X COLÓQUIO INTERNACIONAL
"Educação e Contemporaneidade"
22 a 24 de Setembro de 2016
São Cristóvão/SE - Brasil
FLUENDO CRESCIT
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
ISSN: 1982-3657

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS – UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

MARIA MEIRE LUCIO MATOS

EIXO: 6. ENSINO SUPERIOR NO BRASIL

Resumo

O estudo de equações diferenciais ordinárias é importante para uma melhor compreensão do comportamento de fenômenos físicos que estão presente no dia a dia das pessoas. A abordagem histórica que tenta esclarecer a importância das equações diferenciais e sua aplicabilidade desde as descrições até as soluções das equações em algumas situações-problemas. A análise conceitual justifica a utilização de técnicas no estudo de fenômenos, para faz-se necessário um entendimento conforme a complexidade da abordagem das informações em estudo. Muitos dos conhecimentos expostos nos livros didáticos não esclarecem os acontecimentos históricos que levaram ao desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias, embora levem a questionamentos dos fatos relatos.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; abordagem histórica; aplicabilidade.

Abstract

The study of ordinary differential equations is important for a better understanding of the behavior of physical phenomena that are present in the daily lives of people. The historical approach that attempts to clarify the importance of differential equations and its application from the descriptions to the solutions of the equations in some situations-problems. The conceptual analysis justify the use of techniques in the study of phenomena, it is necessary for an understanding according to the complexity of the approach of the information in the study. Many of the findings outlined in the textbooks do not clarify the historical events that led to the development of ordinary differential equations, although lead to questioning the reports facts.

Keywords: ordinary differential equations; historical approach; applicability.

1 Introdução A teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) é uma das mais utilizadas no ensino de ciências, além disso, é considerada a parte mais importante da matemática moderna, pois modela fenômenos do cotidiano, atraindo à atenção dos estudiosos dessa área de estudo. O ensino de EDO's é abordado tradicionalmente com poucas informações relacionadas às situações-problemas reais, além da falta de uma modelagem matemática com perspectiva histórica, afastando a noção de inserção da aplicabilidade das equações, dificultando o entendimento dos discentes. Vale salientar que, o estudo destas equações deve ser preparado com cuidado, fomentando desde a criação do cálculo até o seu desenvolvimento, utilizando também as descrições metodológicas para obtenção de soluções das equações e exemplificações com aplicações reais, para facilitar a assimilação do conteúdo. Os autores dos livros didáticos utilizam uma abordagem histórica para compreender a ideia original desenvolvida pelos matemáticos, contribuindo para uma melhor compreensão da perspectiva dos conteúdos em estudo. Esses fatos justificam a utilização de técnicas para solucionar os problemas. É notório que há uma melhor compreensão dos discentes quando se realiza apresentações da ideia dos matemáticos antes dos conceitos e procedimentos desenvolvidos para a resolução de problemas. A maioria dos fenômenos reais de natureza físicos, sociais, econômicos ou biológicos é descrito matematicamente por equações diferenciais que introduze a ideia de aproximar uma solução através de cálculos numéricos. As aplicações são de situações do dia a dia, casos simples para se analisar o comportamento algébrico e geométrico das suas soluções através do sistema manipulativo. **2 Perspectiva histórica** O estudo das equações diferenciais começou com o desenvolvimento do cálculo por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no final do século XVII, através de relatos históricos que repassaram as origens e desenvolvimento dos principais conceitos do cálculo. O conceito de integração surgiu a partir de somatórios ligados ao cálculo de áreas e ao cálculo de volumes, e a diferenciação surgiu dos problemas sobre a tangente de curvas e questões sobre máximos e mínimos. Com o passar do tempo, verificou-se que a integração e a diferenciação são operações inversas. A partir dos estudos realizados por esses matemáticos o entendimento e a notação de derivada eram suficientes para resolver equações, surgindo deste modo, um novo assunto em matemática. Porém, suas soluções não eram tão fáceis, as manipulações simbólicas e as simplificações algébricas não ajudavam em quase nada. Em 1684 e 1686, as ideias de Leibniz sobre o cálculo foram publicadas em *Acta eruditorum*, revista científica mensal alemã fundada por Leibniz em 1682. Em 1690, Jakob Bernoulli descobriu a resolução do problema a isócrona (ou curva de descida constante), a parábola semi-cúbica, como relata Daugherty (2013)

