



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Uma construção alternativa para o funtor de Happel

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maria Elismara de Sousa Lima

Orientador: Danilo Dias da Silva

São Cristóvão, 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

L732c Lima, Maria Elismara de Sousa
Uma construção alternativa para o funtor de Happel / Maria Elismara de Sousa Lima ; orientador Danilo Dias da Silva. - São Cristóvão, 2018.
111 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Álgebra homológica 3. Localização de categorias. 4. Categorias trianguladas. I. Silva, Danilo Dias da orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Uma demonstração alternativa para o funtor de Happel

por

Maria Elismara de Sousa Lima

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Danilo Dias da Silva - UFS
Orientador

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho - USP
Segundo Examinador

São Cristóvão, 23 de fevereiro de 2018

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado em toda minha carreira acadêmica. Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Danilo Dias da Silva pela sua colaboração na realização deste trabalho. Agradeço também aos outros professores da graduação e pós-graduação que ajudaram na minha formação.

Agradeço aos meus familiares, colegas e a meu namorado, Danilo de Rezende Santiago, pelo apoio dado a mim durante toda a minha formação.

Por fim, agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe e a CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

1	Preliminares	10
1.1	Categorias e funtores	10
1.2	Localização de categorias	18
1.2.1	Localização de categorias aditivas	23
1.3	Ideais e categorias quocientes	26
1.4	Álgebras repetitivas	27
2	Categorias Trianguladas	32
2.1	Algumas propriedades de categorias trianguladas	38
2.2	Monomorfismos e epimorfismos em categorias trianguladas	45
2.3	Localização de categorias trianguladas	46
2.4	Categorias abelianas e trianguladas	47
2.5	Quociente de categorias trianguladas	49
3	Categorias Derivadas	53
3.1	Categoria homotópica de complexos é triangulada	60
3.2	Categorias derivadas	63
3.3	Categoria geradora	72
4	A Categoria Estável de $\text{mod}\hat{A}$ é Triangulada	75
4.1	A categoria estável de uma categoria abeliana	76
4.2	Uma triangulação para a categoria estável de uma categoria de Frobenius	80
5	Uma Construção Alternativa para o Funtor de Happel	94
5.1	Resultados preliminares	94
5.2	Demonstração do teorema principal	108

Resumo

O objetivo dessa dissertação é trazer uma simplificação da demonstração do seguinte resultado obtido primeiramente por Happel [3]: Se A é uma K -álgebra de dimensão finita, então existe um funtor pleno, fiel e triangulado $H : D^b(\text{mod}A) \rightarrow \underline{\text{mod}}\hat{A}$, onde \hat{A} é a álgebra repetitiva obtida de A , que é também denso se A é de dimensão global finita. Iniciamos com uma apresentação sucinta da linguagem categórica, abordando de maneira geral sobre localização de categorias, categorias trianguladas e suas localizações, e finalmente categorias derivadas, que são categorias localizadas e trianguladas. Também introduzimos a categoria estável de módulos da álgebra repetitiva de A . No último capítulo, demonstramos o resultado principal com o auxílio de um resultado encontrado em [8], além dos conceitos citados anteriormente.

Palavras Chave: localização de categorias, categorias trianguladas, categoria derivada.

Abstract

The aim of this dissertation is to present a simplification of the proof of the following result obtained first by Happel in [3]: If A is a finite-dimensional algebra over a field algebraically closed K , then there is a triangulated, full and faithful functor of triangulated categories $H : D^b(\text{mod}A) \rightarrow \underline{\text{mod}}\hat{A}$, where \hat{A} is the repetitive algebra obtained from A , which is also dense if A is of finite global dimension. We begin with a succinct presentation of the categorical language, approaching in general terms on the localization of categories, triangulated categories and their localizations, and finally derived categories, which are localized and triangulated categories. We also introduce the stable category of modules of a repetitive algebra \hat{A} . In the last chapter, we demonstrate the main result with the help of a result found in [8], in addition to the previously mentioned concepts.

Keywords: localization of categories, triangulated categories, derived category.

Introdução

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k , que será sempre um corpo algebricamente fechado. Foi provado em [3] que existe uma imersão fiel e plena da categoria derivada limitada $D^b(\text{mod}A)$ na categoria estável $\underline{\text{mod}}\hat{A}$ dos módulos de dimensão finita sobre a álgebra repetitiva \hat{A} . Esta imersão é uma equivalência triangulada se, e somente se, A tem dimensão global finita.

Tal demonstração era considerada um tanto difícil e técnica, então foi observado que um resultado de [8] poderia ser usado para fornecer uma prova mais simples, a qual foi feita em [2].

A ideia dessa dissertação é de detalhar as demonstrações do artigo [2]. Para tanto, fizemos uma introdução dos conceitos que são abordados nesse artigo buscando em várias referências, como [7], [3] e [5]. Desse modo, esse texto pode servir como referência em português para leitores que busquem estudar categorias derivadas de $\text{mod}A$.

O texto está estruturado da seguinte maneira:

Destinamos o primeiro capítulo para conceitos básicos e algumas consequências necessárias para o entendimento nos capítulos posteriores. Estudaremos a teoria de localização de categorias, que é importante para a compreensão do que significa uma categoria derivada.

No segundo capítulo abordaremos sobre categorias trianguladas, que são categorias que contam com uma estrutura adicional chamada de triangulação que é formada por diagramas chamados de triângulos da forma:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

Estudaremos também localização de categorias trianguladas e veremos que a classe de

localização tem que ser compatível com a triangulação. Finalizamos com a abordagem de quocientes de categorias trianguladas, que de forma resumida podemos dizer que se trata de uma localização de categorias. Apresentaremos, em todos os quesitos, alguns resultados relevantes, exibindo as demonstrações ou citando as referências das provas.

No terceiro capítulo estudaremos categorias derivadas de uma categoria aditiva \mathcal{A} cujos objetos são complexos formados por objetos de \mathcal{A} . Os morfismos da categoria derivada de \mathcal{A} são obtidos através da localização da categoria de complexos $K(\mathcal{A})$ (com morfismos quocientes pelos homotópicos a zero) pelos quasi-isomorfismos $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ em $C(\mathcal{A})$ para os quais $H^p(f) : H^p(X^\bullet) \rightarrow H^p(Y^\bullet)$ é isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$.

No quarto capítulo abordaremos sobre a categoria estável de $\text{mod}\hat{A}$ onde \hat{A} é a álgebra repetitiva obtida de uma K -álgebra de dimensão finita A . Sabemos que \hat{A} é uma álgebra de Frobenius e que $\text{mod}\hat{A}$ é uma categoria de Frobenius. Definiremos então uma triangulação para a categoria estável $\underline{\text{mod}}\hat{A}$

No último capítulo veremos o resultado principal deste texto. Provaremos que dada uma k -álgebra de dimensão finita A e de dimensão global finita, a categoria derivada limitada $D^b(\text{mod}A)$ é equivalente a categoria estável da categoria de Frobenius $\text{mod}\hat{A}$. Entendemos por dimensão global de uma álgebra o supremo das dimensões projetivas dos módulos em $\text{mod}A$. O seguinte resultado

Teorema 0.0.1. *Se Λ é uma álgebra de Frobenius, então existe uma equivalência $F : \underline{\text{mod}}\Lambda \rightarrow \frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$ de categorias trianguladas.*

foi primordial para a uma simplificação da demonstração até então considerada técnica em [3].

Capítulo 1

Preliminares

Nessa dissertação assumimos que o leitor conhece os fundamentos base da teoria de anéis e módulos não comutativos, álgebras de dimensão finita sobre um corpo, álgebra homológica que podem ser encontrados em [9] e [5].

1.1 Categorias e funtores

Definição 1.1.1. *Uma categoria é uma tripla $\mathcal{C} = (\text{Obj}(\mathcal{C}), \text{Hom}(\mathcal{C}), \circ)$, onde $\text{Obj}(\mathcal{C})$ é chamada **classe de objetos** de \mathcal{C} , $\text{Hom}(\mathcal{C})$ é chamada **classe de morfismos** de \mathcal{C} , e \circ é uma operação binária parcial sobre os morfismos em \mathcal{C} satisfazendo as seguintes condições:*

- (a) *Para cada par de objetos X, Y de \mathcal{C} associamos um conjunto de morfismos, denotado por $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, cujos elementos são chamados **morfismos** (de \mathcal{C}) de X para Y , tal que se $(X, Y) \neq (Z, U)$, então $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U) = \emptyset$;*
- (b) *Para cada tripla de objetos X, Y e Z de \mathcal{C} a operação*

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

*é chamada **composição de morfismos** e tem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U)$, então $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$;*

(ii) Para todo objeto X de \mathcal{C} , existe um morfismo

$$1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

chamado **morfismo identidade** em X e tal que se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, então $f \circ 1_X = f$ e $1_X \circ g = g$.

Denotaremos por $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$ ou simplesmente $X \in \mathcal{C}$ para nos referirmos a um objeto de uma categoria \mathcal{C} .

Definição 1.1.2. Seja \mathcal{C} uma categoria. Dizemos que uma categoria \mathcal{C}' é uma **subcategoria** de \mathcal{C} quando são satisfeitas as seguintes condições:

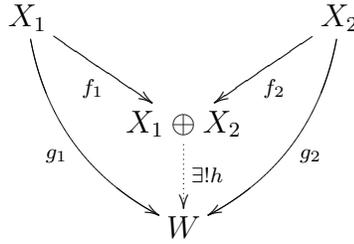
- (a) $\text{Obj}(\mathcal{C}') \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$;
- (b) Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, tem-se $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
- (c) A composição de morfismos em \mathcal{C}' é igual a composição em \mathcal{C} ;
- (d) Para cada objeto $X \in \mathcal{C}'$, o morfismo identidade 1_X em \mathcal{C}' é o mesmo que em \mathcal{C} .

Dizemos que uma subcategoria \mathcal{C}' da categoria \mathcal{C} é uma **subcategoria plena** quando, para todo X e Y objetos em \mathcal{C}' tem-se $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Sejam $X, Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$. Um morfismo $h : X \rightarrow X$ é chamado **endomorfismo** de X . Um morfismo $\mu : X \rightarrow Y$ é chamado **monomorfismo** se para cada objeto $Z \in \text{Obj } \mathcal{C}$ e cada par de morfismos $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ tal que $\mu \circ f = \mu \circ g$, temos $f = g$. Um morfismo $\nu : X \rightarrow Y$ é chamado **epimorfismo** se para cada objeto $Z \in \text{Obj } \mathcal{C}$ e cada par de morfismos $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ tal que $f \circ \nu = g \circ \nu$, temos $f = g$. Um morfismo $\eta : X \rightarrow Y$ é chamado **isomorfismo** se existe um morfismo $\nu : Y \rightarrow X$ tal que $\eta \circ \nu = 1_Y$ e $\nu \circ \eta = 1_X$. Neste caso, X e Y são ditos isomorfos, e representamos com a notação $X \cong Y$.

Dizemos que uma categoria \mathcal{C} possui soma direta quando dado dois objetos X_1 e X_2 quaisquer existe um objeto em \mathcal{C} representado por $X_1 \oplus X_2$ e morfismos $f_1 : X_1 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ e $f_2 : X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ para os quais dado um objeto W e morfismos $g_1 : X_1 \rightarrow W$ e $g_2 : X_2 \rightarrow W$ existe um único morfismo $h : X_1 \oplus X_2 \rightarrow W$ tal que

$$g_i = h \circ f_i, \quad \forall i = 1, 2.$$



Definição 1.1.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Dizemos que \mathcal{C} é uma **categoria aditiva** quando são satisfeitas as seguintes condições:*

- (a) *Para cada conjunto finito de objetos X_1, X_2, \dots, X_n existe uma soma direta $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ em \mathcal{C} ;*
- (b) *Para cada par $X, Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$ o conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tem estrutura de grupo abeliano;*
- (c) *A composição de morfismos em \mathcal{C} é bilinear;*
- (d) *Existe um objeto $0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, chamado objeto zero de \mathcal{C} , tal que o morfismo identidade 1_0 é o elemento zero do grupo abeliano $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$.*

Para uma categoria aditiva \mathcal{C} definimos a **categoria oposta** \mathcal{C}^{op} de \mathcal{C} como a categoria aditiva cujos objetos são os mesmos de \mathcal{C} e $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ para todos X e Y em $\text{Obj } \mathcal{C}$. A adição em $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ é a mesma de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, e a composição \circ' em $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}$ é dada por $g \circ' f = f \circ g$, onde \circ é a composição em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$. Observe que $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

Sejam \mathcal{C} uma categoria e \mathcal{C}' uma subcategoria de \mathcal{C} .

Dizemos que \mathcal{C} é uma **categoria abeliana** quando é uma categoria aditiva, e cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} admite um kernel $u : \text{Ker } f \rightarrow X$ e um cokernel $p : Y \rightarrow \text{Coker } f$ de f e o morfismo induzido $\bar{f} : \text{Coker } u \rightarrow \text{Ker } p$ é um isomorfismo, ou seja, vale o primeiro teorema do isomorfismo.

Uma sequência, infinita ou finita, em \mathcal{C} ,

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

categoria abeliana, é dita **exata** se $\text{Ker } f_{n-1} = \text{Im } f_n$, para todos n . Qualquer sequência da forma $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ é chamada de **sequência exata curta**. Dizemos que uma sequência exata curta **cinde** se existe um morfismo

$h : Y \rightarrow X$ (ou $h' : Z \rightarrow Y$) tal que $h \circ f = 1_X$ (ou $g \circ h' = 1_Z$, respectivamente). Nesse caso o morfismo f é chamado de **seção** e o morfismo g é chamado de **retração**. Se a sequência $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ é exata que cinde, então $Y \cong X \oplus Z$, ou seja, X e Z são isomorfos a somandos diretos de Y .

Dizemos que \mathcal{C}' é **fechada para soma direta** quando para todo X e Y objetos de \mathcal{C}' temos que $X \oplus Y$ é um objeto de \mathcal{C}' . Dizemos que \mathcal{C}' é **fechado por somandos diretos** quando para todo X objeto de \mathcal{C}' , com $X = Y \oplus Z$, tem-se que Y e Z são objetos de \mathcal{C}' . Dizemos que \mathcal{C}' é **fechada para isomorfismos** quando para todo objeto Y de \mathcal{C} tal que existe X objeto de \mathcal{C}' isomorfo a Y temos que Y é um objeto de \mathcal{C}' . Dizemos que \mathcal{C}' é **fechada por extensões** se para toda sequência exata curta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ em \mathcal{C} com $L, N \in \mathcal{C}'$ tem-se $M \in \text{Obj } \mathcal{C}'$.

Agora iremos definir alguns conceitos necessários para a demonstração do resultado (1.1.5) que será usado frequentemente neste texto.

Definição 1.1.4. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' duas categorias. Um funtor **covariante** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma regra que associa*

- (a) a cada objeto X em \mathcal{C} , um objeto $F(X) \in \text{Obj } \mathcal{C}'$;
- (b) a cada morfismo $h : X \longrightarrow Y$ em \mathcal{C} , um morfismo $F(h) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ em \mathcal{C}' tal que as seguintes condições são satisfeitas:
 - (i) $F(1_X) = 1_{F(X)}$, para todo objeto X em \mathcal{C} ;
 - (ii) Para cada par de morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ em \mathcal{C} , temos $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Um funtor **contravariante** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma regra que associa

- (a') a cada objeto X em \mathcal{C} , um objeto $F(X) \in \text{Obj } \mathcal{C}'$;
- (b') a cada morfismo $h : X \longrightarrow Y$ em \mathcal{C} , um morfismo $F(h) : F(Y) \longrightarrow F(X)$ em \mathcal{C}' tal que as seguintes condições são satisfeitas:
 - (i') $F(1_X) = 1_{F(Y)}$, para todo objeto X em \mathcal{C} ; e
 - (ii') Para cada par de morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ em \mathcal{C} , temos $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Sejam $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ dois funtores. Um **morfismo functorial**, ou uma **transformação natural de funtores**, $\Psi : F \rightarrow F'$ é uma família $\Psi = \{\Psi_X\}_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$ de morfismos $\Psi_X : F(X) \rightarrow F'(X)$ tal que, para qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Psi_X} & F'(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow F'(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\Psi_Y} & F'(Y) \end{array}$$

é comutativo em \mathcal{C}' . Se para cada $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$ o morfismo $\Psi_X : F(X) \rightarrow F'(X)$ é um isomorfismo em \mathcal{C}' , dizemos que Ψ é um **isomorfismo functorial** ou uma **equivalência natural** de funtores.

Podemos visualizar um morfismo de funtores pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} & F' & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \Psi \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{C}' \\ & F & \end{array}$$

Morfismos de funtores podem ser compostos **horizontalmente** e **verticalmente**, ou seja, consideremos três categorias $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ e funtores $F_1, F_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ e $G_1, G_2 : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$. Se $\theta : F_1 \rightarrow F_2$ e $\lambda : G_1 \rightarrow G_2$ são morfismo de funtores, o morfismo de funtores $\lambda \circ \theta : G_1 \circ F_1 \rightarrow G_2 \circ F_2$ é naturalmente definido. Esquemáticamente,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{F_2} \end{array} & \mathcal{C}' & \begin{array}{c} \xrightarrow{G_1} \\ \Downarrow \lambda \\ \xrightarrow{G_2} \end{array} & \mathcal{C}'' \rightsquigarrow \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{G_1 \circ F_1} \\ \Downarrow \lambda \circ \theta \\ \xrightarrow{G_2 \circ F_2} \end{array} & \mathcal{C}'' \end{array}$$

Por outro lado, consideremos três funtores $F_1, F_2, F_3 : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ e morfismos de funtores $\theta : F_1 \rightarrow F_2$ e $\lambda : F_2 \rightarrow F_3$. O morfismo de funtores $\theta \circ \lambda : F_1 \rightarrow F_3$ é definido naturalmente, ou seja, $(\theta \circ \lambda)_X = \theta_X \circ \lambda_X$. Esquemáticamente,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \Downarrow \lambda \\ \xrightarrow{F_2} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} & \mathcal{C}'' \rightsquigarrow \mathcal{C}' & \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \Downarrow \theta \circ \lambda \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} & \mathcal{C}'' \end{array}$$

Um funtor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é chamado uma **equivalência de categorias** se existe um funtor $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos functoriais $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow FT$ e $\Phi : 1_{\mathcal{C}'} \rightarrow TF$, onde $1_{\mathcal{C}}$ e $1_{\mathcal{C}'}$ são os funtores identidades sobre \mathcal{C} e \mathcal{C}' , respectivamente. Desse modo,

F é chamado de **quasi-inverso** de T . Se existir tal equivalência, dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{C}' são categorias equivalentes e podemos denotar por $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$.

Considere o funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$. Dizemos que ele é **denso** se para qualquer objeto Y de \mathcal{C}' , existe um objeto X de \mathcal{C} e um isomorfismo $T(X) \cong Y$. Se para todo $X, Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$ o mapa

$$T_{XY} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(X), T(Y))$$

dado por $f \mapsto T(f)$ for sobrejetivo então T é dito **pleno**, e se for injetivo dizemos que T é **fiel**.

Teorema 1.1.5. *Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, T é pleno, fiel, e denso.*

Demonstração. Assuma que T é pleno, fiel, e denso. Vamos definir um funtor quasi-inverso $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ de T da seguinte forma: da densidade de T , dado $X' \in \text{Obj } \mathcal{C}'$, podemos fixar um objeto X de \mathcal{C} e um isomorfismo $\Phi_{X'} : X' \longrightarrow T(X)$ em \mathcal{C}' . Desse modo, façamos $F(X') = X$. Uma vez que T é pleno, dado um morfismo $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$ podemos escolher $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ fazendo o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\Phi_{X'}} & T(X) \\ f' \downarrow & & \downarrow T(f) \\ Y' & \xrightarrow{\Phi_{Y'}} & T(Y) \end{array}$$

comutativo. Assim, faremos $F(f') = f$. Para verificarmos que F define um funtor covariante, considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\Phi_{X'}} & T(X) \\ f' \downarrow & & \downarrow T(f) \\ Y' & \xrightarrow{\Phi_{Y'}} & T(Y) \\ g' \downarrow & & \downarrow T(g) \\ Z' & \xrightarrow{\Phi_{Z'}} & T(Z) \end{array}$$

onde os quadrados comutam e, por tanto o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X' & \xrightarrow{\Phi_{X'}} & T(X) \\
g' \circ f' \downarrow & & \downarrow T(g \circ f) \\
Z' & \xrightarrow{\Phi_{Z'}} & T(Z)
\end{array}$$

também comuta. Do diagrama acima e a forma como definimos F , temos que

$$F(g' \circ f') = g \circ f = F(g') \circ F(f'),$$

isto é, F preserva composição. De forma análoga podemos ver que $F(1_{X'}) = 1_X$. Com efeito, dado o morfismo $1_{X'}$ identidade sobre X' , podemos escolher $f : X \rightarrow X$ de forma que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X' & \xrightarrow{\Phi_{X'}} & T(X) \\
f \downarrow & & \downarrow T(f) \\
X' & \xrightarrow{\Phi_{X'}} & T(X)
\end{array}$$

comute. Isso nos dá que $T(f) = 1_{T(X)}$. Como T é functor fiel, segue que $f = 1_X$, portanto $F(1_{X'}) = 1_X$.

Além disso, para qualquer $X' \in \text{Obj } \mathcal{C}'$, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X' & \xrightarrow{\Phi_{X'}} & TF(X') \\
f' \downarrow & & \downarrow T(f) \\
Y' & \xrightarrow{\Phi_{Y'}} & TF(Y')
\end{array}$$

é comutativo. Isso nos dá que a família $\{\Phi_{X'}\}_{X' \in \text{Obj } \mathcal{C}'}$ de isomorfismos define um isomorfismo functorial $\Phi : 1_{\mathcal{C}'} \rightarrow FT$.

Agora, vamos definir um isomorfismo $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow FT$, aproveitando a construção anterior, da seguinte forma: para qualquer $Z \in \text{Obj } \mathcal{C}$, façamos $X'_Z = T(Z)$. Então $\Phi_{T(Z)} = \Phi_{X'_Z}$ e da construção acima temos

$$T(Z) = X'_Z \xrightarrow{\Phi_{X'_Z}} TF(X'_Z) = T(FT(Z))$$

Uma vez que T é pleno e fiel, existe um único isomorfismo $\Psi_Z : Z \rightarrow TF(Z)$ tal que $T(\Psi_Z) = \Phi_{T(Z)} = \Phi_{X'_Z}$.

Iremos mostrar que $\{\Psi_Z\}_{Z \in \text{Obj } \mathcal{C}}$ define o nosso isomorfismo functorial. De fato,

seja $g : Z \rightarrow V$ um morfismo arbitrário em \mathcal{C} . Precisamos mostrar que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Psi_Z} & FT(Z) \\ g \downarrow & & \downarrow FT(g) \\ V & \xrightarrow{\Psi_V} & FT(V) \end{array}$$

é comutativo. Visto que $\Phi : 1_{\mathcal{C}'} \rightarrow FT$ é um isomorfismo funtorial, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(Z) & \xrightarrow{\Psi_{T(Z)}} & TF(T(Z)) \\ T(g) \downarrow & & \downarrow TF(T(g)) \\ T(V) & \xrightarrow{\Psi_{T(V)}} & TF(T(V)) \end{array}$$

Das escolhas de Ψ_Z e Ψ_V temos que $\Phi_{T(Z)} = T(\Psi_Z)$ e $\Phi_{T(V)} = T(\Psi_V)$. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \Phi_{T(V)} \circ T(g) &= TF(T(g)) \circ \Psi_{T(V)} \Rightarrow \\ T(\Psi_V) \circ T(g) &= TF(T(g)) \circ T(\Psi_Z) \Rightarrow \\ T(\Psi_V \circ g) &= T(FT(g) \circ \Psi_Z) \Rightarrow \\ \Psi_V \circ g &= FT(g) \circ \Psi_Z \end{aligned}$$

A última implicação segue do fato de T ser fiel. Portanto, o morfismo funtorial $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow FT$ é um isomorfismo funtorial.

Reciprocamente, assumamos que $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é uma equivalência de categorias e que $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ é um quasi-inverso de T . Sejam $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow FT$ e $\Phi : 1_{\mathcal{C}'} \rightarrow TF$ isomorfismos funtoriais. Então, dado $X' \in \text{Obj } \mathcal{C}'$, existe um isomorfismo $X' \cong TF(X')$, temos que T é denso. Para mostrar que T é fiel, considere $f' : X' \rightarrow Y'$ um morfismo qualquer em \mathcal{C}' . Do isomorfismo de Φ temos que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\Phi_{X'}} & TF(X') \\ f' \downarrow & & \downarrow T(f) \\ Y' & \xrightarrow{\Phi_{Y'}} & TF(Y') \end{array}$$

é comutativo, onde $f = F(f')$. Sejam $f, g \in \text{Hom}(X', Y')$ e suponhamos que $F_{X'Y'}(f) = F_{X'Y'}(g)$. Isso implica que $TF_{X'Y'}(f) = TF_{X'Y'}(g)$, isto é, $f = g$. Logo F é fiel.

Similarmente, dado qualquer morfismo $h : U \rightarrow V$ em \mathcal{C} , temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Psi_U} & FT(U) \\ h \downarrow & & \downarrow FT(h) \\ V & \xrightarrow{\Psi_V} & FT(V) \end{array}$$

é comutativo, implicando que T é um funtor fiel. Resta mostrar que T é pleno. Para tanto, seja $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(U), T(V))$, onde $U, V \in \text{Obj } \mathcal{C}$ e façamos $h = \psi_V^{-1} \circ F(f') \circ \psi_U \in \text{Hom}(U, V)$. Da comutatividade do diagrama anterior temos que

$$F(f') = \psi_V \circ \psi_V^{-1} \circ F(f') \circ \psi_U \circ \psi_U = \psi_V \circ h \circ \psi_U^{-1} = FT(h).$$

Como F é fiel, segue que $f' = T(h)$. □

Quando acharmos conveniente iremos denotar a composição $g \circ f$ simplesmente por gf .

1.2 Localização de categorias

Nesta seção continuamos mencionando alguns resultados preliminares que vão nos dar subsídios para esta dissertação. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar [7] e [5].

Sejam \mathcal{A} uma categoria e S uma classe arbitrária de morfismos em \mathcal{A} .

Definição 1.2.1. Diremos que S é uma **classe de localização** se satisfaz as seguintes propriedades:

(LC1) Para qualquer objeto M em \mathcal{A} , o morfismo identidade 1_M pertence a S .

(LC2) Se s, t são morfismos em S , então $s \circ t \in S$.

(LC3a) Para qualquer par $f \in \text{Hom}(M, N)$ e $s \in \text{Hom}(L, N)$ de S , existem $g \in \text{Hom}(K, L)$ e $t \in \text{Hom}(K, M)$ de S tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & L \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

é comutativo.

(LC3b) Para qualquer par $f \in \text{Hom}(N, M)$ e $s \in \text{Hom}(N, L)$ de S , existem $g \in \text{Hom}(L, K)$ e $t \in \text{Hom}(M, K)$ de S tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xleftarrow{\dots\dots g} & L \\ \uparrow t & & \uparrow s \\ M & \xleftarrow{f} & N \end{array}$$

é comutativo.

(LC4) Sejam $f, g : M \rightarrow N$ dois morfismos. Então existe um $s \in S$ tal que $s \circ f = s \circ g$, e somente se, existe um $t \in S$ tal que $f \circ t = g \circ t$.

Estabelecemos o seguinte resultado

Teorema 1.2.2. Sejam \mathcal{A} uma categoria e S uma classe de localização em \mathcal{A} . Então existem uma categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ e um funtor $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ tais que

- (i) $Q(s)$ é um isomorfismo para cada $s \in S$;
- (ii) Para qualquer categoria \mathcal{B} e funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $F(s)$ é um isomorfismo para qualquer $s \in S$, existe um único funtor $G : \mathcal{A}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $F = G \circ Q$, isto é, temos o seguinte diagrama comutativo de funtores:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{A}[S^{-1}] & & \end{array}$$

A categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ é única a menos de isomorfismo.

A categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ é chamada de **localização de \mathcal{A} em relação a S** .

Agora, vamos descrever os morfismos em $\mathcal{A}[S^{-1}]$.

Definição 1.2.3. Sejam \mathcal{A} uma categoria e S uma classe de localização. Um telhado à esquerda entre M e N objetos de \mathcal{A} é um diagrama

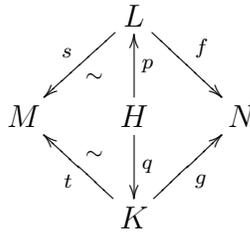
$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ M & \sim & N \end{array}$$

onde $f \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ e $s \in S$. O símbolo \sim denota que a flecha está em S .

Considere dois telhados à esquerda entre M e N



dizemos que eles são equivalentes se existe um objeto H em \mathcal{A} e morfismos $p : H \rightarrow L$ e $q : H \rightarrow K$ tais que o diagrama

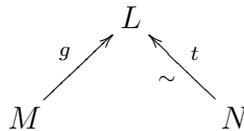


comuta e $s \circ p = t \circ q \in S$.

Com o auxílio das propriedades (LC3a) e (LC4) podemos demonstrar que

Lema 1.2.4. *A relação acima sobre telhados à esquerda é uma relação de equivalência.*

Analogamente, podemos definir telhados à direita entre M e N como um diagrama



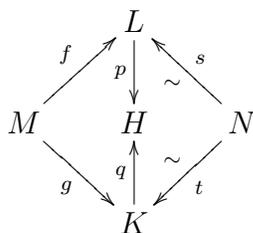
onde $t \in S$. E como nos telhados à esquerda, definimos uma relação, que também é uma relação de equivalência, da seguinte forma:

Sejam dois telhados à direita,



dizemos que eles são equivalentes se existe um objeto H em \mathcal{A} e morfismos $p : L \rightarrow$

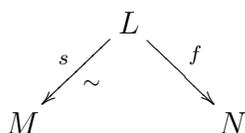
H e $q : K \rightarrow H$ tais que o diagrama



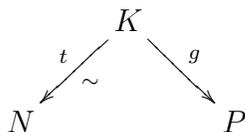
comuta e $p \circ s = q \circ t \in S$. Podemos definir uma correspondência entre classe de equivalência de telhados à esquerda entre M e N , objetos de \mathcal{A} , e classes de equivalência de telhados à direita entre M e N . Por esse motivo, daqui em diante iremos considerar apenas telhados à esquerda.

Agora, vamos definir a composição entre classes de equivalência de telhados à esquerda.

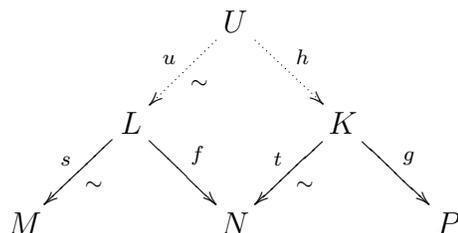
Definição 1.2.5. *Sejam*



um telhado à esquerda entre M e N , e



um telhado à esquerda entre N e P . Então, por (LC3a), existe um objeto U e morfismos $u : U \rightarrow L$ em S e $h : U \rightarrow K$ tais que



é um diagrama comutativo. Ele determina o telhado à esquerda

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \text{sou} \swarrow & & \searrow \text{goh} \\ M & \sim & P \end{array}$$

Pode-se provar que a classe de equivalência do telhado composição independe das escolhas da definição acima. Ela vai depender somente das classes de equivalência do primeiro e segundo telhado à esquerda, ver [7].

A categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ é equivalente à categoria que tem como objetos os objetos de \mathcal{A} e como morfismos as classes de equivalência de telhados à esquerda. Esquemáticamente temos que,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & & \mathcal{A}[S^{-1}] \\ \begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ M & \sim & N \end{array} & \xrightarrow{Q} & \begin{array}{ccc} & L & \\ Q(s) \swarrow & & \searrow Q(f) \\ M & \sim & N \end{array} \end{array}$$

onde podemos escrever o morfismo $\varphi : M \rightarrow N$, que está representado pela classe de telhado à esquerda em $\mathcal{A}[S^{-1}]$, por $\varphi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$. Estamos enxergando os morfismos de $\mathcal{A}[S^{-1}]$ como diagramas em \mathcal{A} .

Além disso, se $f : M \rightarrow N$ é um morfismo em \mathcal{A} então $Q(f)$ é o telhado

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ 1_M \swarrow & & \searrow f \\ M & \sim & N \end{array}$$

O próximo lema será útil para definirmos somas de morfismos em $\mathcal{A}[S^{-1}]$ vistos como telhados à esquerda.

Lema 1.2.6. *Sejam*

$$\begin{array}{ccc} & L_i & \\ s_i \swarrow & & \searrow f_i \\ M & \sim & N \end{array}$$

telhados à esquerda representando morfismos $\varphi_i : M \rightarrow N$, $1 \leq i \leq n$, em $\mathcal{A}[S^{-1}]$.

Então existe um objeto L em \mathcal{A} , $s \in S$ e morfismos $g_i : L \rightarrow N$ tais que os telhados

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow g_i \\ M & \sim & N \end{array}$$

representam φ_i para todo $1 \leq i \leq n$.

1.2.1 Localização de categorias aditivas

Nessa seção vamos assumir que \mathcal{A} é uma categoria aditiva e que S é uma classe de localização de morfismos em \mathcal{A} . Uma primeira observação é que podemos reescrever a propriedade (LC4) da definição da seguinte forma:

(LC4') Seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo. Então existe $s \in S$ tal que $s \circ f = 0$ se, e somente se, existe $t \in S$ tal que $f \circ t = 0$.

A localização $\mathcal{A}[S^{-1}]$ tem uma estrutura natural de uma categoria aditiva tal que o funtor $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ é aditivo. O próximo resultado nos dirá como somar telhados. Sejam M e N dois objetos em \mathcal{A} . Sejam φ e ψ morfismos em $\text{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N)$ então por (1.2.6), existe um objeto L em \mathcal{A} , $s \in S$ e $f, g : L \rightarrow N$ tal que representamos φ e ψ pelos telhados

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ M & \sim & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow g \\ M & \sim & N \end{array}$$

respectivamente.

Lema 1.2.7. O morfismo $M \rightarrow N$ determinado pelo telhado à esquerda

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow f+g \\ M & \sim & N \end{array}$$

depende apenas de φ e ψ , isto é, independe da escolha de L, s, f e g .

Teorema 1.2.8. Sejam \mathcal{A} uma categoria aditiva e S uma classe de localização. Existe uma categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ e um funtor aditivo $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ tais que

(i) $Q(s)$ é um isomorfismo para cada s em S ;

(ii) Para qualquer categoria aditiva \mathcal{B} e funtor aditivo $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $F(s)$ é um isomorfismo para cada s em S , existe um único funtor aditivo $G : \mathcal{A}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $F = G \circ Q$, isto é, temos o seguinte diagrama comutativo de funtores:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\ Q \downarrow & \nearrow G & \\ \mathcal{A}[S^{-1}] & & \end{array}$$

A categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ é única a menos de isomorfismo.

O seguinte lema é uma caracterização do morfismo zero na categoria localizada.

Lema 1.2.9. *Seja $\varphi : M \rightarrow N$ um morfismo em $\mathcal{A}[S^{-1}]$ representado pelo telhado à esquerda*

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ M & \sim & N \end{array}$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\varphi = 0$;

(ii) Existe $t \in S$ tal que $f \circ t = 0$;

(iii) Existe $t \in S$ tal que $t \circ s = 0$.

Demonstração. Suponha que $\varphi = 0$. Como $\varphi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$, temos que $Q(f) \circ Q(s)^{-1} = 0$ o que implica que $Q(f) = 0$. Assim, o telhado à esquerda

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ 1_L \swarrow & & \searrow f \\ L & \sim & N \end{array}$$

representa o morfismo zero em $\text{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(L, N)$. O morfismo zero entre L e N é representado pelo telhado à esquerda

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ 1_L \swarrow & & \searrow 0 \\ L & \sim & N \end{array}$$

Conseqüentemente, esses telhados à esquerda são equivalentes, isto é, existe U em \mathcal{A} e $t : U \rightarrow L$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 & 1_L & t & f & \\
 L & & U & & N \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & 1_L & t & 0 & \\
 & & L & &
 \end{array}$$

é comutativo e $t \in S$, implicando que $f \circ t = 0$. Reciprocamente, suponha que $f \circ t = 0$, assim $Q(f) \circ Q(t) = 0$. Conseqüentemente, $Q(f) = 0$ e $\varphi = Q(f) \circ Q(s)^{-1} = 0$. Pela propriedade (LC4') as condições (ii) e (iii) são equivalentes. \square

Corolário 1.2.10. *Seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo em \mathcal{A} . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $Q(f) = 0$;
- (ii) Existe $t \in S$ tal que $t \circ f = 0$;
- (iii) Existe $t \in S$ tal que $f \circ t = 0$.

Dos resultados acima temos a seguinte consequência.

Lema 1.2.11. *Seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo em \mathcal{A} . Então:*

- (i) Se f é um monomorfismo, então $Q(f)$ é um monomorfismo;
- (ii) Se f é um epimorfismo, então $Q(f)$ é um epimorfismo.

Demonstração. É suficiente demonstrar o item (i), pois uma vez que mudamos de \mathcal{A} para \mathcal{A}^{opp} , (i) e (ii) são equivalentes.

Seja $\varphi : L \rightarrow M$ um morfismo em $\mathcal{A}[S^{-1}]$ tal que $Q(f) \circ \varphi = 0$. Então, podemos representar φ pelo telhado

$$\begin{array}{ccc}
 & U & \\
 s \swarrow & & \searrow g \\
 L & & M
 \end{array}$$

e temos que $\varphi = Q(g) \circ Q(s)^{-1}$. Isso nos dá

$$0 = Q(f) \circ \varphi = Q(f) \circ Q(g) \circ Q(s)^{-1} = Q(f \circ g) \circ Q(s)^{-1}$$

e $Q(f \circ g)$. Pelo lema (1.2.11), segue-se que existe $t \in S$ tal que $f \circ g \circ t = 0$. Como f é monomorfismo, isso implica que $g \circ t = 0$. Usando, novamente, o lema (1.2.11), temos que $Q(g) = 0$. Daí, $\varphi = Q(g) \circ Q(s)^{-1} = 0$. Portanto, $Q(f)$ é monomorfismo. \square

1.3 Ideais e categorias quocientes

Nesta seção vamos definir o conceito de categoria quociente por um ideal. Não devemos confundir com o conceito de categoria triangulada quociente introduzida na seção (2.5) que é uma localização. Ficará claro para o leitor pelo contexto de qual categoria estaremos falando no presente texto.

Definição 1.3.1. *Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva e \mathcal{I} uma classe de morfismos de \mathcal{A} . Denotemos por $\mathcal{I}(M, N) = \mathcal{I} \cap \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$. Um **ideal bilateral**, ou simplesmente **ideal**, \mathcal{I} de \mathcal{A} é uma classe de morfismos tal que:*

(i) *Para cada par de objetos M e N em \mathcal{A} , $\mathcal{I}(M, N)$ é um subgrupo de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$.*

(ii) *Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$, $g \in \mathcal{I}(N, L)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, W)$, então*

$$h \circ g \circ f \in \mathcal{I}(M, W).$$

Visto isso, podemos definir a categoria quociente $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}$ entre uma categoria aditiva \mathcal{A} e um ideal \mathcal{I} de \mathcal{A} , de forma que os objetos de $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}$ são os mesmos os objetos de \mathcal{A} e para cada par de objetos M e N , o grupo abeliano

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(M, N) := \frac{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)}{\mathcal{I}(M, N)}$$

são os morfismos de M a N . Por conseguinte, podemos estabelecer o seguinte mapa

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(N, L) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(M, L)$$

$$(\bar{g}, \bar{f}) \longmapsto \overline{g \circ f}$$

que está bem definido. De fato, sejam $\bar{f} = \overline{f'} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(M, N)$ e $\bar{g} = \overline{g'} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(N, L)$, isto é, $f - f' \in \mathcal{I}(M, N)$ e $g - g' \in \mathcal{I}(N, L)$, então

$$g \circ f - g' \circ f' = g \circ f - g \circ f' + g \circ f' - g' \circ f' = g \circ (f - f') + (g - g') \circ f'$$

que pertence a $\mathcal{I}(M, L)$, ou seja, $\overline{g \circ f} = \overline{g' \circ f'}$ e, portanto o mapa acima está bem definido.

Proposição 1.3.2. *Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva e \mathcal{I} um ideal de \mathcal{A} . Então a categoria quociente $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}$ é aditiva e o funtor quociente $F : \mathcal{A} \rightarrow \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}$ é aditivo.*

O seguinte resultado nos diz que a categoria quociente satisfaz uma propriedade universal.

Teorema 1.3.3. *Seja $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor aditivo entre duas categorias aditivas e \mathcal{I} um ideal de \mathcal{A} . Se para qualquer par de objetos M e M' em \mathcal{A} , $G(f) = 0$ para todo $f \in \mathcal{I}(M, M')$, existe um único funtor aditivo $H : \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $G = H \circ F$.*

1.4 Álgebras repetitivas

Nessa seção falaremos sobre álgebras repetitivas, um dos conceitos necessários para nosso objetivo principal que é o Teorema (5.2.1). Neste trabalho k é um corpo algebricamente fechado. Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [3].

Se A é uma k -álgebra de dimensão finita **básica**, então ela possui uma decomposição $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ em módulos projetivos que não se repetem. Considere o funtor $D = Hom(-, k) : modA \rightarrow modA$, da categoria de módulos finitamente gerados nela mesma, que leva projetivos em injetivos e vice-versa, ou seja, $D(P_i) = Hom(Ae_i, k) = I_i$. O funtor D é uma dualidade, ou seja, uma equivalência de $modA$ em $modA$ contravariante. Denotemos DA por Q que é o cogeração minimal em $modA$, isto é, dado $M \in modA$, existe r tal que existe $0 \longrightarrow M \longrightarrow DA^r = Q^r$. Além disso, Q é um A -bimódulo: dados $a', a'' \in A$ e $\varphi \in Q = Hom(A, K)$ temos que para todo $a \in A$, $(a' \varphi a'')(a) = \varphi(a'' a a')$.

Dizemos que uma álgebra B , possivelmente de dimensão infinita, é uma **álgebra de Frobenius** se B é localmente limitada, isto é, existe um conjunto completo $\{e_x\}_{x \in I}$ de idempotentes primitivos ortogonais dois a dois tais que Be_x e $e_x B$ são de dimensão finita sobre k , $\forall x \in I$ e, se B -módulos projetivos indecomponíveis coincidem com os B -módulos injetivos indecomponíveis.

Agora, iremos definir a **álgebra repetitiva** de A denotada por \hat{A} . Esta álgebra é de dimensão infinita e uma álgebra de Frobenius. Sabemos que para definir uma álgebra, primeiro definimos um espaço vetorial e depois estabelecemos o produto entre vetores. Assim, como espaço vetorial temos que

$$\hat{A} = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Q \right) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (A \oplus Q)$$

Vamos denotar um elemento em \hat{A} por $(a_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, onde $a_i \in A$, $\varphi_i \in Q$ com apenas uma quantidade finita não nulos. A multiplicação entre dois elementos será dada por

$$(a_i, \varphi_i)_i \cdot (b_i, \psi_i)_i = (a_i \cdot b_i, a_{i+1} \psi_i + \varphi_i b_i)_i.$$

Assim \hat{A} é localmente limitada. Podemos considerar \hat{A} como uma álgebra de matrizes duplamente infinita, sem identidade

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \ddots & & \dots & 0 & 0 \\ \ddots & A_{i-1} & & & 0 \\ & Q_{i-1} & A_i & & \\ & & Q_i & A_{i+1} & \\ 0 & & & Q_{i+1} & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & & \ddots \end{pmatrix}$$

em que as matrizes tem uma quantidade finita de elementos não nulos e $A_i = A$ na diagonal principal, $Q_i = Q \forall i \in \mathbb{Z}$ abaixo da diagonal principal, com todas as outras entradas iguais a zero.

Os \hat{A} -módulos podem ser escritos da seguinte maneira: $M = (M_i, f'_i)_i$, onde M_i são A -módulos e $f'_i : Q \otimes_A M_i \rightarrow M_{i+1}$ tal que $(1 \otimes f'_i) f'_{i+1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Podemos representar $M \in \hat{A}$ por

$$\dots M_{-2} \sim^{f_{-2}} M_{-1} \sim^{f_{-1}} M_0 \sim^{f_0} M_1 \sim^{f_1} M_2 \dots$$

Para os exemplos a seguir utilizamos as referências [6], [9] e [10]. Segue de [10] que podemos descrever a álgebra $k\hat{Q}$ de qualquer aljava Q por uma aljava Q^{repet} com relações da seguinte forma:

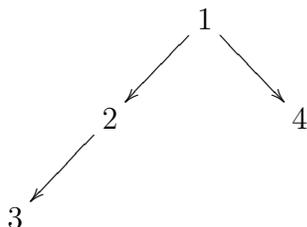
- Os vértices de Q^{repet} são denotados por $i[n]$, onde Q_0 e $n \in \mathbb{Z}$;
- Para qualquer flecha $i \rightarrow j$ de Q e qualquer inteiro n , existe uma flecha $i[n] \rightarrow j[n]$;

- Para qualquer caminho maximal $w : i \rightarrow j$ de Q e qualquer inteiro n , existe uma flecha $w^* : j[n] \rightarrow i[n + 1]$ (estas são chamadas flechas de conexão).

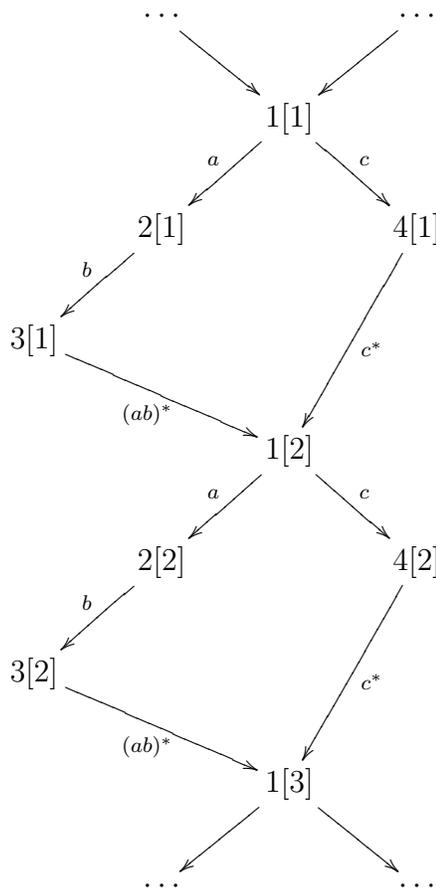
Em [10], as flechas $w^*[n]$ passariam de $j[n]$ para $i[n - 1]$, pois nossa definição para a álgebra repetitiva, que segue de [3], usa diferentes convenções do que aqueles em [10]. As relações são obtidas da seguinte maneira:

- Um caminho pleno é um caminho da forma $v[n]w^*[n]u[n + 1]$, onde $w = uv$ é um caminho maximal em Q . Então, qualquer caminho que não seja subcaminho de um caminho pleno é uma relação;
- Se $w_1 = u_1v_1x_1$ e $w_2 = u_2v_2x_2$ são dois caminhos maximais em Q , então o elemento $x_1[n]w_1^*[n]u_1[n + 1] - x_2[n]w_2^*[n]u_2[n + 1]$ é uma relação.

Exemplo 1.4.1. *Seja Q uma aljava do tipo \mathbb{A}_4 dada por*



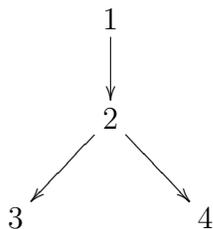
A aljava Q^{repet} é:



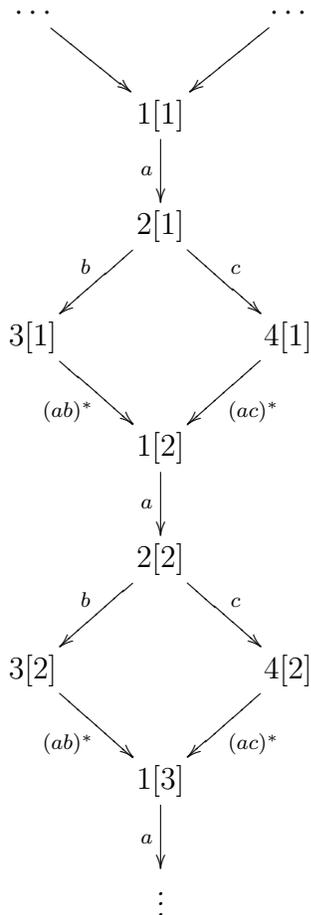
As relações são:

$$(ab)^*c = c^*a = b(ab)(ab)^* = 0, \quad (ab)(ab)^* = cc^*.$$

Exemplo 1.4.2. Seja Q a aljava do tipo \mathbb{D}_4 dada por



A aljava Q^{repet} é:



As relações são:

$$(ab)^*ac = (ac)^*ab = ac(ac)^*a = ab(ab)^*a = 0, \quad b(ab)^* = c(ac)^*.$$

Capítulo 2

Categorias Trianguladas

Definição 2.0.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria aditiva e T um automorfismo de \mathcal{C} . O automorfismo T é usualmente chamado de **functor translação**. Uma **sêxtupla** (ou um **triângulo**) (X, Y, Z, f, g, h) em \mathcal{C} é dado por objetos $X, Y, Z \in \text{Obj } \mathcal{C}$ e morfismos $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ e $h : Z \rightarrow TX$, que também podemos denotar pelo diagrama*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$$

Também representamos esquematicamente como,

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

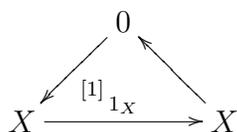
Um morfismo de sêxtuplas (ou de triângulos) é um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow & & \downarrow T(u) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

Se u, v e w forem isomorfismos, dizemos que o morfismo de triângulos é um isomorfismo. Um conjunto τ de sêxtuplas em \mathcal{C} é dito uma triangulação de \mathcal{C} , se as seguintes condições são satisfeitas. Os elementos de τ são então chamados de **triângulos distintos**.

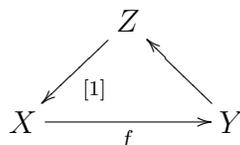
(TR1.a) Qualquer triângulo isomorfo a um triângulo distinto é triângulo distinto.

(TR1.b) Para qualquer objeto X em \mathcal{C} ,

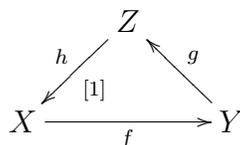


é um triângulo distinto.

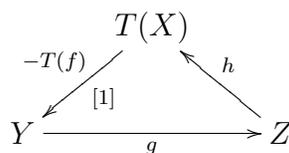
(TR1.c) Para qualquer morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em \mathcal{C} , existe um triângulo distinto



(TR2)

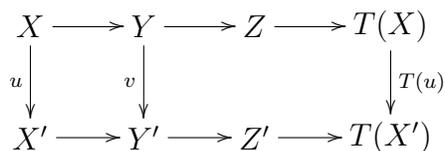


é um triângulo distinto se, e somente se,



é um triângulo distinto.

(TR3) Seja



um diagrama onde as linhas são triângulos distintos e o primeiro quadrado é

comutativo. Então existe um morfismo $w : Z \rightarrow Z'$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow & & \downarrow T(u) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

é um morfismo de triângulos.

(TR4) Sejam f, g e $h = g \circ f$ morfismos em \mathcal{C} . Então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a} & Z' & \longrightarrow & T(X) \\ 1_X \downarrow & & g \downarrow & & & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{b} & Y' & \longrightarrow & T(X) \\ f \downarrow & & 1_Z \downarrow & & & & \downarrow T(f) \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{c} & X' & \longrightarrow & T(Y) \end{array},$$

onde as linhas são triângulos distintos, pode ser completado ao diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a} & Z' & \longrightarrow & T(X) \\ 1_X \downarrow & & g \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{b} & Y' & \longrightarrow & T(X) \\ f \downarrow & & 1_Z \downarrow & & v \downarrow & & \downarrow T(f) \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{c} & X' & \longrightarrow & T(Y) \\ a \downarrow & & b \downarrow & & 1_{X'} \downarrow & & \downarrow T(a) \\ Z' & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & X' & \xrightarrow{w} & T(Z') \end{array}$$

em que as quatro linhas são triângulos distintos e as flechas verticais são morfismos de triângulos distintos.

Uma reformulação do axioma (TR4), que também é conhecido como axioma do octaedro, é dada por

(TR4') Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ dois morfismos. Se temos três triângulos

distintos

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} D \xrightarrow{f''} T(X)$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{g'} E \xrightarrow{g''} T(Y)$$

$$X \xrightarrow{h=gf} Z \xrightarrow{h'} F \xrightarrow{h''} T(X)$$

então existe um triângulo distinto

$$D \xrightarrow{j} F \xrightarrow{j'} E \xrightarrow{j''} T(D)$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f'} & D & \xrightarrow{f''} & T(X) \\
 \parallel & & \downarrow g & & \downarrow j & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{h''} & T(X) \\
 & & \downarrow g' & & \downarrow j' & & \downarrow T(f) \\
 & & E & \xlongequal{\quad} & E & \xrightarrow{g''} & T(Y) \\
 & & \downarrow g'' & & \downarrow j'' & & \\
 & & T(Y) & \xrightarrow{T(f')} & T(D) & &
 \end{array}$$

comuta.

Agora, iremos definir um funtor que vamos utilizar bastante no decorrer do texto denominado funtor **exato** (ou **triangulado**), mas antes precisamos da seguinte definição:

Definição 2.0.4. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é chamado de **graduado** se $T \circ F$ é isomorfo a $F \circ T$*

Considerando o funtor graduado $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, ele será chamado de funtor **exato** (ou **triangulado**) se F mapear triângulos distintos em triângulos distintos.

Observação 2.0.5. *Claramente, por (TR2), um triângulo distinto*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

leva a um diagrama infinito

$$\dots T^{-1}(Z) \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} \dots \quad (2.1)$$

Lema 2.0.6. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

um triângulo distinto. Então a composição de quaisquer dois morfismos consecutivos no triângulo é igual a 0, isto é,

$$g \circ f = h \circ g = T(f) \circ h = 0$$

Demonstração. Iremos mostrar que $g \circ f = 0$, os outros casos seguem de forma análoga. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{1_X} & 0 & \longrightarrow & T(X) \\ 1_X \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

Por (TR1) as linhas no diagrama são triângulos distintos. Por (TR3) existe um morfismo $u : 0 \longrightarrow Z$ que completa o diagrama acima a um diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{1_X} & 0 & \longrightarrow & T(X) \\ 1_X \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow u & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

que é um morfismo de triângulos. Visto que u deve ser o morfismo zero e da comutatividade do quadrado do meio, segue que $g \circ f = 0$. \square

Claramente, pelo lema acima, se temos um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, de uma categoria triangulada a uma categoria abeliana, e tomamos um triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

teremos

$$F(g) \circ F(f) = 0.$$

Além disso, a sequência longa de morfismos (2.1) nos dá o seguinte complexo

$$\cdots F(T^{-1}(Z)) \xrightarrow{F(T^{-1}(h))} F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \xrightarrow{F(h)} F(T(X)) \xrightarrow{F(T(f))} \cdots \quad (2.2)$$

de objetos em \mathcal{A} .

Definição 2.0.7. Dizemos que um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor **cohomológico** se para qualquer triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

temos uma sequência exata

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

em \mathcal{A} .

Desse modo, temos que o complexo anterior para um funtor cohomológico F é exato. Para finalizar vamos definir **subcategorias trianguladas**. Seja \mathcal{C} uma categoria triangulada. Seja \mathcal{D} uma subcategoria de \mathcal{C} tal que

- (TS1) O objeto zero está em \mathcal{D} ;
- (TS2) para quaisquer dois objetos X e Y em \mathcal{D} , $X \oplus Y$ está em \mathcal{D} ;
- (TS3) um objeto X em \mathcal{C} está em \mathcal{D} se e somente se $T(X)$ está em \mathcal{D} ;

(TS4) para quaisquer dois objetos X e Y em \mathcal{D} e um morfismo $f : X \rightarrow Y$ existe um objeto $Z \in \mathcal{D}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

é um triângulo distinto em \mathcal{C} .

Então, se \mathcal{C} é uma categoria aditiva, claramente todo triângulo com vértices que são objetos em \mathcal{D} define uma estrutura triangulada em \mathcal{D} , isto é, \mathcal{D} é uma categoria triangulada. Além disso o funtor inclusão é exato. Desse modo, dizemos que \mathcal{D} é uma subcategoria plena triangulada de \mathcal{C} .

2.1 Algumas propriedades de categorias trianguladas

Como o próprio tópico sugere iremos abordar algumas propriedades dessas categorias.

Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo. Dado U em \mathcal{C} , categoria triangulada, temos o morfismo induzido $\text{Hom}(U, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y)$ dado por $\text{Hom}(U, f)(\varphi) = f \circ \varphi$, e $\text{Hom}(f, U) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U)$ dado por $\text{Hom}(f, U)(\varphi) = \varphi \circ f$.

Dado um triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \swarrow h & \searrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

e um objeto U em \mathcal{C} , temos que os morfismos f , g e h induzem morfismos nos seguintes complexos infinitos de grupos abelianos a partir do complexo (2.2)

$$\cdots \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \xrightarrow{\text{Hom}(U, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(U, g)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z) \xrightarrow{\text{Hom}(U, h)} \cdots$$

e

$$\cdots \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U) \xrightarrow{\text{Hom}(g, U)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, U) \xrightarrow{\text{Hom}(f, U)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U) \quad \cdots$$

Tais complexos são sequências exatas de grupos abelianos, como afirma o seguinte resultado.

Proposição 2.1.1. *Sejam \mathcal{C} uma categoria triangulada e \mathcal{A} uma categoria de grupos abelianos. Dado U um objeto em \mathcal{C} , temos*

(i) *O funtor covariante $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, dado por $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$, é um funtor cohomológico.*

(ii) *O funtor covariante $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) : \mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{A}$, dado por $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U)$, é um funtor cohomológico.*

Lema 2.1.2. *Seja*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow & & \downarrow T(u) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

um morfismo de dois triângulos distintos. Se dois dos morfismos u , v e w são isomorfismos, o terceiro também é um isomorfismo.

Esse resultado implica que o terceiro vértice em um triângulo distinto é determinado a menos de isomorfismo. Para isto, basta tomar o morfismo de dois triângulos distintos baseados em um mesmo morfismo $f : X \rightarrow Y$. Esquemáticamente

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ 1_X \downarrow & & 1_Y \downarrow & & w \downarrow & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

Esse vértice será chamado de **cone** de f .

Lema 2.1.3. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xrightarrow{[1]} & Y \end{array}$$

um triângulo distinto em \mathcal{C} . Se dois de seus vértices são isomorfos a 0, o terceiro é isomorfo a 0.

Demonstração. Fazendo uma rotação no triângulo, podemos assumir que ele é igual a

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ 0 & \xrightarrow{[1]} & 0 \end{array}$$

ou seja, Z é o cone do isomorfismo $1_0 : 0 \rightarrow 0$. Por (TR1b), temos que o objeto 0 nos dá seguinte triângulo

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ 0 & \xrightarrow{1_0} & 0 \end{array}$$

e, portanto o cone é isomorfo a 0, visto que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(0) \\ 1_0 \downarrow & & 1_0 \downarrow & & w \downarrow & & \downarrow 1_0 \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & T(0) \end{array}$$

é um isomorfismo. □

Lema 2.1.4. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

um triângulo distinto. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é um isomorfismo;

(ii) $Z = 0$.

Demonstração. Basta considerar o morfismo do triângulo acima com o triângulo adquirido do objeto X , que (TR1b) garante, e usar o Lema (2.1.2). □

Podemos ver (TR3), de forma mais sofisticada, como nos sugere o seguinte resultado.

Proposição 2.1.5. *Sejam*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

e

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ h' \swarrow & & \searrow g' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \quad [1]$$

dois triângulos distintos e $v : Y \rightarrow Y'$. Então temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

e as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $g' \circ v \circ f = 0$;
- (ii) Existe u tal que o primeiro quadrado no diagrama é comutativo;
- (iii) Existe w tal que o segundo quadrado no diagrama é comutativo;
- (iv) Existem u e v tais que o diagrama é um morfismo de triângulo. Se essas condições são satisfeitas e $\text{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$, o morfismo u em (ii) é único.

Demonstração. Mostraremos (i) se, e só se, (ii). Temos que a seguinte sequência

$$\text{Hom}(X, Z'[-1]) \longrightarrow \text{Hom}(X, Z'[-1]) \xrightarrow{f'_*} \text{Hom}(X, X') \xrightarrow{g'_*} \text{Hom}(X, Z')$$

é exata, pela Proposição (2.1.1). Portanto, se $g'_*(v \circ f) = g' \circ v \circ f = 0$, temos que $v \circ f \in \text{Ker } g'_* = \text{Im } f'_*$, daí para algum $u : X \rightarrow X'$, $v \circ f = f'_*(u) = f' \circ u$. Logo (i) implica (ii). Além disso, temos que se $\text{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$, então $\text{Ker } f'_* = 0$ que nos dá a unicidade de u . Reciprocamente, suponha que exista u tal que o primeiro quadrado no diagrama é comutativo. Como $g' \circ f' = 0$, pelo Lema (2.0.6), temos

$$g' \circ v \circ f = g' \circ f' \circ u = 0$$

como queríamos. (i) se, e só se, (iii) é de forma análoga, e (ii) implica (iv) segue de (TR3). \square

Podemos ver “soma direta” de triângulos distintos da seguinte maneira:

Lema 2.1.6. *Sejam*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

e

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ h' \swarrow & & \nwarrow g' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \quad [1]$$

dois triângulos distintos. Então

$$\begin{array}{ccc} & Z \oplus Z' & \\ h \oplus h' \swarrow & & \nwarrow g \oplus g' \\ X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' \end{array} \quad [1]$$

é um triângulo distinto.

Corolário 2.1.7. *Seja $i : X \rightarrow X \oplus Y$ a inclusão natural e $p : X \oplus Y \rightarrow Y$. Então*

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ 0 \swarrow & & \nwarrow p \\ X & \xrightarrow{i} & X \oplus Y \end{array} \quad [1]$$

é um triângulo distinto.

Demonstração. Dados X e Y , por (TR1), temos os seguintes triângulos distintos

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array} \quad [1]$$

e

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \swarrow & \searrow \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \end{array}$$

Por (TR2), temos que

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \swarrow & \searrow \\ 0 & \xrightarrow{0} & Y \end{array}$$

também é um triângulo distinto. Daí, pelo lema anterior, podemos somar o primeiro e terceiro triângulo distinto e o resultado é um triângulo distinto. \square

Corolário 2.1.8. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xrightarrow{u} & Z \end{array}$$

um triângulo distinto em \mathcal{C} . Então existe um isomorfismo $\varphi : X \oplus Y \rightarrow Z$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & X \oplus Y & \xrightarrow{p} & Y & \xrightarrow{0} & T(X) \\ \downarrow 1_X & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1_Y & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{0} & T(X) \end{array}$$

é um isomorfismo de triângulos.

Em particular, a composição $s = \varphi \circ i$, onde $j : Y \rightarrow X \oplus Y$ é a inclusão canônica, satisfaz $v \circ s = 1_Y$.

Demonstração. Rotacionando a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & X \oplus Y & \xrightarrow{p} & Y & \xrightarrow{0} & T(X) \\ \downarrow 1_X & & & & \downarrow 1_Y & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{0} & T(X) \end{array}$$

e usando os axiomas (TR2) e (TR3), temos que existe $\varphi : X \oplus Y \rightarrow Z$ tal que o

diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i} & X \oplus Y & \xrightarrow{p} & Y & \xrightarrow{0} & T(X) \\
 \downarrow 1_X & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1_Y & & \downarrow T(1_X) \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{0} & T(X)
 \end{array}$$

é um isomorfismo de triângulos e pelo Lema (2.1.2), temos que φ é um isomorfismo. Além disso, $v \circ s = v \circ \varphi \circ j$, pela comutatividade do quadrado do meio do diagrama acima, temos $v \circ s = p \circ j = 1_Y$ \square

Finalizamos essa seção com o seguinte lema que será usado na demonstração do Teorema (5.1.1).

Lema 2.1.9. *Seja \mathcal{C} uma categoria triangulada e $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ um triângulo distinto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $f = 0$;
- (ii) g é uma seção;
- (iii) h é uma retração.

Demonstração. Se $f = 0$ podemos considerar o seguinte morfismo de triângulos distintos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow 0 & & \parallel & & \downarrow g' & & \downarrow 0 \\
 0 & \xrightarrow{0} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

A existência de g' é garantida por (TR3). Assim $g' \circ g = 1_Y$, conseqüentemente g é uma seção. Reciprocamente, se g é uma seção, existe g' tal que

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow 0 & & \parallel & & \downarrow g' & & \downarrow 0 \\
 0 & \xrightarrow{0} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

é um morfismo de triângulos distintos. Em particular, $1_Y \circ f = 0 \Rightarrow f = 0$. Do mesmo modo podemos mostrar a equivalência entre (i) e (iii). \square

2.2 Monomorfismos e epimorfismos em categorias trianguladas

Seja \mathcal{C} uma categoria e $X, Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$. Sejam $i : X \rightarrow X \oplus Y$ a inclusão canônica e $p : X \oplus Y \rightarrow X$ a projeção canônica. Então temos que $p \circ i = 1_X$. Se $i \circ \alpha = 0$ para algum morfismo α , temos que

$$\alpha = p \circ i \circ \alpha = 0.$$

Logo i é monomorfismo. Analogamente, se $\beta \circ p = 0$ para algum morfismo β , temos

$$\beta = \beta \circ p \circ i = 0.$$

Logo p é epimorfismo. O próximo resultado nos diz que esses monomorfismos e epimorfismos são praticamente os únicos na categoria triangulada.

Proposição 2.2.1. (i) *Seja $f : X \rightarrow Y$ um monomorfismo em \mathcal{C} . Então existe um objeto Z em $\text{Obj } \mathcal{C}$ e um isomorfismo $\varphi : X \oplus Z \rightarrow Y$ tal que f é a composição da inclusão natural $i : X \rightarrow X \oplus Z$ com φ .*

(ii) *Seja $f : X \rightarrow Y$ um epimorfismo em \mathcal{C} . Então existe um objeto $Z \in \text{Obj } \mathcal{C}$ e um isomorfismo $\psi : X \rightarrow Y \oplus Z$ tal que f é a composição de ψ com a projeção natural $p : X \oplus Y \rightarrow X$.*

Demonstração. Sejam $f : X \rightarrow Y$ um monomorfismo em \mathcal{C} e

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad [1]$$

um triângulo baseado em f . Pelo Lema (2.0.6), temos que $f \circ T^{-1}h = 0$. Como f é monomorfismo, segue que $T^{-1}h = 0$ e $h = 0$. Assim, por (2.1.8), segue o resultado. O item (ii) segue de modo análogo. \square

2.3 Localização de categorias trianguladas

Seja \mathcal{C} uma categoria triangulada. Uma classe S em \mathcal{C} é **compatível com a triangulação** se ela satisfaz as seguintes propriedades:

(LT1) Para qualquer morfismo s , $s \in S$ se, e somente se, $T(s) \in S$;

(LT2) O diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ s \downarrow & & t \downarrow & & & & \downarrow T(s) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

onde as linhas são triângulos distintos, o primeiro quadrado é comutativo e $s, t \in S$ pode ser completado a um morfismo de triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ s \downarrow & & t \downarrow & & p \downarrow & & \downarrow T(s) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

onde $p \in S$.

Seja \mathcal{C} uma categoria triangulada e S uma classe de localização em \mathcal{C} compatível com a triangulação. Se considerarmos o funtor quociente $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$, temos que dado $s \in S$, $(Q \circ T)(s) = Q(T(s))$ é um isomorfismo. Então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{T} & \mathcal{C} \\ Q \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathcal{C}[S^{-1}] & \xrightarrow{T_s} & \mathcal{C}[S^{-1}] \end{array}$$

É claro que T_s é um automorfismo da categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Por abuso de notação o denotaremos simplesmente por T . Dizemos que um triângulo

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xrightarrow{[1]} & Y \end{array}$$

em $\mathcal{C}[S^{-1}]$ é distinto quando existe um triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \swarrow & & \searrow \\ U & \xrightarrow{[1]} & V \end{array}$$

em \mathcal{C} e um isomorfismo de triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & T(U) \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & \downarrow T(a) \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

em $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Observe que os morfismos a, b e c são telhados de morfismos. Temos o seguinte resultado

Teorema 2.3.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria triangulada e S uma classe de localização em \mathcal{C} compatível com a triangulação. A categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$ é triangulada. O funtor natural $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ é exato.*

2.4 Categorias abelianas e trianguladas

Uma categoria \mathcal{A} é **semissimples** se qualquer sequência exata curta em \mathcal{A} cinde. Assuma que \mathcal{C} é uma categoria abeliana. Afirmamos que toda categoria triangulada \mathcal{C} é semissimples. De fato, seja

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta em \mathcal{C} . Então, g é um epimorfismo, e por (2.2.1), existe um objeto $U \in \text{Obj } \mathcal{C}$ e um isomorfismo $\psi : Y \rightarrow Z \oplus U$ tal que $g = p \circ \psi$, onde p é a projeção $p : Z \oplus U \rightarrow Z$. Seja s a composição da inclusão $i : Z \rightarrow Z \oplus U$ com o inverso de ψ . Assim,

$$g \circ s = g \circ \psi^{-1} \circ i = p \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ i = 1_Z,$$

pode ser estendido a um diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X'' & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & TX'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 TX & \longrightarrow & TY & \longrightarrow & TZ & \longrightarrow & T^2X
 \end{array}$$

onde todos os quadrados são comutativos, com exceção do quadrado inferior direito que anticomutativo (comuta a menos de um sinal negativo). Além disso, cada uma das linhas e colunas são triângulos distintos.

2.5 Quociente de categorias trianguladas

Dada uma categoria triangulada e uma subcategoria triangulada, podemos construir outra categoria triangulada usando o quociente, que se trata de uma localização de categorias. Para tanto precisamos discutir sobre Kernel de funtores exatos.

Definição 2.5.1. *Seja $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ um funtor exato de categorias trianguladas. Definimos o **Kernel** de F , e denotamos por $\text{Ker}(F)$, como sendo a subcategoria \mathcal{D}'' de \mathcal{D} plena e triangulada dada pelos objetos*

$$\text{Obj}(\mathcal{D}'') = \{X \in \text{Obj}(\mathcal{D}) \mid F(X) = 0\}$$

Lema 2.5.2. *Seja \mathcal{D} uma categoria triangulada. Seja $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ uma subcategoria plena triangulada. Definamos*

$$S = \left\{ \begin{array}{l} f \in \text{Hom}(\mathcal{D}) \text{ tal que existe um triângulo distinto} \\ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \text{ de } \mathcal{D} \text{ com } Z \text{ isomorfo a um objeto de } \mathcal{D}' \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

Então S é uma classe de localização compatível com a estrutura triangulada de \mathcal{D} associada a \mathcal{D}'

Demonstração.(LC1) $1_X \in S$ pois para objeto X em \mathcal{D} temos um triângulo distinto

$$X \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

em \mathcal{D} e o 0 é um objeto de \mathcal{D}'

(LC2) Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ em S , mostraremos que $g \circ f \in S$. Tome três triângulos distintos

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p_1} Q_1 \xrightarrow{d_1} TX$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{p_2} Q_2 \xrightarrow{d_2} TX$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{p_3} Q_3 \xrightarrow{d_3} TX$$

Por hipótese Q_1 e Q_2 são isomorfos a objetos de \mathcal{D}' . Por (TR4) existe um triângulo distinto $Q_1 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_3 \longrightarrow TQ_1$. Uma vez que \mathcal{D}' é uma subcategoria triangulada temos Q_2 é isomorfo a um objeto de \mathcal{D}' . Portanto, $g \circ f \in S$.

(LC4) Seja $a : X \rightarrow Y$ um morfismo e $t : Z \rightarrow X$ um elemento em S tal que $a \circ t = 0$. Queremos encontrar $s \in S$ tal que $s \circ a = 0$. Escolha um triângulo distinto baseado em t

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ Z & \xrightarrow{t} & X \end{array} \quad [1]$$

Uma vez que $a \circ t = 0$ pela proposição (2.1.5), existe um morfismo $i : Q \rightarrow Y$ tal que $i \circ g = a$, como podemos ver no diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{t} & X & \xrightarrow{g} & Q & \xrightarrow{h} & TZ \\ & & \downarrow 1_X & & \downarrow i & & \\ & & X & \xrightarrow{a} & Y & & \\ & & & & \downarrow s & & \\ & & & & W & & \end{array}$$

Por (TR1) podemos escolher um triângulo distinto

$$Q \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{s} W \longrightarrow TQ$$

como Q é isomorfo a um objeto de \mathcal{D}' temos que $s \in S$, uma vez que

$$Y \xrightarrow{s} W \longrightarrow TQ \longrightarrow TY$$

é um triângulo distinto. Desse modo, temos que $s \circ a = s \circ i \circ g$. Como $s \circ i = 0$ por (2.0.6) segue que $s \circ a = 0$. A recíproca segue de modo análogo.

(LT1) Como \mathcal{D}' é subcategoria triangulada, ela é invariante pela translação T e sabemos que os triângulos distintos também são.

(LT2) Suponha que temos diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

com $s, t \in S$. Pela proposição (2.4.1), podemos estender o quadrado acima a um diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{s} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\ \downarrow & & \downarrow t & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X'' & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & TX'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ TX & \longrightarrow & TY & \longrightarrow & TZ & \longrightarrow & T^2X \end{array}$$

Como s e t são elementos de S , vemos que X'' e Y'' são isomorfos a objetos de \mathcal{D}' . Uma vez que \mathcal{D}' é uma subcategoria triangulada e a terceira linha do diagrama anterior é um triângulo distinto, segue que Z'' isomorfo a objeto de \mathcal{D}' , conseqüentemente o morfismo $Z \rightarrow Z'$ está em S . Por fim, mostraremos que vale a propriedade (LC3b) e o caso (LC3a) segue de modo análogo.

(LC3b) Suponha $f : X \rightarrow Y$ um morfismo e $t : X \rightarrow X'$ um elemnto de S . Queremos encontrar os morfismos representados pelas flechas pontilhadas no diagrama

abaixo

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \dashrightarrow & W \end{array}$$

com o morfismo $Y \rightarrow W$ em S , de forma que o diagrama comute.

Tomemos um triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Usando (TR1) e (TR2) podemos escolher um triângulo $X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z \xrightarrow{Tth} TX'$.
Por (LT1), (LT2) e (TR2) podemos completar o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\ \downarrow t & & \downarrow s' & & \downarrow 1_Z & & \downarrow Tt \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX' \end{array}$$

com $s' \in S$.

□

Definição 2.5.3. *Seja \mathcal{D} uma categoria triangulada. Seja \mathcal{B} uma subcategoria triangulada plena. Definimos a **categoria triangulada quociente** $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}$ como $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}} = S^{-1}\mathcal{D}$, onde S é classe de localização de \mathcal{D} associada a \mathcal{B} , pelo lema anterior. O funtor localização $Q : \mathcal{D} \rightarrow \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}$ é chamado de **funtor quociente**.*

O funtor quociente satisfaz a seguinte propriedade universal: Se $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ é funtor exato em uma categoria triangulada \mathcal{D}' tal que $\mathcal{B} \subset \text{Ker}(F)$ então existe um único funtor exato $F' : \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{D}'$ tal que $F = F' \circ Q$.

Capítulo 3

Categorias Derivadas

Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva. Um complexo em \mathcal{A} é uma sequência

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

tal que $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$. Os morfismos d_X^i são chamados de diferenciais. Sejam X^\bullet e Y^\bullet dois complexos em \mathcal{A} , um morfismo de complexos $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é uma família de morfismos $f^n : X^n \rightarrow Y^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ Y^\bullet : \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

comuta. Denotaremos por $Hom^p(X^\bullet, Y^\bullet)$ o conjunto de todos os morfismos de grau p , isto é, o conjunto de todas famílias $f = (f^n; n \in \mathbb{Z})$ com $f^n \in Hom(X^n, Y^{n+p})$.

Iremos denotar por $C(\mathcal{A})$ a categoria de complexos, cujos os objetos são os complexos e os morfismos são morfismos de complexos.

Sejam X^\bullet e Y^\bullet dois complexos, vamos denotar por $Hom_{C(\mathcal{A})}$ o grupo abeliano de todos os morfismos de X^\bullet a Y^\bullet .

Para toda triangulação precisamos do functor translação, desse modo definiremos $T : C(\mathcal{A}) \longrightarrow C(\mathcal{A})$ da seguinte forma

Dado o complexo X^\bullet em $C(\mathcal{A})$, temos o complexo $T(X^\bullet)$ tal que

$$T(X^\bullet)^n = X^{n+1} \text{ e } d_{T(X^\bullet)}^n = -d_X^{n+1}$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e dado morfismo de complexos $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ fazemos $T(f)^n = f^{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.

O complexo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

é o objeto nulo em $C(\mathcal{A})$.

Dado dois complexos

$$X^\bullet : \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

e

$$Y^\bullet : \cdots \longrightarrow Y^{n-1} \xrightarrow{d_Y^{n-1}} Y^n \xrightarrow{d_Y^n} Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

definimos a soma direta dos complexos da seguinte forma

$$X^\bullet \oplus Y^\bullet : \cdots \longrightarrow X^{n-1} \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_{X \oplus Y}^{n-1}} X^n \oplus Y^n \xrightarrow{d_{X \oplus Y}^n} X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

ou seja, grau a grau, onde no grau p $d_{X \oplus Y}^p = d_X^p \oplus d_Y^p : X^p \oplus Y^p \rightarrow X^{p+1} \oplus Y^{p+1}$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Além disso, temos os morfismos naturais $i_X : X^\bullet \rightarrow X^\bullet \oplus Y^\bullet$, $i_Y : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet \oplus Y^\bullet$, $p_X : X^\bullet \oplus Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$ e $p_Y : X^\bullet \oplus Y^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ que satisfaz em

$$p_X \circ i_X = 1_X, \quad p_Y \circ i_Y = 1_Y \quad \text{e} \quad p_X \circ i_X + p_Y \circ i_Y = 1_{X \oplus Y}.$$

Desse modo, temos que

Lema 3.0.4. *A categoria $C(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva.*

Definimos um funtor aditivo $C : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A})$ por

$$C(X)^p = \begin{cases} X & \text{se } p = 0, \\ 0 & \text{se } p \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad d_{C(X)} = 0$$

para qualquer objeto X em \mathcal{A} , e

$$C(f)^p = \begin{cases} f & \text{se } p = 0, \\ 0 & \text{se } p \neq 0 \end{cases} \quad \text{e}$$

para qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{A} .

Lema 3.0.5. *O funtor $C : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A})$ é fielmente pleno.*

Desse modo, identificamos \mathcal{A} como uma subcategoria de $C(\mathcal{A})$, consistindo de complexos X^\bullet com $X^p = 0$ para $p \neq 0$.

Dizemos que um complexo X^\bullet é **limitado por baixo**, se existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $X^n = 0$ para $n < n_0$ e denotamos por $C^+(\mathcal{A})$ a subcategoria plena de $C(\mathcal{A})$ consistindo desses complexos. Por outro lado, se existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $X^n = 0$ para $n > n_0$ dizemos que X^\bullet é **limitado por cima** e denotamos por $C^-(\mathcal{A})$ a subcategoria plena de $C(\mathcal{A})$ consistindo desses complexos. Se o complexo X^\bullet é limitado por baixo e por cima dizemos que ele é **limitado** e denotamos por $C^b(\mathcal{A})$ a subcategoria plena de $C(\mathcal{A})$ consistindo desses complexos limitados.

Homotopias

Definição 3.0.6. *Seja $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo em $C(\mathcal{A})$. Então f é **homotópico a zero** se existe $h \in \text{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que*

$$f = d_Y \circ h + h \circ d_X$$

Chamamos h de **homotopia** de f .

Denotaremos por $Ht(X^\bullet, Y^\bullet)$ o conjunto de todos os morfismos em $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ que são homotópicos a zero.

Lema 3.0.7. *O subconjunto $Ht(X^\bullet, Y^\bullet)$ é um subgrupo de $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.*

Dizemos que os morfismos $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ e $g : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ são **homotópicos** se $f - g \in Ht(X^\bullet, Y^\bullet)$ e denotamos por $f \sim g$. Temos que \sim é uma relação de equivalência em $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Lema 3.0.8. *Sejam X^\bullet, Y^\bullet e Z^\bullet três complexos de \mathcal{A} -objetos e $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ e $g : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ dois morfismos de complexos. Se f ou g é homotópico a zero, então $g \circ f$ é homotópico a zero.*

Sejam X^\bullet e Y^\bullet dois complexos de \mathcal{A} -objetos. Colocamos

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})} = \frac{\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}}{Ht(X^\bullet, Y^\bullet)}$$

que é um grupo abeliano da classe de morfismos homotópicos entre X^\bullet e Y^\bullet .

Definimos assim uma nova categoria $K(\mathcal{A})$ em que os objetos são os objetos de $C(\mathcal{A})$ e os morfismos estão em $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}$.

Os próximos resultados serão úteis para justificar porque podemos enxergar $K(\mathcal{A})$ como uma categoria triangulada que possui \mathcal{A} como subcategoria. Para maiores detalhes ver [7] e [5].

Lema 3.0.9. *A categoria $K(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva.*

Lema 3.0.10. *Seja $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo de complexos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) f é homotópico a zero;
- (ii) $T(f)$ é homotópico a zero.

Lema 3.0.11. *O funtor $K : \mathcal{A} \rightarrow K(\mathcal{A})$ é fielmente pleno.*

Cohomologia

Suponha que \mathcal{A} é uma categoria abeliana. Para $p \in \mathbb{Z}$ e qualquer complexo X^\bullet em $C(\mathcal{A})$ definimos

$$H^p(X^\bullet) = \frac{\text{Ker } d_X^p}{\text{Im } d_X^{p-1}}$$

em \mathcal{A} . Dado um morfismo

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X^{p-1} & \xrightarrow{d_X^{p-1}} & X^p & \xrightarrow{d_X^p} & X^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow f^{p-1} & & \downarrow f^p & & \downarrow f^{p+1} & & \\ Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & Y^{p-1} & \xrightarrow{d_Y^{p-1}} & Y^p & \xrightarrow{d_Y^p} & Y^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

pela comutatividade vemos que $f^p(\text{Ker } d_X^p) \subset \text{Ker } d_Y^p$ e $f^p(\text{Im } d_X^{p-1}) \subset \text{Im } d_Y^{p-1}$. Assim, f induz o morfismo

$$\begin{aligned} H^p(f) : H^p(X^\bullet) &\longrightarrow H^p(Y^\bullet) \\ x + \text{Im } d_X^{p-1} &\longmapsto f^p(x) + \text{Im } d_Y^{p-1} \end{aligned}$$

Portanto, H^p é um funtor de $C(\mathcal{A})$ para a categoria \mathcal{A} para todo p e chamaremos esses funtores de **cohomológicos**.

Lema 3.0.12. *Sejam $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ e $g : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ dois morfismos homotópicos de complexos. Então $H^p(f) = H^p(g)$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Desse modo temos que o funtor $H^p : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ induz o funtor $H^p : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$.*

Observação 3.0.13. *É suficiente analisarmos o funtor $H^0 : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$. De fato, temos que*

$$H^p(T(X^\bullet)) = \frac{\text{Ker } d_{T(X)}^p}{\text{Im } d_{T(X)}^{p-1}} = \frac{\text{Ker } d_X^{p+1}}{\text{Im } d_X^p} = H^{p+1}(X^\bullet)$$

e $H^p(T(f)) = H^{p+1}(f)$. Portanto,

$$H^p = H^0 \circ T^p$$

para qualquer $p \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Da observação acima, é suficiente mostrar que $H^0(f) = H^0(g)$. Seja h a homotopia correspondente, então

$$f^0 - g^0 = d_Y^{-1} \circ h^0 + h^1 \circ d_X^0.$$

Isso implica que a restrição de $f^0 - g^0$ a $\text{Ker } d_X^0$ concorda com o morfismo $d_Y^{-1} \circ h^0$. Portanto, a imagem de $f^0 - g^0 : \text{Ker } d_X^0 \rightarrow Y^0$ está contida em $\text{Im } d_Y^{-1}$. Segue-se que $f^0 - g^0$ induz o morfismo nulo de $\text{Ker } d_X^0$ a $H^0(Y^\bullet)$. Portanto, $H^0(f) - H^0(g) = H^0(f - g) : H^0(X^\bullet) \rightarrow H^0(Y^\bullet)$ é o morfismo nulo. \square

Nós já vimos o conceito de cone de um triângulo. Agora, iremos falar sobre o cone de um morfismo em $C^b(\mathcal{A})$ sendo \mathcal{A} uma categoria aditiva. Seja $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo de complexo em $C^b(\mathcal{A})$. Definimos o objeto C_f^n no grau n por

$$C_f^n = X^{n+1} \oplus Y^n$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, definimos $d_{C_f}^n : C_f^n \rightarrow C_f^{n+1}$ por

$$d_{C_f}^n = \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix}$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Observe que

$$d_{C_f}^{n+1} \circ d_{C_f}^n = \begin{bmatrix} -d_X^{n+2} & 0 \\ f^{n+2} & d_Y^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_X^{n+2} d_X^{n+1} & 0 \\ -f^{n+2} d_X^{n+1} + d^{n+1} f^{n+1} & d_Y^{n+1} d_Y^n \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja, d_{C_f} é diferencial e C_f^\bullet é um complexo em $C^b(\mathcal{A})$. Denominamos esse complexo de o **cone do morfismo** f .

Podemos definir o morfismo inclusão $i_f : Y^\bullet \rightarrow C_f^\bullet$ tal que em cada grau n temos $i_f^n = i_{Y^n} \rightarrow C_f^n$, pois

$$d_{C_f}^n \circ i_f^n = \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_Y^n \end{bmatrix} = i_f^{n+1} \circ d_Y^n,$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Analogamente podemos definir $p_f : C_f^\bullet \rightarrow T(X^\bullet)$ dado por $p_f^n = p_{X^{n+1}} : C_f^n \rightarrow X^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Claramente temos que

$$p_f \circ i_f = 0.$$

Visto isso, definimos um triângulo padrão em $C^b(\mathcal{A})$, sendo \mathcal{A} uma categoria aditiva, da seguinte forma

$$\begin{array}{ccc} & C_f^\bullet & \\ p_f \swarrow & & \nwarrow i_f \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array} \quad [1]$$

Usaremos o conceito de triângulo padrão para na próxima seção definir uma triangulação em $K^b(\mathcal{A})$. Antes, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.0.14. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ X_1^\bullet & \xrightarrow{g} & Y_1^\bullet \end{array}$$

um diagrama em $C^b(\mathcal{A})$ que comuta a menos de homotopia. Então existe um morfismo

$w : C_f^\bullet \rightarrow C_g^\bullet$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{i_f} & C_f^\bullet & \xrightarrow{p_f} & T(X^\bullet) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X_1^\bullet & \xrightarrow{g} & Y_1^\bullet & \xrightarrow{i_g} & C_g^\bullet & \xrightarrow{p_g} & T(X_1^\bullet) \end{array}$$

comuta a menos de homotopia.

Agora definiremos o cone de i_f que para quando fizermos a rotação do triângulo

$$\begin{array}{ccc} & C_f^\bullet & \\ p_f \swarrow & & \nwarrow i_f \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array} \quad [1]$$

conhecê-lo. Seja $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo de complexos. Então temos o morfismo $i_f : Y^\bullet \rightarrow C_f^\bullet$. Seja D_f^\bullet o cone de i_f em que cada grau n é dado por

$$D_f^n = Y^{n+1} \oplus C_f^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$$

com diferenciais

$$d_{D_f}^n = \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ i_f^{n+1} & d_{C_f}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix}$$

Considere o seguinte resultado

Lema 3.0.15. O morfismo $\alpha : T(X^\bullet) \rightarrow D_f^\bullet$ dado por

$$\alpha^n = \begin{bmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{X^{n+1}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

em todo grau n , é um isomorfismo na categoria homotópica de complexos.

Ele nos diz que quando fizermos a rotação do triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc}
 & C_f^\bullet & \\
 p_f \swarrow & & \nwarrow i_f \\
 X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet
 \end{array}
 \quad [1]$$

obtemos

$$\begin{array}{ccc}
 & T(X^\bullet) & \\
 p \swarrow & & \nwarrow i \\
 Y^\bullet & \xrightarrow{i_f} & C_f^\bullet
 \end{array}
 \quad [1]$$

com $T(X^\bullet)$ sendo o cone de i_f .

3.1 Categoria homotópica de complexos é triangulada

Nessa seção abordaremos sobre a estrutura triangulada na categoria homotópica de complexos.

Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva. Denotamos por $K^b(\mathcal{A})$ a categoria homotópica de complexos limitados de objetos em \mathcal{A} . Seja T o funtor translação sobre $K^b(\mathcal{A})$. Se um triângulo

$$\begin{array}{ccc}
 & Z^\bullet & \\
 \swarrow & & \nwarrow \\
 X^\bullet & \xrightarrow{\quad} & Y^\bullet
 \end{array}
 \quad [1]$$

em $K^b(\mathcal{A})$ é isomorfo a imagem de um triângulo padrão em $K^b(\mathcal{A})$, então ele é dito distinto.

Teorema 3.1.1. *A categoria aditiva $K^b(\mathcal{A})$ munida com o funtor translação T e a classe de triângulos distintos em $K^b(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada.*

A demonstração do resultado clássico acima pode ser encontrada em detalhes em [7].

Lema 3.1.2. *Seja X^\bullet um complexo de objetos em \mathcal{A} . Então o cone C_{1_X} do morfismo identidade 1_X é isomorfo a 0 em $K^b(\mathcal{A})$.*

Uma outra caracterização para triângulos distintos em $K^b(\mathcal{A})$ é dada pelo seguinte resultado.

Lema 3.1.3. *Seja $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo em $K^b(\mathcal{A})$ e $a : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo de complexos em $C^b(\mathcal{A})$ que representa f . Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *O triângulo*

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ \swarrow & & \searrow \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array} \quad [1]$$

é distinto.

(ii) *Existe um isomorfismo $u : Z^\bullet \rightarrow C_a^\bullet$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet & \longrightarrow & T(X^\bullet) \\ \downarrow 1_{X^\bullet} & & \downarrow 1_{Y^\bullet} & & \downarrow u & & \downarrow 1_{T(X^\bullet)} \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{i_a} & C_a^\bullet & \xrightarrow{p_a} & T(X^\bullet) \end{array}$$

é um isomorfismo de triângulos.

Com isso o conceito de cone de um triângulo distinto com base $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ em $K^b(\mathcal{A})$ coincide com o conceito de cone que introduzimos na página 51.

Agora iremos analisar a categoria homotópica de complexos para uma categoria \mathcal{A} abeliana.

Teorema 3.1.4. *O funtor $H^0 : K^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico.*

Demonstração. Ver [7], pág. 115. □

Assim, os funtores cohomológicos H^p são funtores cohomológicos no sentido amplo definido em

Corolário 3.1.5. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ \swarrow h & & \searrow g \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array} \quad [1]$$

um triângulo distinto em $K^b(\mathcal{A})$. Então

$$\dots \longrightarrow H^p(X^\bullet) \xrightarrow{H^p(f)} H^p(Y^\bullet) \xrightarrow{H^p(g)} H^p(Z^\bullet) \xrightarrow{H^p(h)} H^{p+1}(X^\bullet) \longrightarrow \dots$$

é exata em \mathcal{A} .

Essa sequência é denominada **sequência exata longa de cohomologia** de um triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array} \quad [1]$$

Outra maneira de se conseguir uma sequência exata longa de cohomologia através de três complexos é dada pela

Proposição 3.1.6. *Uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} D^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} E^\bullet \longrightarrow 0$$

de complexos induz um homomorfismo $C^i : H^i(E^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(C^\bullet) \forall i \geq 0$, chamado mapa de conexão que nos fornece uma sequência exata longa de cohomologia:

$$H^i(C^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(D^\bullet) \xrightarrow{H^i(g^\bullet)} H^i(E^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(C^\bullet) \longrightarrow \dots$$

O mapa conexão $C^i : H^i(E^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(C^\bullet)$ é dado por

$$c = f^{-1} \circ \delta_D \circ g^{-1}.$$

Demonstração. (1) Se $x \in H^i(E^\bullet)$ então existe $y \in \text{Ker } \delta_E^i$ tal que $x \equiv y \pmod{\text{Im } \delta_E^{i-1}}$.

(2) Como $g^i : D^i \rightarrow E^i$ é sobrejetora, existe $z \in D^i$ com $g^i(z) = y$.

(3) Agora tome $\delta_D^i(z) = w \in D^{i+1}$. Uma vez que $y \in \delta_E^i$ e $g^{i+1} \circ \delta_D^i(z) = \delta_E^i \circ g^i(z) = 0$ temos $w \in \text{Im } f^{i+1}$. Considerando f^{i+1} a inclusão, temos $w \in C^{i+1}$.

(4) É claro que $w \in \text{Ker } \delta_C^{i+1}$ pois $w \in \text{Im } \delta_D^i = \text{Ker } \delta_D^{i+1}$ e $f^{i+2} \circ \delta_C^{i+1}(w) = \delta_D^{i+1} \circ f^{i+1}(w) = 0$, com f^{i+2} monomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & C^{i-1} & \xrightarrow{\delta_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\delta_C^i} & C^{i+1} \xrightarrow{\delta_C^{i+1}} \cdots \\
& & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\
\cdots & \longrightarrow & D^{i-1} & \xrightarrow{\delta_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\delta_D^i} & D^{i+1} \xrightarrow{\delta_D^{i+1}} \cdots \\
& & \downarrow g^{i-1} & & \downarrow g^i & & \downarrow g^{i+1} \\
\cdots & \longrightarrow & E^{i-1} & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & E^i & \xrightarrow{\delta_E^i} & E^{i+1} \xrightarrow{\delta_E^{i+1}} \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

- (5) Falta mostrar que C está bem definida: se tomamos $y' \in E^i$ com $y' \equiv y \pmod{\text{Im } \delta_E^{i-1}}$ e $z \in (g^i)^{-1}(y)$ e $z' \in (g^i)^{-1}(y')$ temos $w = \delta_D^i(z)$ e $w' = \delta_D^i(z')$. O leitor pode verificar que $w - w' \in \delta_C^i$ e portanto C está bem definida.

□

3.2 Categorias derivadas

A categoria derivada trata-se de uma categoria localizada, e sabemos que para o conceito de localização é necessário uma classe de morfismos que atenda algumas propriedades, denominada de classe de localização. Aqui não é diferente e para tanto precisamos do conceito de um morfismo especial. Consideremos \mathcal{A} uma categoria abeliana e $K^b(\mathcal{A})$ a categoria homotópica correspondente de complexos limitados com estrutura triangulada.

Definição 3.2.1. Um morfismo $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ em $C(\mathcal{A})$ é dito um **quasi-isomorfismo** se $H^p(f) : H^p(X^\bullet) \longrightarrow H^p(Y^\bullet)$ é isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Vamos denotar por S^b a classe de todos quasi-isomorfismos em $K^b(\mathcal{A})$.

Um objeto X^\bullet em $K^b(\mathcal{A})$ é chamado de **acíclico** se $H^p(X^\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.2.2. Seja $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ um morfismo em $K^b(\mathcal{A})$. Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) O morfismo f é um quasi-isomorfismo.
- (ii) O cone de f é acíclico.

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ & \swarrow & \searrow \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array}$$

[1]

um triângulo distinto baseado em f . Pelo Corolário (3.1.5), temos a sequência exata longa de cohomologia

$$\dots \longrightarrow H^p(X^\bullet) \xrightarrow{H^p(f)} H^p(Y^\bullet) \xrightarrow{H^p(g)} H^p(Z^\bullet) \xrightarrow{H^p(h)} H^{p+1}(X^\bullet) \xrightarrow{H^{p+1}(f)} H^{p+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \dots$$

em \mathcal{A} . Observe que $H^{p+1}(X^\bullet) = H^p(T(X^\bullet))$. Se f é quasi-isomorfismo, por definição temos que $H^p(f)$ e $H^{p+1}(f)$ são isomorfismos e, por (2.1.4), segue que $H^p(Z^\bullet)$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Portanto Z^\bullet é acíclico.

Reciprocamente, se Z^\bullet é acíclico, da mesma sequência exata longa

$$\dots \longrightarrow H^{p-1}(Z^\bullet) \longrightarrow H^p(X^\bullet) \xrightarrow{H^p(f)} H^p(Y^\bullet) \xrightarrow{H^p(g)} H^p(Z^\bullet) \longrightarrow \dots$$

e, por (2.1.4), temos que $H^p(f)$ é um isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$, ou seja, f é um quasi-isomorfismo. \square

Proposição 3.2.3. *A classe S^b de todos os quasi-isomorfismos em $K^b(\mathcal{A})$ é uma classe de localização compatível com a triangulação.*

Demonstração. Inicialmente iremos mostrar que S^b é uma classe de localização.

(LC1) Para qualquer X^\bullet , o morfismo identidade 1_{X^\bullet} é um quasi-isomorfismo, pois H^p sendo um funtor leva isomorfismo em isomorfismo.

(LC2) Sejam s e t quasi-isomorfismos, então $H^p(s)$ e $H^p(t)$ são isomorfismos para todo $p \in \mathbb{Z}$. Isso implica que $H^p(s \circ t) = H^p(s) \circ H^p(t)$ é isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$, ou seja, $s \circ t$ é quasi-isomorfismo.

(LC3a) Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ & \downarrow f & \\ X^\bullet & \xrightarrow{s} & Y^\bullet \end{array}$$

com $s \in S^b$ e $f \in \text{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(Z^\bullet, Y^\bullet)$. Sabemos que podemos construir um triângulo distinto baseado em s , ou seja,

$$\begin{array}{ccc} & U^\bullet & \\ p \swarrow & & \nwarrow i \\ X^\bullet & \xrightarrow{s} & Y^\bullet \end{array} \quad [1]$$

Daí, pelo lema anterior, uma vez que s é quasi-isomorfismo, segue que U^\bullet é acíclico. Por (TR2), temos o seguinte triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & T(X^\bullet) & \\ -T(s) \swarrow & & \nwarrow p \\ Y^\bullet & \xrightarrow{i} & U^\bullet \end{array} \quad [1]$$

Também podemos construir um triângulo baseado em $i \circ f$

$$\begin{array}{ccc} & V^\bullet & \\ p \swarrow & & \nwarrow \\ X^\bullet & \xrightarrow{i \circ f} & U^\bullet \end{array} \quad [1]$$

além do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} Z^\bullet & \xrightarrow{i \circ f} & U^\bullet & \longrightarrow & V^\bullet & \xrightarrow{u} & T(Z^\bullet) \\ \downarrow f & & \downarrow 1_{U^\bullet} & & & & \downarrow T(f) \\ Y^\bullet & \xrightarrow{i} & U^\bullet & \xrightarrow{p} & T(X^\bullet) & \xrightarrow{-T(s)} & T(Y^\bullet) \end{array}$$

Por (TR3), podemos completar esse diagrama a um morfismo

$$\begin{array}{ccccccc} Z^\bullet & \xrightarrow{i \circ f} & U^\bullet & \longrightarrow & V^\bullet & \xrightarrow{u} & T(Z^\bullet) \\ \downarrow f & & \downarrow 1_{U^\bullet} & & \downarrow v & & \downarrow T(f) \\ Y^\bullet & \xrightarrow{i} & U^\bullet & \xrightarrow{p} & T(X^\bullet) & \xrightarrow{-T(s)} & T(Y^\bullet) \end{array}$$

de triângulo distintos. Visto que U^\bullet é acíclico, por (3.1.5) e (2.1.4) temos que u é um quasi-isomorfismo. Portanto se aplicarmos o inverso do funtor translação

ao último retângulo e fizemos

$$W^\bullet = T^{-1}(V^\bullet), \quad t = T^{-1}u \quad \text{e} \quad g = -T^{-1}v,$$

temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} W^\bullet & \xrightarrow{t} & Z^\bullet \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ X^\bullet & \xrightarrow{s} & Y^\bullet \end{array}$$

onde t e s estão em S , pois $t = T^{-1}u$ é quasi-isomorfismo, já que u é quasi-isomorfismo.

Analogamente mostra-se (LC3b).

(LC4) Como discutido anteriormente, podemos mostrar que dado $f, g : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, $s \circ f = 0$ para algum $s \in S^b$ é equivalente $f \circ t = 0$ para algum $t \in S^b$.

Se $s \circ f = 0$, podemos considerar o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(X^\bullet) & \xrightarrow{-1_{T(X^\bullet)}} & T(X^\bullet) \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow T(f) \\ Y^\bullet & \xrightarrow{s} & Z^\bullet & \xrightarrow{i} & U^\bullet & \xrightarrow{p} & T(Y^\bullet) \end{array}$$

onde a primeira linha é um triângulo distinto obtido pela rotação do triângulo

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \swarrow & \searrow \\ X^\bullet & \xrightarrow{[1]} & X^\bullet \end{array}$$

e a segunda linha é um triângulo baseado em s . Por (TR3), podemos completar o diagrama acima um morfismo de triângulos distintos

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(X^\bullet) & \xrightarrow{-1_{T(X^\bullet)}} & T(X^\bullet) \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow -v & & \downarrow T(f) \\ Y^\bullet & \xrightarrow{s} & Z^\bullet & \xrightarrow{i} & U^\bullet & \xrightarrow{p} & T(Y^\bullet) \end{array}$$

Da comutatividade do último retângulo temos que $p \circ (-v) = -T(f)$, implicando em $f = T^{-1}(p) \circ T^{-1}(v)$.

Uma vez que s é quasi-isomorfismo, U^\bullet é acíclico. Portanto, se considerarmos o triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & V^\bullet & \\ v \swarrow & & \nwarrow \\ X^\bullet & \xrightarrow[T^{-1}(v)]{[1]} & T^{-1}(U^\bullet) \end{array}$$

baseado em $T^{-1}(v)$, temos que t é quasi-isomorfismo pelo lema anterior. Ainda, por (2.0.6), temos que $T^{-1}(v) \circ t = 0$. Daí,

$$f \circ t = T^{-1}(p) \circ T^{-1}v \circ t = 0.$$

O outro caso, segue de modo análogo. Logo mostramos que S^b é uma classe de localização.

Por fim, iremos mostrar que S^b é compatível com a triangulação.

(LT1) Claramente temos que S^b é invariante sob o funtor translação T .

(LT2) Consideremos o morfismo

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet & \longrightarrow & T(X^\bullet) \\ \downarrow s & & \downarrow t & & \downarrow u & & \downarrow T(s) \\ X_1^\bullet & \longrightarrow & Y_1^\bullet & \longrightarrow & Z_1^\bullet & \longrightarrow & T(X_1^\bullet) \end{array}$$

de triângulos distintos, onde s e t sejam quasi-isomorfismos. Para qualquer $p \in \mathbb{Z}$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} H^p(X^\bullet) & \longrightarrow & H^p(Y^\bullet) & \longrightarrow & H^p(Z^\bullet) & \longrightarrow & H^{p+1}(X^\bullet) & \longrightarrow & H^{p+1}(Y^\bullet) \\ \downarrow H^p(s) & & \downarrow H^p(t) & & \downarrow H^p(u) & & \downarrow H^{p+1}(s) & & \downarrow H^{p+1}(t) \\ H^p(X_1^\bullet) & \longrightarrow & H^p(Y_1^\bullet) & \longrightarrow & H^p(Z_1^\bullet) & \longrightarrow & H^{p+1}(X_1^\bullet) & \longrightarrow & H^{p+1}(Y_1^\bullet) \end{array}$$

onde $H^p(s)$, $H^{p+1}(s)$, $H^p(t)$ e $H^{p+1}(t)$ são isomorfismos. Logo, pelo lema dos cinco, $H^p(u)$ é um isomorfismo. Como $p \in \mathbb{Z}$ é arbitrário, segue que u é quasi-isomorfismo. Portanto, S^b é compatível com a triangulação.

□

Sejam \mathcal{A} uma categoria abeliana, $C^b(\mathcal{A})$ a categoria correspondente de complexos limitados de $K^b(\mathcal{A})$ a categoria homotópica de complexos limitados, que é triangulada de acordo com o Teorema (3.1.1).

Seja S^b a classe de quasi-isomorfismos em $K^b(\mathcal{A})$. Vimos na proposição anterior que S^b é compatível com a triangulação de $K^b(\mathcal{A})$. Definimos a **categoria derivada** $D^b(\mathcal{A})$ como a localização da categoria $K^b(\mathcal{A})$ com respeito a classe S^b de todos os quasi-isomorfismos. Vamos entender melhor a categoria $D^b(\mathcal{A})$. Os morfismos em $D^b(\mathcal{A})$ são os telhados de morfismos de complexos identificados a menos de homotopia.

Pelo resultado anterior e pelo Teorema (2.3.1) temos que $D^b(\mathcal{A})$ é triangulada. Assim,

$$\begin{array}{ccc}
 K^b(\mathcal{A}) & & D^b(\mathcal{A}) = K^b(\mathcal{A})[(S^b)^{-1}] \\
 \begin{array}{ccc} & C_f^\bullet & \\ p \swarrow & & \nwarrow i \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array} & \mapsto & \begin{array}{ccc} & C_{f'}^\bullet & \\ p' \swarrow & & \nwarrow i' \\ X^\bullet & \xrightarrow{f'} & Y^\bullet \end{array}
 \end{array}$$

Em que f' é representado pelo telhado

$$\begin{array}{ccc}
 & X^\bullet & \\
 1_{X^\bullet} \swarrow & & \searrow f \\
 X^\bullet & \xrightarrow{\sim} & Y^\bullet
 \end{array}$$

Iremos falar agora sobre os **funtores de Truncamento**. Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Para um complexo X^\bullet de \mathcal{A} -objetos e $n \in \mathbb{Z}$ definimos o complexo $\tau_{\leq n}(X^\bullet)$ como um subcomplexo de X^\bullet dado por

$$\tau_{\leq n}(X^\bullet)^p = \begin{cases} X^p, & \text{se } p < n \\ \text{Ker } d^n, & \text{se } p = n \\ 0, & \text{se } p > n \end{cases}$$

Seja $i : \tau_{\leq n}(X^\bullet) \rightarrow X^\bullet$ o morfismo inclusão canônico. Temos que o seguinte resultado segue da definição.

Lema 3.2.4. *O morfismo $H^p(i) : H^p(\tau_{\leq n}(X^\bullet)) \rightarrow H^p(X^\bullet)$ é um isomorfismo para $p \leq n$ e 0 para $p > n$.*

Seja um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, então temos $d_X^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_Y^n$.

Não é difícil obter que $f^n(\text{Ker } d_X^n) \subset \text{Ker } d_Y^n$. Assim, temos que f^\bullet induz um morfismo de complexos $\tau_{\leq n}(f^\bullet) : \tau_{\leq n}(X^\bullet) \rightarrow \tau_{\leq n}(Y^\bullet)$. Logo, $\tau_{\leq n} : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{A})$ é um funtor aditivo.

Dados $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ e $g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ dois morfismos homotópicos, isto é, $f - g = d \circ h + h \circ d$. Então $\tau_{\leq n}(f)$ e $\tau_{\leq n}(g)$ são homotópicos com a homotopia dada pela restrição de h para $\tau_{\leq n}(X^\bullet)$, ou seja, $\tau_{\leq n}$ induz o funtor $\tau_{\leq n} : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$.

Observe que

$$H^p(\tau_{\leq n}(f)) = \begin{cases} H^p(f), & \text{se } p \leq n \\ 0, & \text{se } p > n \end{cases}$$

Portanto, junto com o Lema (3.2.4), temos que se $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é quasi-isomorfismo, então $\tau_{\leq n}(f)$ é também um quasi-isomorfismo.

Assim, temos que $\tau_{\leq n}$ induz o funtor $\tau_{\leq n} : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ que é chamado o **funtor de truncamento** $\tau_{\leq n}$.

De forma análoga definimos o complexo $\tau_{\geq n}(X^\bullet)$ como um complexo quociente de X^\bullet dado por

$$\tau_{\geq n}(X^\bullet)^p = \begin{cases} 0, & \text{se } p < n \\ \text{Coker } d^{n-1}, & \text{se } p = n \\ X^p, & \text{se } p > n \end{cases}$$

Seja $q : X^\bullet \rightarrow \tau_{\geq n}(X^\bullet)$ o morfismo projeção canônico. Observe que o seguinte resultado segue da definição.

Lema 3.2.5. *O morfismo $H^p(q) : H^p(X^\bullet) \rightarrow H^p(\tau_{\geq n}(X^\bullet))$ é um isomorfismo para $p \geq n$ e 0 para $p < n$.*

Com uma análise semelhante ao de cima, concluímos que $\tau_{\geq n} : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{A})$ é um funtor aditivo e, além disso, $\tau_{\geq n}$ induz um funtor $\tau_{\geq n} : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$. Daí,

$$H^p(\tau_{\geq n}(f)) = \begin{cases} H^p(f), & \text{se } p \geq n \\ 0, & \text{se } p < n \end{cases}$$

Logo, junto com o Lema (3.2.5), temos que se $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é quasi-isomorfismo, então $\tau_{\geq n}(f)$ é também um quasi-isomorfismo.

Portanto, temos que $\tau_{\geq n}$ induz o funtor $\tau_{\geq n} : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ que é denominado o **funtor de truncamento** $\tau_{\geq n}$.

O seguinte resultado nos diz que podemos enxergar \mathcal{A} como uma subcategoria de $D(\mathcal{A})$.

Teorema 3.2.6. *O funtor $D : \mathcal{A} \rightarrow D(\mathcal{A})$ é fielmente pleno.*

Sequências exatas curtas e triângulos distintos

Para uma categoria abeliana \mathcal{A} , a categoria de complexos $C^b(\mathcal{A})$ também é abeliana.

Seja

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $C^b(\mathcal{A})$. Podemos também considerar o triângulo padrão

$$\begin{array}{ccc} & C_f^\bullet & \\ p_f \swarrow & & \nwarrow i_f \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array} \quad [1]$$

baseado no monomorfismo $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$. Seja $m : T(X^\bullet) \oplus Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ o morfismo que é a composição da projeção $q : T(X^\bullet) \oplus Y^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ com $g : Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$. Então

$$\begin{aligned} m^{n+1} \circ d_{C_f}^n &= \begin{bmatrix} 0 & g^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{n+1} f^{n+1} & g^{n+1} d_Y^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & d_Z^n g^n \end{bmatrix} = d_Z^n \circ \begin{bmatrix} 0 & g^n \end{bmatrix} = d_Z^n \circ m^n \end{aligned}$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, m é um morfismo de complexos.

Observe que

$$m \circ i_f = g$$

Por outro lado, para o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{1_X} & X^\bullet \\ \downarrow 1_X & & \downarrow f \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array}$$

anexamos um morfismo $w : C_{1_X}^\bullet \rightarrow C_f^\bullet$ dado por

$$w^n = \begin{bmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & f^n \end{bmatrix}$$

É claro que esse morfismo é um monomorfismo e

$$\text{Im } w^n = X^{n+1} \oplus \text{Im } f^n = X^{n+1} \oplus \text{Ker } g^n = \text{Ker } m^n$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Consequentemente,

$$0 \longrightarrow C_{1_X}^\bullet \xrightarrow{w} C_f^\bullet \xrightarrow{m} Z^\bullet \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata em $C^b(\mathcal{A})$. Pelo lema (3.1.2) em $K^b(\mathcal{A})$, assim temos que $H^p(C_{1_X}^\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Portanto, da sequência exata longa de cohomologia anexada a sequência exata curta, temos que $H^p(m) : H^p(C_f^\bullet) \rightarrow H^p(Z^\bullet)$ é um isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$, ou seja,

Lema 3.2.7. *O morfismo $m : C_f^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ é um quasi-isomorfismo.*

Em particular, a classe de homotopia de $m : C_f^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ é um isomorfismo em $D^b(\mathcal{A})$. Assim, temos o seguinte resultado

Proposição 3.2.8. *Seja*

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $C(\mathcal{A})$. Então ela determina um triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ & \swarrow [1] \quad \searrow g & \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array}$$

em $D(\mathcal{A})$.

Demonstração. Pelo Lema (3.2.7), o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{i_f} & C_f^\bullet & \xrightarrow{p_f} & T(X^\bullet) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow m & & \downarrow 1_{T(X^\bullet)} \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \xrightarrow{p_f \circ m} & T(X^\bullet) \end{array}$$

é um isomorfismo de triângulos em $D^b(\mathcal{A})$. Uma vez que o triângulo superior é imagem de um triângulo padrão, ou seja, é um triângulo distinto, o triângulo inferior é também distinto. \square

Agora considere uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

em \mathcal{A} . Então pela proposição anterior, temos um triângulo distinto

$$\begin{array}{ccc} & D(N) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ D(L) & \xrightarrow{D(f)} & D(M) \end{array}$$

[1] $D(g)$

em $D^b(\mathcal{A})$. Nesse caso temos um resultado mais forte

Proposição 3.2.9. *Existe um único morfismo h tal que*

$$\begin{array}{ccc} & D(N) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ D(L) & \xrightarrow{D(f)} & D(M) \end{array}$$

h [1] $D(g)$

é um triângulo distinto em $D^b(\mathcal{A})$.

3.3 Categoria geradora

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana e \mathcal{B} uma subcategoria aditiva plena de \mathcal{A} . Suponhamos que para quaisquer dois objetos M e N em \mathcal{B} e qualquer morfismo $f : M \rightarrow N$ exista um *kernel* $\text{Ker } f$ e um *cokernel* $\text{Coker } f$ de f que são objetos de \mathcal{B} . Então existe uma imagem $\text{im } f$ e coimagem $\text{coim } f$ que também estão em \mathcal{B} , como podemos ver no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{h} & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & \text{Coker } f = \frac{N}{\text{im } f} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Coker } h = \text{coim } f & \xlongequal{\quad} & \text{im } f & = & \text{Ker } g \end{array}$$

ou seja, \mathcal{B} é fechada para *Kernel* e *Cokernel*. Portanto, \mathcal{B} é uma categoria abeliana. Dizemos que \mathcal{B} é uma subcategoria abeliana plena de \mathcal{A} .

Dizemos que uma subcategoria abeliana plena \mathcal{B} de \mathcal{A} é **subcategoria abeliana boa** se é fechada para extensão, ou seja, se dada uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

em \mathcal{A} com M' e M'' objetos de \mathcal{B} , então M está em \mathcal{B} .

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana e \mathcal{B} uma subcategoria abeliana boa. Seja $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ a subcategoria plena da categoria derivada $D^b(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} -complexos consistindo de complexos X^\bullet tais que $H^p(X^\bullet)$ estão em \mathcal{B} para todo $p \in \mathbb{Z}$. Claramente, $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ é invariante por translação, visto que ao aplicarmos o funtor translação T a um complexo X^\bullet estamos apenas dando um shift para esquerda ou para a direita, onde suas cohomologias $H^p(X^\bullet)$ são as mesmas e estarão em \mathcal{B} para todo p .

Seja

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ & \swarrow & \searrow \\ X^\bullet & \xrightarrow{[1]} & Y^\bullet \end{array}$$

um triângulo distinto em $D^b(\mathcal{A})$ com X^\bullet e Y^\bullet em $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$. Então, temos uma sequência exata longa de cohomologia

$$\dots \longrightarrow H^p(X^\bullet) \xrightarrow{\alpha_p} H^p(Y^\bullet) \longrightarrow H^p(Z^\bullet) \longrightarrow H^{p+1}(X^\bullet) \xrightarrow{\alpha_{p+1}} H^{p+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Uma vez que \mathcal{B} é uma categoria boa e $H^p(X^\bullet)$, $H^p(Y^\bullet)$, $H^{p+1}(X^\bullet)$ e $H^{p+1}(Y^\bullet)$ são objetos de \mathcal{B} , existem $\text{Coker } \alpha_p$ e $\text{Ker } \alpha_{p+1}$ que são objetos de \mathcal{B} . Logo,

$$0 \longrightarrow \text{Coker } \alpha_p \longrightarrow H^p(Z^\bullet) \longrightarrow \text{Ker } \alpha_{p+1} \longrightarrow 0$$

é exata, e $H^p(Z^\bullet)$ está em \mathcal{B} , visto que \mathcal{B} é boa. Portanto, Z^\bullet é um objeto de $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$. Provamos assim, o seguinte resultado

Lema 3.3.1. *A subcategoria $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ de $D^b(\mathcal{A})$ é uma subcategoria triangulada plena de $D^b(\mathcal{A})$.*

Denominaremos $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ a categoria derivada relativa de \mathcal{A} com respeito a \mathcal{B} .

Com isto, vamos estabelecer o conceito de **categoria geradora**. Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana e \mathcal{B} uma subcategoria abeliana boa. Seja $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ a correspondente categoria derivada limitada relativa.

Denote por \mathcal{B}_1 a categoria de objetos em $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ da forma $D(M)[n]$ com M em \mathcal{B} e $n \in \mathbb{Z}$. Então construímos por indução uma família de categorias \mathcal{B}_m de objetos em $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ da seguinte maneira: X^\bullet é um objeto de \mathcal{B}_m se existe um triângulo distinto em $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ com X^\bullet como um desses vértices e os outros dois vértices em \mathcal{B}_{m-1} .

Lema 3.3.2. *Para qualquer $m > 1$, se X^\bullet está em \mathcal{B}_{m-1} , então X^\bullet está em \mathcal{B}_m .*

Seja \mathcal{D} a subcategoria plena de $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ com os objetos dentro de $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_m$,

Lema 3.3.3. *A subcategoria \mathcal{D} é uma subcategoria plena triangulada de $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$.*

A categoria \mathcal{B} é chamada de **geradora** de \mathcal{D} . Dizemos que \mathcal{D} é uma subcategoria plena triangulada gerada por \mathcal{B} .

De posse desses conceitos e resultados temos que $\text{mod}A$ é uma subcategoria geradora de $D^b(\text{mod}A)$. Além disso, temos a

Proposição 3.3.4. *Seja A uma K -álgebra de dimensão finita sobre um corpo K e com dimensão global finita. Então $\text{mod}A$ é uma subcategoria geradora de $\text{mod}\hat{A}$.*

Demonstração. Ver [3], pág. 71. □

Onde o conceito de $\text{mod}\hat{A}$ será abordado no capítulo seguinte.

Para finalizar esta seção consideremos o seguinte resultado, cuja a prova o leitor poderá consultar [3], pág. 72.

Lema 3.3.5. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' duas categorias trianguladas. Sejam $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ uma subcategoria geradora e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor exato. Se $F(\mathcal{B})$ é uma subcategoria geradora então F é denso.*

Capítulo 4

A Categoria Estável de $\text{mod}\hat{A}$ é Triangulada

Neste capítulo tratamos da categoria estável de $\text{mod}\hat{A}$ onde \hat{A} é a álgebra repetitiva obtida de uma k -álgebra de dimensão finita A . Pela seção (1.4) sabemos que \hat{A} é uma álgebra de Frobenius. A principal referência desse capítulo foi [4]. Primeiro iremos definir um tipo especial de categoria denominada categoria de Frobenius e para isto precisamos saber que

Definição 4.0.6. *Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana, dizemos que \mathcal{A} tem **suficientes injetivos** se dado um objeto M , existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

com I injetivo. Dizemos que \mathcal{A} tem **suficientes projetivos** se dado um objeto M , existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

com P um projetivo.

Definição 4.0.7. *Uma **categoria de Frobenius** é uma categoria abeliana \mathcal{A} tal que*

- (I) \mathcal{A} tem **suficientes injetivos**.
- (II) \mathcal{A} tem **suficientes projetivos**.
- (III) Um objeto é injetivo se, e somente se, ele é projetivo.

É claro que pela definição acima $\text{mod}\hat{A}$ é uma categoria de Frobenius.

O principal resultado deste capítulo é provar que uma categoria estável de uma categoria de Frobenius é triangulada.

4.1 A categoria estável de uma categoria abeliana

Nesta seção vamos definir o conceito de categoria estável usando as definições da seção (1.3).

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Seja \mathcal{I} uma classe de morfismos de \mathcal{A} que se fatora por um objeto injetivo I . Mostraremos que \mathcal{I} é um ideal de \mathcal{A} . Para isto, precisamos verificar duas propriedades.

- $\mathcal{I}(M, N) \subset \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ é subgrupo, para qualquer par, M e N , de objetos em \mathcal{A} . De fato, dado um morfismo $f : M \rightarrow N$ em $\mathcal{I}(M, N)$, sabemos que ele se fatora por um objeto I injetivo, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & I & \end{array}$$

é um diagrama comutativo. Desse modo, se $f = h \circ g$ como no diagrama, temos que $-f = (-h) \circ g$. Assim $-f \in \mathcal{I}(M, N)$. Além disso, o morfismo nulo se fatora por qualquer objeto, em particular, para um injetivo. Daí, $0 \in \mathcal{I}(M, N)$.

Se $f, f' \in \mathcal{I}(M, N)$, então temos os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & I & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f'} & N \\ & \searrow g' & \nearrow h' \\ & I' & \end{array}$$

para objetos I e I' injetivos. Sejam $\iota : I \rightarrow I \oplus I'$ e $\iota' : I' \rightarrow I \oplus I'$ as inclusões canônicas, e $\pi : I \oplus I' \rightarrow I$ e $\pi' : I' \oplus I' \rightarrow I'$ as projeções canônicas. Temos que $I \oplus I'$ é injetivo. Definamos $\varphi = \iota g + \iota' g' : M \rightarrow I \oplus I'$ e $\psi = h\pi + h'\pi' : I \oplus I' \rightarrow N$. Observe que $\psi\varphi = f + f'$. Logo, $f + f' \in \mathcal{I}(M, N)$. Portanto, $\mathcal{I}(M, N)$ é subgrupo aditivo de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$.

- Sejam $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$, $g \in \mathcal{I}(N, L)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, W)$. Daí temos o

seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h} & W \\
 & & \searrow \beta & & \nearrow \alpha & & \\
 & & & & I & & \\
 & \swarrow \beta f & & & \nwarrow h\alpha & &
 \end{array}$$

mostrando que $hgf \in \mathcal{I}(M, W)$.

Portanto, \mathcal{I} é um ideal de \mathcal{A} . De forma semelhante, existe um ideal \mathcal{P} formado por todos os morfismos que se fatoram por um objeto projetivo. Segue agora a definição que nos referimos inicialmente.

Definição 4.1.1. *Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. A categoria estável de injetivos, $\underline{\mathcal{A}}$, é o quociente $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}$, em que o ideal \mathcal{I} é definido como a classe de todos os morfismos que se fatoram por um objeto injetivo. A categoria estável de projetivos, $\overline{\mathcal{A}}$, é o quociente $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{P}}$, onde o ideal \mathcal{P} é definido como a classe de todos os morfismos que se fatoram por um objeto projetivo.*

Vamos denotar por $\underline{Hom}(M, N)$ o conjunto de morfismos entre M e N em $\underline{\mathcal{A}}$. A classe de um morfismo $\varphi : M \rightarrow N$ denotaremos por $\underline{\varphi}$. De forma similar, $\overline{Hom}(M, N)$ denotará os morfismos em $\overline{\mathcal{A}}$ e um morfismo será denotado por $\overline{\varphi}$.

Lema 4.1.2. *Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana com \mathcal{I} como acima. Sejam M e N dois objetos de \mathcal{A} . Se existem injetivos I e I' tais que $M \oplus I \cong N \oplus I'$ então $M \cong N$ em $\underline{\mathcal{A}}$.*

Demonstração. Qualquer mapa $M \oplus I \rightarrow N \oplus I'$ pode ser escrito unicamente como uma matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

onde $\alpha : M \rightarrow N$, $\beta : I \rightarrow N$, $\gamma : M \rightarrow I'$ e $\delta : I \rightarrow I'$. Do mesmo modo, para qualquer mapa da forma $N \oplus I' \rightarrow M \oplus I$, temos

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

onde $\alpha' : N \rightarrow M$, $\beta' : I' \rightarrow M$, $\gamma' : N \rightarrow I$ e $\delta' : I' \rightarrow I$. Um isomorfismo das duas

somas diretas dadas pelas matrizes acima, de modo que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_M & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}$$

Consequentemente, $1_M - \alpha\alpha' = \beta'\gamma$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{1_M - \alpha\alpha'} & M \\ & \searrow \gamma & \nearrow \beta' \\ & I' & \end{array}$$

comuta. Portanto, $\underline{1}_M = \underline{\alpha\alpha'}$. Analogamente, temos que $\underline{\alpha'\alpha} = \underline{1}_N$, mostrando assim que M é isomorfo a N em $\underline{\mathcal{A}}$. \square

Lema 4.1.3. *Se \mathcal{A} é uma categoria abeliana com M um objeto e I um objeto injetivo. Então M é isomorfo a $M \oplus I$ em $\underline{\mathcal{A}}$.*

Observe que ambos os resultados acima podem ser feitos para o ideal \mathcal{P} e o objeto projetivo P .

Lema 4.1.4. *Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Dadas duas seqüências*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I' \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

com injetivos I e I' , então $N \oplus I' \cong N' \oplus I$. Em particular, N e N' são isomorfos na categoria estável de injetivos.

Demonstração. Dadas duas seqüências exatas podemos construir o seguinte diagrama

comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow \varphi & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\varphi'} & I' \oplus^M I & \xrightarrow{h} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g' & & \downarrow h' & & \\
 & & N' & \xlongequal{\quad} & N' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

em que a linha e coluna do meio são sequências exatas, com $I' \oplus^M I$ sendo o *pushout*. Uma vez que I e I' são injetivos, essas sequências cindem o que implica

$$N \oplus I' \cong I' \oplus^M I \cong N' \oplus I.$$

□

Observação 4.1.5. *Suponha que temos duas sequências exatas*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & M' \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & I' & \xrightarrow{g'} & N' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

com injetivos I e I' . Seja $\varphi : M \rightarrow N$ um morfismo em \mathcal{A} . Uma vez que $f' \varphi : M \rightarrow I'$ é um morfismo para um injetivo, existe um mapa $\varphi' : I \rightarrow I'$ tal que o primeiro quadrado no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & I' & \xrightarrow{g'} & N' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

comuta. Existe um único $\varphi'' : M' \rightarrow N'$ preenchendo a segunda linha pontilhada, de forma que o quadrado direito comute como $g' \varphi' f = g' f' \varphi = 0$. De fato, suponha que

temos $\psi' : I \rightarrow I'$ e $\psi'' : M' \rightarrow N'$ tais que $\psi''g = g'\psi'$ e $\psi'f = f'\varphi$. Então

$$(\varphi' - \psi')f = \varphi'f - \psi'f = f'\varphi - f'\varphi = 0$$

isso implica que existe $s : M' \rightarrow I'$ tal que $\varphi' - \psi' = sg$. Então

$$(\varphi'' - \psi'')g = g'(\varphi' - \psi') = g'sg$$

donde $\varphi'' - \psi'' = g's$, pois g é epimorfismo. O que nos diz que $\varphi'' - \psi''$ fatora-se junto a I' , ou seja, $\varphi'' = \psi''$. Em resumo, temos que o mapa $\varphi : M \rightarrow N$ induz um mapa $\varphi'' : M' \rightarrow N'$ que é único em $\underline{\mathcal{A}}$.

Podemos ter o mesmo raciocínio para o caso projetivo.

4.2 Uma triangulação para a categoria estável de uma categoria de Frobenius

Agora, iremos definir o funtor $T : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ que mencionamos no início dessa seção. Iremos fazer a construção por etapas. Inicialmente defina $T : \mathcal{A} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ e então mostraremos que T leva morfismos de \mathcal{I} em morfismos nulos. Assim, teremos o funtor $T : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$. Para cada objeto M em \mathcal{A} , fixe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u(M)} I(M) \xrightarrow{\pi(M)} TM \longrightarrow 0$$

com $I(M)$ injetivo. Para cada objeto M , defina $T(M) = TM$, onde TM vem da sequência acima. Dado um mapa $\varphi : M \rightarrow N$, defina $T(\varphi) = \varphi''$, onde $\varphi'' : TM \rightarrow TN$ é construído na observação anterior.

Se $\varphi = 1_M$ então podemos ter $\varphi = 1_{I(M)}$ o que implica que $\varphi'' = 1_{TM}$. Logo T leva identidade em identidade, ou seja, $T(1_M) = 1_{TM}$. Além disso, T preserva composição. Dado $\psi : N \rightarrow L$ podemos tomar $\psi'' \circ \varphi''$ para $(\psi \circ \varphi)'' : TM \rightarrow TL$, ou seja, $T(\psi \circ \varphi) = \psi'' \circ \varphi'' = \psi'' \circ \varphi'' = T(\psi) \circ T(\varphi)$. Do mesmo modo mostramos que T preserva soma, isto é, $T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi)$. Portanto, T é um funtor aditivo de \mathcal{A} para $\underline{\mathcal{A}}$.

Agora, mostraremos que T leva morfismos de \mathcal{I} em morfismos nulos. Seja $f \in \mathcal{I}(M, N)$ então podemos escrever $f = h \circ g$ onde $g : M \rightarrow I$ e $h : I \rightarrow N$ para algum injetivo I . Portanto, $f'' = h'' \circ g''$, usando a mesma notação como antes, onde

$g'' : TM \rightarrow TI$ e $h'' : TI \rightarrow TN$. Uma vez que $0 \longrightarrow I \longrightarrow I(I) \longrightarrow TI \longrightarrow 0$ é uma seqüência exata iniciando com um objeto injetivo segue que ela cinde e, conseqüentemente $I(I) \cong I \oplus TI$, mostrando assim que TI é injetivo. Logo, $f'' = h'' \circ g''$ fatora-se por um injetivo e, daí $T(f) = \underline{f''} = 0$. Isso vale para todos os morfismos em \mathcal{I} , assim pela propriedade universal de $\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$, temos que T induz um único funtor aditivo, $T : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ que também denotaremos por T .

Similarmente, para cada objeto M em \mathcal{A} , fixando uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow SM \longrightarrow P(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde $P(M)$ é projetivo (e injetivo) obtemos um funtor $S : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$.

Teorema 4.2.1. *Seja \mathcal{A} uma categoria de Frobenius. O funtor $T : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ é uma auto-equivalência com S sendo o quasi-inverso.*

Demonstração. Sejam M um objeto de $\underline{\mathcal{A}}$ e $S(M) = SM$ o objeto de uma seqüência exata escolhida

$$0 \longrightarrow SM \xrightarrow{\iota(M)} P(M) \xrightarrow{p(M)} M \longrightarrow 0$$

Usamos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow SM \xrightarrow{u(SM)} I(SM) \xrightarrow{\pi(SM)} TSM \longrightarrow 0$$

para obter $T(SM)$. Pelo Lema (4.1.4) e algumas discussões anteriores, além do fato que projetivos e injetivos coincidem, podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & SM & \xrightarrow{u(SM)} & I(SM) & \xrightarrow{\pi(SM)} & TSM & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \eta_M & & \\ 0 & \longrightarrow & SM & \xrightarrow{\iota(M)} & P(M) & \xrightarrow{p(M)} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tal que $\eta_M : TSM \rightarrow M$ é um isomorfismo em $\underline{\mathcal{A}}$.

Suponha que temos um mapa $f : M \rightarrow N$. Então definimos $S(f)$ por $\overline{f''} = \underline{f''}$

onde f'' é construído para fazer o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & SM & \xrightarrow{\iota^{(M)}} & P(M) & \xrightarrow{p^{(M)}} & M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f'' & & \downarrow & & \downarrow f \\
0 & \longrightarrow & SN & \xrightarrow{\iota^{(N)}} & P(N) & \xrightarrow{p^{(N)}} & N \longrightarrow 0
\end{array}$$

comutar. Assim, podemos construir dois diagramas comutativos, sendo livres com a identificação de mapas em $\underline{\mathcal{A}}$ e um representante em \mathcal{A} ,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & SM & \xrightarrow{u^{(SM)}} & I(SM) & \xrightarrow{\pi^{(SM)}} & TSM \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \eta_M \\
0 & \longrightarrow & SM & \xrightarrow{\iota^{(M)}} & P(M) & \xrightarrow{p^{(M)}} & M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow S(f) & & \downarrow & & \downarrow f \\
0 & \longrightarrow & SN & \xrightarrow{\iota^{(N)}} & P(N) & \xrightarrow{p^{(N)}} & N \longrightarrow 0
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & SM & \xrightarrow{u^{(SM)}} & I(SM) & \xrightarrow{\pi^{(SM)}} & TSM \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow S(f) & & \downarrow & & \downarrow TS(f) \\
0 & \longrightarrow & SN & \xrightarrow{u^{(SN)}} & I(SN) & \xrightarrow{\pi^{(SN)}} & TSN \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \eta_N \\
0 & \longrightarrow & SN & \xrightarrow{\iota^{(N)}} & P(N) & \xrightarrow{p^{(N)}} & N \longrightarrow 0
\end{array}$$

Dos dois diagramas temos que $\underline{f}\eta_M$ e $\eta_N TS(f)$ são mapas que são induzidos por $S(f) : SM \rightarrow SN$. Conseqüentemente,

$$\underline{f}\eta_M = \eta_N TS(f)$$

mostrando que $\eta : TS \rightarrow 1_{\underline{M}}$ é um isomorfismo natural. Analogamente, podemos construir um isomorfismo $\nu : ST \rightarrow 1_{\underline{M}}$ mostrando que T é uma equivalência com S um quasi-inverso. \square

Agora, iremos considerar uma classe de triângulos em $\underline{\mathcal{A}}$ e mostraremos que ela é uma triangulação. Sejam $f : M \rightarrow N$ um morfismo, e $0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow M' \rightarrow 0$ uma seqüência exata com I um objeto injetivo. Sejam $N \oplus^M I$ um *pushout* e o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{\pi} & M' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow p & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g} & N \oplus^M I & \xrightarrow{h'} & M' \longrightarrow 0
\end{array}$$

em que a linha inferior é uma sequência exata. Dado $v : M' \rightarrow TM$ um morfismo tal que \underline{v} é um isomorfismo. Então, sendo $L = N \oplus^N I$ e $h = v \circ h'$, temos um triângulo

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{H} TM$$

o qual será chamado de **triângulo padrão**. Defina \mathcal{T} a classe de todos os triângulos que são isomorfos a triângulos padrões. No próximo resultado, mostraremos que \mathcal{T} é uma classe de triângulos distintos.

Para a demonstração do teorema posterior precisamos do seguinte lema

Lema 4.2.2. *Considere um morfismo $f : M \rightarrow N$. Então quaisquer dois triângulos padrões de diagramas pushout*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{\pi} & M' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h} & M' \longrightarrow 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u'} & I' & \xrightarrow{\pi'} & M'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g'} & L' & \xrightarrow{h'} & M'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

são isomorfos.

Teorema 4.2.3. *A categoria $\underline{\mathcal{A}}$ com o automorfismo T e a classe \mathcal{T} é uma categoria triangulada.*

Demonstração(TR1) Cada triângulo isomorfo a um triângulo distinto é, por transitividade, isomorfo a um triângulo padrão e portanto é distinto. Cada morfismo $f : M \rightarrow N$ pode ser baseado em um triângulo distinto, uma vez que ele pode sempre ser baseado em um triângulo padrão. Do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \xrightarrow{id} & M & \xrightarrow{u(M)} & I(M) & \xrightarrow{\pi(M)} & TM \\
\downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow 0 & & \downarrow id \\
M & \xrightarrow{id} & M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TM
\end{array}$$

e visto que $I(M) \cong 0$ em $\underline{\mathcal{A}}$, temos que a linha inferior é um triângulo distinto.

(TR2) É suficiente considerar triângulos padrões. Dado

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} TM$$

um triângulo padrão construído do diagrama comutativo da forma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{\pi} & M' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow p & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h'} & M' \longrightarrow TM \end{array}$$

Conseqüentemente, v e $T(f)$ serão construídos do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{\pi} & M' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v' & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u(M)} & I(M) & \xrightarrow{\pi(M)} & TM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow T(f) \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u(N)} & I(N) & \xrightarrow{\pi(N)} & TN \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como $f' \circ v' \circ u = u(N) \circ f$ e L é o *pushout*, temos um único $\psi : L \longrightarrow I(N)$ tal que $\psi \circ g = u(N)$ e $\psi \circ p = f' \circ v'$. Visto que

$$\begin{aligned} (T(f)v h' - \pi(N)\psi)g &= T(f)v h' g - \pi(N)\psi g = 0 - \pi(N)u(N) = 0 \quad \text{e} \\ (T(f)v h' - \pi(N)\psi)p &= T(f)v \pi(M) - \pi(N)\varphi = 0 \end{aligned}$$

teremos $T(f) \circ v \circ h' = \pi(N) \circ \psi$. Portanto, podemos construir o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u(N)} & I(N) & \xrightarrow{\pi(N)} & TN \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g & & \downarrow i & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix}} & I(N) \oplus M' & \xrightarrow{\theta} & TN \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h' & & \downarrow \pi & & \\
 & & M' & \xlongequal{\quad} & M' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

em que as duas primeiras colunas e a linha superior são seqüências exatas. Conseqüentemente, $\theta = (\pi(N), -T(f) \circ v)$. Suponhamos que temos os mapas $\alpha : I \longrightarrow W$ e $\beta : I(N) \longrightarrow W$ como no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{u} & I \\
 f \downarrow & & \downarrow p \\
 N & \xrightarrow{g} & L \\
 u(N) \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix} \\
 I(N) & \xrightarrow{i_{I(N)}} & I(N) \oplus M' \\
 & & \exists! \delta \\
 & & W
 \end{array}$$

α (curved arrow from I to W)
 β (curved arrow from $I(N) \oplus M'$ to W)

tal que $\alpha \circ u = \beta \circ u(N) \circ f$. Então temos

$$\alpha \circ u = \beta \circ \psi \circ g \circ f = \beta \circ \psi \circ p \circ u = \beta \circ f' \circ v' \circ u.$$

Desse modo, existe um único mapa $\gamma : M' \longrightarrow W$ tal que $\alpha - \beta \circ f' \circ v' = \gamma \circ \pi$. Vamos definir $\delta : I(N) \oplus M' \longrightarrow W$ como $\delta := \beta \pi_{I(N)} + \gamma \pi_{M'}$. Então $\delta_{i_{I(N)}} = \beta$ e

$$\delta \begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix} p = (\beta \psi + \gamma h') p = \beta \psi p + \gamma h' p = \beta f' v' + \gamma \pi = \alpha$$

A unicidade de δ vem da unicidade de γ . Conseqüentemente, o retângulo é o

pushout. Contudo, o quadrado superior no retângulo é um *pushout* pelo lema do *pushout*, o quadrado inferior do retângulo é um *pushout*. Visto que $u(N)$ é um monomorfismo, temos que $\begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix}$ é um monomorfismo. Observe que

$$\theta \begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix} = (\pi(N), -T(f) \circ v) \begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix} = \pi(N)\psi - T(f)vh' = 0$$

Suponha que temos um mapa $(a, -b) : I(N) \oplus M' \longrightarrow W$ tal que

$$(a, b) \begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix} = a\psi - bh' = 0$$

Usando o fato que $h'g = 0$ e $u(N) = \psi g$, temos

$$au(N) = a\psi g = a\psi g - bh'g = (a\psi - bh')g = 0.$$

Portanto, existe um único $a' : TN \longrightarrow W$ tal que $a = a'\pi(N)$. E,

$$bh' = a\psi = a'\pi(N)\psi = a'T(f)vh'$$

como h' é epimorfismo temos que $b = a'T(f)$. Conseqüentemente, $(a, -b) = (a'\pi(N), -a'T(f)v) = a'(\pi(N), -T(f)v) = a'\theta$ mostrando que θ é o cokernel de $x = \begin{pmatrix} \psi \\ h' \end{pmatrix}$. Conseqüentemente, a primeira linha no diagrama abaixo é um triângulo padrão:

$$\begin{array}{ccccccc} N & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{x} & I(N) \oplus M' & \xrightarrow{\theta} & TN \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \pi_{M'} & & \parallel \\ N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h'} & M' & \xrightarrow{-T(f)v} & TN \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow v & & \parallel \\ N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h} & TM & \xrightarrow{-T(f)} & TN \end{array}$$

Todos os quadrados, exceto o do canto direito superior, comutam. Entretanto,

$$\theta - T(f)v = (\pi(N), 0)$$

mostra que $\theta - T(f)v$ fatora-se junto a um injetivo, ou seja, todo diagrama comuta em $\underline{\mathcal{N}}$. Além disso, π_{TM} e v são isomorfismos, mostrando que o triângulo inferior é isomorfo ao triângulo superior em $\underline{\mathcal{A}}$. Portanto, o triângulo inferior é um triângulo distinto.

(TR3) É suficiente considerar triângulos padrões. Suponha que temos dois triângulos padrões

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{u} & M & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\pi} & M' \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & \downarrow \alpha & & \parallel \\ & & N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h} & M' \xrightarrow{v} TM \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{u'} & X & \longrightarrow & J & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0 \\ & & f' \downarrow & & \downarrow \alpha' & & \parallel \\ & & Y & \xrightarrow{g'} & Z & \xrightarrow{h'} & X' \xrightarrow{\mu} TX \end{array}$$

e o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\underline{f}} & N & \xrightarrow{\underline{g}} & L & \xrightarrow{\underline{h}} & TM \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \underline{\psi} & & & & \downarrow T(\varphi) \\ X & \xrightarrow{\underline{f}'} & Y & \xrightarrow{\underline{g}'} & Z & \xrightarrow{\underline{h}'} & TX \end{array} \quad (4.1)$$

Desde que \underline{v} seja um isomorfismos podemos encontrar um ω tal que $\omega \underline{v} = 1_{M'}$ e $\underline{v} \omega = 1_{TM}$. Conseqüentemente, podemos construir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u(M)} & I(M) & \xrightarrow{\pi(M)} & TM \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \omega' & & \downarrow \omega \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{\pi} & M' \longrightarrow 0 \\ & & \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u'} & J & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \mu' & & \downarrow \mu \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u(X)} & I(X) & \xrightarrow{\pi(X)} & TX \longrightarrow 0 \end{array}$$

e temos $T(\varphi) = \underline{\mu \varphi'' \omega}$. Como $\underline{\psi f} = \underline{f' \varphi}$ existe um injetivo I' tal que $\underline{\psi f} - \underline{f' \varphi}$

fatora-se junto a I , ou seja,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi f - f' \varphi} & Y \\ & \searrow \epsilon & \nearrow \beta \\ & & I' \end{array}$$

Um vez que ϵ fatora-se junto a u podemos assumir que $I' = I$ e $\epsilon = u$. Assim,

$$\psi f = f' \varphi + \beta u$$

Consideremos os dois morfismos $g' \psi : N \rightarrow Z$ e $\alpha' \varphi' + g' \beta : I \rightarrow Z$. Uma vez que C é *pushout* e

$$g' \psi f = g' f' \varphi + g' \beta u = \alpha' u' \varphi + g' \beta u = \alpha' \varphi' u + g' \beta u = (\alpha' \varphi' + g' \beta) u,$$

temos um único mapa $\theta : L \rightarrow Z$ tal que $\theta g = g' \psi$ e $\theta \alpha = \alpha' \varphi' + g' \beta$. Usando θ ,

$$(h' \theta - \varphi'' h) \alpha = h' \alpha' \varphi' + h' g' \beta - \varphi'' \pi(M) = \pi(M') \varphi' - \varphi'' \pi(M) = 0$$

e

$$(h' \theta - \varphi'' h) g = h' \theta g - \varphi'' h g = h' g' \psi - \varphi'' h g = 0 - 0 = 0$$

mostrando que $h' \theta = \varphi'' h$ usando que L é um *pushout*. Consequentemente, $\theta : L \rightarrow Z$ é um mapa para que

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h} & M' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \theta & & \downarrow \varphi'' \\ X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{g'} & Z & \xrightarrow{h'} & X' \end{array}$$

comute. Conseqüentemente, o diagrama maior

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{vh} & TM \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \omega \\
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{h} & M' \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \theta & & \downarrow \varphi'' \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{g'} & Z & \xrightarrow{h'} & X' \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \mu \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{g'} & Z & \xrightarrow{\mu h'} & TX
 \end{array}$$

comuta, mostrando que $\theta : L \rightarrow Z$ completa o diagrama (4.1) fazendo ele comutar.

(TR4) Suponha que temos três triângulos distintos

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{f'} & W & \xrightarrow{f''} & TM \\
 & & & & & & \\
 N & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{g'} & E & \xrightarrow{g''} & TN \\
 & & & & & & \\
 M & \xrightarrow{h=gf} & L & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{h''} & TM
 \end{array}$$

podemos assumir cada triângulo distinto é padrão. Atualmente, pelo lema anterior podemos assumir que o primeiro e o terceiro triângulo são construídos como

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u(M)} & I(M) & \xrightarrow{\pi(M)} & TM & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & W & \xrightarrow{f''} & TM & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u(M)} & I(M) & \xrightarrow{\pi(M)} & TM & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow h=gf & & \downarrow \gamma & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{h''} & N' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

e o segundo triângulo é construído como

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u(W)f'} & I(W) & \xrightarrow{\pi} & N' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow g & & \downarrow \beta & & \parallel \\
& & L & \xrightarrow{g'} & E & \xrightarrow{g''} & N' \xrightarrow{v} TN
\end{array}$$

Note que, como $u(W)$ e f' são monomorfismos, sua composição também é um monomorfismo. Já que W é *pushout* e

$$(h'g)f = h'h = \gamma u(M)$$

existe um único $j : W \rightarrow F$ tal que $jf = h'g$ e $j\alpha = \gamma$. Similarmente,

$$g'h = g'gf = \beta u(W)f'f = \beta u(W)\alpha u(M)$$

acarreta na existência de um único $j' : F \rightarrow E$ tal que $j'h' = g'$ e $j'\gamma = \beta u(W)\alpha$. Como

$$(j'j - \beta u(W))\alpha = j'\gamma - \beta u(W)\alpha = \beta u(W)\alpha - \beta u(W)\alpha = 0 \quad e$$

$$(j'j - \beta u(W))f' = j'h'g - \beta u(W)f' = g'g - g'g = 0$$

temos $j'j = \beta u(W)$ usando o fato que W é *pushout*. Assim sendo, podemos contruir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & M & \xrightarrow{u(M)} & I(M) & & \\
& & \downarrow f & & \downarrow \alpha & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & W & \xrightarrow{u(W)} & I(W) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow g & & \downarrow j & & \downarrow \beta \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{j'} & E \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

O quadrado superior a esquerda é um *pushout* por construção e um vez que $gf = h$ e $j\alpha = \gamma$ vemos que o retângulo a esquerda é também um *pushout*. Portanto, pelo lema do *pushout*, o quadrado inferior a esquerda é um *pushout*. Além disso, $j'h' = g'$ mostra que o retângulo horizontal é um *pushout* por construção, usando novamente o lema do *pushout* temos que o quadrado a direita é um *pushout*. Podemos usar o quadrado inferior a direita para construir o seguinte triângulo padrão

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{u(W)} & I(W) & \xrightarrow{\pi(W)} & TW & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow j & & \downarrow \beta & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{j'} & E & \xrightarrow{j''} & TW & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

O mapa $\underline{v} : N' \rightarrow TN$ foi escolhido para ser um isomorfismo. Seja $\underline{\mu}$ um inverso. Usaremos os diagramas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u(M)} & I(M) & \xrightarrow{\pi(M)} & TM & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow u(M)\alpha & & \downarrow \varphi & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u(W)f'} & I(W) & \xrightarrow{\pi} & N' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow v' & & \downarrow v & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u(N)} & I(N) & \xrightarrow{\pi(N)} & TN & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u(N)} & I(N) & \xrightarrow{\pi(N)} & TN \longrightarrow 0 \\
& & \parallel f & & \downarrow \mu' & & \downarrow \mu \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u(W)f'} & I(W) & \xrightarrow{\pi} & N' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f' & & \parallel & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{u(W)} & I(W) & \xrightarrow{\pi(W)} & TW \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

são construídos de maneira usual, para determinar os representantes $T(f) = v\varphi$ e $T(f') = \psi\mu$.

Agora, temos os dados para construir o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{f'} & W & \xrightarrow{f''} & TM \\
\parallel & & \downarrow g & & \downarrow j & & \parallel \\
M & \xrightarrow{h} & L & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{h''} & TM \\
& & \downarrow g' & & \downarrow j' & & \downarrow T(f) \\
& & E & \xrightarrow{=} & E & \xrightarrow{vg''} & TN \\
& & \downarrow vg'' & & \downarrow j'' & & \\
& & TN & \xrightarrow{T(f')} & TW & &
\end{array}$$

Precisamos verificar a comutatividade. Fazendo a leitura da esquerda superior para a direita inferior, temos que o quadrado 1 comuta pois $h = gf$ por definição. O quadrado 2 comuta pois j foi construído tal que $jf' = h'g$ e $j\alpha = \gamma$. O quadrado 3 comuta, uma vez que

$$\begin{aligned}
(h''j - f'')\alpha &= h''\gamma - \pi(M) = 0 \\
(h''j - f'')f' &= h''h'g - f''f' = 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

e W é um *pushout*. O quadrado 4 comuta pela construção de j' . O quadrado 5

comuta pois

$$\begin{aligned} (T(f)h'' - vg''j')\gamma &= v\varphi h''\gamma - vg''j'\gamma = v(\varphi\pi(M) - g''\beta u(W)\alpha) = v(\pi u(W)\alpha - \pi u(W)\alpha) = 0 \\ (T(f)h'' - vg''j')h' &= T(f)h''h' - vg''g' = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

e F é um *pushout*. O último quadrado comuta em $\underline{\mathcal{A}}$. De fato,

$$\begin{aligned} (\psi g'' - j'')\beta &= \psi g''\beta - j''\beta = \psi\pi - \pi(W) = 0 \\ (\psi g'' - j'')g' &= \psi g''g' - j''g' = 0 - j''j'h' = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

mostra que $\psi g'' = j''$ uma vez que E é *pushout*. Consequentemente, em $\underline{\mathcal{A}}$,

$$T(f')\underline{vg''} - \underline{j''} = \underline{\psi\mu vg''} - \underline{j''} = \underline{\psi g''} - \underline{j''} = 0$$

Portanto vale o axioma do octaedro.

□

Capítulo 5

Uma Construção Alternativa para o Funtor de Happel

Nesse capítulo iremos abordar o resultado principal desta dissertação. Provaremos que dada uma k -álgebra de dimensão finita A e de dimensão global finita, a categoria derivada limitada $D^b(\text{mod}A)$ é equivalente a categoria estável da categoria de Frobenius $\text{mod } \hat{A}$, onde \hat{A} é álgebra repetitiva de A .

5.1 Resultados preliminares

O resultado original do artigo [8] foi feito pensando em uma álgebra auto-injetora de dimensão finita, mas os argumentos servem para uma álgebra de Frobenius.

Teorema 5.1.1 ([8]). *Se Λ é uma álgebra de Frobenius, então existe uma equivalência $F : \underline{\text{mod}}\Lambda \rightarrow \frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$ de categorias trianguladas.*

Demonstração. Considere o funtor aditivo

$$F' : \text{mod}\Lambda \rightarrow \frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$$

que leva um módulo M em seu complexo talo no grau 0 na categoria derivada e depois o projeta módulo $K^b(P_\Lambda)$. Seja P um módulo projetivo, então $F'(P) \in \text{Obj } K^b(P_\Lambda)$. Como estamos quocientando por $K^b(P_\Lambda)$ temos que $F'(P) = 0$. Considere agora

$u : M \rightarrow M'$ que se fatora por um projetivo P , isto é,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & M' \\ & \searrow v & \nearrow w \\ & & P \end{array}$$

onde $u = w \circ v$, aplicando F' teremos

$$\begin{array}{ccc} M^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & M'^\bullet, \\ & \searrow 0 & \nearrow w^\bullet \\ & & 0^\bullet \end{array}$$

ou seja, u é levado no zero, então podemos passar o quociente no domínio de F' que nos dá o funtor

$$F : \underline{\text{mod}}\Lambda \rightarrow \frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}.$$

Agora vamos mostrar que F é de fato uma equivalência de categorias. Primeiro mostraremos que F é um funtor exato, isto é, leva triângulo distinto em triângulo distinto. Considere um triângulo distinto

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$$

em $\underline{\text{mod}}\Lambda$ vindo de um diagrama *pushout* de módulos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & TX \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde $X \rightarrow I$ é a inclusão de X em seu envelope injetivo. Do primeiro quadrado, que é comutativo, temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I \oplus Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Aplicando F , temos a sequência

$$0 \longrightarrow FX \xrightarrow{f^\bullet} FY \xrightarrow{g^\bullet} FZ \longrightarrow 0$$

que é exata. Uma vez que temos uma sequência exata na categoria $\frac{D^b(mod\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$ abeliana e triangulada, temos que o triângulo distinto baseado em f^\bullet é da forma

$$\begin{array}{ccc} & T(\text{Ker } f^\bullet) \oplus \text{Coker } f^\bullet & \\ h^\bullet \swarrow & & \nwarrow \\ FX & \xrightarrow{f^\bullet} & FY \\ [1] \searrow & & \end{array}$$

que é igual a

$$\begin{array}{ccc} & FZ & \\ h^\bullet \swarrow & & \nwarrow g^\bullet \\ FX & \xrightarrow{f^\bullet} & FY \\ [1] \searrow & & \end{array}$$

Visto que sequências exatas numa categoria triangulada cindem, obtemos

$$FY = FX \oplus FZ.$$

Em seguida, observe que F é pleno, uma vez que F' é pleno. Basta tomarmos o morfismo no grau zero. Além disso, se $X \neq 0$ então $FX \neq 0$.

Com essas propriedades podemos mostrar que F é fiel. Suponha $\alpha : X \rightarrow Y$ é um mapa em $mod\Lambda$ tal que $F\alpha = 0$ e suponha que α baseia um triângulo distinto

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\eta} Z \longrightarrow TX.$$

Daí, temos que

$$FX \xrightarrow{0} FY \xrightarrow{g} FZ \longrightarrow FTX.$$

Assim, g é monomorfismo que cinde, e portanto $1_{FY} : FY \rightarrow FY$ se fatora através de $FY \rightarrow FZ$. Uma vez que F é pleno, existe um mapa $\beta : Y \rightarrow Y$, fatorando-se através de $\eta : Y \rightarrow Z$, tal que $F\beta$ é um isomorfismo. Observe a seguinte ilustração

$$\begin{array}{ccc} & C_\beta & \\ & \swarrow \quad \nwarrow & \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y \\ [1] \searrow & & \end{array} \xrightarrow{F} \begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \swarrow \quad \nwarrow & \\ FY & \xrightarrow{F\beta} & FY \\ [1] \searrow & & \end{array}$$

temos que o cone de β é levado a zero por F . Pela contrapositiva do fato que se $X \neq 0$ então $FX \neq 0$, temos que o cone de β tem que ser zero e daí β é um isomorfismo, o que implica que η é um monomorfismo que cinde e, portanto α é nulo. Logo $F\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, ou seja, F é fiel.

Resta mostrar que F é denso. Para isto, considere $X^\bullet \in \text{Obj} \left(\frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)} \right)$, o qual podemos considerar $X^\bullet \in \text{Obj} (D^b(\text{mod}\Lambda))$, visto que os objetos são os mesmos. Portanto temos $X^\bullet \simeq P^*$, onde

$$P^* = \dots \longrightarrow P^r \longrightarrow P^{r+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^s \longrightarrow 0$$

é o gerador de $D^b(\text{mod}\Lambda)$, com $r < 0$ e $\forall n < r$, $H^n(P^*) = 0$. Vamos considerar o mapa natural de P^* para seu truncamento. Daí

$$\begin{array}{ccccccccccc} P^* : & \dots & \longrightarrow & P^{r-1} & \longrightarrow & P^r & \longrightarrow & P^{r+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P^s & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \eta & & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{P^*} : & \dots & \longrightarrow & P^{r-1} & \longrightarrow & P^r & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

O cone de η é um complexo limitado de projetivos e, portanto é zero em $\frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$.

Logo, η é isomorfismo em $\frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$ o que implica $X^\bullet \simeq P^* \simeq \overline{P^*}$. Por outro lado, dado $M \in \text{mod}\Lambda$ temos que $F'M : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$. Tomemos a resolução projetiva do módulo dado e considere o morfismo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} M^R : & \dots & \longrightarrow & Q^2 & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \dots \\ \downarrow \xi & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 1_M & & \downarrow & & \downarrow & & \\ F'M : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \dots \end{array}$$

Observe que $H^n(\xi)$ é isomorfismo para todo n inteiro. Assim, ξ é quasi-isomorfismo, o que implica que ξ é isomorfismo em $D^b(\text{mod}\Lambda)$ e portanto no quociente $\frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$.

A partir de $\overline{P^*}$ podemos fazer a seguinte construção

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & P^{r-1} & \xrightarrow{d^{r-1}} & P^r & \xrightarrow{d^r} & Q^{r+1} \longrightarrow \dots & \longrightarrow Q^0 \longrightarrow M = \text{Coker } d^1 \longrightarrow 0 \\
& & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
& & & \text{Im } d^{r-1} & & \frac{P^r}{\text{Im } d^{r-1}} & \dots
\end{array}$$

resultando na seqüência exata

$$Q^* : \dots \longrightarrow P^{r-1} \longrightarrow P^r \longrightarrow Q^{r+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Q^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

que é resolução projetiva de um módulo $M \in \text{mod } \Lambda$.

Uma vez que em $D^b(\text{mod } \Lambda)$ resoluções projetivas de um módulo nos dão um único complexo, tomemos Q^* como sendo este complexo e consideremos o seguinte morfismo

$$\begin{array}{cccccccc}
\overline{P^*} : & \dots & \longrightarrow & P^{r-1} & \longrightarrow & P^r & \longrightarrow & Q^{r+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & 0 \dots \\
\downarrow \alpha & & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & & \\
Q^* : & \dots & \longrightarrow & P^{r-1} & \longrightarrow & P^r & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \dots
\end{array}$$

Temos que α é quasi-isomorfismo em $K^b(\text{mod } \Lambda)$. Desse modo, α é isomorfismo em $D^b(\text{mod } \Lambda)$. Logo, é isomorfismo em $\frac{D^b(\text{mod } \Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$. Portanto,

$$F^i M \simeq M^R \longleftrightarrow Q^* \simeq \overline{P^*} \simeq P^* \simeq X^\bullet$$

□

A partir daqui usamos como principal referência o artigo [2]

Seja Λ uma álgebra de Frobenius e X^\bullet um complexo de Λ -módulos. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ vamos definir um complexo $L_n X^\bullet$ e um morfismo $\lambda_{n, X^\bullet} : X^\bullet \rightarrow L_n X^\bullet$ de complexos como segue

$$\begin{array}{ccccccccccc}
X^\bullet & \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \dots & (5.1) \\
\lambda_{n, X^\bullet} \downarrow & & & \parallel & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon' & & \parallel & & & \\
L_n X^\bullet & \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & X^{n+2} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

onde o morfismo $\epsilon : X^n \rightarrow I$ é um envelope injetivo fixado arbitrariamente escolhido e

C é obtido como *pushout* de d_X^n ao longo de ϵ . O morfismo de X^{n-1} a I é trivialmente a composição $\epsilon \circ d_X^{n-1}$. Já o morfismo β é dado pela universalidade do *pushout* C , como pode ser visto no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1} \\
 \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon' \\
 I & \xrightarrow{\alpha} & C \\
 & \searrow h=0 & \nearrow \exists! \beta \\
 & & X^{n+2}
 \end{array}$$

d^{n+1} (curved arrow from X^{n+1} to X^{n+2})

Se caso X^n for injetivo, escolhemos ϵ como sendo a identidade. Observe que a construção não é única, pois vai depender da escolha do envelope injetivo $\epsilon : X^n \rightarrow I$. Dualmente definimos um complexo $R_n X^\bullet$ e um morfismo $\rho_{n, X^\bullet} : R_n X^\bullet \rightarrow X^\bullet$ de complexo como

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 R_n X^\bullet & & \cdots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{d^n \circ \varphi} & X^{n+1} & \xrightarrow{d^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 \rho_{n, X^\bullet} \downarrow & & & & \parallel & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \parallel & & \parallel & & \\
 X^\bullet & & \cdots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{d^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

onde o C no grau $n - 1$ do primeiro complexo é obtido através do *pull-back* de d_X^{n-1} ao longo de φ .

Se X^\bullet é um complexo limitado, tal que $X^i = 0$ para todo $i < s$ e todo $i > r$, onde supomos $s \leq 0 \leq r$, então podemos aplicar esse processo várias vezes, para obter um complexo

$$\tilde{X}^\bullet = R_1 R_2 \cdots R_{r-1} R_r (L_{-1} L_{-2} \cdots L_{s+1} L_s X^\bullet)$$

que tem módulos injetivos em graus negativos e módulos projetivos em graus positivos. Observe que \tilde{X} não depende dos números r e s desde que $X^i = 0 \forall i < s$ e $\forall i > r$. Faça $\tilde{F}X = \tilde{X}^0$, o Λ -módulo no grau zero, considerado como um objeto em $\underline{\text{mod}}\Lambda$.

Se $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um morfismo de complexos limitados, existe um morfismo $L_n f : L_n X^\bullet \rightarrow L_n Y^\bullet$ tal que $L_n f \circ \lambda_{n, X^\bullet} = \lambda_{n, Y^\bullet} \circ f$ como podemos ver no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
& & (L_n X^\bullet)^n & \longrightarrow & (L_n X^\bullet)^{n+1} \\
& \nearrow \lambda_{n, X^\bullet} & \downarrow & \nearrow & \downarrow (L_n f)^{n+1} \\
X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & & \\
& \downarrow f^n & \downarrow & & \\
& & (L_n Y^\bullet)^n & \dashrightarrow & (L_n Y^\bullet)^{n+1} \\
& \nearrow & \downarrow & \nearrow \lambda_{n, Y^\bullet} & \\
Y^n & \longrightarrow & Y^{n+1} & &
\end{array}$$

Consequentemente, temos o morfismo $\tilde{f} : \tilde{X}^\bullet \rightarrow \tilde{Y}^\bullet$, onde $\tilde{f} = (R_1 \cdots R_r)(L_1 \cdots L_s)(f)$. Esses morfismos $L_n f$ e \tilde{f} não são únicos, e assim a construção a princípio não é functorial.

Recordemos que os objetos de $D^b(\text{mod } \Lambda)$ são os mesmos que os de $K^b(\text{mod } \Lambda)$, mas os morfismos de X^\bullet a Y^\bullet são classes de equivalência de telhados à esquerda

$$\begin{array}{ccc}
& Z_f^\bullet & \\
f' \swarrow & & \searrow f'' \\
X^\bullet & \sim & Y^\bullet
\end{array}$$

onde f' é um quasi-isomorfismo, ou seja, f' induz isomorfismos em todos os grupos de cohomologia, ou equivalentemente pelo Lema (3.2.2) existe um triângulo

$$Z_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow Z'^\bullet \longrightarrow TZ_f^\bullet$$

em $K^b(\text{mod } \Lambda)$ com Z'^\bullet acíclico.

Vamos também denotar o telhado acima simplesmente pelo par (f', f'') . Assim, recordemos também que dois pares quaisquer, (f', f'') e (g', g'') , são equivalentes se existem quasi-isomorfismos $h : H^\bullet \rightarrow Z_f^\bullet$ e $h' : H^\bullet \rightarrow Z_g^\bullet$ tais que $f' \circ h = g' \circ h'$ e $f'' \circ h = g'' \circ h'$ como podemos ver no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
& & Z_f^\bullet & & \\
& \nearrow f' & \uparrow h & \searrow f'' & \\
X^\bullet & & H^\bullet & & Y^\bullet \\
& \nwarrow g' & \downarrow h' & \nearrow g'' & \\
& & Z_g^\bullet & &
\end{array}$$

Veremos que a construção leva a morfismos em $K^b(mod\Lambda)$ de forma direta e envia quasi-isomorfismos em isomorfismos em $mod\Lambda$. Portanto, se $f = (f', f'') : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um morfismo em $D^b(mod\Lambda)$, podemos fazer $\tilde{f} = \tilde{f}'' \circ (\tilde{f}')^{-1}$, onde a construção independe das escolhas dos representantes.

Agora, seja A uma K -álgebra de dimensão finita e seja $\Lambda = \hat{A}$ a álgebra repetitiva de A . Então para qualquer complexo X^\bullet em $D^b(modA)$ considere como um objeto em $D^b(mod\hat{A})$, podemos aplicar a construção e obter um \hat{A} -módulo $(\tilde{X}^\bullet)^0$ tomando o grau zero do complexo \tilde{X}^\bullet .

Lema 5.1.2. (a) *Os morfismos λ_{n,X^\bullet} e ρ_{n,X^\bullet} são quasi-isomorfismos (em qualquer caso, independentemente da escolha na definição).*

(b) *Para um morfismo $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ de complexos, diferentes escolhas na definição de $L_n f$ (respectivamente $R_n f$) leva a morfismos homotópicos.*

(c) *Suponha que $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um morfismo de complexos que é homotópico a zero. Se Y^{n-1} é um Λ -módulo injetivo então $L_n f$ é homotópico a zero; similarmente, se X^{n+1} é um Λ -módulo projetivo então $R_n f$ é homotópico a zero.*

Demonstração. (a) Iremos mostrar que λ_{n,X^\bullet} é um quasi-isomorfismo e para o morfismo ρ_{n,X^\bullet} o resultado segue de forma análoga. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^\bullet & & \cdots \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow \cdots \\
 \lambda_{n,X^\bullet} \downarrow & & & \parallel & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon' & & \parallel & \\
 L_n X^\bullet & & \cdots \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & X^{n+2} & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Devemos mostrar que os morfismos $H^p(\lambda_{n,X^\bullet})$ são isomorfismos $\forall p \in \mathbb{Z}$. Para os graus $p \neq n$ e $p \neq n+1$ basta considerarmos a identidade como regra. Para

(b) Deixamos a cargo do leitor, ver [2].

(c) Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{d_X^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f^{n-2} & \nearrow h^{n-1} & \downarrow f^{n-1} & \nearrow h^n & \downarrow f^n & \nearrow h^{n+1} & \downarrow f^{n+1} & \nearrow h^{n+2} & \downarrow f^{n+2} & & \\
 \dots & \longrightarrow & Y^{n-2} & \xrightarrow{d_Y^{n-2}} & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \xrightarrow{d_Y^{n+1}} & Y^{n+2} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Gostaríamos de encontrar morfismos $L_n h^{n+1}$ e $L_n h^n$ tais que $L_n f^n = L_n h^{n+1} \circ \alpha_X + \epsilon_Y \circ d_Y^{n-1} \circ L_n h^n$. Do diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & X^n \xrightarrow{\epsilon_X} I_X \\
 & & \downarrow h^n \nearrow L_n h^n \\
 & & Y^{n-1}
 \end{array}$$

obtemos o morfismo $L_n h^n : I_X \rightarrow Y^{n-1}$, considerando que Y^{n-1} é injetivo.

Vamos agora obter $L_n f^{n+1}$ como no diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{d_X^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\epsilon_X \circ d_X^{n-1}} & I_X & \xrightarrow{\alpha_X} & C_X & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow L_n f^{n-2} & \nearrow L_n h^{n-1} & \downarrow L_n f^{n-1} & \nearrow L_n h^n & \downarrow \epsilon'_X & \nearrow L_n h^{n+1} & \downarrow L_n f^n & & \\
 \dots & \longrightarrow & Y^{n-2} & \xrightarrow{d_Y^{n-2}} & Y^{n-1} & \xrightarrow{\epsilon_Y \circ d_Y^{n-1}} & I_Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & C_Y & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Considere o diagrama *pushout*

$$\begin{array}{ccc}
X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1} \\
\downarrow \epsilon_X & & \downarrow \epsilon'_X \\
I_X & \xrightarrow{\alpha} & C_X \\
& & \searrow \exists! L_n h^{n+1} \\
& & X^{n+2} \\
& \nearrow L_n f^n - \epsilon_Y \circ d_Y^{n-1} \circ L_n h^n & \\
& & \nearrow \epsilon_Y \circ h^{n+1}
\end{array}$$

Assim, existe único $L_n h^{n+1} : C_X \rightarrow I_Y$ tal que $L_n h^{n+1} \circ \alpha_X = L_n f^n - \epsilon_Y \circ d_Y^{n-1} \circ L_n h^n$, ou seja,

$$L_n f^n = L_n h^{n+1} \circ \alpha_X + \epsilon_Y \circ d_Y^{n-1} \circ L_n h^n$$

Para finalizar a demonstração basta fazer $L_n h^k = h^k \quad \forall k \neq n, n+1$. Portanto, $L_n f^\bullet$ é homotópico a zero. □

Para um complexo X^\bullet com $X^j = 0$ para todo $j \leq r$ e um inteiro $i > r$, defina um complexo $L_{<i} X^\bullet = L_{i-1} L_{i-2} \cdots L_r X^\bullet$ (note a independência sobre a escolha de r) e estenda sobre morfismos de maneira óbvia. Denote por $\lambda_{<i, X^\bullet}$ a composição dos seguintes morfismos, que são quasi-isomorfismos pela primeiro item do Lema (5.1.2),

$$X^\bullet \xrightarrow{\lambda_{r, X^\bullet}} L_r X^\bullet \xrightarrow{\lambda_{r+1, L_r X^\bullet}} L_{r+1} L_r X^\bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{<i-1} X^\bullet \xrightarrow{\lambda_{i-1, L_{r-1} X^\bullet}} L_{<i} X^\bullet$$

Pelo segundo item do Lema (5.1.2), a composição de $L_{<i}$ com a projeção canônica $q : C^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow K^b(\text{mod } \Lambda)$ é funtorial, já pelo terceiro item fatora-se através de q . Portanto, construímos funtores

$$\bar{L}_{<i} : K^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow K^b(\text{mod } \Lambda)$$

e quasi-isomorfismos $\bar{\lambda}_{<i, X^\bullet} : X^\bullet \rightarrow \bar{L}_{<i} X^\bullet$, que forma um morfismo de funtores $\bar{\lambda}_{<i} : id \rightarrow \bar{L}_{<i}$. Similarmente obtemos um funtor

$$\bar{R}_{>i} : K^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow K^b(\text{mod } \Lambda)$$

e um morfismo de funtores $\bar{\rho}_{>i} : \bar{R}_{>i} \longrightarrow id$.

Se $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é um quasi-isomorfismo, então $\bar{L}_{<i}f$ e $\bar{R}_{>i}f$ são também quasi-isomorfismos. Consequentemente $\bar{L}_{<i}$ e $\bar{R}_{>i}$ induz funtores

$$\tilde{L}_{<i}, \tilde{R}_{>i} : D^b(mod\Lambda) \longrightarrow D^b(mod\Lambda),$$

que são equivalências.

Claramente, temos os seguintes isomorfismos de funtores

$$\tilde{\lambda}_{<i} : id \longrightarrow \tilde{L}_{<i}, \quad \tilde{\rho}_{>i} : \tilde{R}_{>i} \longrightarrow id.$$

O seguinte resultado mostra que os funtores $\tilde{L}_{<i}$ e $\tilde{R}_{>i}$ comutam (a menos de isomorfismo de funtores).

Lema 5.1.3. (a) $\bar{L}_{<i}\bar{R}_{>i}\bar{\lambda}_{<i} : \bar{L}_{<i}\bar{R}_{>i} \longrightarrow \bar{L}_{<i}\bar{R}_{>i}\bar{L}_{<i} = \bar{R}_{>i}\bar{L}_{<i}$ é um morfismo de funtores $K^b(mod\Lambda) \longrightarrow K^b(mod\Lambda)$, que avalia os quasi-isomorfismos para cada objeto.

(b) $\tilde{L}_{<i}\tilde{R}_{>i}\tilde{\lambda}_{>i} : \tilde{L}_{<i}\tilde{R}_{>i} \longrightarrow \tilde{L}_{<i}\tilde{R}_{>i}\tilde{L}_{<i} = \tilde{R}_{>i}\tilde{L}_{<i}$ é um isomorfismo de funtores $D^b(mod\Lambda) \longrightarrow D^b(mod\Lambda)$.

A equivalência

$$G = \tilde{R}_{>0}\tilde{L}_{<0} : D^b(mod\Lambda) \longrightarrow D^b(mod\Lambda)$$

atribui a cada complexo X^\bullet um complexo GX^\bullet , com módulos injetivos em graus negativos e módulos projetivos em graus positivos. De modo que $G \sim id_{D^b(mod\Lambda)}$.

A seguinte proposição mostra que para uma álgebra de Frobenius Λ , a construção $R_{>0}L_{<0}$, que não é funtorial, é estendida a uma funtorial compondo com funtores adequados, como mostrado na figura em (5.2).

Proposição 5.1.4. Se Λ é de Frobenius e $p : mod\Lambda \longrightarrow \underline{mod}\Lambda$, a projeção canônica, então $X \mapsto p(R_{>0}L_{<0}X)^0 =: F_1X$ define um funtor $F_1 : C^b(mod\Lambda) \longrightarrow \underline{mod}\Lambda$, que fatora-se sobre a projeção canônica $q : C^b(mod\Lambda) \longrightarrow K^b(mod\Lambda)$. Assim, temos um funtor $F_2 : K^b(mod\Lambda) \longrightarrow \underline{mod}\Lambda$ com $F_2q = F_1$.

Demonstração. Uma verificação direta produz, que para um morfismo $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ em $C^b(mod\Lambda)$, $p(L_n f)^{n+1}$ está bem definida, independentemente da possível escolha

para $L_n f$. Conseqüentemente, $p(R_{>0}L_{<0}f)^0$ está bem definida como morfismo em $\underline{\text{mod}}\Lambda$, e portanto $F_1 : X^\bullet \mapsto p(R_{>0}L_{<0}X^\bullet)^0$ é funtorial.

No seguinte diagrama comutativo, indicamos com a flecha pontilhada a construção que não é funtorial e por flechas completas as que são.

$$\begin{array}{ccc}
 C^b(\text{mod}\Lambda) & \xrightarrow{\text{---}R_{>0}L_{<0}\text{---}} C^b(\text{mod}\Lambda) & \xrightarrow{X^\bullet \mapsto X^0} \text{mod}\Lambda \\
 \downarrow q & \searrow F_1 & \downarrow p \\
 K^b(\text{mod}\Lambda) & \xrightarrow{F_2} & \underline{\text{mod}}\Lambda
 \end{array} \tag{5.2}$$

Agora, se f é homotópico a zero, então $R_{>0}L_{<0}f$ é também homotópico a zero, pelo Lema (5.1.2) e portanto temos para alguma homotopia h que $(R_{>0}L_{<0}f)^0 = d_Y^{-1}h^0 + h^1d_X^0$, um morfismo que fatora-se sobre um projetivo. Assim, $p(R_{>0}L_{<0}f)^0 = 0$, e portanto a construção $F_2 : X^\bullet \mapsto (R_{>0}L_{<0}X^\bullet)^0$ está bem definida na categoria de homotopia. \square

Para a prova do seguinte resultado, denotamos por $Z^{\leq 0}$ a truncção a direita de um complexo Z^\bullet , isto é, o complexo com $(Z^{\leq 0})^i = 0$ para $i > 0$ e $(Z^{\leq 0})^i = Z^i$ para $i \leq 0$. Também denotamos por $Z^{=0}$ o complexo talo concentrado no grau zero, isto é $(Z^{=0})^i = 0$ para $i \neq 0$ e $(Z^{=0})^0 = (Z^\bullet)^0$. Observe que existem morfismos canônicos $Z^\bullet \rightarrow Z^{\leq 0}$ e $Z^{=0} \rightarrow Z^{\leq 0}$. Caro leitor, não confunda a truncção acima com o processo de truncamento visto na seção (3.2).

O seguinte lema será usado para ver que F_2 fatora-se através da projeção $\pi' : K^b(\text{mod}\Lambda) \rightarrow D^b(\text{mod}\Lambda)$.

Lema 5.1.5. *Existe um isomorfismo $\xi : FF_2 \rightarrow \pi G \pi'$ de funtores*

$$K^b(\text{mod}\Lambda) \longrightarrow \frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)},$$

onde $\pi' : K^b(\text{mod}\Lambda) \rightarrow D^b(\text{mod}\Lambda)$ é a projeção canônica.

Demonstração. Inicialmente vamos analisar o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 C^b(mod\Lambda) & \xrightarrow{R_{>0}L_{<0}} & C^b(mod\Lambda) & \xrightarrow{X^\bullet \mapsto X^0} & mod\Lambda & (5.3) \\
 \downarrow q & & \searrow F_1 & & \downarrow p \\
 K^b(mod\Lambda) & \xrightarrow{F_2} & & & \underline{mod}\Lambda \\
 \downarrow \pi' & & \searrow F \circ F_2 & & \downarrow F \\
 D^b(mod\Lambda) & & & & D^b(mod\Lambda) \\
 \downarrow G & & \xrightarrow{\pi} & & \downarrow \\
 D^b(mod\Lambda) & & & & \frac{D^b(mod\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}
 \end{array}$$

Queremos mostrar que existe um isomorfismo de funtores $\xi : FF_2 \rightarrow \pi G\pi'$, para isso considere um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $K^b(mod\Lambda)$ e note que $G\pi'X^\bullet$ e $G\pi'Y^\bullet$ são objetos com módulos projetivos em todos os graus, exceto no grau 0. Mas, para tal objeto Z^\bullet , os morfismos canônicos $Z^\bullet \rightarrow Z^{\leq 0}$ e $Z^{=0} \rightarrow Z^{\leq 0}$ em $D^b(mod\Lambda)$ mapeiam cones em $K^b(P_\Lambda)$. Portanto, eles se tornam isomorfismos sob a projeção $\pi : D^b(mod\Lambda) \rightarrow \frac{D^b(mod\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$. Esquemáticamente, temos

$$\begin{array}{ccc}
 K^b(mod\Lambda) & & D^b(mod\Lambda) & & \frac{D^b(mod\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)} \\
 \\
 \begin{array}{c} X^\bullet \\ \downarrow f \\ Y^\bullet \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} G\pi'X \\ \downarrow G\pi'f \\ G\pi'Y^\bullet \end{array} & & \begin{array}{ccc} \pi G\pi'X^\bullet & \xrightarrow{\xi_X} & \pi(G\pi'X^\bullet)^0 \\ \downarrow \pi G\pi'f & & \downarrow \pi(G\pi'f)^0 \\ \pi G\pi'Y^\bullet & \xrightarrow{\xi_Y} & \pi(G\pi'Y^\bullet)^0 \end{array}
 \end{array}$$

Isso mostra, que temos um isomorfismo $\xi_X : \pi G\pi'X^\bullet \rightarrow \pi(G\pi'X^\bullet)^0$ e $\pi(G\pi'f)^0 \xi_X = \xi_Y \pi(G\pi'f)^0$. O resultado segue agora do fato que o funtor F é induzido pela inclusão canônica $mod\Lambda \rightarrow D^b(mod\Lambda)$, que envia um módulo para o complexo talo concentrado no grau 0, isto é $\pi(G\pi'X)^{=0} = FF_2X$ e $\pi(G\pi'f)^{=0} = FF_2f$. \square

Proposição 5.1.6. *Para cada quasi-isomorfismo f em $K^b(\text{mod}\Lambda)$, o morfismo F_2f é um isomorfismo em $\underline{\text{mod}}\Lambda$.*

Demonstração. Se $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um quasi-isomorfismo em $K^b(\text{mod}\Lambda)$, então $\pi'f$ e $G\pi'f$ são isomorfismo em $D^b(\text{mod}\Lambda)$. Assim, pelo Lema (5.1.5), FF_2f é um isomorfismo e assim também é F_2f , uma vez que F é uma equivalência.

Segue-se da proposição anterior, que F_2 fatora-se sobre a projeção canônica $\pi' : K^b(\text{mod}\Lambda) \rightarrow D^b(\text{mod}\Lambda)$ e assim a fatorização

$$\tilde{F} : D^b(\text{mod}\Lambda) \rightarrow \underline{\text{mod}}\Lambda$$

é definida como segue: para um objeto X^\bullet , temos $\tilde{F}X^\bullet = F_2X^\bullet$ e para um morfismo $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ representado por um par (f', f'') de um quasi-isomorfismo $f' : Z_f^\bullet \rightarrow X^\bullet$ e um morfismo $f'' : Z_f^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, temos $\tilde{F}f = F_2f'' \circ (F_2f')^{-1} : F_2X \rightarrow F_2Y$ (note que $F_2f' : F_2Z_f^\bullet \rightarrow F_2X^\bullet$ é um isomorfismo, de acordo com a proposição anterior e que a definição é independente da escolha dos representantes). \square

Lema 5.1.7. *O isomorfismo ξ , definida no lema anterior produz um isomorfismo $\xi : F\tilde{F} \rightarrow \pi G$ de funtores $D^b(\text{mod}\Lambda) \rightarrow \frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$.*

Demonstração. Usando o fato que um morfismo em $D^b(\text{mod}\Lambda)$ é representado por um telhado em $K^b(\text{mod}\Lambda)$, o resultado segue facilmente do lema anterior. \square

5.2 Demonstração do teorema principal

Teorema 5.2.1 ([2]). *(i) Se Λ é uma algebra de Frobenius então existe um functor triangulado $\tilde{F} : D^b(\text{mod}\Lambda) \rightarrow \underline{\text{mod}}\Lambda$ tal que $F\tilde{F}$ é isomorfo a projeção canônica $\pi : D^b(\text{mod}\Lambda) \rightarrow \frac{D^b(\text{mod}\Lambda)}{K^b(P_\Lambda)}$.*

(ii) Se A é uma álgebra de dimensão finita e $\Lambda = \hat{A}$, então a composição de \tilde{F} com a inclusão canônica $D^b(\text{mod}A) \rightarrow D^b(\text{mod}\hat{A})$ é um functor triangulado, pleno e fiel, e também denso no caso em que A é de dimensão global finita.

Demonstração. Uma vez que $G \sim id_{D^b(\text{mod}\Lambda)}$ e do Lema (5.1.7), temos que

$$F \circ \tilde{F} = \pi \circ G = \pi.$$

Como π é exato e F é funtor exato que também é equivalência, temos $\tilde{F} = F^{-1} \circ \pi$ é funtor exato.

Isso prova a parte (i) do Teorema Principal. Para a parte (ii), queremos provar que $\tilde{F} \circ J$ é equivalência triangulada, para isto vamos assumir A uma K -álgebra de dimensão finita sobre um corpo K . Claramente é suficiente provar que a composição

$$\Phi = \pi \circ J : D^b(\text{mod}A) \longrightarrow \frac{D^b(\text{mod}\hat{A})}{K^b(P_{\hat{A}})}$$

da inclusão canônica $J : D^b(\text{mod}A) \longrightarrow D^b(\text{mod}\hat{A})$ com a projeção π tem as propriedades apresentada, pois se φ é equivalência triangulada, então $\tilde{F} \circ J$ é equivalência triangulada. De fato, isto segue do fato de que F é equivalência triangulada uma vez que F é uma equivalência e $F\tilde{F}J \simeq \pi J = \Phi$.

O homomorfismo $\hat{A} \rightarrow A$, dado por $(a_i, \varphi_i)_i \mapsto a_0$ induz um funtor $j : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}\hat{A}$, que é exato, pleno e fiel. Assim, $J : D^b(\text{mod}A) \rightarrow D^b(\text{mod}\hat{A})$ é pleno e triangulado.

Considere o seguinte diagrama, onde $\hat{i} : \text{mod}\hat{A} \rightarrow D^b(\text{mod}\hat{A})$ é a inclusão canônica.

$$\begin{array}{ccc} \text{mod}A & \xrightarrow{i} & D^b(\text{mod}A) \\ j \downarrow & & \downarrow J \\ \text{mod}\hat{A} & \xrightarrow{\hat{i}} & D^b(\text{mod}\hat{A}) \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{mod}\hat{A} & \xrightarrow[\sim]{F} & \frac{D^b(\text{mod}\hat{A})}{K^b(P_{\hat{A}})} \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Phi \end{array}$$

O quadrado superior do diagrama é claramente comutativo e o quadrado inferior comuta pela generalização Teorema (5.1.1).

Sabemos que J é funtor exato e pleno assim como π . Portanto, φ é exato e pleno. Logo, $\tilde{F} \circ J$ é exato e pleno.

Agora mostraremos que Φ é fiel. Suponha que $\Phi^\bullet X \simeq 0$ para algum objeto X^\bullet não nulo de $D^b(\text{mod}A)$. Suponhamos $\varphi X^\bullet \simeq 0$, com $X^\bullet \in D^b(\text{mod}\Lambda)$. Vamos provar que $X^\bullet = 0$. Suponhamos $X^\bullet \neq 0$ e chegaremos a um absurdo. Seja n minimal tal

que $H^n(X^\bullet) \neq 0$. De fato esse n existe, pois se n não existir, então

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

que é um isomorfismo na categoria derivada, daí teríamos $X^\bullet = 0$ que é uma contradição.

Seja m tal que $X^i = 0, \forall i < m$. Observe que $m \leq n$. Olhemos para X^\bullet em $D^b(\text{mod}\hat{A})$. Seja $Y^\bullet = L_m \circ L_{m+1} \circ \cdots (X^\bullet)$. Y^\bullet é quasi-isomorfo a X^\bullet e suas entradas são injetivos em $\text{mod}\hat{A}$, com possivelmente infinitos injetivos não nulos.

Como Y^\bullet é quasi-isomorfo a X^\bullet e X^\bullet possui cohomologia limitada temos que Y^\bullet possui cohomologia limitada.

Mostraremos por indução que $\text{Ker } d_Y^i$ não é injetivo em $\text{mod}\hat{A} \forall i \geq n$. Para $i = n$, visto que $H^n(X^\bullet) \neq 0$, temos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon' & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Se $x \in \text{Ker } d_X^n$ então $\alpha \circ \epsilon(x) = 0 \implies \epsilon(x) \in \text{Ker } \alpha$. Daí, $\epsilon : \text{Ker } d_X^n \longrightarrow \text{Ker } \alpha$ está bem definida e é injetora. Para a sobrejetividade, se $y \in \text{Ker } \alpha$ então $\pi' \circ \alpha(y) = 0$. De

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{\epsilon} & I & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker } \epsilon & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_X^n & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & X^{n+1} & \xrightarrow{\epsilon'} & C & \xrightarrow{\pi'} & \text{Coker } \epsilon' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

temos que $\pi(y) = 0 \implies y \in \text{Ker } \pi = \text{Im } \epsilon \implies \exists x \in X^n$ tal que $\epsilon(x) = y$. Temos $x \in \text{Ker } d_X^n$, pois $\epsilon' \circ \text{Ker } d_X^n(x) = \alpha \circ \epsilon(x) = \alpha(y) = 0$. Como ϵ' é monomorfismo, temos $d_X^n(x) = 0$, daí $x \in \text{Ker } d_X^n$. Logo, $\text{Ker } \alpha \simeq \text{Ker } d_X^n$ e $\text{Ker } d_X^n \notin I^{\hat{A}}$, pois $\text{Ker } d_X^n$ é não nulo em $\text{mod}A$

Passo de indução: Aqui basta provar que $\text{Ker } \beta$ não é injetivo. Por contradição, suponhamos $\text{Ker } \beta \in I_{\hat{A}} = P_{\hat{A}}$. Daí temos a sequência exata que cinde

$$0 \xrightarrow{\leftarrow} \text{Ker } \beta \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\beta} \text{Im } \beta \longrightarrow 0$$

Considere $[\alpha, \varepsilon'] : I \oplus X^{n+1} \longrightarrow C$. Assim,

$$0 \longrightarrow X^n \xrightarrow{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ d_X^n \end{bmatrix}} I \oplus X^{n+1} \xrightarrow{[\alpha \quad \varepsilon']} C \xrightarrow{p} 0$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Ker } \beta \\ \downarrow \end{array}$

Desse modo, $p \circ [\alpha \quad \varepsilon']$ é epimorfismo que termina em projetivo e, portanto, cinde. Logo, $\text{Ker } \beta$ é somando de $I \oplus X^{n+1}$.

Como nenhum somando indecomponível de X^{n+1} está em $I_{\hat{A}}$ temos $\text{Ker } \beta$ é somando de I , $I = I' \oplus \text{Ker } \beta$ e

$$I \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{P} \text{Ker } \beta$$

$$I' \oplus \text{Ker } \beta \xrightarrow{P \circ \alpha} \text{Ker } \beta \longrightarrow 0$$

ou seja, $p \circ \alpha$ é epimorfismo que cinde.

Sabemos que $\text{Im } \alpha \subseteq \text{Ker } \beta$, implicando em $\text{Ker } \alpha = I'$, que é uma contradição. Portanto, $\text{Ker } \beta$ não é injetivo.

De fato, seja $x \in \text{Ker } \alpha$ e

$$I' \oplus \text{Ker } \beta \xrightarrow{\alpha} \text{Im } \beta \oplus \text{Ker } \beta$$

onde $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ $\text{Im } \alpha \subset \text{Ker } \beta \Rightarrow \alpha_1(x) = 0$ para todo $x \in I'$ o que implica

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

daí $I' \subset \text{Ker } \alpha$

$$I' \oplus \text{Ker } \beta \xrightarrow{\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}} \text{Im } \beta \oplus \text{Ker } \beta \xrightarrow{P} \text{Ker } \beta$$

\curvearrowright
 i

como α_2 é monomorfismo, temos $I' = \text{Ker } \alpha$, contradição.

Podemos concluir que Y^\bullet é quasi-isomorfo a X^\bullet , suas entradas estão em $I_{\hat{A}}$, Y^\bullet possui cohomologia limitada e $\text{Ker} d_Y^i \notin I_{\hat{A}} \forall i \geq n$. Como em $K^{+,b}(P_{\hat{A}})$ temos complexos com entradas projetivas e com cohomologia limitada inferiormente, segue que Y está em $K^{+,b}(P_{\hat{A}})$. Mostraremos que Y^\bullet não pode ser isomorfo a Z^\bullet em $K^{+,b}(P_{\hat{A}})$. Suponhamos que

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ Y^\bullet & \xrightarrow{\quad} & Z^\bullet \\ & g & \end{array}$$

tais que $g \circ f \simeq 1_{Y^\bullet}$. Seja r maximal tal que $Z^r \neq 0$

$$\begin{array}{ccc} Z^r & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow g^r & & \downarrow \\ Y^r & \longrightarrow & Y^{r+1} \end{array}$$

Isso implica que $\text{Im } g^r \subseteq \text{Ker } d_Y^r$.

$$\begin{array}{ccccc} Y^{r-1} & \longrightarrow & Y^r & \longrightarrow & Y^{r+1} \\ \downarrow f^{r-1} & & \downarrow f^r & & \downarrow 0 \\ Z^{r-1} & \longrightarrow & Z^r & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f^{r-1} & & \downarrow g^r & & \downarrow \\ Y^{r-1} & \longrightarrow & Y^r & \xrightarrow{d_Y^r} & Y^{r+1} \end{array}$$

que nos dá

$$\begin{array}{ccccc} Y^{r-1} & \longrightarrow & Y^r & \longrightarrow & Y^{r+1} \\ \downarrow g^{r-1} \circ f^{r-1} & \swarrow g^r \circ f^r & \downarrow & \swarrow & \downarrow 0 \\ Y^{r-1} & \longrightarrow & Y^r & \xrightarrow{d_Y^r} & Y^{r+1} \end{array}$$

$$id_{Y^r} = (g^r \circ f^r + d_Y^{r-1} \circ h^r) + (h^{r+1} \circ d_Y^r) = a + b$$

Dos diagramas acima, temos

$$\text{Im } a \subset \text{Ker } d_Y^r \subset \text{Ker } b$$

e

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 Y^r & \xrightarrow{\quad} & Y^r \\
 & \xleftarrow{\quad} & \\
 & b &
 \end{array}$$

tal que $a + b = 1$. De

$$Y^r \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xleftarrow{i} \end{array} \text{Ker}d_Y^r \longrightarrow 0$$

temos que $a \circ i(x) = a(x) = x$ para todo x em $\text{Ker}d_Y^r$ o que implica que $a \circ i = 1_{\text{Ker}d_Y^r}$, ou seja, a é um epimorfismo que cinde. $(a + b)$ restrito a $\text{Ker}d_Y^r$ é igual a identidade em $\text{Ker}d_Y^r$ o que nos diz que a restrito a $\text{Ker}d_Y^r$ é também a identidade em $\text{Ker}d_Y^r$.

$\text{Ker}d_Y^r$ é somando de $Y^r \in I_{\hat{A}}$, que implica que $\text{Ker}d_Y^r$ está em $I_{\hat{A}}$, o que é uma contradição.

Como Y^\bullet não pode ser isomorfo a um objeto de $K^b(P_{\hat{A}})$ temos que $\pi(Y) \neq 0$ em $\frac{D^b(\text{mod}\hat{A})}{K^b(P_{\hat{A}})}$. Mas, X^\bullet é quasi-isomorfismo a Y^\bullet que nos diz que $\varphi(X^\bullet) \simeq \pi(Y^\bullet)$, ou

seja X^\bullet e Y^\bullet são isomorfos em $\frac{D^b(\text{mod}\hat{A})}{K^b(P_{\hat{A}})}$. Mas, $\varphi(X^\bullet) = 0$. Contradição. Mostramos que $\varphi X^\bullet = 0$ implica $X^\bullet = 0$, usando os mesmos argumentos da demonstração do teorema (5.1.1), concluímos que φ é fiel.

Resta mostrar que é denso. Suponha agora que A é de dimensão global finita, então pela Proposição (3.3.4), $\text{mod}A$ é uma subcategoria geradora de $\text{mod}\hat{A}$. Além disso, vimos na seção (3.3) que $\text{mod}A$ é uma subcategoria geradora de $D^b(\text{mod}A)$, consequentemente o funtor Φ leva subcategoria geradora em subcategoria geradora. Logo, pelo lema (3.3.5), Φ é denso e, portanto uma equivalência de categorias. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Assem, I., Skowronski, A. and Simson, D. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Vol. 1, Cambridge University Press, 2006
- [2] Barot, M. and Mendoza, O. *An explicit construction for the Happel functor*, Colloquium Mathematicum, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, p. 141-149, 2006.
- [3] Happel, D. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*, Cambridge University Press, 1988.
- [4] Holdaway, C. and Zatloukal, K. *The stable category of a Frobenius category is triangulated*, Unpublished, lecture notes, vol. 17, 2012.
- [5] Kashiwara, M. and Schapira, P. *Categories and sheaves*, vol. 332, Springer Science & Business Media, 2005.
- [6] Leclerc, B. and Plamond, P. *Nakajima varieties ad repetitive algebras*, 2012
- [7] Milicic, D. *Lectures on derived categories*, Number <http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf>. acessado em 15/01/2017, 2014.
- [8] Rickard, J. *Derived categories and stable equivalence*, Journal of pure and applied Algebra, v. 61, n. 3, p. 303-317, 1989.
- [9] Schiffler, R. *Quiver representations*, Berlin: Springer, 2014.
- [10] Schröer, Jan. *On the quiver with relations of a repetitive algebra*, Archiv der Mathematik, v. 72, n. 6, p. 426-432, 1999.
- [11] Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, site acessado em 11/10/2107, 2018.