Geórgia e Washington.

Fonte: (ABREU, 2017)

Suponha que tiveram 4 000 brasileiros inscritos com total possibilidades de participar da seleção. De que forma podemos encontrar o total de seleções distintas que poderiam ser formadas?

Solução:

Como cada seleção será formada por 20 participantes teríamos assim um total de

$\mathrm{P}(20).\mathrm{C}(4000,20) = \mathrm{A}(4000,20)$, assim

$20!\,\mathrm{C}(4000,20) = \dfrac{4000!}{(4000-20)!}$

$\mathrm{C}(4000,20) = \dfrac{4000!}{20!.3980!} = \dfrac{4000.3999\ ..\ 3981.3980}{20.19\ldots 2.1\ .\ 3980} = \dfrac{4000.3999\ ..\ 3981}{20!}$.

Podemos dizer então que:

$\mathrm{C}(4000,20) < \frac{4^{20}.10^{60}}{20!}$, pois, $20! > 2{,}4.10^{18}$ .Temos então que $\frac{1}{20!} < (2{,}4\,.\,10^{18})^{-1}$ com isso, $\frac{1}{20!} < 0{,}416.10^{-18}$. Assim $\mathrm{C}(4000,20) < 4^{20}.10^{60}.\ 0{,}416.10^{-18}$ logo $\mathrm{C}(4000,20) < 1{,}6.4^{19}.10^{42}$.

$\mathrm{C}(4000,20) > \frac{(3{,}9)^{20}.10^{60}}{20!}$ pois $20! < 2{,}5\,.\,10^{18}$ temos então que $\frac{1}{20!} > ((2{,}5.10^{18})^{-1}$ com isso $\frac{1}{20!} > 0{,}4.10^{-18}$ assim, $\mathrm{C}(4000,20) > 3{,}9^{20}.10^{60}\,.\,0{,}4.10^{-18}$, logo $\mathrm{C}(4000,20) > 1{,}56\,.\,3{,}9^{19}.10^{42}$.

Portanto $\mathrm{C}(4000,20)$ é um número entre $1{,}56\,.\,3{,}9^{19}.10^{42}$ e $1{,}6.4^{19}.10^{42}$.

1.5 O BINÔMIO DE NEWTON

Os desenvolvimentos de alguns produtos notáveis já são conhecidos como

$(a + b)^1 = (a + b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^2$

Com o desenvolvimento de mais potências binomiais, foi possível observar uma relação entre esses produtos notáveis e os coeficientes binomiais, observe:

$\mathrm{a + b = C(1,0)\,a + C(1,1)\,b}$

$\mathrm{a^2 + 2ab + b^2 = C(2,0)\,a^2 + C(2,1)a.b + C(2,2)b^2}$

$\mathrm{a^3 + 3.a^2b + 3.ab^2 + b^3 = C(3,0)\,a^3 + C(3,1)\,a^2b + C(3,2)a.b^2 + C(3,3)\,b^3}$

A partir dessa observação, podemos conjecturar uma expressão geral para o desenvolvimento de números binomiais da forma $\mathrm{(a + b)^n}$. De maneira geral, podemos obter o seguinte resultado conhecido como o binômio de Newton**.**

Teorema 3. Considerando o binômio $\mathrm{(a + b)^n}$, para $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, o coeficiente de $\mathrm{c_i = a^i b^{n-i}}$ na expansão do binômio é $\mathrm{C(n, i)}$, de modo que

$$\mathrm{(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C(n, i) a^i b^{n-i}}.$$

Demonstração

$\mathrm{(a + b)^n = \overbrace{\{(a + b)(a + b)\ldots(a + b)\}}^{n\ vezes}}$. Podemos escolher i símbolos a no produto de $\mathrm{C(n, i)}$ maneiras, e para cada escolha de i símbolos a no produto, resta um complementar de $\mathrm{n - i}$ símbolos b, de modo que cada termo na expansão $\mathrm{c_i a^i b^{n-i}}$ é tal que $\mathrm{c_i = C(n, i)}$, e a expansão de $\mathrm{(a + b)^n}$ é dada por:

$$\mathrm{(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C(n, i) a^i b^{n-i}}. \blacksquare$$

EXEMPLO 6. Calcule o quarto termo do desenvolvimento de $\mathrm{(2 + x^2)^{10}}$ e Calcule a soma dos seus coeficientes.

Solução:

O quarto termo pode ser encontrado da seguinte maneira:

$\mathrm{a = 2\,, b = x^2, n = 10\ e\ i + 1 = 4}$, logo, $\mathrm{i = 3}$

Usando a fórmula binomial temos:

$C(3 + 1) = C(4) = C(10,3).2^3.(x^2)^{10-3}$

$C(4) = 960x^{14}$

E para calcular a soma dos coeficientes, basta trocar o x por 1 logo temos:

$(2+1^2)^{10} = (2+1)^{10} = 3^{10} = 59049$

EXEMPLO 7. Encontre o termo independente no desenvolvimento do binômio de Newton $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

Solução:

Termo independente é o termo que não depende da incógnita x, sabemos que 1 é o elemento neutro da multiplicação, logo no desenvolvimento binomial o termo independente é x^0, com isso temos que

$C(i+1\ ) = C(8,i)x^{8-i}\ .\ \left(\frac{1}{x}\right)^i$

$C(i+1) = C(8,i).x^{8-i}.(x)^{-i}$

$C(i+1) = C(8,i)\ x^{8-2i}$.

Como estamos interessados no termo independente então temos que $x^{8-2i} = x^0$, com isso temos que $2i = 8$ e, portanto, isso $i = 4$

Resolvendo temos

$C(4+1) = C(8{,}4).x^{8-4}\ \left(\frac{1}{x}\right)^4$

$C(5) = \dfrac{8.7.6.5.4!}{4.3.2.1.4!}$

$C(5) = 70$

EXEMPLO 8. (PROFMAT- ENQ 2012- 2). Mostre que, para todo $n \in IN$ é inteiro o número $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n$

Solução:

Vamos mostrar a solução por indução sobre n, para $n = 0$

$\dfrac{1}{7}.0^7 + \dfrac{1}{5}.0^5 + \dfrac{23}{35}.0 = 0$

Assim, para n = 0, a solução é um número inteiro, suponha que para n inteiro a solução de

$\dfrac{1}{7}n^7 + \dfrac{1}{5}n^5 + \dfrac{23}{35}n$

Seja inteiro, vamos mostrar que

$\dfrac{1}{7}(n+1)^7 + \dfrac{1}{5}(n+1)^5 + \dfrac{23}{35}(n+1)$

Também é inteiro.

Utilizando o binômio de Newton podemos dizer que

$(n+1)^7 = C(7{,}0).1^7n^0 + C(7{,}1).1^6.n + \ldots + C(7{,}1).1^1.n^6 + C(7{,}7)1^0n^7$

$$(\mathrm{n}+1)^5 = \mathrm{C}(5,0).1^5.\mathrm{n}^0 + \mathrm{C}(5,1).1^4\mathrm{n} + \mathrm{C}(5,2).1^3\mathrm{n}^2 + \ldots + \mathrm{C}(5,4).1.\mathrm{n}^4 + \mathrm{C}(5,5).1^0\mathrm{n}^5$$

Podemos escrever a equação

$$\frac{1}{7}(\mathrm{n}+1)^7 + \frac{1}{5}(\mathrm{n}+1)^5 + \frac{23}{35}(\mathrm{n}+1)$$

Da seguinte maneira:

$$\frac{1}{7}(\mathrm{C}(7,0).\mathrm{n}^0 + \mathrm{C}(7,1).1^6.\mathrm{n} + \mathrm{C}(7,2)1^5.\mathrm{n}^2 + \cdots + \mathrm{C}(7,6).1.\mathrm{n}^6 + \mathrm{C}(7,7)1^0.\mathrm{n}^7) +$$

$$\frac{1}{5}(\mathrm{C}(5,0).1^5.n^0 + \mathrm{C}(5,1).1^4\mathrm{n} + \mathrm{C}(5,2).1^3\mathrm{n}^2 + \cdots + \mathrm{C}(5,4).1.\mathrm{n}^4 + \mathrm{C}(5,5).1^0\mathrm{n}^5 +$$

$$\frac{23}{35}\mathrm{n} + \frac{23}{35}$$

Resolvendo temos:

$$\frac{1}{7}(1 + \mathrm{C}(7,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(7,1).\mathrm{n}^6 + \mathrm{n}^7 + \frac{1}{5}(1 + \mathrm{C}(5,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(5,4)..\mathrm{n}^4 + \mathrm{n}^5) + \frac{23}{35}\mathrm{n} + \frac{23}{35}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\mathrm{n}^7 + \frac{1}{7}(\mathrm{C}(7,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(7,1).\mathrm{n}^6) + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{n}^5 + \frac{1}{5}\mathrm{C}(5,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(5,4).\mathrm{n}^4 + \frac{23}{35}n + \frac{23}{35}$$

Podemos escrever da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\frac{1}{7}(\mathrm{C}(7,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(7,1).\mathrm{n}^6) + \frac{1}{5}\mathrm{C}(5,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(5,4).\mathrm{n}^4) + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{23}{35} + \frac{1}{7}\mathrm{n}^7 + \frac{1}{5}\mathrm{n}^5 + \frac{23}{35}\mathrm{n}}$$

Temos que $(\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{23}{35}) = 1$ e pela hipótese de indução $(\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n)$ é número inteiro para finalizar $\mathrm{C}(7,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(7,1)\mathrm{n}^6$ a soma dessas combinações é a soma de parcelas divisíveis por 7 então

$$\frac{1}{7}\mathrm{C}(7,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(7,1).\mathrm{n}^6$$

É inteiro e

$\mathrm{C}(5,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(5,4).\mathrm{n}^4$ é a soma de parcelas divisíveis por 5 então

$$\frac{1}{5}\mathrm{C}(5,1).\mathrm{n} + \ldots + \mathrm{C}(5,4).\mathrm{n}^4$$

É inteiro com isso concluímos que vale para (n + 1), assim $n \in IN$, é inteiro o número

$$\frac{1}{7}\mathrm{n}^7 + \frac{1}{5}\mathrm{n}^5 + \frac{23}{35}\mathrm{n}$$

Com os conceitos de combinatória concluídos, podemos iniciar o estudo de probabilidade, onde usaremos o conhecimento de combinatória para resolver problemas probabilísticos.

No próximo capítulo mostraremos os conceitos e técnicas de resolução de cada conteúdo de probabilidade, além de exemplos que atendem as orientações dos PCN, além de fazer transposição de didática do modelo Binomial e Geométrico.

CAPÍTULO 2: PROBABILIDADE

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

A teoria da probabilidade originou com Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Nesta época o jogador Chevalier de Mére discutia problemas de jogos de azar com Pascal, despertando neste o interesse em estudar as possibilidades de vitória e derrota em jogos.

Os jogos de azar já existiam bem antes, e pessoas com mentes brilhantes possivelmente já tinha encontrado maneiras seguras de tirar proveito. Na verdade o estudo de análise combinatória fora devido aos problemas de contagem originado na teoria da probabilidade.

É certo que o italiano Jerónimo Cardano (1501-1576) escreveu um trabalho notável sobre probabilidades -"Libar de ludo aleal", isto é, (Livros sobre jogos de azar) mas que só apareceu impresso em 1663. O arranque definitivo deu-se de fato com Fermat e Pascal. Laplace (1749-1827) enunciou pela primeira vez a definição clássica de probabilidade. Foi, porém, com Gauss (1777-1855) que as aplicações do cálculo de probabilidade são voltadas decisivamente para a ciência: Gauss cria, para o efeito, a teoria dos erros de observação (Theoria combinationis observatorium erroriluns minimis obnoxia, 1809), estabelecendo o método dos menores enquadrados e justificando o emprego na teoria dos erros da lei que designou por "normal" hoje conhecida também por lei de Gauss ou lei de Laplace-Gauss.

2.2 ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

Para uma melhor compreensão deste conteúdo vamos começar com um problema motivador e na sequencia mostraremos as definições de Espaço Amostral e Eventos.

A Federação Internacional de Futebol (FIFA) anunciou na manhã desta quinta-feira a lista de 24 pré-indicados ao prêmio The Best de melhor jogador do mundo em 2017. Dois brasileiros integram a lista: Neymar**,** do Paris Saint-Germain, e Marcelo, do Real Madrid. O favorito é Cristiano Ronaldo, multicampeão pelo clube espanhol, que buscará igualar Lionel Messi com cinco troféus de melhor do mundo.

Fonte: (Da redação da Veja, 2017)

Suponha que todos tenham condições iguais de ser melhor do mundo. Qual a probabilidade de que um dos brasileiros seja o melhor do mundo?

Vamos utilizar este exemplo para definir o que é espaço amostral, evento e de como calcular a probabilidade.

Definição: Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento.

No caso do exemplo anterior é que antes de sair o vencedor não é possível afirmar com exatidão quem será considerado o melhor do mundo neste momento. Podemos dizer que o espaço amostral deste exemplo acima é: $n(\Omega) = \{\text{Aubameyeng}, \text{Bonucci}, \text{Buffon}, \text{Carvajal},$ $\text{Cristiano Ronaldo}, \text{Dybala}, \text{Griezmann}, \text{Hazard}, \text{Ibrahimovic},$ $\text{Iniesta}, \text{Kane}, \text{Kante}, \text{Kroos}, \text{Lewandowski}, \text{Marcelo},$ $\text{Messi}, \text{Modrić}, \text{Navas}, \text{Neuer}, \text{Neymar},$ $\text{Sergio Ramos}, \text{Alexis Sánchez}, \text{Suárez}, \text{Vidal}\}.$

O número de elementos do espaço amostral é $n(\Omega) = 24$.

Definição: Um evento (A) é um subconjunto do espaço amostral. Por exemplo: no problema anterior, o evento dos jogadores na lista da FIFA é o conjunto com dois elementos, $A = \{\text{Neymar}, \text{Marcelo}\}$.

Definição: Uma função $P: \Omega \rightarrow [0,1]$ é uma função probabilidade se:

i) $P(\Omega) = 1$;

ii) $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, com os A_{js} 2 a 2 disjuntos.

A probabilidade de um evento ocorrer é a razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

De acordo com o exemplo acima a probabilidade de um brasileiro ganhar é:

$P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

EXEMPLO 9. O Ranking dos estados aponta o destino dos investimentos. A segunda edição do Ranking de Gestão dos Estados mostra quais deles são mais atrativos para empresas e investidores estrangeiros. A crise econômica internacional ampliou a possibilidade de atração de investimentos estrangeiros para o Brasil, que já estava no centro das atenções em razão da proximidade da Copa do Mundo de 2014 e da Olimpíada do Rio, em 2016. Sem perspectivas de negócios nos países desenvolvidos, as grandes corporações voltaram seus olhos para as nações emergentes. Não é dinheiro fácil, ressalve-se. Apenas os estados que conseguem reduzir os obstáculos que afugentam os investidores, como a burocracia, a deficiência da mão de obra, as falhas na infraestrutura e a instabilidade das regras econômicas, é que estão se capacitando para receber tais recursos. Essas são as principais conclusões do segundo Ranking de Gestão dos Estados Brasileiros, divulgado na semana passada em São Paulo pelo Centro de Liderança Pública. O levantamento, elaborado pela Unidade de Inteligência do grupo inglês Economist, mostra pelo segundo ano seguido que somente seis estados apresentam ambiente de negócios adequado para quem pretende atuar no setor produtivo brasileiro: São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Rio Grande do Sul, Paraná e Santa Catarina. Os catarinenses foram o destaque do ranking, ao ultrapassar o Distrito Federal e chegar à sexta colocação, graças aos investimentos em inovação e infraestrutura. São Paulo segue na liderança do levantamento, apesar de sua complexa estrutura tributária, que fez o estado perder pontos em relação a 2011.

Fonte: (CABRAL, 2012)

Supondo ser colocado em uma urna o nome dos 27 estados brasileiros.

Qual a probabilidade de ser sorteado um dos estados que lideram o ranking de gestão dos estados?

Solução:

O espaço amostral Ω é o conjunto de todos os estados da federação brasileira. O número de elementos do espaço amostral é $n(\Omega) = 27$. Evento A é o conjunto de estados que lideram o ranking, assim $n(A) = 6$. Logo,

$P(A) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

2.3 INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

Existem algumas situações em que o conhecimento do acontecimento de um certo evento pode afetar a probabilidade de outro evento ocorrer. Neste sentido estudamos o caso da dependência de eventos. Iniciamos nossas considerações acerca disto com o simples problema.

Uma urna contém 8 bolas, sendo 3 verdes e 5 azuis. Se sortearmos duas bolas, uma de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Note que o evento de sortear uma bola de uma determinada cor, não tem relação com uma segunda cor, devido ao fato de haver reposição de bolas. Os eventos do espaço amostral do problema são ditos independentes, como formalizaremos na seguinte definição.

Definição: Sejam A e B eventos do espaço amostral Ω·. Assim A e B são ditos independentes se e somente se:

$P(A \cap B) = P(A).P(B).$

EXEMPLO 10. No dia 24 de fevereiro, o legislativo britânico aprovou uma lei permitindo a geração de embriões com DNAs de três pessoas diferentes. O objetivo é deixar que mães com mutações maléficas em seu DNA mitocondrial não as transmitam para o filho. Segundo a lei, durante a reprodução assistida, essa parte de seu genoma poderá ser substituída pelo de uma doadora, gerando uma criança saudável. Assim, a Grã-Bretanha se tornou o primeiro país a permitir a manipulação genética em células germinais humanas.

Fonte: (ROSA, 2015)

Supondo que o DNA de um embrião seja formado por 46 cromossomos sendo que esses foram doados por três pessoas da seguinte maneira o doador (A) doou 15 cromossomos, o doador (B) 15 cromossomos e o doador (C) doou o restante. Dois cromossomos vão ser selecionados ao acaso para uma análise. Qual a probabilidade que estes sejam um do doador A e o outro do doador C.

Solução:

Espaço amostral $n(\Omega) = 46$

Evento (A) o número de cromossomos do tipo (A) logo n(A) = 15

$\mathrm{P(A)} = \frac{15}{46}$

Como já foi retirado um cromossomo então

$\text{Espaço amostral } \mathrm{n}(\Omega) = 45$

$\text{Evento (C) o número de cromossomos do tipo (C), logo } \mathrm{n(C)} = 16$

$\mathrm{P(C)} = \frac{16}{45}$

A probabilidade que seja um doador A e outro C e encontrado por:

$$\mathrm{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

$\text{Logo } \mathrm{P(A \cap B)} = \frac{15}{46}.\frac{16}{45} = \frac{8}{69}$

2.4 PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Este conteúdo será iniciado com um problema que será solucionado utilizando a probabilidade da união de dois eventos, a partir deste seja feito a definição e proposição e na sequencia solucionado o problema motivador, aproveitando este problema motivador será mostrado a probabilidade de eventos complementares.

Determine a probabilidade de obtermos um número que seja múltiplo ao mesmo tempo de 3 ou 5, e que esteja compreendido ente 101 e 1 000. Com este problema simples iremos introduzir o conteúdo de probabilidade da união de dois eventos.

A união de dois eventos A e B, denotada por $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, representa a ocorrência de, pelo menos, um dos eventos A ou B.

Definição: Seja Ω um espaço amostral finito e não vazio. Para quaisquer eventos A e B de Ω, tem-se que:

$$\mathrm{P\,(A \cup B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B)}$$

Proposição. Os eventos A e B são chamados de mutuamente exclusivos se, e somente se, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Voltando ao problema motivados podemos encontrar o espaço amostral n(Ω) utilizando a regra da P(A) dada por $\mathrm{a_n = a_1 + (n-1).r}$ de razão 1 da seguinte maneira 1 000 = 101 +(n-1) onde n = 900 assim o espaço amostral é igual a:

$\mathrm{n}(\Omega) = 900$.

Evento (A): Múltiplos de 3 compreendidos entre 101 e 1000, já sabemos que existem 900 números compreendidos entre 101 e 1000 logo para saber quantos destes são múltiplos de 3 basta dividir 900 por 3,

$n(A) = \frac{900}{3} = 300$

Evento (B) múltiplos de 5 entre 101 e 1000, pelo mesmo princípio calculamos os múltiplos de 5.

$n(B) = \frac{900}{5} = 180$

Dentre esses tem os que são múltiplos de 3 e de 5.

Evento (C): Múltiplos de 3 e de 5 logo são múltiplos de 15, utilizando o mesmo princípio podemos encontrar

$n(C) = \frac{900}{15} = 60$

Assim, a probabilidade de calcular um número múltiplo de 3 ou 5 compreendido entre 101 e 1000 é encontrado pela seguinte equação

$$P\,(A \cup B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B)$$

$P\,(A \cup B) = \frac{300}{900} + \frac{180}{900} - \frac{60}{900} = \frac{420}{900} = \frac{7}{15}$

Proposição. Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de Ω. Chama-se **"Evento complementar** de A", que indica por A^C, o evento que satisfaz as seguintes condições:

i) $P\,(A \cup A^C) = P\,(\Omega) = 1.$

ii) $P\,(A \cap A^C) = P\,(\emptyset\,).$

Como consequência da regra da adição, obtemos que, para qualquer evento $A \subset \Omega$,

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

Que pode ser verificada aplicando a regra da adição com A^C no lugar de B,temos,

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) - P(A \cap A^C)$$

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) - P(\emptyset\,)$$

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) - 0.$$

Como $P(A \cup A^C) = P(\Omega) = 1$, segue imediatamente a igualdade desejada.

Utilizando o mesmo problema motivador calcule a probabilidade de sortear um número que não seja múltiplo de 3 ou de 5.

Utilizando a regra de probabilidade complementar temos

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

Então

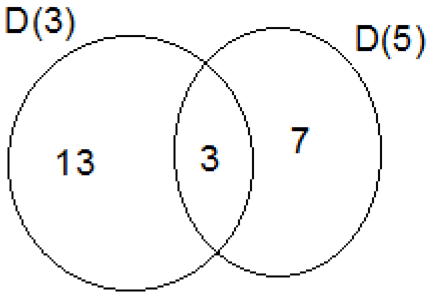
$$P(A) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

EXEMPLO 11. ENQ-2014.1. De uma caixa contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50 retiram-se duas bolas, sem reposição. Determine a probabilidade de:

a) o número da primeira bola ser divisível por 3 e o número da segunda bola ser divisível por 5.

Solução:

Vamos chamar os divisores de 3 de D(3), os divisores de 5 de D(5). Temos assim $D(3) = 16, D(5) = 10\ e\ D(3) \cap D(5) = D(15) = 3,$



Evento (A) = A primeira bola ser somente D(3) e a segunda D(5)

$$P(A) = \frac{13}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{130}{2450}$$

Evento (B) = A primeira bola ser D(3) ∩ D(5) e a Segundo bola somente D(5), observe que se a premeira bola é divisível por D(3) ∩ D(5), então das 10 bolas que são D(5) restam um espaço amostral de 9, com isso temos:

$$P(B) = \frac{3}{50}\frac{9}{49} = \frac{27}{2450}$$

Assim a probabilidade procurada é

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{130}{2450} + \frac{27}{2450} = \frac{157}{2450}$$

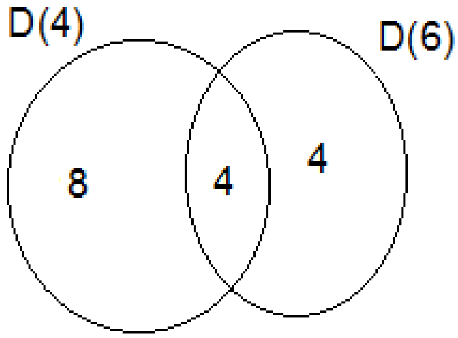
b) o número da primeira bola ser divisível por 4 ou o número da segunda bola ser divisível por 6.

Solução:

Neste caso vamos calcular a probabilidade da primeira não ser divisível por 4 e a segunda não ser divisível por 6

Vamos chamar os divisores de 4 de D(4), os divisores de 6 de D(6). Temos assim:

$D(4) = 12, D(6) = 8\ e\ D(4) \cap D(6) = D(12) = 4$



Evento (A) a primeira bola é somente D(6) e a segunda não é D(6)

$$P(A) = \frac{4}{50} \cdot \frac{42}{49} = \frac{168}{2450}$$

Evento (B) = A primeira bola não é D(4) nem D(6) e a segunda bola não é D(6)

$$P(B) = \frac{34 \cdot 41}{50 \cdot 49} = \frac{1394}{2450}$$

A probabilidade que não ocorra a primeira bola ser divisível por 4 ou o número da segunda bola ser divisível por 6.é

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

$$(A \cup B) = \frac{168}{2450} + \frac{1394}{2450} = \frac{1562}{2450} = \frac{781}{1225}$$

Assim para calcular a probabilidade de ocorre devemos usar o evento complementar

$$\mathrm{P(A) = 1 - P(A^C)}$$

$$\mathbf{P(A) = 1 - \frac{781}{1225} = \frac{444}{1225}}$$

2.5 PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional é um conteúdo que requer certa engenhosidade para compreender assim será iniciada com um problema que vai servir para o melhor entendimento deste tipo de probabilidade.

O hospital Cedars-Sinai, um dos mais renomados de Los Angeles, anunciou na quarta-feira que quatro pessoas foram infectadas por uma superbactéria resistente a antibióticos, e que outros 70 pacientes podem estar contaminados.

Fonte: (DA REDAÇÃO, superbactéria, VEJA, 2017)

Supondo que destes 70 pacientes tenham 30 homens e 40 mulheres, a chance de um homem está infectado é de 20% e de uma mulher está infectada é de 15%. Suponha que esse percentual tenha ocorrido com exatidão e foi selecionado um paciente ao acaso, levado para o laboratório e com os exames foi comprovado que estava com a superbactéria. Qual a probabilidade condicional de que este paciente seja uma mulher.

Este problema possibilita compreender a probabilidade condicional.

Definição: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é representada por $\mathrm{P(A|B)}$) é dada por:

$$\begin{cases} \mathrm{P(A|B)} = \dfrac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} \text{ , se } \mathrm{P(B)} > 0. \\ \mathrm{P(A), se\ P(B)} = 0 \end{cases}$$

O problema motivador está condicionando aos pacientes que estão com a superbactéria assim os casos possíveis se reduz a.

Homens: 30. 0,2 = 6 e Mulheres: 40 . 0,15 = 6

$\text{Espaço amostral } \mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{P(B)} = 12$

$\text{Evento } \mathrm{P(A \cap B)} = 6$

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

$$\mathrm{P\ (A)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Indicamos essa probabilidade por $\mathrm{P(A|B)}$ (lê-se “probabilidade de A, dado B”).

2.6 VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

O estudo de variáveis aleatória discreta será iniciado com um problema motivador e a partir deste será mostrado a definição, na sequencia será solucionado este problema usando a escrita das variáveis aleatórias discretas.

O sal de cozinha ou sal comum é um condimento milenar, composto basicamente por sódio e cloro (cloreto de sódio – NaCl). O sal é uma substância essencial à saúde, sendo prejudicial quando consumido tanto em excesso quanto de forma escassa.

O problema é que o consumo individual médio de sal varia entre 9 a 15 gramas por dia, enquanto o recomendado é no máximo 6 gramas por dia. Para se ter uma ideia, uma colher de chá cheia contém cerca de 2,3 gramas de sódio ou cerca de 6 gramas de sal.

O chamado sal light, composto por cloreto de potássio (KCl), vem ganhando adeptos ao longo dos anos. Na verdade, o sal light não é cloreto de potássio puro, ele é uma mistura com cloreto de sódio, porque o gosto do potássio é muito azedo. Em geral, o sal light é composto por 50% de cloreto de sódio e 50% de cloreto de potássio.

Fonte: (Dr. Pedro PINHEIRO, 2017)

Suponha que uma pessoa consuma duas colheres de chá cheia de sal por dia e que ela tenha disponível (cloreto de sódio – NaCl) e (cloreto de potássio - KCl),e que a chance de usar NaCl seja de 0,6 e de usar KCl seja de 0,8 descarte a possibilidade de utilizar uma colher de sal de forma fracionada. Estude o consumo de sódio diário dessa pessoa.

Com este problema motivador introduzimos o estudo de variáveis aleatória, discretas quando podemos enumerar todas as possibilidades que é a situação do exemplo motivador e contínua quando não podemos enumerar um exemplo é o caso do tempo de reação a uma medicação.

Definição: Função discreta de probabilidade - A função que atribui a cada valor da variável aleatória sua probabilidade é denominada de função discreta de probabilidade ou, simplesmente, função de probabilidade. A notação a ser utilizada é:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i \, , i = 1,2,\ldots,$$

ou ainda,

X	x_1	x_2	x_3	x_4	...
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	...

Uma função de probabilidade satisfaz $0 \leq pi \leq 1$ e $\sum_i p_i = 1$.

Voltando ao exemplo anterior vamos fazer o estudo aleatório seja X uma variável aleatória que calcule a quantidade de sódio diário que essa pessoa usa:

Consumir somente cloreto de sódio

$P(X = 4{,}6) = 0{,}6..0{,}6.0{,}2 = 0{,}072$

Consumir uma colher de cada

$P(X = 3{,}45) = 0{,}6.0{,}8.0{,}5 = 0{,}24$

Consumir somente cloreto de potássio

$P(X = 2{,}3) = 0{,}4.0{,}8.0{,}8.0{,}5 = 0{,}128$

X	2,3	3,45	4,6
p_i	0,128	0,24	0,072

EXEMPLO 12. A maioria dos acidentes pode ser evitada, pois 90% estão relacionados ao condutor. Hoje muitos acidentes estão ligados a imprudência, alta velocidade, ultrapassagens proibidas e falta de atenção, além do uso de álcool.

Fonte: (GAZETA ONLINE, 2017)

O OBSERVATÓRIO complementa, porém, que em 5% das ocorrências de acidentes, as causas estão associadas ao "Fator Via". Neste caso, são problemas que envolvem estradas mal sinalizadas, mal projetadas ou mal conservadas.

Mais de 43% dos acidentes nas rodovias federais terminam com mortos ou feridos.

Fonte: (OBSERVATÓRIO, 2017)

Suponha que os dados sejam exatos, ou seja, 90% dos acidentes sejam por culpa do condutor, 5% dos acidentes sejam por culpa das estradas e 43% dos acidentes tenham mortes ou feridos. Faça um estudo probabilístico dos acidentes ocorridos nas rodovias.

Solução:

Denotamos por A o evento de que aconteceu acidente sem morte somente por imprudência.

$\mathrm{P(A)} = 0{,}9.0{,}57 = 0{,}513$

B: aconteceu acidente com morte somente por imprudência

$P(B) = 0{,}9.0{,}43 = 0{,}387$

C: aconteceu acidente sem morte somente por problemas na rodovia

$P(C) = 0{,}05.0{,}57 = 0{,}0285$

D = aconteceu acidente com morte somente por problemas na rodovia

$P(D) = 0{,}05.0{,}43 = 0{,}0215$

E = aconteceu acidente sem morte por problema na rodovia e por imprudência

$P(E) = 0{,}9.0{,}05.0{,}57 = 0{,}02565$

F = aconteceu acidente com morte por problema na rodovia e por imprudência

$P(F) = 0{,}9.0{,}05.0{,}43 = 0{,}01935$

2.7 O MODELO BINOMIAL

Inicialmente vamos falar dos ensaios de Bernoulli estes ensaios estão associados a situações dicotômicas e podem ser representadas genericamente por resposta do tipo sucesso-fracasso. Associaremos p, a probabilidade de sucesso, ao evento que nos interessa e 1- p, será a probabilidade de fracasso.

Definição: Considere a repetição de n ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A variável aleatória que conta o número total de sucessos é denominada **Modelo Binomial** com parâmetros n e p e sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Usaremos a notação $X \sim b\,(n, p)$ para indicar que a variável aleatória X segue o modelo Binomial com parâmetros n e p.

EXEMPLO 13. Cientistas conseguiram desenvolver um anticorpo capaz de atacar até 99% das cepas do vírus da aids. De acordo com um estudo publicado na quarta-feira na renomada revista científica Science, o anticorpo foi capaz de prevenir a infecção em primatas. A próxima etapa, que está programada para 2018, irá estudar sua capacidade em prevenir ou tratar a infecção em humanos. A descoberta foi considerada um “avanço emocionante” pela Sociedade Internacional de Aids, de acordo com informações da rede britânica BBC.

Fonte: (DA REDAÇÃO DA VEJA, 2017)

Suponha que a eficiência em humanos seja a mesma e que os cientistas vão fazer os testes com 10 aidéticos. Qual a probabilidade de no máximo dois deles o anticorpo não fazer efeito?

Correção:

$\mathrm{P}(\{\mathrm{x}=0\} \cup \{\mathrm{x}=1\} \cup \{\mathrm{x}=2)$

$P(x = 0) = C(10,0).\,0{,}01^0.\,(0{,}99)^{10} = 1.1.0{,}9044 = 0{,}9043$

$\mathrm{P}(\mathrm{x}=1) = \mathrm{C}(10,1).\,0{,}01^1..\,(0{,}99)^9 = 10.0{,}01.0{,}9135 = 0{,}0913$

$P(x = 2) = C(10,2).\,0{,}01^2.\,(0{,}99)^8 = 45.0{,}0001.0{,}9227 = 0{,}0042$

$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x=1) + P(x = 2)$

$P(x \leq 2) = 0{,}9043 + 0{,}0913 + 0{,}0042$

$P(x \leq 2) = 0{,}9989$

2.8 O MODELO GEOMÉTRICO

Definição: Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Geométrica de parâmetro p, se sua função de probabilidade tem a forma

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k}) = \mathrm{p}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{k}},\ 0 \leq \mathrm{p} \leq 1 \text{ e } \mathrm{k} = 0,1,2,\ldots.$$

Nesse caso, usaremos a notação $\mathrm{X} \sim \mathrm{G}(\mathrm{p})$.

EXEMPLO 14. Casos de bullying no ambiente escolar são mais comuns do que se pensa. Segundo dados da Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar (PeNSE), dos 2,6 milhões de estudantes que cursaram o 9º ano do ensino fundamental em 2015 - algo em torno de 195 mil alunos - afirmaram ter sofrido bullying por parte dos colegas.

Fonte (BERNARDO, 2017)

Qual a probabilidade de que o primeiro que respondeu à pergunta, dizer que sofreu bullying na escola ter sido o oitavo?

Solução:

Neste caso, o sucesso é a ocorrência do aluno ter sofrido bullying. Logo,

$$\mathrm{p} = \frac{39}{520}$$

Seja X = número de alunos entrevistados até o primeiro a dizer que sofreu bullying. Então, $\mathrm{X} \sim \mathrm{G}\left(\frac{39}{520}\right)$ e como queremos determinar a probabilidade de ocorrência de quem sofreu bullying até o oitavo a ser entrevistado, isso significa que $\mathrm{k} = 8$.

Portanto,

$$P(X = 8) = \frac{39}{520} \cdot \left(1 - \frac{39}{520}\right)^8$$

$$P(X = 8) = \frac{39}{520} \cdot \left(1 - \frac{39}{520}\right)^8$$

$$P(X = 8) = \frac{39}{520} \cdot \left(1 - \frac{39}{520}\right)^8$$

$$\Leftrightarrow P(X = 8) = \frac{39}{520} \cdot \left(\frac{481}{520}\right)^8$$

$$\Leftrightarrow P(X = 8) = \frac{39}{520} \frac{2\,865\,237\,397\,444\,663\,607\,041}{5\,345\,972\,853\,145\,600\,000\,000}$$

$\Leftrightarrow$ $P(X = 8)$ é aproximadamente $0{,}04$

Após mostrar todo o conteúdo com técnicas de resolução vamos verificar o que os documentos oficiais dizem sobre combinatória e probabilidade, e em Sergipe como está sendo trabalhado no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O próximo capítulo vai mostrar as orientações dos PCN, como estão distribuídos estes conteúdos no Referencial Curricular da rede Estadual de Sergipe e quais conceitos básicos devem ser trabalhados.

CAPÍTULO 3: O ENSINO DE PROBABILIDADE E COMBINATÓRIA: O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste capítulo iremos apresentar como os conteúdos de probabilidade e combinatória são mencionados nos documentos oficiais. Para isso foi realizado um estudo nos principais documentos que balizam a educação no Brasil e impactam diretamente os currículos vigentes do Estado de Sergipe.

O primeiro documento analisado foi publicado no final do ano de 1997 e início de 1998, e veio para complementar a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) 9.394/96. Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) nasceram com o objetivo de ser um norteador da educação básica de todo país. É um documento não obrigatório para todas as escolas que apresenta uma proposta a ser seguida, principalmente, por todas as escolas públicas do país de modo a se ter um currículo mais integrado em toda a nação o que era uma demanda de anos.

Em relação ao conteúdo de probabilidade e combinatória mencionados nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) de terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, destaca a importância de estudá-los nas séries iniciais, pois irá contribuir para que se tenha um olhar mais atento sobre as informações que recebemos cotidianamente.

Este documento sugere que os conteúdos acima citados devem ser trabalhados de forma socialmente significativa despertando atitudes relevantes e contribuindo para o desenvolvimento intelectual dos alunos, propiciando-os o pensamento lógico matemático, possibilitando assim a capacidade de criar, criticar e interpretar logicamente fatos e fenômenos.

Nos PCN do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997; 1998), recomenda-se ensinar nas séries iniciais como tratamento de informações. A probabilidade deve ser estudada de maneira que os alunos compreendam os fenômenos da natureza e a combinatória de forma a combinar elementos de uma coleção e elencar todos os casos possíveis em uma situação problema.

Os conteúdos discutidos aqui devem ser trabalhados amplamente associados à cultura local e, a partir desta, produzir novos conhecimentos como formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas, não devem estar somente associados a conceitos e fórmulas, mas contribuir para tomadas de decisões.

O estudo de probabilidade deve ser direcionado para interpretar fatos e dados, generalizar informações úteis e antecipar possíveis resultados, deve proceder de forma aplicada a situações problemas, mas que possibilite aprender de forma prática do fazer e não somente da aquisição de um determinado conceito, essa estratégia permite que o estudante mantenha por mais tempo os conteúdos em sua memória, além de motivá-los a continuar aprendendo, o que é de suma importância para o ensino aprendizagem.

Os PCN defendem para isso a utilização de gráficos para o ensino de probabilidade

> A construção de tabelas e gráficos que mostram o comportamento do tempo durante um período (dias ensolarados, chuvosos, nublados) e o acompanhamento das previsões do tempo pelos meios de comunicação indicam a possibilidade de se fazer algumas previsões, pela observação de acontecimentos. Pela observação da frequência de ocorrência de um dado acontecimento, e um número razoável de experiências, podem-se desenvolver algumas noções de probabilidade (BRASIL, 1998, p.85).

No tocante a aprendizagem deve ocorrer de forma gradual, com níveis diferenciados e numa sequência a qual permita o aprendizado baseando-se em conhecimentos anteriores, assim, no terceiro e quarto ciclos alguns conceitos deverão ser apresentados e consolidados, possibilitando iniciar outros estudos com maior grau de complexidade no Ensino Médio.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998) o estudo de combinatória deve ser iniciado com os problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo, mas sem utilização de fórmulas prontas, a ideia é que os alunos tenham os primeiros contatos com este conteúdo, na sequência explorar as possibilidades de formar grupos e desenvolver o raciocínio combinatório, a partir deste entendimento utilizar o princípio multiplicativo, e daí introduzir o estudo de probabilidade.

Em relação à probabilidade, o intuito é que os alunos percebam que muitos acontecimentos ocorram de natureza aleatória, mas que se pode identificar possíveis resultados e estimar alguns deles. As noções de acasos e incertezas são trabalhadas de forma que os alunos realizem experimentos observando a quantidade de eventos possíveis, o chamado espaço amostral.

Em Sergipe, o referencial curricular da rede Estadual (2011) diz que no 8° ano deve ser trabalhado probabilidade e está na parte de conteúdos programados no item 6, Tratamento de Informações, tendo somente neste item o 6.1 probabilidade e os conceitos básicos que devem ser explorados, neste ano são experimentos aleatórios, eventos e probabilidade. No 9° ano também no item 6, Tratamento de Informações, estão os seguintes conteúdos: 6.1 história e aplicação de estatística, 6.2 noções de estatística e 6.3 contagem e probabilidade e, os conceitos básicos que devem ser trabalhados são: dados reais, dados estatísticos, coleta de dados, medida de posição, princípio da multiplicação e probabilidade.

Percebe-se que apesar de estarem sendo contemplados no currículo da rede estadual, está como último conteúdo programado para ambos os anos e as turmas que não conseguirem estudar todos os conteúdos programados, devido à dificuldade de alguns alunos aprenderem, os professores prolongam o tempo para que os alunos aprendam determinados conteúdos, impossibilitando muitas vezes de concluir todo o currículo e, consequentemente, não será estudado nestas turmas, com isso, os alunos serão prejudicados pois a falta destes interferirá no aprendizado da própria Matemática e também de outras áreas inclusive humanas. Fato corroborado nos PCN+, tema 3, Análise de Dados, onde temos que

> Uma das grandes competências propostas pelos PCNEM diz respeito à contextualização sócio-cultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade (BRASIL, 2006, p. 126).

O Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio (PCNEM), mencionado no PCN+ (BRASIL, 2006) trata a combinatória e probabilidade como uma grande competência proposta, com a finalidade de contextualização sociocultural, aproximando o aluno a realidade e fazer com que ele vivencie situações reais e que se reconheça como indivíduo capaz de contribuir para solucionar determinados problemas, não somente da Matemática exata, mas como base para as demais ciências, seja ela da natureza ou humanas, pois esta deve ser trabalhada com análise de dados de fenômenos naturais e do cotidiano, possibilitando assim a fazer inferências e afirmar com convicção o que poderá acontecer no futuro, aqui os conteúdos devem ser trabalhados com questões do mundo real, pois com o crescimento populacional, aumenta a cada dia os problemas e estes se tornam cada vez mais complexos, com isso, percebemos a grande importância de se aprimorar a técnica desse raciocínio e a contribuição destes para ambas as ciências.

A probabilidade e a combinatória dizem respeitos a conjunto finitos, por isso, a importância do aprendizado destes para as Ciências Humanas e para a sociedade de um modo geral, a utilização das tecnologias e notícias midiáticas que abordam problemas e dados reais, exige conhecimento e habilidades dos estudantes para analisar, selecionar e interpreta estas informações.

O estudo deve ser integrado ao currículo do Ensino Médio para que o aluno desenvolva valores e atitudes possibilitando-os aprender a aprender, omitir estes pode impossibilitá-los inclusive a compreender a própria Matemática. O conhecimento destes conteúdos propiciará buscar e selecionar informações, despertará responsabilidades, contribuirá na forma de pensar, fundamentar suas ideias e isto é essencial para que o aluno aprenda e se insira no mercado de trabalho.

O conhecimento probabilístico é imprescindível para que o indivíduo seja capaz de organizar estas informações e tirar suas conclusões, além de prever possíveis acontecimentos e prováveis soluções, possibilitando assim fazer inferências e contribuir para a melhoria da sociedade.

Assim como nos PCN (BRASIL, 1998) os PCN+ (BRASIL, 2006), chamam a atenção para as informações que circulam na mídia e em outras áreas de conhecimentos e espera que nesta fase de estudos os alunos sejam capazes de ultrapassar a simples leitura, que tenham a competência de refletir e criticar sobre os significados impostos por estes, com isto, o estudo probabilístico é de fundamental importância, com ele, aumenta o conjunto de ideias pois permite aplicar de forma prática essas questões do mundo real proveniente tanto da mídia como de outras áreas.

No tema 3 – Análise de dados do PCN+

> Da mesma forma, a Probabilidade acena com resultados possíveis, mas não exatos. Ao afirmar que o resultado 1 tem 1/6 de probabilidade no lançamento de um dado, não há certeza de que em seis lançamentos do dado o número 1 sairá exatamente uma vez. Assim como ao afirmarmos que determinado tratamento médico tem 90% de probabilidade de cura para uma doença, não garante que em um grupo de 10 pessoas submetidas a este tratamento exatamente uma pessoa continuará doente (BRASIL, 2006, p.126).

Os PCN+ direciona o estudo de probabilidade o qual deve acenar para os casos possíveis, mas não exatos de uma determinada situação, como se trata de conjuntos finitos permite saber todos os possíveis resultados, mas sem a certeza de qual deles acontecerá, é aí que entra a combinatória esta é considerada a parte instrumental desse estudo.

O princípio de contagem tem um papel fundamental nessa fase de estudos, pois possibilita ao aluno desenvolver o raciocínio combinatório e com isso encontrar o melhor caminho para calcular os casos possíveis.

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2006, p.126).

O uso das fórmulas deve ser uma consequência e utilizados apenas quando os dados forem muito grandes, desta forma a função destas deveria ser a de simplificar as contas. As fórmulas aparecem como algo que vem facilitar, diferentemente de como são vistas no ensino atualmente, algo sem sentido a ser memorizado. A proposta é trabalhar nessa fase de estudos a resolução de problemas aplicados e evitar a teorização excessiva, possibilitando assim orientar os alunos frente às informações de natureza probabilística.

Nos PCN+ os conteúdos e habilidades propostos para as unidades temáticas a serem desenvolvidas nesses temas são:

Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem.

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

Probabilidade: possibilidades; cálculo de probabilidades.

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.

Essas recomendações do PCN+ também refletem no Referencial curricular da Rede Estadual de Sergipe (2011), no qual, o conteúdo de combinatória e probabilidade é contemplado na segunda série do Ensino Médio, sendo que combinatória está no item 3 distribuído da seguinte maneira: 3.1 – princípio fundamental da contagem, 3.2 – permutação e combinação, 3.3 – O triângulo de Pascal, 3.4 – O Binômio de Newton. E os conceitos básicos são: princípio fundamental da contagem; permutação e arranjos simples; fatorial; combinação simples; triângulo de Pascal; relação de Stifel e Binômio de Newton.

O conteúdo probabilidade está no item 4 distribuído assim: 4.1 – conceitos básicos, 4.2 – probabilidade e, os conceitos cobrados são: experimentos, eventos, espaço amostral, probabilidade e probabilidade condicional.

Diferente do 9° Ano em que probabilidade está associada a estatística aqui são trabalhados de forma separadas, onde combinatória e probabilidade estão sendo estudadas desvinculados de estatística.

Não basta contemplar os conteúdos nos currículos, é necessária uma formação adequada aos professores, condição de trabalho e formação continuada para que tenhamos uma educação matemática de qualidade, e assim possamos atender as necessidades e anseios dos estudantes.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) exigem que seja estudado probabilidade e combinatória nos cursos de Bacharelado em Matemática, mas não tem a mesma exigência para os cursos de licenciatura, mencionando-os indiretamente nos conteúdos profissionais, com isso, para que tenhamos um melhor aprendizado e resultados satisfatórios nas séries iniciais, é necessária uma mudança nos currículos de Licenciatura, fazendo com que se tenha a mesma exigência que o Bacharelado.

Nos PCN+, no tocante a formação profissional permanente de professores temos que

> As questões a serem enfrentadas na formação são históricas. No caso da formação nos cursos de licenciatura, em seus moldes tradicionais, a ênfase está contida na formação nos conteúdos da área, onde o bacharelado surge como a opção natural [...], sendo que a atuação como "licenciados" é vista [...] como "inferior", passando muito mais como atividade "vocacional" ou que permitiria grande dose de improviso [...] (BRASIL, 2006, p.139).

Devido à importância do aprendizado de combinatória e probabilidade nas séries iniciais e a contribuição destes, tanto para as Ciências Naturais quanto as Humanas, é necessário que a formação de professores de Matemática dê condição aos futuros docentes das séries iniciais, proporcionando o conhecimento necessário com técnicas, metodologias e didáticas, suficientes para que estes desenvolvam nessa fase de ensino, alunos competentes sendo fundamental compreender o conteúdo, entender a lógica e conhecer as dificuldades, mas não basta somente ter essas habilidades, as escolas de Ensino Básico precisam reconhecer a importância e pôr em prática o estudo destes conteúdos.

Nesta mesma perspectiva, os PCN+ propõem que o professor deva se tornar um sujeito ativo e integrado a comunidade escolar de forma que ele deva

> [...] participar da elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino; elaborar e cumprir plano de trabalho, segundo a proposta pedagógica do estabelecimento de ensino; zelar pela aprendizagem dos alunos; estabelecer estratégias de recuperação para os alunos de menor rendimento; ministrar os dias letivos e horas-aula estabelecidos, além de participar integralmente dos períodos dedicados ao planejamento, à avaliação e ao desenvolvimento profissional; colaborar com as atividades de articulação da escola com as famílias e a comunidade (BRASIL, 2006, p. 140).

Agindo assim, o professor, poderá suprir uma deficiência na formação inicial e dará passos importantes para implementar a transição entre teoria e prática, ou seja, ele aprenderá na prática o que o curso de formação inicial não lhe proporcionou, devido essa deficiência e as mudanças que ocorrem cotidianamente é necessário a formação continuada dos professores, possibilitando-os aprender e aperfeiçoar seus conhecimentos.

Para mostrar na prática como deve ser estudado estes conteúdos no Ensino Médio, no próximo capítulo será apresentado questões usando notícias midiáticas, que falam de outras áreas de conhecimento, tanto da área da natureza como também humanas, a partir desta foi criado uma situação problema que será resolvido utilizando os conceitos de combinatória e probabilidade, há questões com gráficos e tabelas e todas elas atendem as orientações dos PCN.

CAPÍTULO 4: ATIVIDADES METODOLÓGICAS

Utilizando a proposta dos PCN (BRASIL, 1998), e do Referencial Curricular da Rede Estadual de Sergipe (SERGIPE, 2011), que contempla, na segunda série do Ensino Médio, os conteúdos de Combinatória e Probabilidade, foram elaboradas questões de: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos Simples, Combinação Simples, Probabilidade da União de Dois Eventos, Probabilidade de Eventos Independentes, Probabilidade de Eventos Complementares e Probabilidade Condicional.

As questões foram construídas a partir de notícias midiáticas que tem o objetivo de informar, conscientizar ou orientar sobre Saúde, Educação, Tecnologias, Ciências e outros assuntos que interessam a juventude. A proposta de cada questão não é apenas ensinar o raciocínio combinatório ou probabilístico, mas orientar de como se prevenir e inferir no meio social em que vive.

Questões com esse perfil têm grandes possibilidades de chamar a atenção do aluno, pois trata de conteúdos do seu interesse, utilizando uma linguagem clara cujo propósito é atingir toda a população, além de estarem sendo discutidas no dia a dia nos meios de comunicação de massa.

Cada questão corresponde a um conteúdo e foi confeccionada a partir de uma notícia da qual foi selecionada uma parte e organizada em uma situação-problema, possibilitando assim ao aluno refletir sobre a notícia e resolver a situação proposta.

Utilizando-se destes conceitos e levando em consideração o Referencial Curricular da Rede Estadual de Sergipe (SERGIPE, 2011), foram formadas as seguintes questões sobre os conteúdos mencionados que apresentaremos a seguir.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998) o estudo de combinatória deve ser iniciado com os problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo, mas sem utilização de fórmula pronta, a primeira questão desta atividade proposta utiliza esse princípio, os PCN (BRASIL, 1998) dizem que após esse conhecimento deve-se partir para a ideia de formar grupos e desenvolver o raciocínio combinatório, com essa parte consolidada, introduzir o estudo de probabilidade, seguindo essa proposta temos a segunda e terceira questões que utilizam a ideia de formar grupos e a partir da quarta inicia-se probabilidade.

4.1 O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

EXEMPLO 15. Trânsito, sono, indisposição - são muitos os obstáculos que separam uma pessoa da mesa do café da manhã. Mas enquanto muita gente não dá importância para este momento do dia, os especialistas reforçam que a alimentação adequada ao amanhecer influencia a saúde como um todo, a disposição e até a relação com os quilinhos a mais que tanto incomodam.

A nutricionista Lívia Hasegawa explica que o fato de não comer pode também aumentar o nível de cortisol, "substância capaz de fazer a 'quebra' dos músculos e estimular o ganho de gordura, ou seja, nada bom para o nosso organismo", afirma a especialista.

Fonte: (BARG, 2017)

Segundo a nutricionista os melhores alimentos para esta hora do dia são: uma fruta, um derivado do leite, um cafezinho preto, um pão integral e uma colher de cereal.

Suponha que no seu café da manhã estejam disponíveis em sua mesa 5 tipos de frutas, 3 derivados de leite, 1 tipo de café preto, 2 tipo de pão integral e quatro tipos de cereais. De quantas maneira você pode fazer seu prado e ter uma alimentação de forma correta?

Resolução:

- 5 tipos de frutas
- 3 derivados de leite
- 1 tipo de café preto
- 2 tipo de pão integral
- 4 tipos de cereais

Podemos encontrar a solução dessa questão usando o princípio multiplicativo da seguinte maneira

(Quantidade de tipos de frutas) x (quantidade de tipos derivados de leite) x (quantidade de tipos de café preto) x (quantidade de tipos de pão integral) x (quantidade de tipos de cereais), ou seja $5.3.1.2.4 = 120$

4.2 ARRANJO SIMPLES

EXEMPLO 16. Acostumados a ler a expressão "parboilizado" nos sacos de arroz, poucos param para pensar de onde ela vem. Trata-se da junção das palavras inglesas *partial* e *boiled* (parcialmente aquecido) e indica um tipo de processamento dos grãos que os torna mais resistentes à degradação, com vida útil maior e de mais fácil manejo pelo consumidor - já que o parboilizado não empapa, mesmo que você ponha água a mais na panela.

"Se eu tivesse de fazer um ranking dos tipos de arroz mais interessantes para consumo sob o ponto de vista nutricional, entre os mais comuns no mercado, eu apresentaria a seguinte escala: integral, parboilizado integral, parboilizado polido e branco polido", enumera Isabel Massaretto, pós-doutoranda ligada ao Centro de Pesquisa em Alimentos (FoRC – Food Research Center). Em seu doutorado em Ciência dos Alimentos, ela analisou as características nutricionais e propriedades funcionais do arroz.

Fonte: (DA REDAÇÃO – JORNAL DA USP, 2017)

Suponha que um restaurante compre todos os tipos de arroz acima citado e cozinhe três tipos distintos de arroz por dia, um para servir no café da manhã, um no almoço e um no jantar. De quantas maneiras distintas utilizando arroz o cozinheiro deste restaurante pode prepara as refeições de um dia?

Resolução:

- Para o café da manhã ele tem 4 opções
- Para o almoço ele tem 3 opções
- Para o jantar ele tem 2 opções

Podemos encontrar o total de possibilidade da seguinte maneira: Para o café da manhã podem ser usados qualquer um dos 4 tipos de arroz, meio dia 3 tipos pois um já foi usado pela manhã e, a noite 2 tipos pois já foi usado um pela manhã e um meio dia, assim utilizando o princípio multiplicativo temos 4.3.2 = 24 maneiras.

Usando a regra

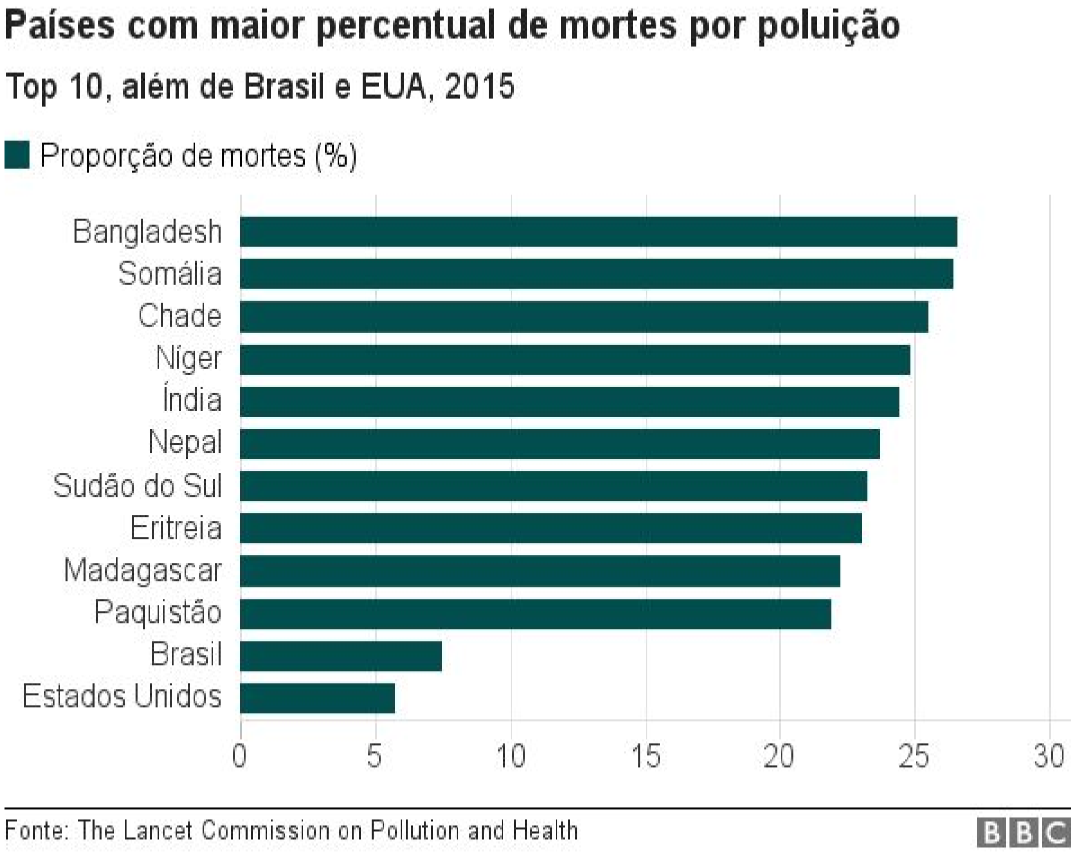
$$\mathrm{A(n,k)} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(n-k)!}}.$$

$$A(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$$

4.3 COMBINAÇÕES SIMPLES

EXEMPLO 17. A poluição matou 101.739 pessoas no Brasil em 2015, o que equivale a 7,49% do total de mortes no país durante o período. A poluição foi responsável por uma a cada seis mortes registradas em todo o mundo em 2015, totalizando cerca de 9 milhões de óbitos.

A maior parte das mortes ocorreu em países de renda baixa e média, onde a poluição está associada a até 25% das mortes.



Fonte: (SILVER, 2017)

Suponha que dos países do gráfico acima sejam selecionados três para se desenvolver um projeto de redução da poluição, de quantas maneiras podem ser selecionados esses países?

Resolução:

Como a ordem em que os países são selecionados não faz diferença, por exemplo, um subconjunto formado por {Brasil, Estados Unidos, Paquistão},se permutarmos os nomes destes países dentro do grupo,, teremos 6 sequencias diferentes, mas a ordem entre eles no grupo não muda o grupo.

Com os 12 países a quantidade de subconjuntos formados com 3 países, podem ser encontrados usando o princípio multiplicativo 12.11.10 = 1320, como cada subconjunto com 3 países está repetido 6 vezes entre os 1320 formados. Para encontrar a quantidade de grupos distintos basta dividir o total de grupos pela quantidade em que cada grupo está repetido, assim $\frac{1320}{6}$ = 220

Usando a regra

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

$$C(12{,}3) = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12.11.10}{6} = 220$$

4.4 PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

EXEMPLO 18. Segundo um artigo publicado na revista científica "Emerging Infectious Diseases", ligada ao Centro de Controle e Prevenção de Doenças dos EUA, 27 vírus --tais como ebola, hepatite B e C, herpes, citomegalovírus, catapora e chikungunya -- também podem ser transmitidos no sexo.

O artigo também ressaltou que alguns desses vírus podem até causar mutações no DNA do esperma, o que compromete as gerações futuras do sêmen.

O estudo foi feito a partir da revisão de mais de 3.800 publicações científicas. Os autores encontraram ainda a evidências de que outros 11 vírus, além de serem encontrados no sêmen, podem viver nos testículos, incluindo aqueles que causam gripe, dengue, varíola, rubéola e síndrome respiratória aguda grave.

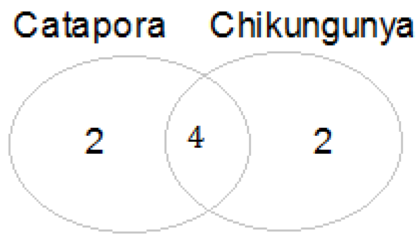
Fonte: (UOL - São Paulo, 2017)

Suponha que 10 voluntários fizeram exames em um determinado laboratório para verificar se tem os vírus da catapora ou Chikungunya e foi constatado que 6 deles tem o virus da catapora e 6 tem o virus da Chikungunya, sabe-se também que quatro deles tem os dois vírus da catapora e Chikungunya.

O laboratório vai premiar um dos voluntários com um plano de saúde por um ano. Qual a probabilidade que esse tenha o vírus da Catapora ou Chikungunya?

Resolução:

Podemos encontrar a solução deste problema usando o diagrama de Venn



Como a probabilidade é a razão entre o evento e o espaço amostral temos $n(A) = 8$ e $n(\Omega) = 10$

$P(A \cap B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Usando a regra $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

4.5 PROBABILIDADE CONDICIONAL

EXEMPLO 19. 47% das mulheres sentem que foram rejeitadas para emprego por serem mães ou quererem engravidar A pesquisa mostra que a maioria das mães que trabalham deixam as crianças com familiares que não são os pais, na escola, creche ou até mesmo sozinhas. Já 17% dizem que as crianças ficam com o pai ou companheiro enquanto a mãe trabalha. As que deixam com babá ou empregada doméstica são minoria.

Fonte: (TREVIZAN, 2017)

Supunha que foi feita uma pesquisa em uma escola e uma creche, ambas pertencem ao mesmo dono, foi detectado que 100 crianças são filhos de mulheres que trabalham, destas 70 tem filhos na escola e 30 tem filhos na creche. Nenhuma delas disse ter filhos em ambos. .

O dono da escola vai dá uma bolsa de estudos para quem tem mãe que trabalha. Qual a probabilidade do primeiro ser um aluno da escola, sabendo que o segundo é um aluno que estuda na escola.

Resolução:

:Evento $n(A)$: Calcular a probabilidade de que o primeiro e o segundo aluno seja aluno da escola assim

$P(A \cap B) = \frac{70}{100} . \frac{69}{99} = \frac{7}{10} . \frac{23}{33} = \frac{161}{330}$

Logo

$P(A \cap B) = \frac{161}{330}$

Espaço amostral $n(\Omega)$: É a soma dos casos em que o primeiro e o segundo aluno são alunos da escola mais os casos em que o primeiro é aluno da escola e o segundo não é aluno da escola, assim:

$$P(B) = \frac{70}{100}.\frac{69}{99} + \frac{70}{100}.\frac{30}{99} = \frac{161}{330} + \frac{70}{100}.\frac{30}{99} = \frac{161}{330} + \frac{2100}{9900} = \frac{4830 + 2100}{9900} = \frac{6930}{9900}$$
$$= \frac{693}{990}$$

Logo:

$P(B) = \frac{693}{990}$

Como a probabilidade é a razão entre o evento e o espaço amostral temos que a probabilidade do primeiro ser um aluno da escola, sabendo que o segundo é um aluno que estuda na escola é calculada por

$$P(A|B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{161}{330}}{\frac{693}{990}} = \frac{161.990}{330.693} = \frac{159390}{228690} = 0{,}70\ aproximadamente$$

4.6 EVENTOS COMPLEMENTARES

EXEMPLO 20. Catorze por cento dos jovens entre 15 e 19 anos querem ser professores, mas a cada cem alunos que entram nos cursos de pedagogia ou licenciatura, apenas metade termina a faculdade e somente 27 vão realmente ensinar nas salas de aula..

Fonte: (G1 - GLOBO, 2017)

Supondo que, em uma determinada faculdade, cem alunos entraram nos cursos de pedagogia ou licenciatura, no final do curso um professor resolveu por todos os nomes em uma urna para premiar um deles com um livro, mantendo os dados da notícia acima.

Qual a probabilidade que o ganhador desse livro não seja um dos que realmente ensinam nas salas de aula?

Resolução:

Vamos calcular a probabilidade dos que ensinam, ou seja, $P(A)$

Espaço amostral Ω = 100

Quantidade dos que ensinam

$E(A) = 27$

$P(A) = \frac{27}{100}$

Utilizando a probabilidade do evento complementar, ou seja, retirando a probabilidade dos que realmente vão para a sala de aula temos:

Dos 100% retirando 27% restam 73%.

Podemos escrever também utilizando a função dos eventos complementares.

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

$$P(A^C) = 1 - \frac{27}{100}$$

$$P(A^C) = \frac{100 - 27}{100}$$

$$P(A^C) = \frac{73}{100}$$

4.7 INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

EXEMPLO 21. O governo federal anunciou em 16 de outubro mudança nas regras para o combate ao trabalho escravo. A norma determinava, entre outras novidades, que, para configurar a ocorrência de escravidão, seria preciso comprovar que o trabalhador era impedido de se deslocar e que havia segurança armada no local para vigiá-lo.

O gráfico a seguir mostra o número de pessoas que foram resgatadas em alguns anos.

Fonte: (MORAIS, 2017)

Os dados informados pelo gráfico do número de resgate é referente aos anos 2 000; 2003, 2007, 2013, 2015 e 2016 apenas.

Suponha ser colocados todos os nomes dos resgatados em uma urna e retirar dois nomes de forma sucessiva e sem reposição. Qual a probabilidade dos dois terem sido resgatados no ano 2000?

Resolução:

O total de pessoas resgatadas em todos os anos

$n(\Omega) = 16223$

O total de pessoas resgatadas no ano 2000

$n(A) = 516$

O primeiro nome a ser retirado tem probabilidade de

$P(A) = \frac{516}{16223}$

Para o segundo a ser retirado, como já saiu um no primeiro sorteio restam do total $n(\Omega) = 16222$

Do total de pessoas resgatadas do ano 2000 como um já foi retirado restam

$n(B) = 515$

Assim o segundo nome a ser retirado tem probabilidade

$$P(B) = \frac{515}{16222}$$

Usando o princípio multiplicativo podemos dizer que a probabilidade dos dois terem sido do ano 2000 é

$$P(A \cap B) = \frac{516}{16223} \cdot \frac{515}{16222} = \frac{265740}{263\ 169\ 506} = 0{,}001 \ \ Aproximadamente$$

CONSIDERAÇOES FINAIS

O propósito deste trabalho foi o de mostrar o que os documentos oficiais falam sobre os conteúdos de combinatória e probabilidade, como os PCNs orientam que sejam trabalhados e, em Sergipe, quais os conceitos devem ser ensinados em cada ano no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Há uma grande quantidade de sugestões nos PCNs que orientam os trabalhos dos professores de como ensinar estes conteúdos nos anos iniciais e médio. Os principais são a utilização de notícias que circulam na mídia, que tenham informação não necessariamente de matemática exata, mas de ciência da natureza ou humana.

Iniciei a maioria dos conteúdos aqui discutidos com um problema motivador, pois é importante iniciar com algo prático que o aluno consiga entender para que ele deve aprender. Na sequência, defini e mostrei as fórmulas, assim chama a atenção do aluno, pois o que ele vai estudar tem significados claros, percebendo que terá utilidade para sua vida e quando se faz isso com uma notícia desperta mais interesse, por ser uma informação atual e a matemática pode dar a sua contribuição para ajudar a solucionar determinadas situações do dia a dia.

As atividades foram elaboradas de acordo com as orientações dos PCNs, dando ênfase às habilidades exigidas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), utilizando notícias atuais dos mais diversos assuntos, sejam de ciências naturais ou humanas.

Para uma verificação de resultados seria necessária uma aplicação utilizando o modelo tradicional e uma deste modelo para verificar qual deles terá um melhor resultado.

REFERÊNCIAS

ABREU, Jorge. G1 AMAPÁ. **Estudante do Amapá é selecionado para programa de líderes nos EUA. Disponível em:** <https://g1.globo.com/ap/amapa/noticia/estudante-do-amapa-e-selecionado-para-programa-de-lideres-nos-eua.ghtml>. Acesso em: 14 ago. 2017.

BARG, Daniela. NUTRIÇÃO – TERRA. **Café da manhã:** saiba os melhores alimentos para essa refeição. Disponível em**:** <https://www.terra.com.br/vida-e-estilo/saude/nutricao/cafe-da-manha-saiba-os-melhores-alimentos-para-essa>. Acesso em: 26 out. 2017.

BERNARDO, André. BBC BRASIL. **De notas baixas a depressão na vida adulta, as marcas do bullying na vida de agredidos e agressores.** Disponível em:<https://g1.globo.com/educacao/noticia/de-notas-baixas-a-depressao-na-vida-adulta-as-marcas-do-bullying-na-vida-de-agredidos-e-agressores.ghtml>. Acesso em: 25 out. 2017.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Lei número 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996.

______. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ensino Médio, Parte III - Bases Legais. Brasília: MEC, 1998.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries):** Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CABRAL. Otávio. ECONOMIA – VEJA ONLINE. **Ranking dos estados aponta o destino dos investimentos.** Disponível em:<http://veja.abril.com.br/economia/ranking-dos-estados-aponta-o-destino-dos-investimentos>. Acesso em: 02 dez. 2012.

CIÊNCIAS – RFI. **Ebola já matou mais de dez mil pessoas no oeste africano.** Disponível em: <http://br.rfi.fr/ciencias/20150312-ebola-ja-matou-mais-de-dez-mil-pessoas-no-oeste-africano>. Acesso em: 10 out. 2017.

CIÊNCIAS E SAÚDE - UOL NOTÍCIAS. **Esperma humano pode hospedar até 27 vírus diferentes.** Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/saude/ultimas-noticias/redacao/2017/09/21/cuidado-semen-pode-hospedar-ate-27-virus-diferentes.htm>. Acesso em: 26 set. 2017.

DA REDAÇÃO – VEJA ONLINE. **Com 2 brasileiros, Fifa indica candidatos a melhor do mundo.** Disponível em: < https://veja.abril.com.br/placar/com-2-brasileiros-fifa-indica-candidatos-a-melhor-do-mundo/ >. Acesso em: 17 ago. 2017.

DA REDAÇÃO – VEJA ONLINE. **Superbactéria infecta pacientes de hospital de Los Angeles.** Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/ciencia/superbacteria-infecta-paciente>. Acesso em: 10 out. 2017.

FUTEBOL – CARTA CAPITAL. **Libertadores 2017 / análise oitavas de final:** Santos e Botafogo elevam futebol brasileiro. Disponível em: <http://chuteirafc.cartacapital.com.br/libertadores-2017-analise-oitavas-de-final-palmeiras-e-atletico-fracassam-gremio-avanca/>. Acesso em: 14 ago. 2017.

G1 NOTÍCIAS. **Carreira de professor atrai 14% dos jovens entre 15 e 19 anos.** Disponível em <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2017/10/carreira-de-professor-atrai-14-dos-jovens-entre-15-e-19-anos.html>. Acesso em: 27 out. 2017.

JORNAL DA USP. **Arroz parboilizado preserva mais minerais que o branco polido.** Disponível em: < http://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-da-saude/arroz-parboilizado-preserva-mais-minerais-que-o-branco-polido/>. Acesso em: 29 out. 2017.

MORAIS, Raquel. CCNEWS. **CNBB condena portaria que altera combate ao trabalho escravo.** Disponível em: < http://jornalcorreiocapixaba.com.br/pt-BR/publicacoes/cnbb-condena-portaria-que-altera-combate-ao-trabalho-escravo/ >. Acesso em: 26 out. 2017.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento; LIMA, Antonio Carlos Pedroso. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: Editora USP, 2002.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NOTÍCIAS – O GLOBO. **MAPA DOS ACIDENTES NAS RODOVIAS FEDERAIS.** Disponível em: **<**http://infograficos.oglobo.globo.com/brasil/mapa-dos-acidentes-das-rodovias-federais.html>**.** Acesso em: 23 set. 2017.

NOTÍCIAS - GAZETAONLINE. **90% dos acidentes de trânsito podem ser evitados, aponta estudo.** Disponível em: <http://www.gazetaonline.com.br/noticias/cidades/2017/05/90-dos-acidentes-de-transito-podem-ser-evitados-aponta-estudo-1014050793.html>. Acesso em: 23 set. 2017.

Observatório Nacional de Segurança Viária. **90% DOS ACIDENTES SÃO CAUSADOS POR FALHAS HUMANAS, ALERTA OBSERVATÓRIO.** Disponível em: <https://www.onsv.org.br/90-dos-acidentes-sao-causados-por-falhas-humanas-alerta-observatorio/>. Acesso em: 23 set. 2017.

PINHEIRO, PEDRO. **Perigos do consumo excessivo de sal.** Disponível em: <https://www.mdsaude.com/2008/09/sal.html>. Acesso em: 7 jul. 2017.

ROSA, Guilherme. CIÊNCIA – VEJA ONLINE. **Chegou a era dos transumanos.** Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/ciencia/chegou-a-era-dos-transhumanos>. Acesso em: 08 mar. 2017.

SANTANA, Jailson Santos. **O ENSINO DOS MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS NO ENSINO MÉDIO.** 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2016.

SANTOS, José Plínio; MELLO, Margarida; MURACI, Idali. **INTRODUÇÃO A ANÁLISE COMBINATÓRIA.** 4. ed. Rio de Janeiro: Editora CIÊNCIAS MODERNA, 2007.

SAÚDE – VEJA ONLINE. **Aids:** anticorpo é capaz de atacar até 99% do vírus HIV.Disponível em: <http://veja.abril.com.br/saude/aids-anticorpo-e-capaz-de-atacar-ate-99-do-virus-hiv/>. Acesso em: 22 set. 2017.

SERGIPE. SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO. REDE ESTADUAL DE ENSINO DE SERGIPE. **Referencial Curricular.** Aracaju, 2011.

SILVEIRA, Daniel. ECONOMIA – G1 NOTÍCIAS. **Mercado tem 26,3 milhões de trabalhadores subutilizados, diz IBGE.** Disponível em:<https://g1.globo.com/economia/noticia/taxa-de-desocupacao-cai-em-11-estados-no-2-trimestre-diz-ibge.ghtml>. Acesso em 17 ago. 2017.

SILVER, Katie. CIÊNCIAS E SAÚDE - UOL NOTÍCIAS. **Poluição mata mais de 100 mil pessoas por ano no Brasil, diz relatório.** Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/meio-ambiente/ultimas-noticias/bbc/2017/10/20/poluicao-mata-mais-de-100-mil-pessoas-por-ano-no-brasil-diz-relatorio.htm>. Acesso em: 20 out. 2017.

TREVIZAN, Karina. G1 NOTÍCIAS. **47% das mulheres sentem que foram rejeitadas para emprego por serem mães ou quererem engravidar.** Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/concursos-e-emprego/noticia/47-das-mulheres-sentem-que-foram-rejeitadas-para-emprego-por-serem-maes-ou-quererem-engravidar.ghtml>, Acesso em: 27 out. 2017.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: **VIII ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Rio Claro: UNESP, jul. 2004. p. 1-13. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2017.