> Em 1687, Huygens tinha descoberto a solução usando métodos sintéticos, Jakob usou o cálculo para a sua solução e foi, assim, capaz de dizer que ele estava em cima do assunto (coincidentemente foi o próprio Leibniz que colocou o problema em primeiro lugar). Jakob mostrou que o desenvolvimento da isócrona era como uma

resolução de uma equação diferencial não linear de primeira ordem. Após encontrar a equação diferencial, Bernoulli a resolveu utilizando o método de separação de variáveis. No documento de publicação do problema da isócrona, havia a primeira impressão da palavra "integral", inventada por Jakob e assumida por Leibniz. Ao estudar os princípios de gravidade desenvolvidos por Newton, Jakob escreveu equações diferenciais para o movimento do planetário, além do desenvolvimento da catenária (a forma de uma cadeia pendurado em equilíbrio) e o uso de coordenadas polares. Johann Bernoulli, seu irmão, resolveu o problema da catenária. Conforme Daugherty (2013), ele foi capaz de formar uma equação diferencial. Este fato foi seu primeiro resultado matemático importante produzido de forma independente de seu irmão, embora tenha utilizado ideias que Jakob tinha dado quando ele propôs o problema. Giacomo Ricatti (1676-1754) realizou um estudo exaustivo sobre as equações diferenciais que leva seu nome. Mas foi Euler o primeiro quem observou que conhecia uma solução particular $v=f(x)$ da equação, a substituição $y=v+1/z$ a transforma numa equação particular em z. (EVES, 2011, p. 476) Euler empregou a ideia de fator integrante na resolução de equações diferenciais, concebendo o método sistemático atualmente usado para resolver equações diferenciais lineares homogêneas ou não homogêneas. Ele mostrou que a substituição de $x = e^t$ a transforma numa equação diferencial linear com coeficientes constantes. (EVES, 2011, p. 473) No inicio do século XVIII muitos outros matemáticos acumularam várias técnicas para analisar e resolver uma variedade de equações diferenciais. **3 Abordagem das EDO's de 1ª ordem nos livros didáticos** Desde os tempos mais remotos a matemática se destacava por suas infinitas aplicações da vida cotidiana. Aos poucos foram criados os conceitos matemáticos, pois estes estavam relacionados às necessidades da época. A teoria das Equações Diferenciadas Ordinárias está relacionada com a matemática contemporânea que foi marcada com o desenvolvimento do cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Os inventores do cálculo foram os primeiros que se interessam por problemas de física, pois sentiram a necessidade de obter as soluções das equações de forma explícita. Porém, primeiramente, existia a preocupação de expressar as soluções em funções elementares. Para se obter a solução desses cálculos, se utilizava da quadratura, um método empregado para reduzir a solução do problema ao cálculo de primitivas. No entanto, verificou-se que a quantidade de equações resolvidas em termos das funções elementares era muito pequena, o que levou a realização de novas buscas por novos métodos e no século XIX, surgiu à utilização de uma série de funções. Essas estavam ligadas ao rigor da análise, e alguns desses métodos empregados foram questionados quanto as suas operacionalidades realizadas sem cuidado, sem a sua devida atenção, deixando vulnerável a interpretação incoerente e conflitante com os dados do problema. Então surgem os teoremas de existência e unicidade de solução, cuja busca de solução através dos procedimentos informais, é justificada nas verificações *a posteriori*. O grande empenho de solucionar as equações era em prol da importância intrínseca acepção física. Com a devida apresentação das equações diferenciais exprimindo informações sobre o comportamento de suas soluções, sem a preocupação de escrevê-las explicitamente e de prováveis questionamentos que duvidem dos dados apresentados. O cálculo nos diz que a coleção das primitivas de *f* é dada por *F(x) + c* onde *F* é definida em Image: clip_i (1) A primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo liga os conceitos de integral e derivada, e a segunda parte, faz essa conexão em outra direção. Observe que, em virtude da expressão geral das primitivas ser da forma *F(x) + c*, Image: clip_image004.gif, esta independe da particular primitiva usada. Assim, o problema do cálculo de uma área se reduz ao problema de calcular a solução de uma equação diferencial. Toda aquela parte do cálculo denominada Cálculo de Primitivas, nada mais é do que a determinação de soluções da equação diferencial Image: cli para diferentes funções *f*. A relação, por exemplo, entre uma variável independente *x*, uma variável dependente *y* e uma ou mais das derivadas de *y* em relação a *x* (isto é, um ou mais coeficientes diferenciais de *y* em relação a *x*), denomina-se **equação diferencial**. A equação diferencial de primeira ordem é dada por: Image: clip_i (2) Na equação (2), *f* é uma função de duas variáveis dada. A função derivável admite derivada em todos os pontos de um intervalo aberto. Descrever-se-á alguns métodos, cada um aplicável em EDO's de primeira ordem e suas aplicações, com intuito de solucioná-la através de cálculos numéricos e discussão sobre as questões teóricas relacionadas à existência e à unicidade de soluções. **3.1 Equações lineares** A forma geral das equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem é a seguinte: Image: clip_image (3) Nesta equação tem-se *p*: (a, b)□IR e *q*: (a, b)□IR, funções reais contínuas definidas no intervalo aberto (a, b). Uma função *x*: (a, b)□IR é uma solução de Image: clip_image se ela for diferenciável e satisfaça à equação. Usa-se a denotação Image para designar a derivada de *x* em relação a variável independente *t*. No estudo da equação Image: clip_image aparecem dois problemas básicos: i.obter a solução geral da equação, ou seja, uma expressão que englobe todas suas soluções; ii.obter a solução do problema de valor inicial: Image: clip_image0 (4) Onde t_0 Î (a, b) e x_0 são iniciais.

O problema é solúvel, pois pode-se determinar a solução geral da equação. O problema de valor inicial tem uma e somente uma solução. O que pode garantir que as equações não lineares, em geral, não possuem uma solução geral, enquanto à existência e unicidade de solução do problema de valor inicial é uma questão delicada. **Exemplo 1** Dada a equação diferencial a seguir: Image: clip_im (5) Para resolver esta equação (5), nesse caso, não é necessário encontrar o valor do fator de integração, pois a equação é igual zero. Pode-se utilizar o método de integração para resolvê-la, mas precisa-se reescrevê-la tirando *ay* dos dois lados e dividir a equação (5) por *b, b*¹0, ficando da seguinte forma: Image: cli (6) Reorganizando a equação (6) é necessário colocar *dx* e *dy* em lados distintos para poder integrar, obtendo-se: Image: clip_ (7) Realizando a integração em ambos os membros da equação (7), tem-se: Image: clip_ima ☐ Image: clip_im ☐ Image: clip_image02 (8) Nota-se: Image: clip_ir e *c* é uma constante arbitrária de integração, e neste caso, pode-se colocá-la em qualquer formato. **3.2 Equações separáveis** Quando q(t) ≡ 0 da equação (3) tem-se uma equação linear homogênea e o problema inicial correspondente Image: clip_ (5) o desenvolvimento da equação linear homogênea é dada através da equação exponencial que aparecem várias aplicações. A equação (5) apresenta uma solução geral e consequente à solução do problema inicial que deve ser da seguinte forma Imag Image: clip_image034 (6) assim tem-se a solução do problema, dada por Image: clip_image03, *t*ÎIR (7) A solução do problema inicial homogênea (7) Image: clip_image038.gi (8) Use-se a notação Image: clip_image040.g Essas propriedades são válidas Image: clip Image: clip_image044. Image: clip_image046.gif A resolução do problema de valor inicial (4), no caso geral, é feita através do uso de um fator integrante ( ) cuja finalidade é encontrar esse valor para escrever a solução do problema linear de valor inicial. **4 Considerações Finais** É possível se aprofundar nos estudos de equações diferenciais ordinárias através da perspectiva histórica, a qual relata os principais acontecimentos históricos que trataram com propriedade, o desenvolvimento das equações e suas aplicações, de acordo com a dedicação dos matemáticos do século XVII. Analisou-se a abordagem dos materiais didáticos relacionados ao estudo das equações diferenciais de primeira ordem, apresentando seus aspectos históricos, conceitos e aplicações os quais se observa que nem sempre a transmissão do conteúdo fica acessível ao leitor, essa análise colabora para uma melhor compreensão dos acontecimentos históricos que justificam a importância do desenvolvimento das equações. O estudo das equações diferenciais permite o progresso para o ensino da matemática a partir do desenvolvimento do cálculo, mas essa teoria no geral requerer o desenvolvimento de uma série de propósitos que precisam ser utilizado com sabedoria.

DAUGHERTY, Brian (Ed.). **Swiss mathematicians of the 18th century:** Bernoullis and Eulers. 2013. Disponível em:
<http://
bdaugherty.tripod.com
/swiss.htm
l
>.
Acesso em: 29 maio 2016. EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

O estudo equações diferenciais ordinárias com o olhar histórico.

Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará *campus* Cedro

Recebido em: 04/07/2016

Aprovado em: 05/07/2016

Editor Responsável: Veleida Anahi / Bernard Charlort

Metodo de Avaliação: Double Blind Review

E-ISSN:1982-3657

Doi: