UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ WILLIAM DE OLIVEIRA JÚNIOR

TRÊS PONTOS DE VISTAS SOBRE CÔNICAS

SÃO CRISTÓVÃO – SE
SETEMBRO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TRÊS PONTOS DE VISTAS SOBRE CÔNICAS

por

JOSÉ WILLIAM DE OLIVEIRA JÚNIOR

sob a orientação do

Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo

SÃO CRISTÓVÃO – SE
SETEMBRO de 2018

TRÊS PONTOS DE VISTAS SOBRE CÔNICAS

por
JOSÉ WILLIAM DE OLIVEIRA JÚNIOR

Dissertação apresentada ao Corpo Docente da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado profissional em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada em 27 de Setembro de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo – UFS
(Orientador)

Prof. Dr. Adriano Veiga de Oliveira – UFS
(Examinador Externo)

Profa. Dra. Ana Cristina Salviano Veiga – UFS
(Examinador Externo)

Toda Vã Filosofia

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar, por me ter dado o dom da vida, além de força e perseverança para alcançar meus objetivos. Agradeço aos meus pais, José William de Oliveira e Maria José da Silva Oliveira, pelo apoio incondicional. A minha irmã Juliana Maria da Silva Oliveira, um anjo que Deus enviou para minha família. Agradeço a minha companheira Maria Daniele Ferreira, pelo incentivo e paciência. Aos demais parentes paternos e maternos, que embora menos presentes, sempre demonstraram total apoio. Agradeço imensamente ao meu orientador o Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo, e aos demais professores por compartilhar momentos de aprendizagem e alegria. Aos meus amigos/irmãos de curso, companheiros firmes dessa caminhada e sem os quais este momento não seria possível. Agradeço, por fim, a todos os meus amigos e colegas professores.

Resumo

No presente trabalho, procurou-se investigar as cônicas nos contextos sintético, analítico e projetivo, bem como conhecer algumas aplicações e propriedades dessas curvas. Na abordagem sintética, foram enfatizados um pouco do aspecto histórico, os trabalhos feitos por Apolônio e Dandelin, uma caracterização para retas tangentes e normais e as propriedades refletoras. Na abordagem analítica, foram descritas as equações cartesianas, polares e paramétricas, como também as aplicações nas Leis de Kepler. Na abordagem projetiva, foram trabalhados os conceitos de plano projetivo, ponto projetivo, reta projetiva e aplicações projetivas para dar significado às cônicas no universo projetivo, além disso foram demonstrados os Toeremas de Pascal e Brianchon.

Palavras-chave: Cônicas; Geometria Sintética; Geometria Analítica; Geometria Projetiva.

Abstract

In the present work, we tried to investigate the conics in the synthetic, analytical and projective contexts, as well as to know some applications and properties of these curves. In the synthetic approach, it was emphasized a lithe of the historical aspects, the works made by Apollonius and Dandelin, a characterization for tangent and normal lines and reflecting properties. In the analytical approach, the Cartesian, polar and parametric equations were described, as well as the applications in the Kepler Laws. In the projective approach, the concepts of projective plane, projective point, projective line and projective applications were used to give meaning to the conic in the projective universe, in addition the Theorews of Pascal and Brianchon were demonstrated.

Keywords: Conics; Synthetic Geometry; Analytical Geometry; Projective Geometry.

Sumário

Introdução **1**

1 Abordagem Sintética **3**

1.1 Um pouco de História: O surgimento das cônicas e o pioneirismo grego 3

1.2 As seções cônicas segundo Apolônio 8

1.3 As seções cônicas segundo Dandelin 16

1.3.1 Caracterização de tangentes e normais às seções cônicas pelo método de Dandelin 25

1.4 A construção de uma cônica por régua e compasso 29

1.5 Aplicações: Propriedades refletoras 32

1.5.1 Parábola 34

1.5.2 Elipse 36

1.5.3 Hipérbole 38

2 Abordagem analítica **40**

2.1 Equação cartesiana geral de uma cônica 40

2.1.1 Equação da parábola 42

2.1.2 Equação da elipse 44

2.1.3 Equação da hipérbole 46

2.1.4 Identificação de cônicas a partir da equação geral cartesiana 49

2.1.5 Equação da reta tangente a uma cônica 55

2.2 Equação polar de uma cônica 58

2.3 Equação paramétrica de uma cônica 61

2.4 Aplicação: As leis de Kepler 63

2.4.1 A 1ª Lei de Kepler 64

2.4.2 A 2ª Lei de Kepler 66

2.4.3 A 3ª Lei de Kepler 67

3 Abordagem Projetiva **69**

3.1 O plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ 70

3.1.1 Retas projetivas 71

3.1.2 Plano projetivo dual 72

3.1.3 Incidência 73

3.1.4 Geometria Afim 76

3.2 Projetividades 78

3.2.1 Colineações 78

3.2.2 Correlações 86

3.3 Cônicas em $\mathbb{RP}^2$ 89

3.4 Aplicações: Teoremas de Pascal e Brianchon 93

Referências Bibliográficas **100**

Lista de Figuras

1.1 Os três problemas clássicos da geometria superior 4

1.2 Representação dos meios proporcionais 6

1.3 Classificação dos cones segundo o ângulo do vértice 7

1.4 As seções do cone por planos perpendiculares a geratriz 7

1.5 Construção de pontos da parábola por régua e compasso 8

1.6 Solução gráfica do problema da duplicação do cubo 8

1.7 O cone segundo Apolônio 9

1.8 Estrutura geral para obter as seções cônicas 10

1.9 Circunferência contida no plano π 11

1.10 Proposição 1.1 12

1.11 Diâmetro d da curva paralelo ao lado AC 13

1.12 Proposição 1.2 14

1.13 Diâmetro d intersecta ambos os lados do triângulo axial 14

1.14 Proposição 1.3 16

1.15 O cone segundo Dandelin 17

1.16 Hipérbole 17

1.17 Hipérbole degenerada 18

1.18 Parábola 18

1.19 Parábola degenerada 18

1.20 Elipse 19

1.21 Elipse degenerada 19

1.22 As esferas de Dandelin: elipse (i) e hipérbole (ii) 20

1.23 As esferas de Dandelin: parábola 21

1.24 Reta diretriz 21

1.25 Esquema da excentricidade 22

1.26 Proposição 1.5 24

1.27 Proposição 1.6 24

1.28 Proposição 1.7 25

1.29 Proposição 1.8 26

1.30 Proposição 1.9 27

1.31 Proposição 1.12 28

1.32 Proposição 1.11 30

1.33 Proposição 1.12 31

1.34 Proposição 1.13 32

1.35 Superfícies de revolução de uma cônica 33

1.36 Leis de reflexão da luz 33

1.37 Superfície refletora parabólica 34

1.38 Antena parabólica 35

1.39 Farol parabólico 35

1.40 Superfície refletora elíptica 36

1.41 Litritor e aparelho elíptico 37

1.42 Sistema de iluminação dos dentistas 37

1.43 Galeria de murmúrios 38

1.44 Superfície refletora hiperbólica 38

1.45 Superfície refletora hiperbólica 39

2.1 Sistema de eixos $x'O'y'$ 42

2.2 Parábola 44

2.3 Elipse 46

2.4 Hipérbole 48

2.5 Rotação de eixos 50

2.6 Translação de eixos 52

2.7 Reta tangente a uma curva 56

2.8 Sistema de coordenadas polares 58

2.9 Relação entre coordenadas polares e cartesianas 59

2.10 Diretriz perpendicular ao eixo polar 59

2.11 Diretriz paralela ao eixo polar 60

2.12 Circunferência C 61

2.13 $\cosh t$ e senh t 62

3.1 Identificação de $\mathbb{R}^2$ em π 76

3.2 Elipse 89

3.3 Parábola 90

3.4 Hipérbole 90

3.5 Teorema de Pascal pelo método de projeções e seções 94

3.6 Teorema de Pascal na elipse 95

3.7 Teorema de Pascal na hipérbole 95

3.8 Reta CP 96

3.9 Reta DR 97

3.10 Reta AQ 97

3.11 Reta AQ 99

3.12 Teorema de Brianchon na elipse 99

Introdução

Os historiadores atribuem ao matemático Manaecmo (380-320 a.C.), díscipulo de Eudóxio na Academia de Platão, a descoberta das curvas (ou seções) *cônicas* quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as *parábolas*, as *elipses* e as *hipérboles* são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base.

Nos escritos de Pappus de Alexandria (290-350 a.C.) foi atribuído ao geometra grego Aristeu (370-300 a.C.) a publicação do primeiro tratado sobre as seções cônicas. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra *Seções Cônicas*. A denominação das curvas não foi devida a Manaecmo. As curvas somente foram nomeadas na obra de Apolônio, mas os nomes parábola e hipérbole foram usados antes dele. Foi Apolônio quem considerou as curvas como seções do cone duplo, com o qual a hipérbole adquiriu outro ramo, tal qual como é conhecida hoje em dia. A obra *Seções Cônicas* de Apolônio e os *Elementos* de Euclides constituem o apogeu da Matemática grega.

A solidez e o fascínio dos trabalhos de Apolônio, em especial sobre as cônicas, garantiram um poderoso legado histórico, graças as várias traduções para o latim e deste para várias outras línguas modernas. Foi assim que, em 1822, o matemático francês Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) pôde dar um atributo importantíssimo no estudo das cônicas, determinando a localização geométrica precisa dos focos e das diretrizes. Dandelin preencheu uma lacuna deixada por Apolônio, que pouco dissertou sobre estes pontos. Com a descoberta explícita e localizada dos focos e das diretrizes, decorrem como consequência direta, as propriedades focais. Com estas descobertas, nada mais seria o mesmo no estudo das cônicas.

Já a motivação principal de Pierre de Fermat (1607-1665) na elaboração de sua obra *Ad locos planos et solidos isagoge* (1636), no qual estabelece um sistema de coordenadas euclidiana (equivalente ao de Descartes), aconteceu quando restaurava a obra perdida de Apolônio, *Plane Loci*, seguindo o delineamento feito por Pappus. De posse da teoria de equações de Fraçois Viète (1540-

1603), Fermat fez uso sistemático da linguagem algébrica para obter as demonstrações dos teoremas enunciados por Pappus na sua descrição da obra de Apolônio. A aplicação da álgebra combinada com a natureza particular dos lugares geométricos estudados em Plane Loci e as técnicas usadas nas demonstrações dos resultados revelaram a Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam se exprimir na forma de equações algébricas com duas variáveis, cuja análise, usando a teoria de Viète, produziria as propriedades fundamentais do lugar geométrico assim como a natureza da sua construção.

Além disso, a descoberta da Geometria Projetiva, por volta do século XV, respresentou um caminho mais versátil para o estudo das cônicas em "oposição direta"à rigidez e limitações da Geometria Euclidiana. Os trabalhos pioneiros foram protogonizados por Girard Desargues (1591-1661), em 1639 no âmbito do *Brouillon Project d'une atteinte aux évenements des rencontres du Cone avec un plan.* Mas estes conceitos foram consolidados a partir da publicação em 1822 da obra *Tratado das Propriedades Projetivas das figuras*, do matemático e engenheiro francês Jean-Victor Poncelet (1788-1867). Nesta obra Poncelet utilizou uma linguagem semelhante a da geometria analítica, oferecendo meios próprios para demonstrar as propriedades de que gozam as figuras cônicas em um contexto projetivo.

Foi assim, que graças as diversas formas de entender e criar seções cônicas, que atualmente estas podem ser aplicadas em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, as formas parabólicas são muito usadas na engenharia de telecomunicações e na industria automobilística. Já as formas elípticas estão bastante presentes na área da saúde e na engenharia civil. Enquanto que as formas hiperbólicas, são bem utilizadas na astronomia e em sistemas de localização.

Assim, a presente dissertação busca caracterizar as cônicas por diferentes formas. O primeiro capítulo traz uma abordagem sintética, que na qual será abordado um pouco do aspecto histórico destas curvas, como também os estudos feitos por Apolônio e Dandelin, além de uma caracterização para retas tangentes e normais às cônicas, e por fim, mostrar as propriedades refletoras presente em superfícies geradas por cônicas. Para isso, as referência principais foram [1] e [3]. O segundo capítulo, mostra uma abordagem analítica, na qual será descrita as equações cartesianas, polares e paramétricas das cônicas, como também sua ligação com as Leis de Kepler. Nesta, as referências principais foram [1], [2] e [8]. Por fim, o terceiro capítulo, trará uma abordagem projetiva, em que serão trabalhados os conceitos de plano projetivo, pontos projetivos, retas projetivas e aplicações projetivas, a fim de dar significado às cônicas no plano projetivo, além disso, serão mostrados os celebres teoremas de Pascal e Brianchon. As referências para esta abordagem estão principalmente em [7] e [12].

Capítulo 1

Abordagem Sintética

A Geometria é um ramo da Matemática preocupado com questões como forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades dos espaços. Uma de suas vertentes é a Geometria Sintética ou pura, que utiliza métodos exclusivamente geométricos, sem o uso de coordenadas e não considerando o conceito de medida. É um ramo da Geometria que se ocupa de construir e estudar as formas e os lugares geométricos, mas apesar de ser destituída de ferramentas como a Álgebra e a Ánalise faz uso frequente destes instrumentos para garantir e assegurar seus resultados.

Dessa forma, neste capítulo, será abordado o conceito de cônicas segundo um ponto de vista sintético. Para isso, espera-se que o leitor esteja familiarizado com resultados mais gerais da Geometria Euclidiana Plana, para isso veja [9]. Além disso, os resultados que serão mostrados são puramente geométricos, o que fará com que o leitor tenha que, por vezes, se voltar a construção geométrica indicada para melhor interpretar os resultados.

1.1 Um pouco de História: O surgimento das cônicas e o pioneirismo grego

Por volta dos séculos V e VI a.C. tinha-se uma região denominada Jônia, situada na costa da chamada Ásia Menor onde hoje é a atual Turquia. Segundo o grande historiador grego Heródoto (485 a.C.), a cidade de Mileto foi o mais importante centro comercial da Jônia, donde emergiu o que pode-se chamar de cultura grega. A Filosofia grega, centro da Filosofia Ocidental, caracterizou-se pelo exercício do pensamento e da linguagem, procurando entender os fenômenos da natureza por meios de explicações organizadas e de cunho racional, fugindo de justificativas mitológicas, resumindo, era a busca da verdade orientada pela razão.

Os jônicos mantiveram ao longo deste período contatos com diversas civilizações orientais em especial com os babilônicos e os egípcios. A Matemática desenvolveu-se nesse ambiente cultural, influênciada pelos processos práticos desenvolvidos por egípcios e babilônicos, que já eram capazes de efetuar cálculos e medidas de ordem prática com grande precisão, mas adquiriu linguagem própria a partir da evolução da Filosofia e da lógica no mundo grego que introduziu o método axiomático com rigorosas provas dedutivas e o encadeamento sistemático de teoremas.

Por dados históricos, durante os 300 primeiros anos da Matemática grega deu-se o desenvolvimento de três linhas de estudo. A primeira linha deu-se no desenvolvimento do material que acabou se organizando na monumental obra constituída de 13 livros denominada *Os Elementos* do grande matemático grego Euclides (300 a.C.). Já a segunda linha de investigação ocorreu com o desenvolvimento das noções relacionadas com infinitésimos, infinitos e processos somatórios. E a terceira linha promoveu o desenvolvimento da geometria superior, ou seja, a geometria das curvas e das superfícies sem a reta, a circunferência, o plano e a esfera. Esta última, a geometria superior, se originou da tentativa de resolver os três famosos problemas:

1. Quadratura do círculo ou problema de construir um quadrado com a área igual a de um círculo dado, conforme a figura [1.1(i)];
2. Duplicação do cubo ou problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado, de acordo com a figura [1.1(ii)];
3. Triseção do ângulo ou problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais, ilustrado na figura [1.1(iii)].

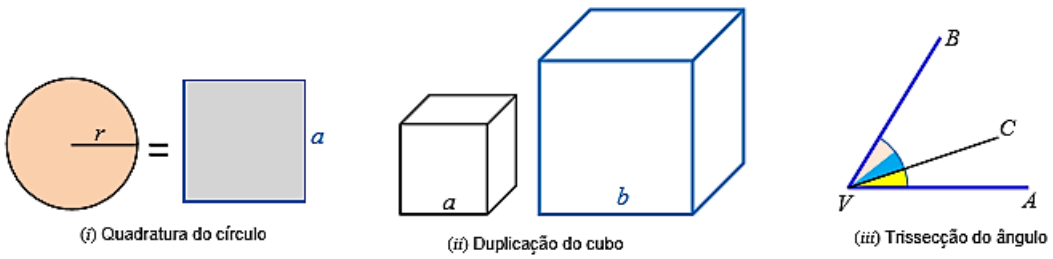

Figura 1.1: Os três problemas clássicos da geometria superior

As origens desses problemas são diversas e existem várias histórias que as explicam e foi das várias tentativas de resolução desses problemas que desencadearam descobertas verdadeiramente

geniais na Matemática, dentre os quais as cônicas, aqui chamadas de *parábola*, *elipse* e *hipérbole*. Estas estariam ligadas ao problema da duplicação do cubo, pois segundo os gregos Têon (335-395 a.C.) e Eutócio (480-540 a.C.), que citam o grande filósofo grego Aristósteles (384-322 a.C.) como fonte, o problema teria sua origem ou no pedido de um oráculo da ilha de Delos por um altar com o dobro do tamanho do volume, ou pelo desejo de duplicar o túmulo do filho do rei Minos, ambos com o formato de um cubo.

É importante salientar que na Grécia antiga a palavra *número* era usada somente para os inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre números. Estes conceitos naturalmente causavam dificuldades nas medidas das grandezas, já que as grandezas incomensuráveis não se mostravam como uma razão. Assim no lugar de números, as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de reta e dessa forma, o conjunto dos números continuou discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos. Sendo assim, com esta nova álgebra *resolver* significava *construir*. Por exemplo, a equação $ax = bc$ significava encontrar a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área do retângulo de dimensões b e c [1].

Por este método geométrico, a geometria grega passou a ser a geometria da régua (não graduada) e do compasso. Contudo, foi neste fato que residiu a importância do problema de duplicar o volume de um cubo, pois ele não pode ser resolvido, a não ser aproximadamente, com tais instrumentos, embora sirvam para a resolução de alguns problemas de construção. É necessário ser claro quanto ao que é permitido fazer com régua e compasso. Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos. E com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado.

Sendo assim, a solução da duplicação do cubo dependia da construção, com régua e compasso, da raiz cúbica de dois. De fato, pois dado um cubo cuja aresta tem medida a, tem-se então que seu volume tem medida a^3. Assim, como pretende-se determinar a medida da aresta de um cubo de volume $2a^3$, tem-se então que sua aresta terá medida $a\sqrt[3]{2}$. No entanto, tal medida não podia ser obtida somente com a utilização de régua e compasso, fato mostrado somente em 1837 por P. L. Wantzel [2].

O primeiro progresso real do problema da duplicação foi, sem dúvida, a redução do problema feita pelo grande intelectual grego Hipócrates (440 a.C.) que propôs a construção de duas médias proporcionais entre dois comprimentos de retas de comprimento a e $2a$. Em uma notação moderna,

[1] Ao leitor mais interessado nesta construção, ver [10].

[2] WANTZEL, P. L. Recherches sur le moyens de reconnaitre si un Probl'eme de G´eom´etrie peut se r´esoudre avec la r'egle et le compas. Paris: Journal de Math´ematiques pures et appliqu´ees, 1837. vol. 2, p. 366 - 372.

o problema é encontrar x e y, chamadas médias proporcionais, tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ sendo a a aresta original do cubo, conforme a figura (1.2).

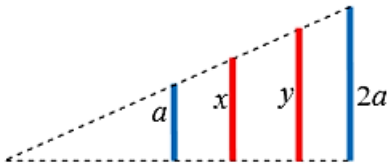

Figura 1.2: Representação dos meios proporcionais

Note que isso equivale a obter as soluções do sistema de qualquer par das três equações:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}, \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad \text{e} \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{2a},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 = ay \\ xy = 2a^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y^2 = 2ax \\ xy = 2a^2 \end{cases}.$$

Com isso, depois de Hipocrátes fazer sua redução, as tentativas subsequentes de duplicação do cubo tomaram como caminho a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados. Um dos primeiros a se aproximar da solucão do problema foi o matemático grego Menaecmo (380-320 a.C.), discípulo de Eudóxio (408-355 a. C.) da então Academia de Platão(348 a. C.), o primeiro a mostar que as cônicas são obtidas como seções de um cone quando cortados por planos não paralelos a sua base.

Menaecmo introduziu as seções cônicas usando três tipos de cones obtidos pelo rotação de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos, cuja reta suporte era chamada o *eixo do cone*, veja a figura (1.3). As curvas assim obtidas eram, originalmente, seções perpendiculares à geratriz do cone de ângulo reto, agudo e obtuso, resultando respectivamnete em uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, de acordo com a figura (1.4).

Assim, Manaecmo percebeu a relação das proporções contínua de Hipocrátes nestas curvas e que a solução estava associada um ponto comum a duas parábolas. O que não se sabe é como Manaecmo produziu tais curvas. Sabe-se, no entanto, que para produzir pontos das curvas do tipo $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$ utilizando régua e compasso, basta conhecer a construção da média geométrica

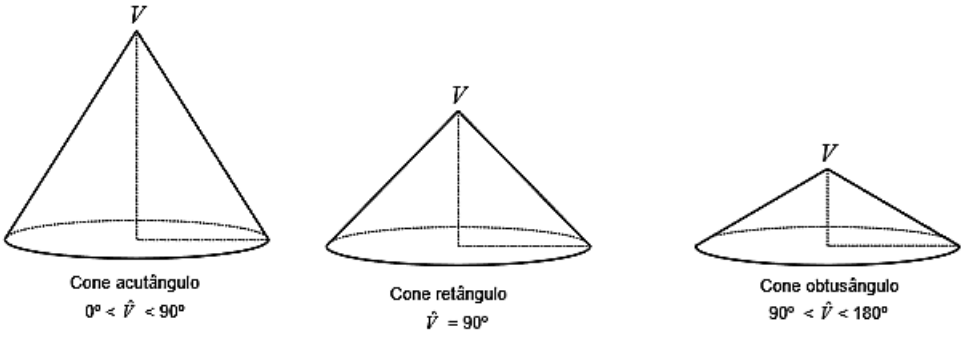

Figura 1.3: Classificação dos cones segundo o ângulo do vértice

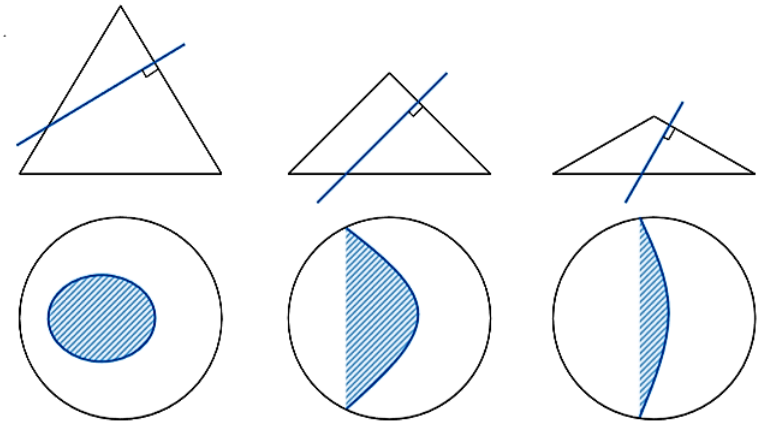

Figura 1.4: As seções do cone por planos perpendiculares a geratriz

de dois segmentos [3]. Logo, o segmento de comprimento y é a média geométrica dos segmentos de comprimento x e $2a$, como pode ser visto na figura (1.5), como também o segmento de comprimento x é a média geométrica dos segmentos de comprimento a e y. Observe que esta construção não permite traçar a curva com régua e compasso, mas sim vários pontos desta.

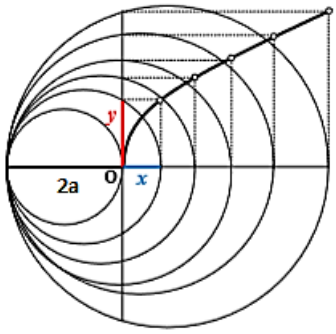

Figura 1.5: Construção de pontos da parábola por régua e compasso

Feito isso, as coordenadas do ponto P, interseção das curvas, dariam os meios proporcioanis x e y procurados e, desse modo, teria-se uma solução aproximada do problema da duplicação do cubo, conforme a figura (1.6).

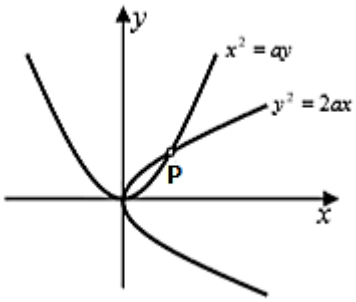

Figura 1.6: Solução gráfica do problema da duplicação do cubo

1.2 As seções cônicas segundo Apolônio

Um brilhante estudo direcionado a caracterização de seções cônicas, foi realizado pelo matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga (262-190 a.C.) da então escola de Alexandria. Ele

[3] A média geométrica de um conjunto de números positivos é definida como o produto de todos os membros do conjunto elevado ao inverso do número de membros.

era conhecido como "o grande geômetra"e sua obra mais notável foi sem dúvida a que se referiu às seções cônicas, pois é considerada por muitos uma das principais obras científicas da Antiguidade. Os dados da vida de Apolônio são escassos e quase todos de notas que aparecem nas introduções dos diferentes livros de cônicas. Parece que estudou e passou muito tempo em Alexandria, o centro do saber ocidental da época.

Apolônio em sua obra começou por definir um cone de maneira não muito usual, pois este não teria que ser necessariamente reto, podendo ser oblíquo: uma reta g de comprimento indefinido que passa por um ponto fixo V, move-se ao longo da circunferência (não pertencente ao mesmo plano do ponto V) de centro no ponto O e raio OP, como mostra a figura (1.7). Desse movimento, resultam duas superfícies verticalmente opostas, uma em relação à outra. O ponto fixo V representa o vértice do cone, a reta traçada do vértice para o ponto O denomina-se eixo, a reta VP é uma geratriz e a circuferência de centro O e raio OP é a base do cone.

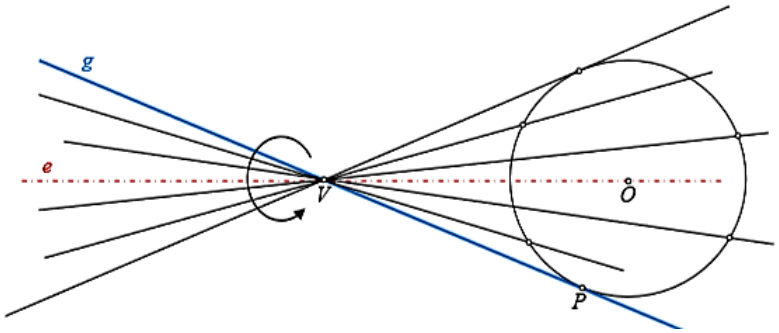

Figura 1.7: O cone segundo Apolônio

Para Apolônio não eram necessárias restrições quanto a natureza do cone, mas sim a rigidez posicional do plano que o corta, ou seja, de um tipo qualquer de cone (reto ou oblíquo) pode-se obter todas as três seções cônicas, simplemente variando a inclinação do plano que corta o cone, tal plano será chamado de plano secante. Sendo assim, as características das curvas resultantes das seções cônicas estão em dois conceitos fundamentais que serão definidos mais adiante: *diâmetro* e *triângulo axial*.

Para a dedução geométrica das três cônicas, Apolônio considerou um cone de eixo perpendicular à base, ou seja, um cone reto, de vértice no ponto A e base circular contida num plano β. O cone é cortado por um plano σ (que não contém o vértice A), gerando assim a curva $\mathcal{C}$, como pode ser visto na figura (1.8).

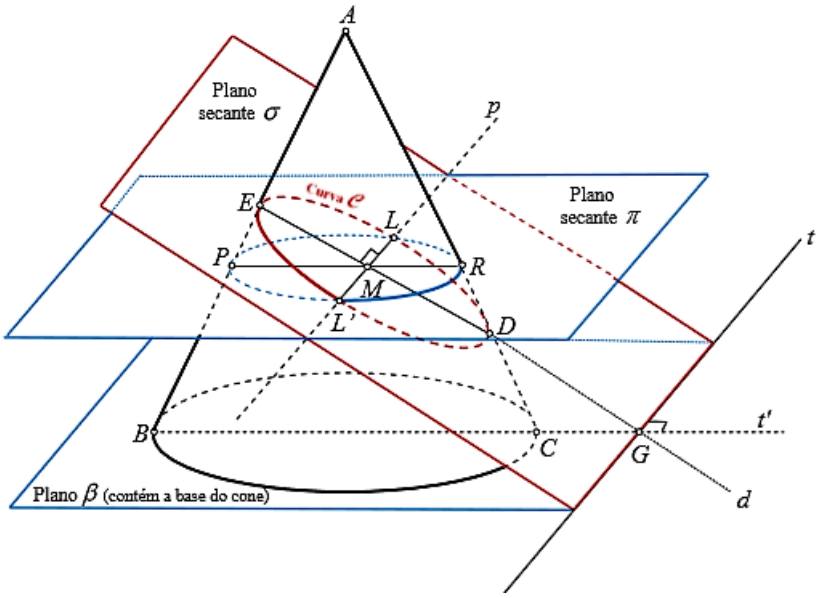

Figura 1.8: Estrutura geral para obter as seções cônicas

A seguir veja as caracterizações geométricas realizadas por Apolônio para a dedução das cônicas. Para isso veja que se σ for paralelo a β, então $\mathcal{C}$ é uma circunferência. Por outro lado se σ não for paralelo a β, então $\mathcal{C}$ resulta numa situação genérica mostrada na figura (1.8), em que:

- σ e β intersectam-se numa reta t;
- O diâmetro BC da circunferência determinada pela interseção do cone com plano β, define a reta t' que intersecta perpendicularmente a reta t no ponto G;
- Os pontos A, B e C determinam um plano α que corta o eixo, sendo que o triângulo ABC é chamado de *triângulo axial*;
- Os planos σ e α são concorrentes na reta d, reta esta que intersecta t' no ponto G. A reta d pode possuir várias posições, mas suponha, sem perda de generalidade, que intersecta a geratriz AC no ponto D;
- Por um ponto genérico L do cone situado entre o vértice A e a plano β, traça-se então um plano π paralelo ao plano β. Esse plano intersecta as geratrizes AB e AC nos pontos P e R rescpectivamente. Já o segmento PR é um diâmetro da circunferência de interseção do cone com o plano π;

- Traça-se pelo ponto L a reta p, paralela à reta t que intersecta o plano α no ponto M. Perceba ainda que a reta p é a interseção dos planos σ e π. Observe também que o ponto M é comum aos planos α, σ e π e que os pontos D, M e E são colineares por serem comuns aos planos σ, π e α;
- Os pontos L e L' são os pontos de interseção da reta p com a circunferência contida no plano π.

Sendo assim, veja que a reta p é perpendicular a reta d, pois p é paralela a t, mas t é perpendicular a BC e BC é paralelo a PR. Com isso note ainda que na circunferência contida no plano π, destacada pela figura (1.9), os triângulos retângulos LMR e PML são semelhantes, já que possuem os três ângulos internos congruente. Desta semelhança, tem-se a relação:

$$[ML]^2 = MP \cdot MR.$$

De forma análoga, tem-se também que $[ML']^2 = MP \cdot MR$, donde $ML = ML'$, então M é o ponto médio da corda LL'. No entanto, todas as cordas traçadas paralelamente a reta t têm a reta d por mediatriz, diz -se assim que a reta d é o *diâmetro* da seção cônica $\mathcal{C}$.

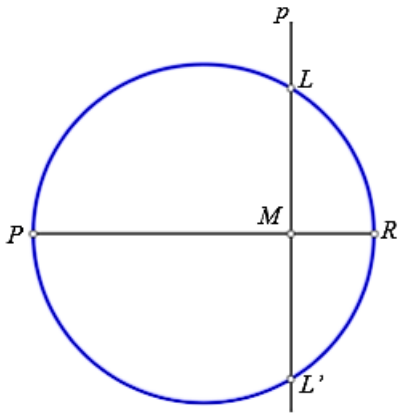

Figura 1.9: Circunferência contida no plano π

A parábola, a elipse e a hipérbole resultam de seções do cone conforme o diâmetro da cônica d toca o triângulo axial. Na proposição a seguir, veja as condições necessárias para que a seção cônica $\mathcal{C}$ da figura (1.8), seja nomeada de parábola.

Proposição 1.1. *Seja d o diâmetro da cônica $\mathcal{C}$. Suponha d paralelo ao lado AC do triângulo axial, conforme figura [1.10 (i)], então $[LM]^2 = EH \cdot EM$, em que EH é um segmento perpendicular a EM.*

Demonstração. Veja que no triângulo ABC, destacado na figura (1.11), os segmentos EM e PR são paralelos respectivamente aos lados AC e BC, o que faz com que os triângulos EMP, APR e ABC tenham a mesma medida nos respectivos ângulos internos, logo tais triângulos são semelhantes. Sendo assim,

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BC}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{PR}{AP} = \frac{PM}{PE} = \frac{BC}{AB}$$

e uma vez que,

$$\frac{MR}{AE} = \frac{PR - PM}{AP - PE} = \frac{BC}{AB} \quad \text{e} \quad [ML]^2 = MP \cdot MR,$$

tem-se então,

$$\frac{[LM]^2}{AE \cdot EM} = \frac{PM \cdot MR}{AE \cdot EM} = \frac{PM}{EM} \cdot \frac{MR}{AE} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{[BC]^2}{AC \cdot AB}$$

.

Como $\frac{[BC]^2}{AC \cdot AB}$ é constante, toma-se EH, conforme figura [1.10 (ii)], tal que,

$$\frac{EH}{AE} = \frac{[BC]^2}{AC \cdot AB} = \frac{[LM]^2}{AE \cdot EM}$$

e desse modo,

$$[LM]^2 = EH \cdot EM$$

□

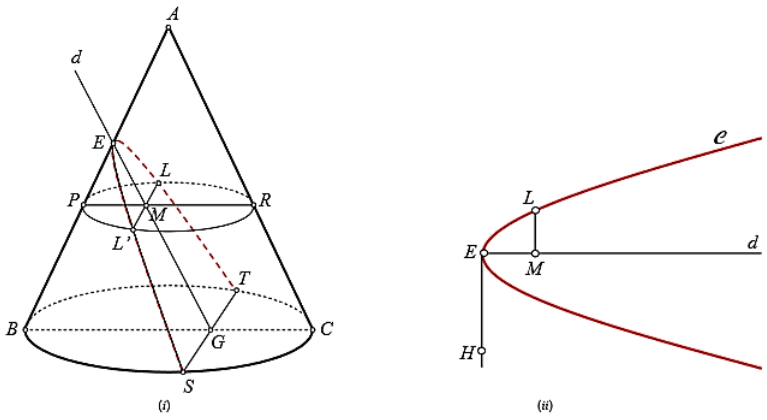

Figura 1.10: Proposição 1.1

Observe que segundo a equação $[LM]^2 = EH \cdot EM$, a área do retângulo de dimensões EH e EM terá sempre que ter a mesma área do quadrado de lado LM, ou seja, o segmento EM de um ponto L da cônica obtem-se "aplicando"ao segmento de reta EH, a área do quadrado cujo lado é o

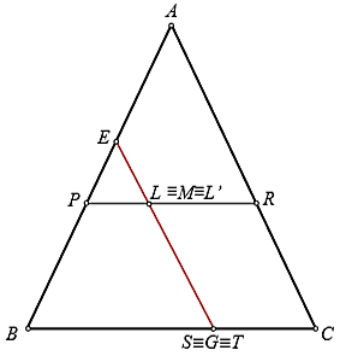

Figura 1.11: Diâmetro d da curva paralelo ao lado AC

segmento LM desse ponto. [4]. Sendo assim, o nome parábola é igual do grego *paraboli* que significa *aplicado*

Agora veja na proposição abaixo, as condições necessárias para que a seção cônica $\mathcal{C}$ da figura [1.12(i)] receba o nome elipse.

Proposição 1.2. *Seja d o diâmetro da cônica $\mathcal{C}$. Suponha que d intersecta ambos os lados do triângulo axial nos pontos D e E de modo que os pontos D, E, M e G sejam colineares na reta d e que uma reta que passa por A e é paralela a d, intersecta o plano β da base no ponto K, de acordo com a figura [1.12 (i)], então $[LM]^2 = EH \cdot EM - \frac{EH}{ED} \cdot [EM]^2$, em que EH é um segmento perpendicular a EM.*

Demonstração. Veja que no triângulo ABC, visto na figura (1.13), o segmento PR é paralelo ao segmento BK e o segmento EG é paralelo ao segmento AK. Assim, tanto os triângulos EMP e ABK, quanto os triângulos DMR e ACK são semelhantes, pois possuem a mesma medida nos respectivos ângulos internos, logo

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK} \quad \text{e} \quad \frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}.$$

E ainda usando o fato mostrado anteriormente que $[ML]^2 = MP \cdot MR$, tem-se que,

$$\frac{[LM]^2}{EM \cdot MD} = \frac{MP \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK}{AK} \cdot \frac{CK}{AK} = \frac{BK \cdot CK}{[AK]^2},$$

e ainda usando o fato que $\frac{BK \cdot CK}{[AK]^2}$ é constante, tome EH, conforme figura [1.12(ii)], tal que,,

$$\frac{EH}{ED} = \frac{BK \cdot CK}{[AK]^2} = \frac{[LM]^2}{EM \cdot MD},$$

[4] Ao leitor mais interessado em como obter o segmento EM da equação $[LM]^2 = EH \cdot EM$ com régua e campasso, consultar [10]

e uma vez que $MD = ED - EM$, tem-se,

$$[LM]^2 = EH \cdot EM - \frac{EH}{ED} \cdot [EM]^2$$

□

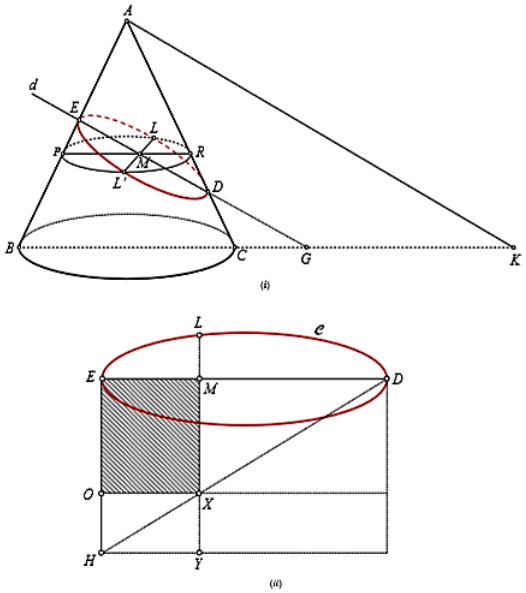

Figura 1.12: Proposição 1.2

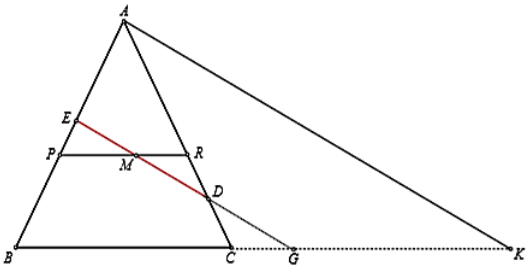

Figura 1.13: Diâmetro d intersecta ambos os lados do triângulo axial

Observe que a equação $[LM]^2 = EH \cdot EM - \frac{EH}{ED} \cdot [EM]^2$ indica que a área do quadrado de lado LM também pode ser obtido retirando da área do retângulo de dimensões EH e EM, o retângulo de dimensões $\frac{EH}{ED}.EM$ e EM. Dito de outra forma, o segmento ME de ponto genérico L da cônica obtem-se "aplicando", por "defeito", ao segmento de reta EH a área do quadrado de lado LM, sendo esse defeito o retângulo de lados $\frac{EH}{ED} \cdot EM$ e EM, que é, por seu lado, semelhante ao retângulo

de lados EH e ED, conforme figura [1.12 (ii)]. [5]. Assim, o nome elipse vem do grego *ellipsi* que quer dizer *falta*.

Por fim, veja agora a proposição que indica as condições necessárias para a seção cônica $\mathcal{C}$ possa ser chamada de hipérbole.

Proposição 1.3. *Seja d o diâmetro da cônica $\mathcal{C}$. Suponha que d intersecta o triângulo axial no lado AB no ponto E, mas não intersecta o lado AC do triângulo axial, mas sim o seu prolongamento no ponto D, conforme figura [1,14(i)], então $[LM]^2 = EH.EM + \frac{EH}{ED} \cdot [EM]^2$.*

Demonstração. Veja que o segmento EM é paralelo ao segmento AK. Isso faz com que tanto os triângulos EMP e ABK, quanto os triângulos DMR e ACK sejam semelhantes, pois possuem a mesma medida nos respectivos ângulos internos, logo

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK} \quad \text{e} \quad \frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}.$$

Assim, usando mais uma vez o fato que $[LM]^2 = MP \cdot MR$, tem-se que,

$$\frac{[LM]^2}{EM \cdot MD} = \frac{MP \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK}{AK} \cdot \frac{CK}{AK} = \frac{BK \cdot CK}{[AK]^2},$$

como $\frac{BK \cdot CK}{[AK]^2}$ é constante, tome EH, como o da figura (1.14(ii) tal que,

$$\frac{EH}{ED} = \frac{BK \cdot CK}{[AK]^2} = \frac{[LM]^2}{EM \cdot MD}$$

e uma vez que, $MD = EM + DE$, tem-se então,

$$[LM]^2 = EH \cdot EM + \frac{EM}{ED} \cdot [EM]^2$$

□

Sendo assim, a equação $[LM]^2 = EH \cdot EM + \frac{EH}{ED} \cdot EM^2$, indica que a área determinada pelo quadrado de lado LM pode ser determinada acrescentando a área do retângulo de dimensões EH e EM, o retângulo de dimensões $\frac{EH}{ED} \cdot EM$ e EM. Dito de outra forma, o segmento EM de um ponto L da cônica obtem-se "aplicando", por "excesso", ao segmento de reta EH, a área do quadrado de lado LM, sendo esse excesso o retângulo de lados $\frac{EH}{ED} \cdot EM$ e EM, que é, por seu lado, semelhante ao retângulo de lados EH e ED, conforme figura [1.14 (ii)] [6] . Logo, o nome hipérbole vem do grego *yperboli* que significa *excesso*.

[5] Ao leitor mais interessado em obter o segmento $\frac{EH}{ED} \cdot EM$ da equação $[LM]^2 = EH \cdot EM - \frac{EH}{ED} \cdot [EM]^2$, com régua e campasso, consultar [10]

[6] Ao leitor mais interessado em obter o segmento $\frac{EH}{ED} \cdot EM$ da equação $[LM]^2 = EH \cdot EM + \frac{EH}{ED} \cdot [EM]^2$, com régua e campasso, consultar [10].

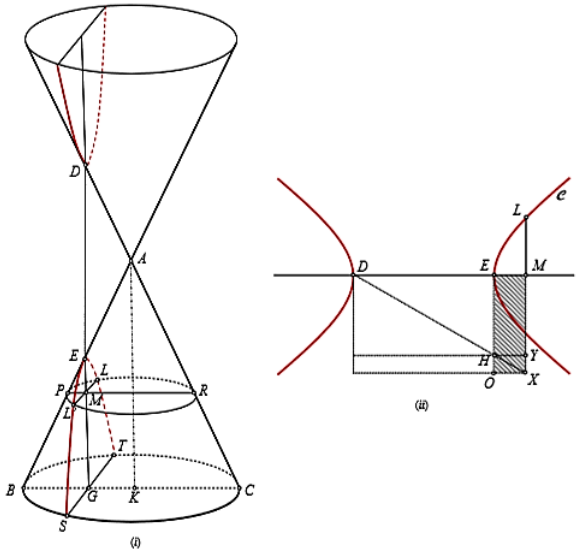

Figura 1.14: Proposição 1.3

1.3 As seções cônicas segundo Dandelin

Uma outra caracterização ao estudo de seções cônicas segundo uma abordagem sintética foi realizado pelo matemático, soldado e professor de engenharia, o francês Germinal Pierre Dandelin (1794-1847). Dandelin iniciou seus estudos em Matemática na École Polytechnique em Paris. Mais tarde conseguiu uma vaga para lecionar no ensino superior na Universidade de Liége na Bélgica onde foi promovido a coronel de engenharia. Se notabilizou pelo estudo das seções cônicas e trouxe à tona elementos como focos, diretriz e excentricidade, conceitos que, ou não foram tratados com muita importância por autores anteriores, ou que estiveram em obras que se perderam.

Dandelin considerou as seções de um cone circular reto de duas folhas por um plano π, de acordo com a figura (1.15). Nesta figura, a reta g descreve o cone circular reto de duas folhas e a reta e é o eixo do cone, sendo o ponto V a interseção das retas g e e. Toda reta que é obtida rodando a reta g em torno da reta e é chamada geratriz do cone. Os ângulos de aplitudes α $(0 < \alpha < 90^{o})$ e $(0 \leq \beta < 90^{\circ})$ são àqueles formados pelas retas g e e e pelas retas e e o plano π, respectivamente. A cônica resultante da seção depende essenciamente de dois fatores: a amplitude dos ângulos α e β e a posição do plano secante π em relação ao vértice V.

Para mostrar a explanação mencionada acima, veja os seguintes casos, que descrevem a situação de cada seção cônica:

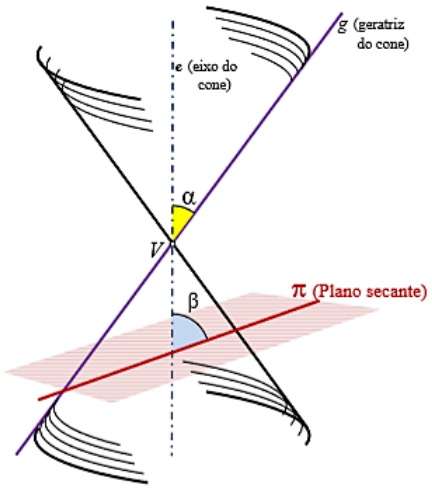

Figura 1.15: O cone segundo Dandelin

(i) Se o plano π é paralelo a reta e ($\alpha > \beta$, $\beta = 0$), então a seção é uma hipérbole, conforme a figura (1.16);

(ii) Se o plano π contém a reta e ($\alpha > \beta$, $\beta = 0$), então a seção é um par de retas concorrentes, também conhecidas como uma hipérbole degenerada, ilustrada na figura (1.17);

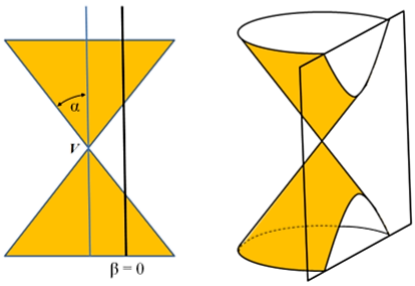

Figura 1.16: Hipérbole

(iii) Se o plano π é paralelo a geratriz ($\alpha = \beta$), então a seção é uma parábola, como mostra a figura (1.18);

(iv) Se o plano π contém a geratriz ($\alpha = \beta$), então a seção é uma reta, também chamada de parábola degenerada, destacada na figura (1.19);

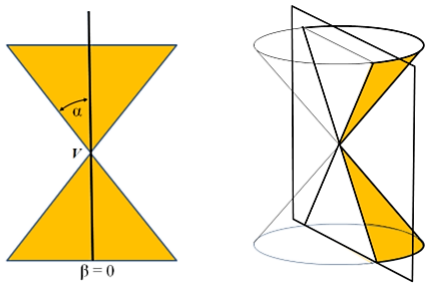

Figura 1.17: Hipérbole degenerada

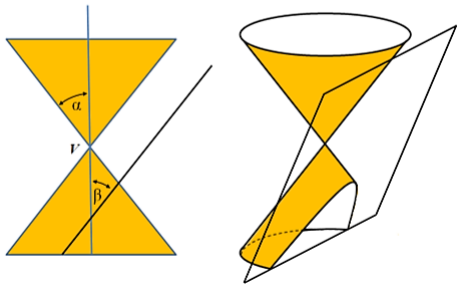

Figura 1.18: Parábola

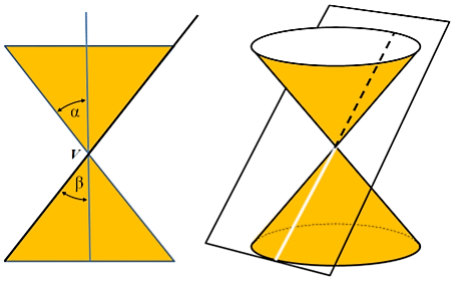

Figura 1.19: Parábola degenerada

(v) Se o plano π intersecta todas as geratrizes ($\alpha < \beta$), então a seção é uma elipse, situação que pode ser vista na figura (1.20);

(vi) Se o plano π contém o ponto V ($\alpha < \beta$), então a seção é um ponto, também intitulado de elipse degenerada, conforme a figura (1.21).

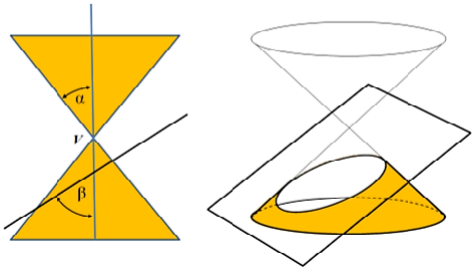

Figura 1.20: Elipse

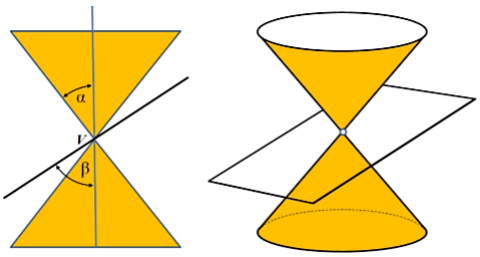

Figura 1.21: Elipse degenerada

Para determinar os focos, Dandelin supôs a existência de esferas que se inscrevem no cone com as seguintes condições:

- Todas as geratrizes do cone são tangentes às esferas de modo que estes pontos de tangência formam circunferências;
- O plano π que determina a cônica é tangente às esferas, sendo que os pontos de tangência desse plano com as esferas determinam os focos da cônica.

Dessa forma, se a cônica é uma elipse ou uma hipérbole, existem duas esferas S_1 e S_2 inscritas no cone tangenciando tanto o cone, nas circunferências c_1 e c_2, quanto o plano, π nos pontos F_1 e F_2, conforme a figura (1.22). E se a seção cônica for uma parábola, existe apenas uma esfera S_1

que se increve no cone, tangenciando o cone apenas na circunferência c_1 e o plano π no ponto F, de acordo com a figura (1.23). Os pontos F_1, F_2, F são chamados de focos das respectivas cônicas e desempenham papel essencial na caracterização detas curvas.

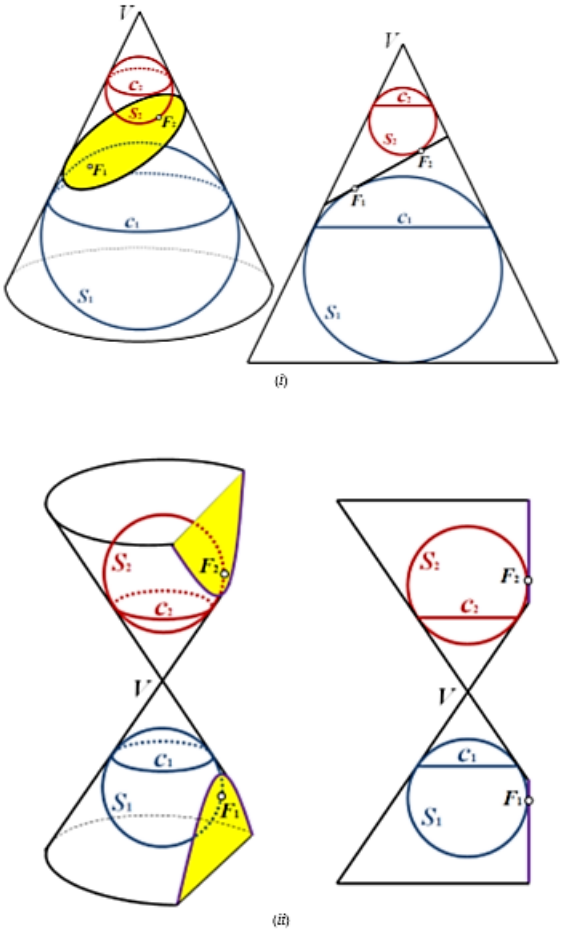

Figura 1.22: As esferas de Dandelin: elipse (i) e hipérbole (ii)

Para determinar uma diretriz, considere a figura (1.24), na qual uma esfera S inscrita no cone é tangente ao plano secante π que determina a cônica. Como a esfera S tangencia o cone numa circunferência c, tome o plano τ que contém c. Os planos π e τ se intersectaram segundo uma reta d, chamada de reta diretriz.

Já a excentricidade ϵ de uma cônica é um valor positivo que estabelece uma característica definidora para a própria seção cônica, ou seja, uma seção cônica com excentricidade ϵ é o conjunto de pontos P tal que se verifica a relação $\epsilon = \frac{PF}{PD}$, em que o ponto F é um dos focos e D é um ponto

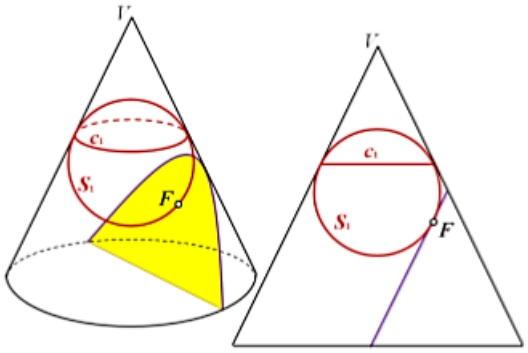

Figura 1.23: As esferas de Dandelin: parábola

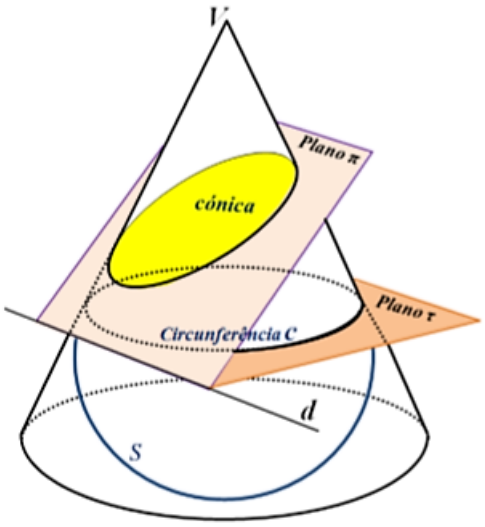

Figura 1.24: Reta diretriz

da reta diretriz d, em que PD representa a distância do ponto P a reta d, veja a figura (1.25).

É possível mostrar que a razão $\frac{PF}{PD}$ é constante, ou seja, o valor de ϵ está bem definido. Para isso veja, ainda na figura (1.25), que ocorre:

- O ponto P pertence à cônica;
- O ponto R pertence à circunferência c;
- O ponto Q é a projeção ortogonal de P sobre o plano τ (PQ é paralelo ao eixo do cone);
- O ponto D é um ponto da diretriz d tal que PD é perpendicular a d;
- Os triângulos PQD e PQR são ambos retângulos no vértice Q.

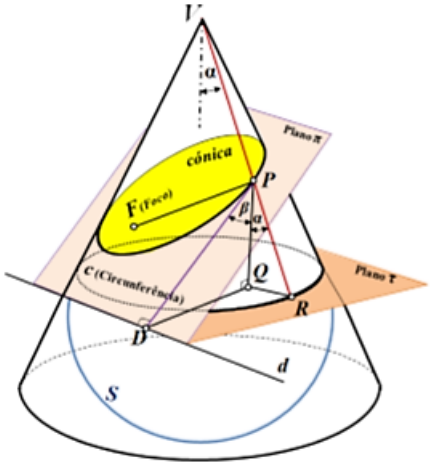

Figura 1.25: Esquema da excentricidade

Agora veja a relação entre a excentricidade e os ângulos α e β descritos na figura (1.25).

Proposição 1.4. *Se* $\epsilon = \frac{PF}{PD}$, *então* $\epsilon = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

Demonstração. Veja que

$$\cos(\alpha) = \frac{PQ}{PR} \Rightarrow PQ = PR\cos(\alpha) \tag{1.1}$$

$$\cos(\beta) = \frac{PQ}{PD} \Rightarrow PQ = PD\cos(\beta) \tag{1.2}$$

Perceba ainda que os segmentos PR e PF são tangentes à esfera nos pontos R e F respectivamente, logo o triângulo PRF é isósceles de base RF. De fato o leitor pode facilmente verificar que sendo PR e PF pendiculares ao raio da esfera, os ângulos da base RF do triângulo PRF tem a mesma medida. Logo $PR = PF$ e assim, pelas equações (1.1) e (1.2) tem-se que,

$$PF = \cos(\alpha) = PD\cos(\beta) \Rightarrow \frac{PF}{PD} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = \epsilon$$

□

Deste modo, como na seção cônica os valores $\cos(\alpha)$ e $\cos(\beta)$ são contantes, tem-se então que a razão $\frac{PF}{PD}$ é a mesma para qualquer ponto P da cônica. A depender do valor de ϵ a cônica poderá ser uma parábola, elipse ou hipérbole, mas isso será tratado com maior clareza no próximo capítulo mediante uma abordagem analítica.

Nos resultados a seguir, tem-se outras condições que abrangem o estudo de cônicas, voltado à proposta de Dandelin.

Proposição 1.5. *Se a cônica é uma elipse de focos F_1 e F_2, então $PF_1 + PF_2 = K$, com P um ponto qualquer da elipse e K uma constante real positiva.*

Demonstração. De acordo com a figura (1.26), a reta VP é uma geratriz do cone, logo é tangente às esferas S_1 e S_2 nos pontos T_1 e T_2, respectivamente, então

$$PT_1 = PF_1 \quad \text{e} \quad PT_2 = PF_2$$

assim,

$$PF_1 + PF_2 = PT_1 + PT_2.$$

Como $PT_1 + PT_2$ é constante para qualquer ponto P da elipse, tem-se que,

$$PF_1 + PF_2 = K$$

□

Proposição 1.6. *Se a cônica é uma hipérbole de focos F_1 e F_2, então $|PF_1 - PF_2| = K$, com P um ponto qualquer da hipérbole e K uma constante real positiva.*

Demonstração. De acordo com figura (1.27), a reta VP é uma geratriz do cone, logo é tangente as esferas S_1 e S_2 nos pontos T_1 e T_2 respectivamente, então

$$PT_1 = PF_2 \quad \text{e} \quad PT_2 = PF_2$$

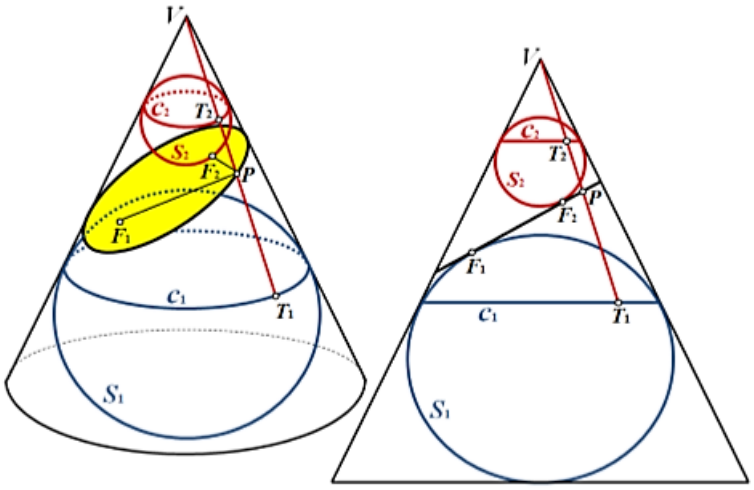

Figura 1.26: Proposição 1.5

assim,

$$|PF_1 - PF_2| = |PT_1 - PT_2|$$

mas como $|PT_1 - PT_2|$ é constante para todo ponto P da hipérbole, segue o resultado. □

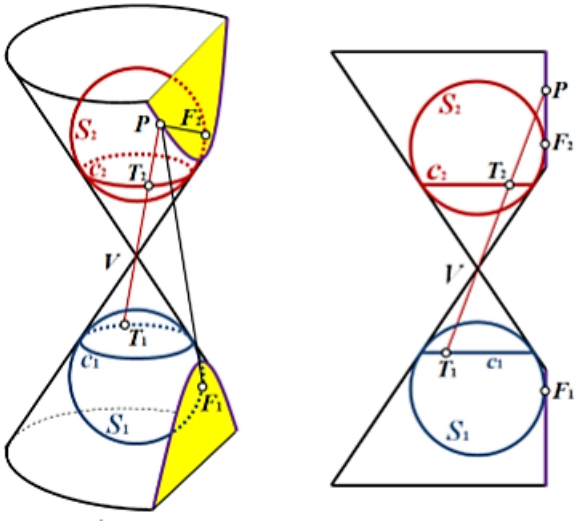

Figura 1.27: Proposição 1.6

Proposição 1.7. *Se a cônica é uma parábola de foco F e diretriz d, então $PF = PD$, com P um ponto qualquer da parábola.*

Demonstração. Segue tanto da figura (1.18) como da figura (1.25), que se a cônica é uma parábola, então $\alpha = \beta$, logo

$$\frac{PF}{PD} = e = \frac{cos(\beta)}{cos(\alpha)} = 1 \Rightarrow PF = PD$$

□

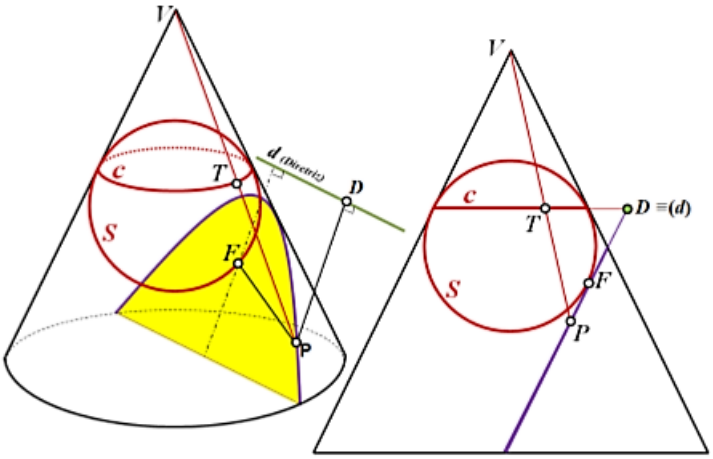

Figura 1.28: Proposição 1.7

1.3.1 Caracterização de tangentes e normais às seções cônicas pelo método de Dandelin

Veja agora as condições necessárias para que uma reta seja tangente e normal a uma seção cônica, mas fazendo uso de conceitos trazidos por Dandelin, como focos e reta diretriz. Sabe-se que uma reta (contida no mesmo plano que a seção cônica) é tangente a uma seção cônica em um ponto P, se a reta, menos este ponto P, esteja totalmente contida na região exterior à seção cônica. Por outro lado, diz-se que uma reta (contida no mesmo plano que a seção cônica) é normal a uma seção cônica no ponto P, se for perpendicular a reta tangente neste ponto.

Assim, perceba nas proposições que seguem que a caracterização pra que uma reta seja tangente a uma seção cônica, gera também uma qualificação para que uma outra reta seja normal a esta mesma curva.

Proposição 1.8. *Considere uma parábola de foco no ponto F e reta diretriz d. Seja P um ponto qualquer desta parábola e o ponto D o pé da perpendicular à reta d passando por P. Se uma reta t é a bissetriz do ângulo $\widehat{FPD}$, então essa reta é a tangente à parábola no ponto P.*

Demonstração. Observe que sendo a curva em questão uma parábola, pela proposição (1.7) tem-se que $FP = PD$, além disso, por hipótese, t é bissetriz do ângulo $\widehat{FPD}$, segue então que no triângulo FPD, t é mediatriz de FD. Suponha que existe um ponto Q, diferente de P, na parábola pertencente a t e D' a projeção de Q em d, conforme figura (1.29). Assim, como D pertence a mediatriz do segmento FD, tem-se então que $FQ = QD$, mas $\widehat{QD'D} > \widehat{QDD'}$, logo $QD > QD'$, assim $FD = QD > QD'$, uma contradição com a proposição (1.7). Portanto, Q é um ponto que não pertence à parábola e P é o único ponto comum entre a parábola e a reta t, fazendo assim com que esta reta seja tangente à parábola no ponto P. □

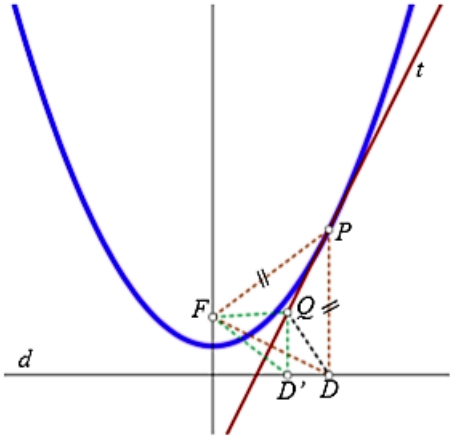

Figura 1.29: Proposição 1.8

Corolário 1.1. *Considere uma parábola de foco no ponto F e reta diretriz d. Sejam P um ponto qualquer desta parábola, o ponto D o pé da perpendicular à reta d passando por P e t a reta a bissietriz do ângulo $\widehat{FPD}$. Se uma reta n for perpendicular a reta t no ponto P, então a reta n é normal à parábola neste ponto.*

Demonstração. De acordo com a proposição (1.8) a reta t é tangente à parábola no ponto P, logo como a reta n é perpendicular a reta t no ponto P, tem-se então que n é normal à parábola neste ponto. □

Proposição 1.9. *Considere uma elipse de focos nos pontos F_1 e F_2. Sejam P um ponto qualquer desta elipse e E um ponto da reta determinada pelos pontos P e F_1, com P entre F_1 e E. Se a reta t é bissetriz do ângulo $\widehat{EPF_2}$, então t é tangente à elipse no ponto P.*

Demonstração. Seja D um ponto pertecente a reta determinada pelos pontos P e F_2 tal que $PD =$

PF_1, como pode ser visto na figura (1.30). Como t é bissetriz do ângulo $\widehat{EPF_2}$, logo t também é bissetriz do ângulo $\widehat{DPF_1}$ e então t é a mediatriz do lado DF_1 no triângulo DPF_1. Suponha que o ponto Q, diferente de P, pertença a elipse e que Q pertença a t, logo tem-se que $DQ = DF_1$, pois Q pertença a t, que é a mediatriz do lado DF_1, mas pela desigualdade triângular

$$QF_1 + QF_2 = QD + QF_2 > DF_2 = DP + PF_2 = PF_1 + PF_2,$$

contradição com a proposição (1.5). Portanto, Q é um ponto que não pertence à elipse e P é o único ponto comum entre a elipse e a reta t, caracterizando esta reta como tangente à elipse no ponto P. □

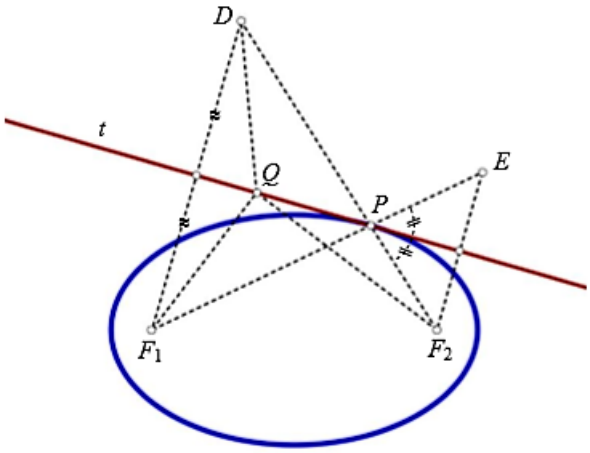

Figura 1.30: Proposição 1.9

Corolário 1.2. *Considere uma elipse de focos nos pontos F_1 e F_2. Sejam P um ponto qualquer desta elipse e E um ponto da reta determinada pelos pontos P e F_1, com P entre F_1 e E. Considere ainda que uma reta t seja bissetriz do ângulo $\widehat{EPF_2}$. Se a reta n for perpendicular a reta t no ponto P, então n é normal a elipse neste ponto.*

Demonstração. De acordo com a proposição (1.9) a reta t é tangente à elipse no ponto P, logo como a reta n é perpendicular a reta t no ponto P, tem-se então que n é normal à elipse neste ponto. □

Proposição 1.10. *Considere uma elipse de focos nos pontos F_1 e F_2 e um ponto P desta hipérbole. Se a reta t é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$, então t é tangente a hipérbole no ponto P.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade que o ponto P está no ramo mais próximo do foco F_2, conforme a figura (1.12) (caso o ponto P esteja no outro ramo a demosntração é feita de forma análoga). Suponha ainda que o ponto Q, diferente de P, pertença a hipérbole e a reta t. Considere o ponto A do segmento PF_1 tal que $PA = PF_2$. Perceba que o triângulo APF_2 é isósceles e a reta t é a mediatriz do segmento AF_2. Dessa forma como Q está em t tem-se que $QA = QF_2$. Assim, segue da desigualdade triângular, aplicada no triângulo QAF_1, que

$$QA < QF_1 + F_1A \quad \text{e} \quad QF_1 < QA + AF_1 \Leftrightarrow QA - F_1A < QF_1 < QA + AF_1 \Leftrightarrow$$
$$-F_1A < QF_1 - QA < AF_1 \Leftrightarrow |QF_1 - QA| < AF_1$$

como $QA = QF_2$ e AF_1 é constante, tem-se

$$|QF_1 - QF_2| < AF_1,$$

contradição, com a proposição (1.6). Portanto, Q é um ponto que não pertence à hipérbole e P é o único ponto comum entre a hipérbole e a reta t, fazendo com que esta reta seja tangente à hipérbole no ponto P. □

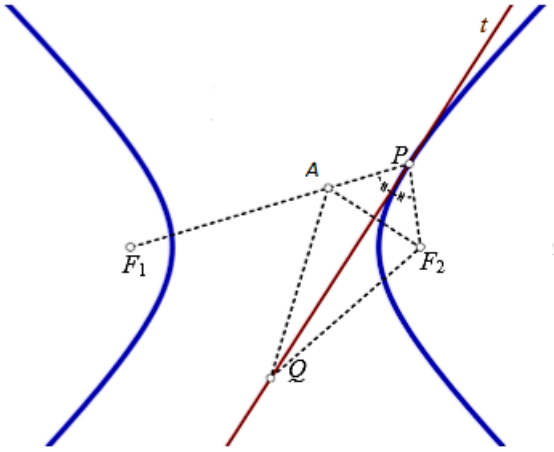

Figura 1.31: Proposição 1.12

Corolário 1.3. *Considere uma elipse de focos nos pontos F_1 e F_2 e um ponto P desta hipérbole. Seja a reta t a bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$. Se a reta n for perpendicular a reta t no ponto P, então n é normal a hipérbole no ponto P.*

Demonstração. De acordo com a proposição (1.10) a reta t é tangente à hipérbole no ponto P, logo como a reta n é perpendicular a reta t no ponto P, tem-se então que n é normal à hipérbole neste ponto neste ponto.

□

1.4 A construção de uma cônica por régua e compasso

Na primeira seção foi destacado o modo como os antigos gregos resolviam os problemas que envolviam grandezas, ou seja, a técnica milenar de régua e compasso. Nesta seção, será visto como pode-se proceder com tais recursos para o esboço dos pontos de uma seção cônica. Para isso, vai-se utilizar dos conteúdos vistos na disciplina Geometria Euclidiana Plana, vista nos cursos de graduação e no curso PROFMAT.

Veja primeiro os passos para a construção dos ponto de uma parábola de foco F e diretriz r:

- No plano, trace a reta r que passa pelos pontos A e B;
- Escolha o ponto F, para ser o foco da parábola , fora da reta r;
- Escolha um ponto D na reta r;
- Trace a reta mediatriz l do segmento FD;
- Trace a reta m perpendicular à diretriz r que passa pelo ponto D;
- Determine a interseção P da mediatriz l com a reta m.

Proposição 1.11. *Se mover o ponto D ao longo da reta r, então obtem-se os pontos P da parábola de foco F e diretriz r.*

Demonstração. Veja na figura (1.32) que a medida do segmento PD representa a distância do ponto P a reta r. Como o ponto P pertence a mediatriz do segmento FD, então este ponto é equidistante aos pontos F e D. Logo, $PD = PF$ e assim P pertence a parábola de foco F e diretriz r. □

Agora para obter os pontos de uma elipse de focos F_1 e F_2, faça:

- Escolha dois pontos F_1 e F_2;

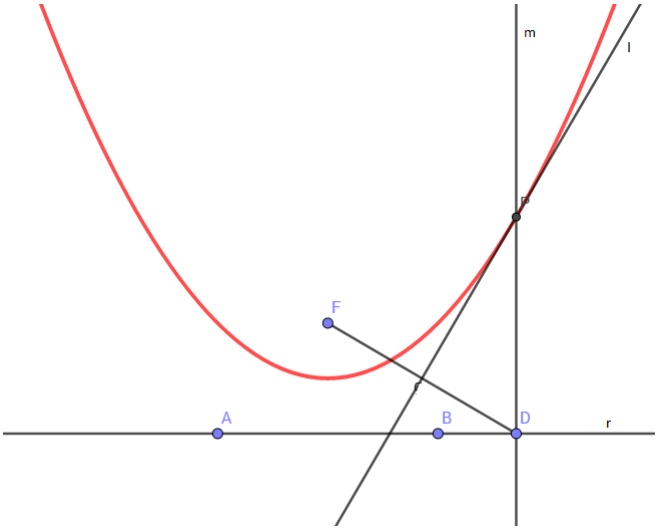

Figura 1.32: Proposição 1.11

- Trace a semirreta de origem F_1 passando por F_2;
- Trace uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro F_1 contendo F_2 em seu interior;
- Escolha um ponto D no círculo;
- Trace os segmentos DF_1 e DF_2;
- Trace a mediatriz do segmento DF_2 e seja P o ponto onde ela intersecta o segmento DF_1.

Proposição 1.12. *Se mover o ponto D ao longo da circunferência $\mathcal{C}$, então obtem-se os pontos P da elipse de centro de focos F_1 e F_2.*

Demonstração. Conforme a figura (1.33) o ponto P pertence a mediatriz do segmento F_2D, então P é equidistante aos pontos F_2 e D, logo $PD = PF_2$. Como o raio da circunferência tem medida r, tem-se

$$r = F_1P + PD = F_1P + F_2P$$

Portanto, P pertence a elipse de foco F_1 e F_2. □

E finalmente, para obter uma hipérbole de focos F_1 e F_2, proceda da seguinte forma:

- Escolha dois pontos F_1 e F_2 e um ponto A entre F_1 e F_2;

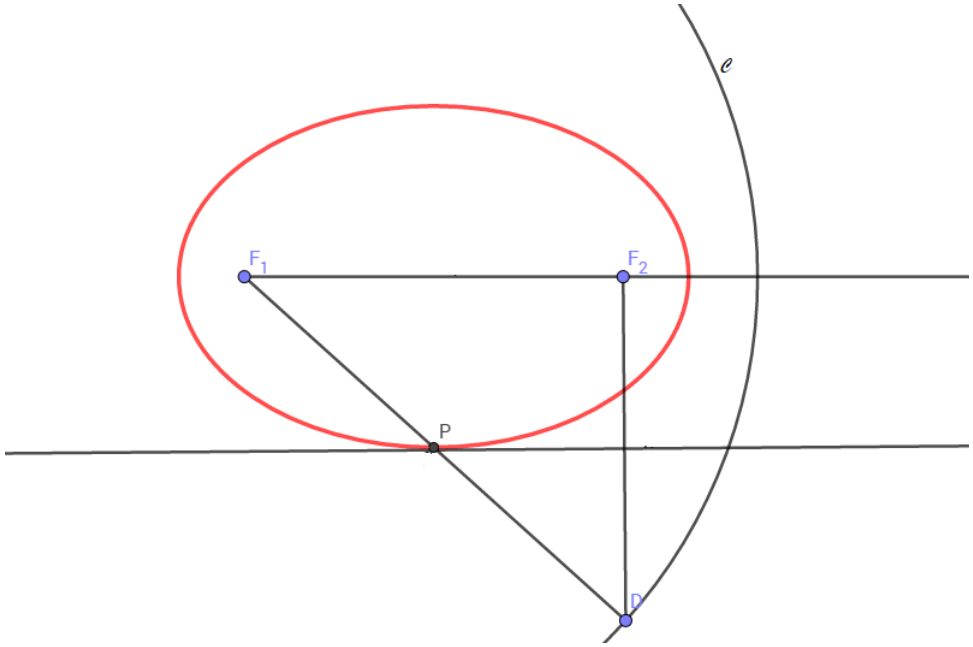

Figura 1.33: Proposição 1.12

- Trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro F_1 que passa pelo ponto A;
- Escolha um ponto B na circunferência $\mathcal{C}$ diferente de A;
- Trace a reta s que passa por F_1 e B;
- Trace a mediatriz m do segmento BF_2.

Lema 1.1. *Se a reta r que passa por B e F_2 não é tangente a $\mathcal{C}$, então a reta s intersecta a mediatriz m num ponto P.*

Demonstração. Suponha que m não intersecta s num ponto P, logo m e s são paralelas, então como BF_2 é perpendicular a m, tem-se que BF_2 é perpendicular a s no ponto B. Veja ainda que BF_1 é um diâmetro, logo BF_2 é tangente a circunferência no ponto B. Portanto, pela afirmação contrapositiva do que foi mostrado, a reta s intersecta a reta m num ponto P. □

Proposição 1.13. *Se mover o ponto B ao longo da circunferência $\mathcal{C}$, então obtem-se os pontos P da hipérbole de focos F_1 e F_2.*

Demonstração. Suponha que F_1 esteja entre B e P, de acordo com a figura (1.34). Como o triângulo BPF_2 é isósceles, tem-se que $BP = PF_2$. Assim,

$$PB = PF_1 + F_1B = PF_2 \Rightarrow PF_2 - PF_1 = F_1B$$

Suponha agora que B está entre F_1 e P. Como o triângulo BPF_2 é isósceles, então $PB = PF_2$. Assim,

$$PF_1 = PB + BF_1 = PF_2 + BF_1 \Rightarrow PF_1 - PF_2 = BF_1$$

Portanto, $|PF_1 - PF_2| = BF_1$, e assim P pertence a hipérbole de focos F_1 e F_2. □

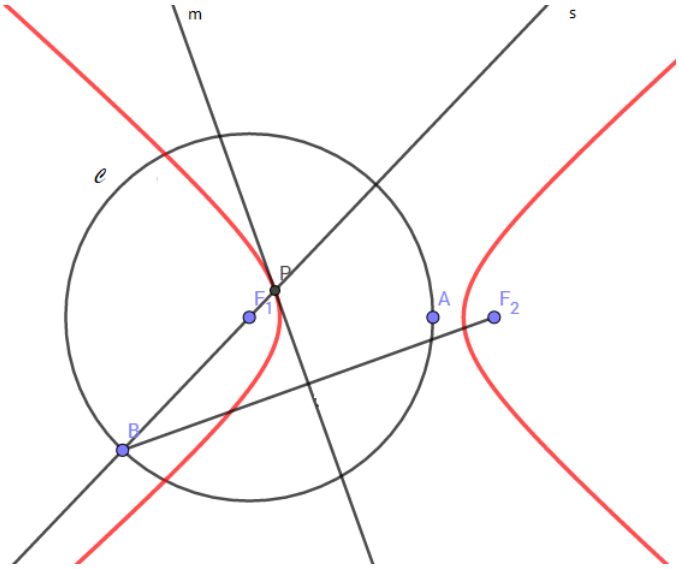

Figura 1.34: Proposição 1.13

1.5 Aplicações: Propriedades refletoras

Muitas das aplicações das cônicas estão associadas às leis de reflexão em superfícies cônicas de revolução, resultantes da revolução dos três tipos de cônicas em torno dos recpectivos eixos. No caso de elipse o movimento de revolução gera um objeto chamado *elipsóide*, no caso da parábola este movimento gera o *parabolóide* e para o caso da hipérbole, o *hiperbolóide*, veja na figura (1.35).

Conforme as leis da física clássica, os raios de luz e as fontes sonoras se propogam em linhas retas e radialmente a partir de sua fonte. Além disso, se sua fonte estiver muito longe de seu destino, estas ondas chegam a este local distante formando um feixe praticamente paralelo, a exemplo das ondas de rádio e das fontes luminosas de corpos celestes bem distantes.

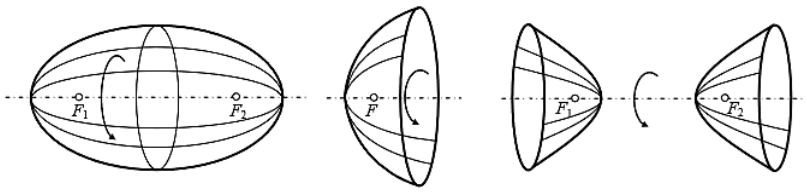

Figura 1.35: Superfícies de revolução de uma cônica

A reflexão da luz é um fenômeno que consiste no fato de a luz voltar a se propagar no meio de origem, após incidir sobre um objeto. As leis de reflexão da luz, seja na superfície plana, seja na superfície curva, podem ser enunciadas da seguinte forma:

- **1ª Lei da Reflexão**

  O raio de luz refletido e raio de luz incidente, assim como a reta normal a superfície pertencem ao mesmo plano, ou seja, o raio de incidência r_i, a reta normal n e o raio de reflexão r_r são coplanares, veja a figura (1.36);

- **2ª Lei da Reflexão**

  O ângulo de incidência θ_i é sempre igual ao ângulo de reflexão θ_r, conforme figura (1.36).

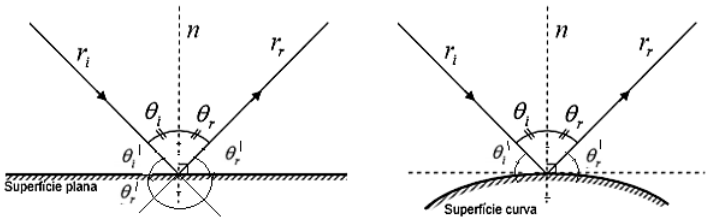

Figura 1.36: Leis de reflexão da luz

Observe pela figura anterior, que a reflexão na superfície curva é tratada de maneira análoga a da superfície plana, pois no ponto de incidência do raio é considerada a reta tangente a curva neste ponto, reta esta pertencente ao mesmo plano que o raio e a reta normal n. Dito de outra forma, nas superfícies curvas cada raio incidente é tratado pontualmente como em uma superfície plana, conforme a reta tangente neste ponto.

Além disso, observe que afirmação da 2ª lei de reflexão equivale a dizer que os ângulos θ_i' e θ_r' tem a mesma medida, pois são ângulos complementares de ângulos de mesma medida.

Dito isso, acompanhe a seguir como estas leis de reflexão atual nas superfícies cônicas.

1.5.1 Parábola

Proposição 1.14. *Se os raios de luz chegarem à uma superfície parabólica, paralelamente ao eixo de simetria, então estes serão refletidos para o foco, de acordo com a figura (1.37).*

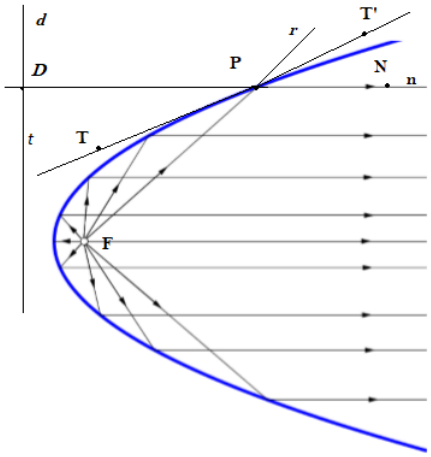

Figura 1.37: Superfície refletora parabólica

Demonstração. Sejam P um ponto qualquer da superfície parabólica onde o raio incide e é refletido, o ponto F o foco da parábola, a reta diretriz d, a reta r determinada pelos pontos F e P e a reta n como sendo a reta suporte do raio de incidência. Veja que, por hipótese, a reta suporte n do raio de incidência é parela ao eixo, logo esta é perpendicular a reta d. Considere ainda, o ponto D da reta n como sendo pé da perpendicular baixada de P em relação a d, o ponto N também pertencente a n em que P está entre D e N e os pontos. Por último, sejam a reta t bissetriz do ângulo $\widehat{FPD}$ e os pontos de T e T' de t, tais que P está entre eles e T está no mesmo semiplano do ponto F em relação à reta n.

Pela Proposição (1.8), a reta t é tangente a parábola no ponto P, além disso como t é a bissetriz do ângulo $\widehat{FPD}$, então tem-se que $\widehat{FPT} = \widehat{TPD}$. Perceba que como $\widehat{T'PN}$ é oposto pelo vértice com ângulo $\widehat{TPD}$, então $\widehat{T'PN} = \widehat{TPD} = \widehat{TPF}$. Portanto, a 2ª Lei de Reflexão é confirmada e então segue o resultado.

□

Esta propriedade garante a convergência para um ponto, no caso o foco, de todos os raios rebebidos em toda a superfície parabólica, isto fornece diversas aplicações na Engenharia. Um exemplo são as antenas parabólicas, veja a figura (1.38), em que o posicionamneto do receptor na haste central encontra-se próximo ou exatamente no foco deste parabolóide. Assim, este posicionamento implica que todo sinal recebido na extensão da supérfície da antena é refletido diretamente para o foco, ou seja, para o receptor.

Figura 1.38: Antena parabólica

O espelho parabólico também é usado em certos telescópios para refletir os raios de luz emitidos pelos corpos celestes para um outro espelho ou uma lente. O telescópio Hale no Monte Pamolar na Califórnia possui o maior espelho côncavo parabólico do mundo. Os espelhos côncavos parabólicos apresentam maior nitidez em relção aos espelhos côncavos esféricos quando se trata de imagens de objetos distantes.

E um outro exemplo é o uso de refletores parabólicos são os holofotes, faróis de automóveis e de motocicletas, de acordo com figura (1.39). O princípio é o mesmo das antenas, mas de maneira reversa: no foco da parábola fica uma lâmpada que ilumina uma superfície parabólica espelhada, ersta por dua vez reflete os raios de luz paralelos ao seu eixo.

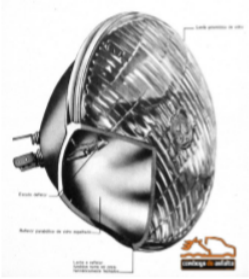

Figura 1.39: Farol parabólico

1.5.2 Elipse

Proposição 1.15. *Se a fonte de luz estiver situada no foco de um espelho elíptico, todos os raios refletidos por este espelho se concentrarão no outro foco, conforme a figura (1.40).*

Demonstração. Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse, P um ponto qualquer da elipse, r a reta determinada pelos pontos F_2 e P. Suponha que a finte luminosa esteja no foco F_1. Assim, considere o ponto N pertencente a reta r no qual P está entre F_2 e N. Por fim, sejam a reta t bissetriz no ângulo $\widehat{F_1PN}$ e os pontos T e T' em t, com P entre eles e T' no mesmo semiplano do ponto F_1 determinado pela reta r.

Pela Proposição (1.9), tem-se que t é a reta tangente à elipse no ponto P, além disso perceba que os ângulos $\widehat{F_1PT'}$ e $\widehat{T'PN}$ tem a mesma medida, logo $\widehat{T'PN} = \widehat{F_2PT}$, pois são opostos pelo vértice, logo $\widehat{F_1PT} = \widehat{F_2PT}$. Portanto, é garantida a 2ª Lei de Reflexão e então segue o resultado. □

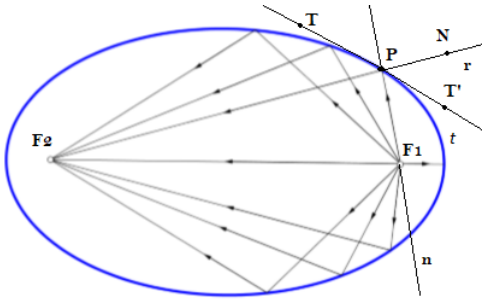

Figura 1.40: Superfície refletora elíptica

As consequências desta proposição indicam que todo sinal luminoso ou sonoro que irradia do foco de uma superfície refletora elíptica reflete para o outro foco. Na medicina, o espelho elíptico do Litotritor é usado par o tratamento dos cálculos renais. Este aparelho faz com que as ondas sonoras de choque criadas fora do corpo pelo aparelho, viajam através da pele e tecidos até encontrarem cálculos mais densos, pulverizando estes partículas, como pode ser visto na figura (1.41).

Fato parecido acorre no sistema de iluminação que os dentistas usam, veja a figura (1.42). Veja que são usado refletores elípticos como forma de concentrar o máximo de luz num ponto específico dos dentes do paciente.

Existe ainda os salões chamados de "galeria de murmúrios", na qual o teto tem a forma de um elipsóide. Nestas se duas pessoas se colocarem nos focos e uma delas falar, mesmo que o som seja

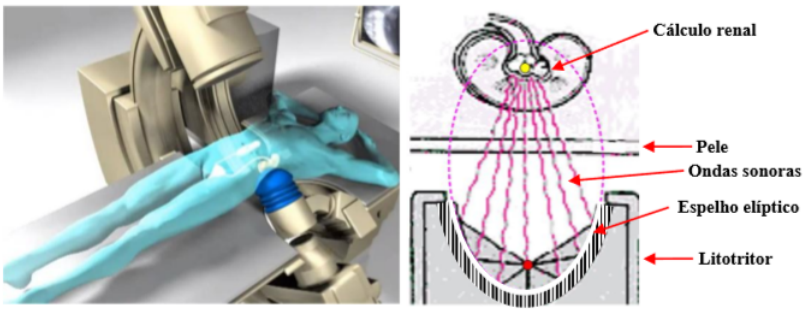

Figura 1.41: Litritor e aparelho elíptico

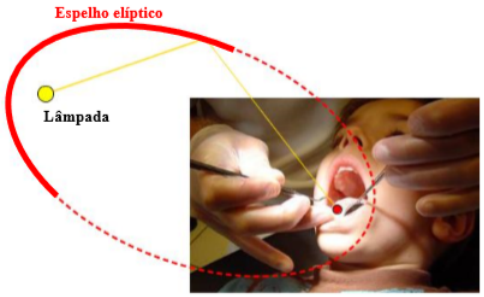

Figura 1.42: Sistema de iluminação dos dentistas

extremamente fraco, a outra pessoa uovirá perfeitamente, ainda que a esta tenha grandes dimensões e que haja outros ruídos, conforme a figura (1.43).

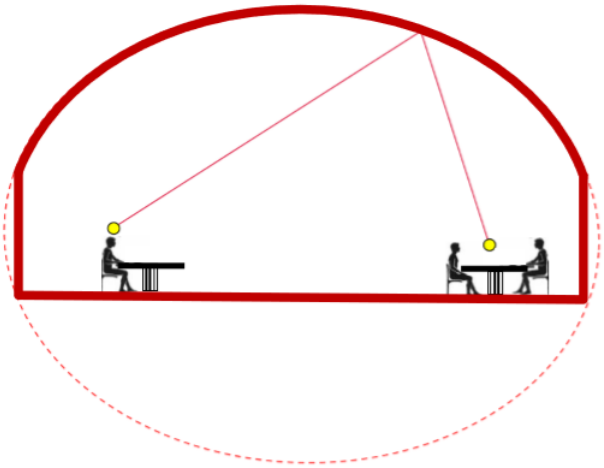

Figura 1.43: Galeria de murmúrios

1.5.3 Hipérbole

Proposição 1.16. *Se o raio de luz for dirigido a um dos focos de um espelho hipérbolico será refletida em direção ao outro foco, veja no figura (1.44).*

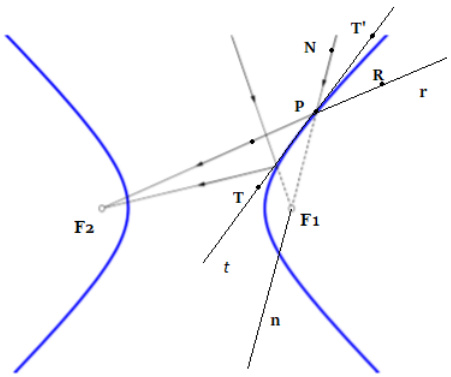

Figura 1.44: Superfície refletora hiperbólica

Demonstração. Sejam F_1 e F_2 os focos da hiperbole, P um ponto qualquer da elipse, r a reta determinada pelos pontos F_2 e P e a reta n determinada pelo foco F_1 e pelo ponto P. Suponha

que a fonte luminosa esteja apontada para o foco F_1. Assim, considere o ponto N pertencente a reta n no qual P está entre F_1 e N e o ponto em r tal que P está entre R e F_2. Por fim, sejam a reta t bissetriz no ângulo $\widehat{RPN}$ e os pontos T e T' em t, com P entre eles e T' no mesmo semiplano do ponto N determinado pela reta r.

Pela Proposição (1.10), tem-se que t é a reta tangente à hipérbole no ponto P, além disso perceba que os ângulos $\widehat{RPT'}$ e $\widehat{T'PN}$ tem a mesma medida, mas $\widehat{RPT'} = \widehat{F_2PT}$, pois são opostos pelo vértice, logo $\widehat{RPT'} = \widehat{F_2PT}$. Portanto, segue o resultado pela 2ª Lei de Reflexão.

□

A proposição indica que todo sinal luminoso ou sonoro que apontado para o foco de uma superfície refletora hiperbólica será refletido para o outro foco. O chamado telescópio de reflexão utiliza esta propriedade uma vez que é constituído, basicamente, por dois espelhos: o maior, que é parabólico, o outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos estão dispostos de maneira que além dos eixos coincidirem, o foco da parábola está no mesmo lugar que o da hipérbole, como mostra a figura (1.45).

Assim, quando os raios de luz refletem no espelho parabólico, pela propriedade refletora da parábola, eles são direcionados para o foco. Pórem, como o foco da parábola é o mesmo foco da hiérbole, pela propriedade refletora desta, os raios de luz refletem no espelho hiperbólico e seguem a direção pora o outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à partícula fotográfica. A vantagem deste telescópio consiste em possuir um comprimento menor do que os telescópios de refração, que são de lentes elípticas, mas que possuem o mesmo poder de amplificação.

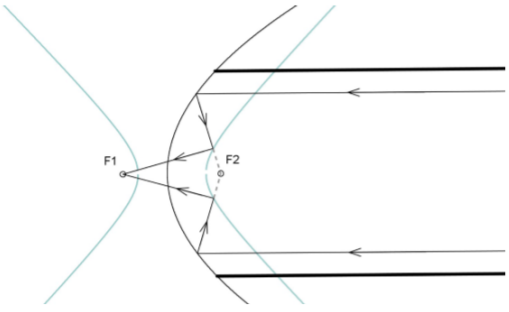

Figura 1.45: Superfície refletora hiperbólica

Capítulo 2

Abordagem analítica

A Geometria Analítica também denominada de Geometria Coordenada foi descrita pela primeira vez na famosa obra *Discours de la Méthode* do filósofo, físico e matemático René Descartes (1596 -1650). Descartes, por vezes chamado de "o fundador da Filosofia Moderna"e "o pai da matemática moderna", obteve reconhecimento matemático com a publicação desta obra na qual sugeriu a fusão da álgebra com a geometria. Neste contexto, conceitos da geometria são analisados por meio de processos algébricos, ou seja, são utilizados métodos e símbolos algébricos para representar e resolver problemas geométricos. Sua importância está presente no fato de que estabelece uma correspondência entre equações algébricas e curvas geométricas.

Dessa forma, neste capítulo, as cônicas serão vista do ponto de vista analítico. Assim, é necessário que o leitor tenha conhecimento dos conceitos básicos da Geometria Analítica plana, para isso veja [2]. Além disso, alguns dos conhecimentos obtidos no capítulo 1 são pré-requisitos para compreender alguns dos resultados que serão expostos.

2.1 Equação cartesiana geral de uma cônica

Foi visto no capítulo 1 que cônicas são curvas planas obtidas por interseção de um cone circular (neste caso reto) com um plano, como também foram mostrados resultados acerca do foco, reta diretriz e excentricidade. Um destes resultados foi a Proposição (1.4) na qual afirma que sendo P um ponto qualquer da cônica, F um de seus focos (ou o único) e D o ponto da reta diretriz d, tal que PD é perpendicular a d, tem-se então que $\frac{PF}{PD} = \epsilon$, em que $\epsilon \geq 0$ é o valor da excentricidade associada a tal cônica.

Dessa forma, adotando um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas xOy e considerando que o ponto F tenha coordenadas $F = (x_0, y_0)$ e a reta d tenha equação $d : ax + by + c = 0$, tem-se que $\frac{PF}{PD} = \epsilon$ pode ser reescrito algebricamente da seguinte forma:

$$\frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \epsilon. \tag{2.1}$$

Assim desenvolvendo a equação (2.1), tem-se que

$$\frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{\epsilon|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{\epsilon^2}{a^2 + b^2}(ax + by + c)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (kax + kby + kc)^2, \text{ com } \ k^2 = \frac{\epsilon^2}{a^2 + b^2}.$$

Desta forma, tem-se que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (px + qy + r)^2,$$

em que,

$$\begin{cases} p = ka \\ q = kb \\ r = kc \end{cases}$$

Portanto, a equação (2.2) reduz a equação geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2.2}$$

na qual,

$$\begin{cases} A = 1 - p^2 \\ B = -2pq \\ C = 1 - q^2 \\ D = -2(x_0 + pr) \\ E = -2(y_0 + qr) \\ F = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases}$$

Assim, a equação (2.2) é chamada de equação cartesiana geral de uma cônica e pode representar desde pontos, retas e circunferências, até as cônicas, alvo deste estudo, mas isto será mostrado mais adiante.

Agora veja que a forma característica que identifica qual tipo de cônica se refere a equação (2.1) está vinculada a escolha dos eixos coordenados e da constante positiva ϵ. De fato, considere um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $x'O'y'$, no qual o eixo $O'x'$ contém o foco F e o eixo $O'y'$ coincide com a reta diretriz d, conforme figura (2.1).

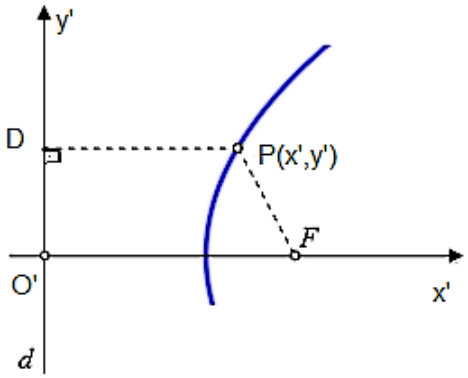

Figura 2.1: Sistema de eixos $x'O'y'$

Dessa forma, seja $P = (x', y')$ um ponto da cônica e a distância $OF = 2p$. Note assim que a equação (2.1) assume a forma,

$$\frac{PF}{PD} = \epsilon \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{(x'-2p)^2 + (y'-0)^2}}{x'} \right)^2 = \epsilon^2 \Leftrightarrow$$

$$(x'-2p)^2 + (y')^2 = (x')^2\epsilon^2 \Leftrightarrow (x')^2 - 4px' + 4p^2 + (y')^2 = (x')^2\epsilon^2 \Leftrightarrow$$

$$(1-\epsilon)^2(x')^2 - 4px' + (y')^2 = -4p^2 \tag{2.3}$$

Através da equação (2.3) e dependendo do valor dado a constante ϵ pode-se então deduzir a forma padrão da equação cartesiana de cada cônica em função do parâmetro p.

Veja então a seguir a caracterização das três cônicas almejadas, de acordo com o valor imposto à excentricidade ϵ.

2.1.1 Equação da parábola

Considere a equação (2.3), na qual fazendo $\epsilon = 1$, tem-se,

$$(1-1^2)x'^2 - 4px' + y'^2 = -4p^2 \Leftrightarrow$$

$$y'^2 = 4p(x'-p). \tag{2.4}$$

Assim, note que realizando uma translação de eixos coordenados de modo que ponto $(p,0)$ passe a ser a origem, obtem-se um novo sistema de coordenadas cartesianas $x''O''y''$ no qual:

$$\begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' \end{cases}.$$

E dessa forma a equação (2.4) reduz-se, no sistema de coordenadas $x''O''y''$, à forma que é chamada equação característica de uma parábola, a saber:

$$y''^2 = 4px''$$

Outro processo para a dedução a equação da parábola consiste em considerar uma parábola qualquer em um sistema de coordenadas cartesianas xOy, conforme a figura (2.2) com as seguintes características definidas abaixo:

- Foco: o ponto F;
- Diretriz: a reta d;
- Eixo de simetria: a reta r perpendicular à diretriz passando pelo foco F;
- Vértice: o ponto V de interseção do eixo de simetria com a parábola;
- Eixo Ox: o eixo de simetria;
- Eixo Oy: mediatriz do segmento FD', em que D' é a interseção do eixo Ox com a reta d.

Assim, pondo $FD' = 2p$, veja que segundo a Proposição (1.7), $FV = FD' = p$, logo tem-se que $d : x + p = 0$ e $F = (p, 0)$. E então, sendo $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola fica estabelecido também da Proposição (1.7) que,

$$PF = PD \Rightarrow \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x+p|}{\sqrt{1+0}} \Rightarrow$$
$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \Rightarrow$$
$$y^2 = 4px, \text{ com } x \geqslant 0, \ p > 0$$

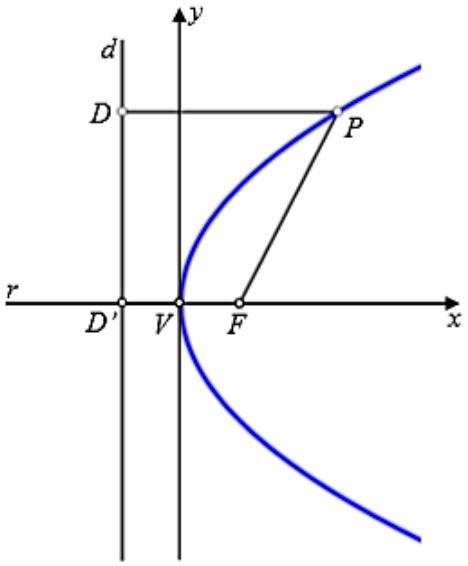

Figura 2.2: Parábola

2.1.2 Equação da elipse

Para a equação da elipse, considere novamente a equação (2.3). Veja agora que fazendo $0 < e < 1$, tem-se que $1 - e^2 > 0$, e então,

$$(1-\epsilon^2)x'^2 - 4px' + y'^2 = -4p^2 \Leftrightarrow x'^2 - \frac{4p}{1-\epsilon^2}x' + \frac{y'^2}{1-\epsilon^2} = \frac{-4p^2}{1-\epsilon^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(x' - \frac{2p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y'^2}{1-\epsilon^2} = \frac{4p^2}{1-\epsilon^2}\left(\frac{1}{1-\epsilon^2} - 1\right) \Leftrightarrow \left(x' - \frac{2p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y'^2}{1-\epsilon^2} = \frac{4p^2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(x' - \frac{2p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y'^2}{1-\epsilon^2} = \left(\frac{2p\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x' - \frac{2p}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{2p\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{2p\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2} = 1 \tag{2.5}$$

Assim, fazendo então uma translação dos eixos coordenados de modo que ponto $\left(\frac{2p}{1-\epsilon^2}, 0\right)$ passe a ser a origem, obtem-se um novo sistema de coordenadas cartesianas $x''O''y''$ no qual:

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{2p}{1-\epsilon^2} \\ y' = y'' \end{cases}$$

E dessa forma a equação (2.5) reduz-se, no sistema de coordenadas $x''O''y''$, a forma característica da equação de uma elipse,

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

Em que $a = \frac{2p\epsilon}{1-\epsilon^2}$ e $b = \frac{2p\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ e uma vez que $1 - \epsilon^2 < \sqrt{1-\epsilon^2}$, tem-se que $\frac{2p\epsilon}{1-\epsilon^2} > \frac{2p\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ e assim $a > b$.

Outro processo para a dedução da equação característica de uma elipse consiste em considerar uma elipse qualquer em um sistema de coordenadas cartesianas xOy, acompanhe na figura (2.3), em que se tem as seguintes características:

- Focos: os pontos F_1 e F_2;
- Vértices: V_1 e V_2, interseção da elipse com a reta passando pelos focos F_1 e F_2;
- Vértices: V_3 e V_4, interseção da elipse com a mediatriz do segmento V_1V_2;
- Eixo maior: segmento V_1V_2 de comprimento $2a$;
- Eixo menor: segmento V_3V_4 de comprimento $2b$;
- Distância focal: distância entre os focos de comprimento $2c$;
- Centro O: interseção dos segmentos V_1V_2 e V_3V_4;
- Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$;
- Diretrizes: retas d_1 e d_2 perpendiculares à reta que contém os focos, e a uma distância $\frac{a}{e}$ do centro.

Assim, sendo $P = (x, y)$ um ponto qualquer da elipse fica estabelecido de acordo com a Proposição (1.5) que $PF_1 + PF_2 = K$, com K uma constante real positiva. Note ainda $K = 2a$, pois sendo V_1 um ponto da elipse, tem-se que$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$. Logo pela mesma Proposição (1.5), tem-se que,

$$PF_1 + PF_2 = 2a, \text{ com } a > c,$$

com isso

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

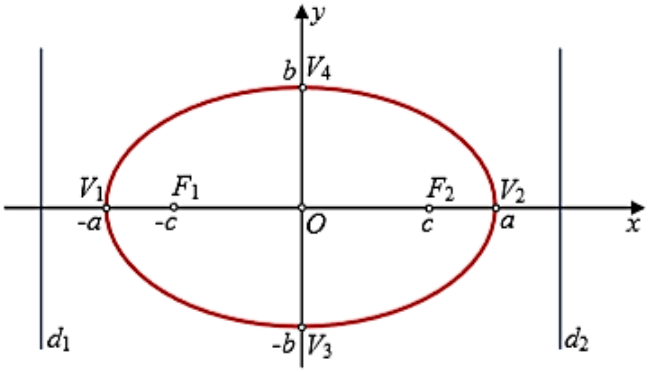

Figura 2.3: Elipse

$$(x+c)^2+y^2=\left[4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\right]\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\Rightarrow$$
$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+c^2x^2\Rightarrow$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{2.6}$$

Perceba que $a^2-c^2=b^2$. De fato, pois sendo V_4 um ponto da elipse, $V_4F_1F_2$ um triângulo isósceles de base F_1F_2 e $V_4F_1+V_4F_2=2a$, tem-se que $V_4F_1=V_4F_2=a$. Dessa forma o triângulo retângulo OF_1V_4 tem hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c.

E então dividindo ambos os membros da equação (2.5) por a^2b^2, obtem-se,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2.1.3 Equação da hipérbole

E por fim, para a equação da hipérbole considere mais uma vez a equação (2.3), mas desta vez tomando $\epsilon>1$, tem-se que $1-\epsilon^2<0$, donde $\epsilon^2-1>0$, assim,

$$(1-\epsilon^2)x'^2-4px'+y'^2=-4p^2\Leftrightarrow -x'^2-\frac{4p}{\epsilon^2-1}x'+\frac{y'^2}{\epsilon^2-1}=\frac{-4p^2}{\epsilon^2-1}\Leftrightarrow$$
$$-\left(x'+\frac{2p}{1-\epsilon^2}\right)^2+\frac{y'^2}{\epsilon^2-1}=\frac{-4p^2}{\epsilon^2-1}\left(\frac{1}{\epsilon^2-1}+1\right)\Leftrightarrow$$
$$-\left(x'+\frac{2p}{\epsilon^2-1}\right)^2+\frac{y'^2}{\epsilon^2-1}=-\frac{4p^2\epsilon^2}{(\epsilon^2-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$-\left(x'+\frac{2p}{\epsilon^2-1}\right)^2+\frac{y'^2}{\epsilon^2-1}=-\left(\frac{2p\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$-\frac{\left(x'+\frac{2p}{\epsilon^2-1}\right)^2}{\left(\frac{2p\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{2p\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\right)^2}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x'+\frac{2p}{\epsilon^2-1}\right)^2}{\left(\frac{2p\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2}-\frac{y'^2}{\left(\frac{2p\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\right)^2}=1 \tag{2.7}$$

E assim, fazendo então uma translação de eixos coordenados de modo que ponto $\left(-\frac{2p}{\epsilon^2-1},0\right)$ passe a ser a origem, obtem-se um novo sistema de coordenadas cartesianas $x''O''y''$ no qual:

$$\begin{cases} x'=x''-\frac{2p}{\epsilon^2-1} \\ y'=y'' \end{cases}$$

E dessa forma a equação (2.6) reduz-se, no sistema de coordenadas $x''O''y''$, à forma que é a equação característica de uma hipérbole,

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1$$

Em que $a=\frac{2p\epsilon}{\epsilon^2-1}$ e $b=\frac{2p\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2-1}}$.

Outro processo para a dedução a equação da hipérbole consiste em considerar uma hipérbole qualquer em um sistema de coordenadas cartesianas xOy, veja a figura (2.4), com as seguintes características:

- Focos: os pontos F_1 e F_2;
- Vértices: V_1 e V_2, interseção da hipérbole com a reta que passa pelos focos F_1 e F_2;
- Eixo focal: segmento V_1V_2 de comprimento $2a$;
- Distância focal: distância entre os focos de comprimento $2c$;
- Eixo transverso: segmento V_3V_4 de compriento $2b$, tal que $c^2=a^2+b^2$;
- Centro O: interseção dos segmentos V_1V_2 com a sua mediatriz;
- Excentricidade: $e=\frac{c}{a}$;
- Diretrizes: retas d_1 e d_2 perpendiculares à reta que contém os focos e que estão a uma distância $\frac{a}{c}$ do centro;

- Assíntotas: retas suportes s_1 e s_2 das diagonais do retângulo determinado pelos pontos V_1, V_2, V_3 e V_4.

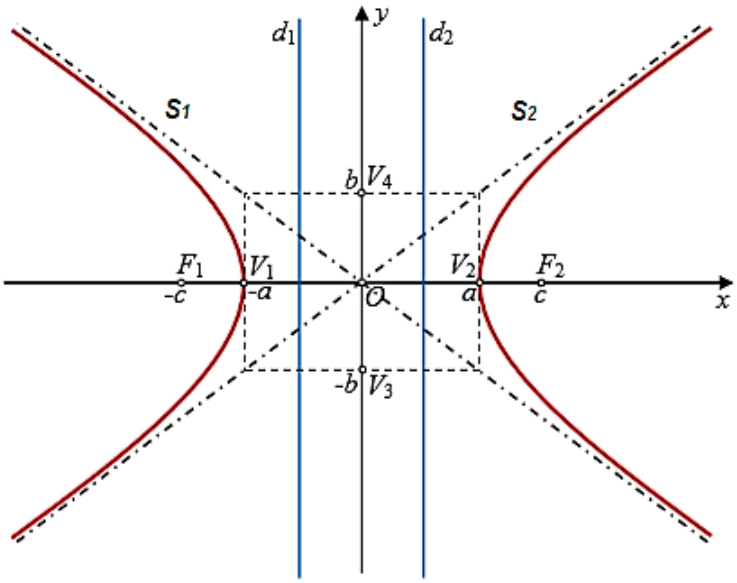

Figura 2.4: Hipérbole

Assim, sendo $P = (x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole, fica estabelecido de acordo com a Proposição (1.6) que $|PF_1 - PF_2| = K$, com K uma constante real positiva. Note que $K = 2a$, pois sendo V_1 um ponto da hipérbole, tem-se que $V_1F_2 - V_1F_1 = 2a$. Logo, também pela Proposição (1.6) tem-se que,

$$|PF_1 - PF_2| = 2a, \text{ com } a < c \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = \left[4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2\right] \Rightarrow$$

$$\mp a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{2.8}$$

Observe que como $a^2 + b^2 = c^2$, então $a^2 - c^2 = -b^2$, logo dividindo ambos os membros da equação (2.7) por $-a^2b^2$, obtem-se,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Perceba ainda que as retas assíntotas $s_1 : y = -\frac{b}{a}x$ e $s_2 : y = \frac{b}{a}x$ são as quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os valores de x ou y cresce ou decresce. Com efeito, considerando que a hipérbole é simétrica em relação aos eixos x e y, tome a porção do 1º quadrante, ou seja, $x > a$ e $y > 0$, assim ,

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2x^2 - b^2a^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} \Rightarrow y = \pm \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

E assim fazendo $\lim_{x\to\infty} y$, temos que a hipérbole tende para o gráfico da reta $y = \pm\frac{b}{a}x$.

2.1.4 Identificação de cônicas a partir da equação geral cartesiana

Uma vez determinado os valores dos coeficientes A, B, C, D, E e F da equação (2.2), pretende-se saber que curva representa tal equação. Neste caso, como já foi visto, veja que a forma que identifica a equação característica de uma cônica depende essencialmente da escolha dos eixos coordenados. Logo, partindo da equação (2.2), condicionada a um sistema de coordenadas cartesianas xOy, pretende-se realizar uma rotação e/ou translação destes eixos coordenados de modo a encontrar um novo sistema de coordenadas em que a referida equação assuma uma forma na qual seja possível reconhecer a figura geométrica por ela representada.

Antes observe que se os coeficientes A e C são ambos nulos, tem-se que a equação (2.2) será uma equação linear e então representa uma reta. Mas se os coeficientes A e C não são nulos, então, como já foi dito, é necessário realizar uma rotação e/ou translação nos eixos coordenados de modo a obter um novo sistema de coordenadas.

Para primeiro fazer a rotação dos eixos coordenados, suponha que (x, y) e $(\hat{x}, \hat{y})$ as coordenadas de um ponto P nos sistemas de coordenadas xOy e $\hat{x}\hat{O}\hat{y}$, respectivamente, em que $\hat{x}\hat{O}\hat{y}$ é o sistema resultante de xOy através de uma rotação de um ângulo θ, veja na figura (2.5). Desta forma, observando tal figura, veja que os valores de x e y em função de $\hat{x}$, $\hat{y}$ e θ, pode ser dado da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = OM = ON - MN = \hat{x}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta \\ y = MP = MM' + MP = NN' + M'P = \hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta \end{cases}$$

Agora veja como determinar a amplitude do ângulo θ necessário para uma mudança adequada do sistema de coordenadas.

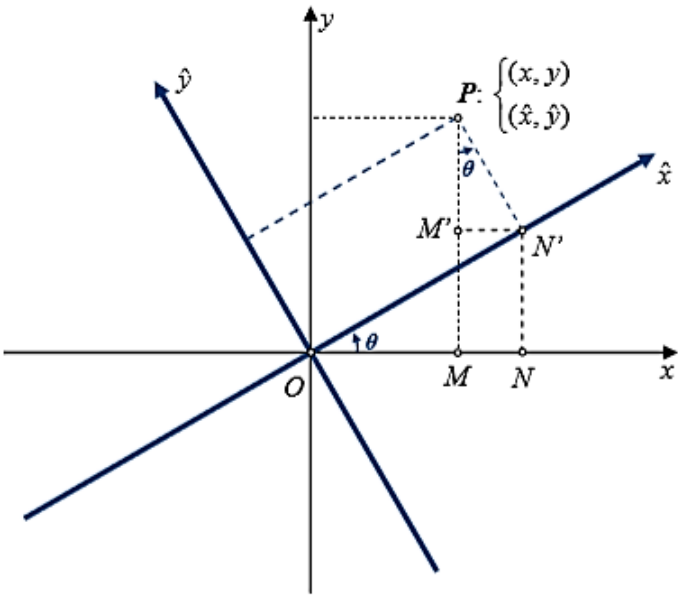

Figura 2.5: Rotação de eixos

Proposição 2.1. *O ângulo θ necessário para mudança do sistema de coordenadas necessário para eliminar o termo em xy da equação*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F, \quad B \neq 0$$

pode ser determinado pela fórmula,

$$cotg\ (2\theta) = \frac{A - C}{B}$$

ou

$$\theta = \frac{1}{2}\ arccotg\ \left(\frac{A - C}{B}\right).$$

Demonstração. Fazendo a substituição das fórmulas de rotação,

$$\begin{cases} x = \hat{x}\cos\theta - \hat{y}\ \text{sen}\ \theta \\ y = \hat{x}\ \text{sen}\ \theta + \hat{y}\cos\theta \end{cases}$$

na equação, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, obtem-se,

$$\hat{A}\hat{x}^2 + \hat{B}\hat{x}\hat{y} + \hat{C}\hat{y}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + \hat{F} = 0$$

em que,

$$\begin{cases} \hat{A} = A\cos^2\theta + B\cos\theta\text{sen}\theta + C\text{sen}^2\theta \\ \hat{B} = B\cos(2\theta) - (A-C)\text{sen}(2\theta) \\ \hat{C} = A\text{sen}^2\theta - B\cos\theta\text{sen}\theta + C\cos^2\theta \\ \hat{D} = D\cos\theta + E\text{sen}\theta \\ \hat{E} = -D\text{sen}\theta + E\cos\theta \end{cases}.$$

Note ainda que o coeficiente F é invariante por rotação.

Assim, para eliminar o termo em $\hat{x}\hat{y}$, deve-se ter $\hat{B} = 0$, logo

$$\hat{B} = B\cos(2\theta) - (A-C)\ \text{sen}(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \text{cotg}(2\theta) = \frac{A-C}{B}. \tag{2.9}$$

Fazendo as substituições,

$$\text{cotg}(2\theta) = \frac{\text{cotg}^2\theta - 1}{2\text{cotg}\theta} \text{ e } \lambda = \frac{A-C}{B}$$

tem-se que,

$$\text{cotg}^2\theta - 2\lambda\text{cotg}\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{cotg}\theta = \lambda \pm \sqrt{1+\lambda^2} \text{ com } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Portanto, é garantido que a equação (2.9) possui duas soluções reais distintas e assim fica provada a proposição. □

Dessa forma, aplicando uma rotação segundo um ângulo θ a equação (2.2) fica reduzida a forma,

$$\hat{A}\hat{x}^2 + \hat{C}\hat{y}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + F = 0. \tag{2.10}$$

Para fazer a translação, lembre que, sendo (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas de um ponto P nos sistemas de coordenadas xOy e $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, respectivamente, em que $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ é o resultante de xOy através de uma translação segundo um vetor (h, k), de acordo com figura (2.6). Pode-se então obter os valores de x e y em função de $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a saber:

$$\begin{cases} x = MP = MM' + M'P = h + \overline{x} \\ y = NP = NN' + N'P = k + \overline{y} \end{cases}$$

Sendo assim, pretende-se determinar as coordenadas do vetor (h, k) necessário para a mudança dos eixos. Para isso considere dois casos: o primeiro caso será quando um dos coeficientes $\hat{A}$ ou $\hat{C}$

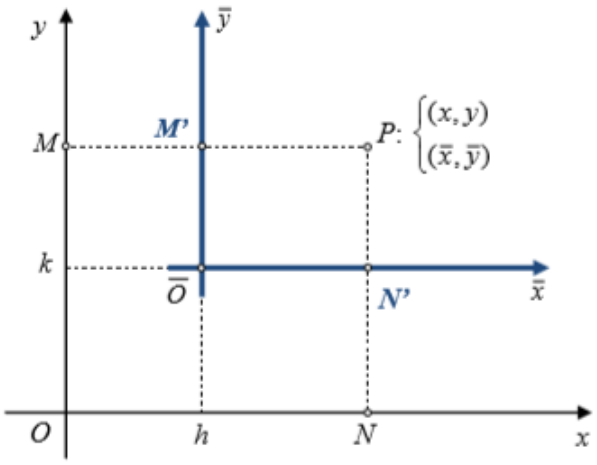

Figura 2.6: Translação de eixos

é nulo; e o segundo quando ambos os coeficientes $\hat{A}$ e $\hat{C}$ não são nulos. Veja ainda que se ambos os coeficientes $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são ambos nulos, então a equação (2.10) representa uma reta.

Para o primeiro caso, suponha, sem perda de generalidade que o coeficiente $\hat{A} = 0$, logo é feita uma translação baseada na proposição a seguir.

Proposição 2.2. *O vetor de coordenadas (h, k), necessário para uma translação de eixos em que elimina os termos $\hat{y}$ da equação,*

$$\hat{A}\hat{x}^2 + \hat{C}\hat{y}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + F = 0$$

pode ser calculado pela solução do sistema,

$$\begin{cases} h = 0 \\ k = -\frac{\hat{E}}{2\hat{C}} \end{cases} . \tag{2.11}$$

Demonstração. Fazendo a substituição das fórmulas de translação,

$$\begin{cases} \hat{x} = \overline{x} + h \\ \hat{y} = \overline{y} + k \end{cases}$$

na equação (2.10), obtem-se,

$$\hat{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0$$

com

$$\begin{cases} \overline{E} = 2\hat{C}k + \hat{E} \\ \overline{F} = \hat{C}k^2 + \hat{D}h + \hat{E}k + F. \end{cases} .$$

Perceba que os coeficientes $\hat{A}$ e $\hat{D}$ invariantes nesta rotação.

Assim, para eliminar os termos $\overline{y}$, deve-se ter $\overline{E} = 0$ e, portanto, as equações do sistema (2.11) ficam determinadas. □

Logo, após esta translação de eixos, a equação (2.10) fica reduzida, no sistema de coordenadas $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, a forma,

$$\hat{C}\overline{y}^2 + \hat{D}\overline{x} + \overline{F} = 0 \tag{2.12}$$

Nesta forma, pode-se identificar mais facilamente qual figura tal equação representa. O leitor pode verificar que:

- Se $\hat{C}$ e $\overline{F}$ tem o mesmo sinal e além disso $\hat{D} = 0$, então não existem pontos que satisfazem tal equação, logo esta representa o conjunto vazio ;
- Se $\hat{C}$ e $\overline{F}$ tem sinais contrários e além disso $\hat{D} = 0$, então a equação representa um par de retas paralelas;
- Se $\overline{F} = 0$ e $\hat{D} \neq 0$, então a equação é uma parábola;
- Se $\overline{F}, \hat{D} \neq 0$, então após novamnete uma translação segundo um vetor $\left(\frac{-\overline{F}}{\hat{D}}, 0\right)$ é possível ver que se trata de uma parábola.

Para o segundo caso, observe, na proposição logo a seguir a translação necessária para melhor identificar qual curva representa a equação (2.10).

Proposição 2.3. *O vetor de coordenadas (h, k), necessário para uma translação de eixos em que elimina os termos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ da equação,*

$$\hat{A}\hat{x}^2 + \hat{C}\hat{y}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + F = 0,$$

pode ser calculado pela solução do sistema,

$$\begin{cases} 2\hat{A}h + \hat{D} = 0 \\ 2\hat{C}k + \hat{E} = 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Demonstração. Fazendo a substituição das fórmulas de translação

$$\begin{cases} \hat{x} = \overline{x} + h \\ \hat{y} = \overline{y} + k \end{cases}$$

na equação (2.10), obtem-se,

$$\hat{A}\overline{x}^2 + \hat{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0$$

com

$$\begin{cases} \overline{D} = 2\hat{A}h + \hat{D} \\ \overline{E} = 2\hat{C}k + \hat{E} \\ \overline{F} = \hat{A}h^2 + \hat{C}k^2 + \hat{D}h + \hat{E}k + F \end{cases}.$$

Perceba que os coeficientes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ invariantes por rotação.

Assim, para eliminar os termos $\overline{x}$ e $\overline{y}$, deve-se ter $\overline{D} = \overline{E} = 0$ e, portanto, as equações do sistema (2.13) são determinadas. □

Logo, finalmente a equação (2.10) reduz-se, no sistema de coordenadas $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, a forma,

$$\hat{A}\overline{x}^2 + \hat{C}\overline{y}^2 + \overline{F} = 0, \tag{2.14}$$

Pode-se assim, facilmente identificar que figura a equação (2.10) representa no novo sistema de coordenadas. De fato, acompanhe:

- Se $\hat{A}$, $\hat{C}$ e $\overline{F}$ tem o mesmo sinal, então não existem pontos que satisfazem tal equação, logo representa o conjunto vazio;
- Se $\hat{A}$ e $\hat{C}$ tem o mesmo sinal e $\overline{F} = 0$, então o único ponto que satisfaz tal equação é o ponto $(0, 0)$, ou seja a equação representa um ponto;
- Se $\hat{A}$ e $\hat{C}$ possuem o mesmo sinal e $\overline{F}$ tem sinal oposto ao sinal deles, então a equação representa uma elipse ou uma circunferência;
- Se $\hat{A}$ e $\hat{C}$ tem sinais opostos e $\overline{F} = 0$, então tal equação representa um par de retas concorrentes;
- Se $\hat{A}$ e $\hat{C}$ tem sinais opostos e $\overline{F} \neq 0$, então a equação é uma hipérbole;

Exemplo 2.1. *Considere a equação cartesiana geral da cônica,*

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0. \tag{2.15}$$

Para primeiro realizar uma rotação de eixos, veja que segundo a Proposição (2.1), um dos ângulos θ necessário para realizar a rotação adequada será:

$$\theta = \frac{1}{2} arcctg\ \left(\frac{5-5}{6}\right) = \frac{1}{2} arcctg(0) = 45°.$$

Logo, a equação (2.15) em um novo sistema de coordenadas $\hat{x}\hat{O}\hat{y}$, terá a forma:

$$8\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 + 4\sqrt{2}\hat{y} - 4 = 0 \tag{2.16}$$

Já para realizar a translação, a Proposição (2.12) indica que o vetor necessário para uma translação adequada de eixos será:

$$(h, k) = (0, -\sqrt{2}).$$

Logo, a equação (2.16), no sistema de coordenadas $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, assume a forma:

$$8\overline{x}^2 + 2\overline{y}^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \overline{x}^2 + \frac{\overline{y}^2}{4} = 1.$$

Portanto, uma elipse em que seu eixo maior está sobre o eixo y.

Exemplo 2.2. *A equação $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$ representa uma parábola.*

Exemplo 2.3. *A equação $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ representa uma elipse.*

Exemplo 2.4. *A equação $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$ representa uma hipérbole.*

2.1.5 Equação da reta tangente a uma cônica

Para estabelecer uma caracterização de retas tangentes às cônicas, considere que o procedimento geral para obter a equação da reta tangente num ponto $P = (x_0, y_0)$ de uma curva, consiste em determinar o valor do coeficiente m da equação da reta $r : y - y_0 = m(x - x_0)$, uma vez que $m = tg\ \alpha$ é o coeficiente angular da reta tangente em P, conforme a figura (2.7). Assim, isolando o valor de y na equação da reta e substituindo o resultado na equação da cônica, obtem-se uma equação em x na forma,

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{2.17}$$

cujas raízes são:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

A esta última equação deve-se impor que $\Delta = 0$, já que deve ter apenas uma única solução. Isso implica que $x_0 = -\frac{B}{2A}$.

Com isso considere então uma elipse de equação,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \tag{2.18}$$

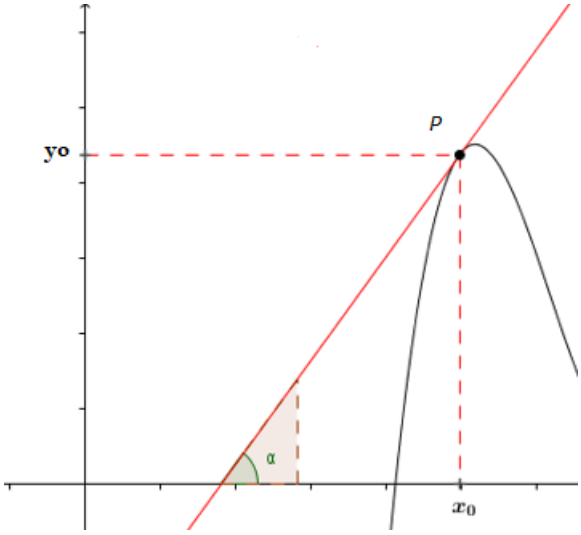

Figura 2.7: Reta tangente a uma curva

com $a, b > 0$. As retas tangentes aos vértices $V_1 = (-a, 0)$, $V_2 = (a, 0)$, $V_3 = (0, b)$ e $V_4 = (0, -b)$ são as retas verticais $x = \pm a$, e as retas horizontais $y = \pm b$. Em um outro ponto $P = (x_0, y_0)$ qualquer da elipse, as retas tangentes obtem-se, através da substituição da equação da reta $y = m(x - x_0) + y_0$ na equação (2.18). Assim, tem-se que uma equação da forma (2.17) em que,

$$\begin{cases} A = b^2 + a^2m^2 \\ B = 2ma^2(y_0 - mx_0) \\ C = a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 \end{cases}$$

E como deve-se ter $x_0 = -\frac{B}{2A}$, obtem-se,

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{2ma^2(y_0 - mx_0)}{2(b^2 + a^2m^2)} \Leftrightarrow \\ x_0 &= -\frac{a^2(y_0 - mx_0)m}{b^2 + a^2m^2} \Leftrightarrow \\ m &= -\frac{x_0b^2}{y_0a^2} \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente a elipse no ponto P será:

$$y = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x - x_0) + y_0$$

.

Considere agora uma parábola de equação ,

$$y^2 = 4px, \tag{2.19}$$

com $p > 0$. No vértice $V = (0, 0)$ a reta tangente é a reta vértical $x = 0$. Em um outro ponto $P = (x_0, y_0)$ qualquer da parábola obtem-se, através da substituição da equação da reta $y = m(x - x_0) + y_0$ na equação (2.19). Dessa forma, encontra-se a forma da equação (2.17) em que,

$$\begin{cases} A = m^2 \\ B = 2(y_0 - mx_0)m - 4p) \\ C = (y_0 - mx_0)^2 \end{cases}$$

E, assim, deve-se ter novamente que $x_0 = -\frac{B}{2A}$ e então,

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{2(y_0 - mx_0)m - 4p)}{2m^2} \Leftrightarrow \\ x_0 &= -\frac{(y_0 - mx_0)m - 2p}{m^2} \Leftrightarrow \\ m &= \frac{2p}{y_0}, \end{aligned}$$

em que a equação da reta tangente à parábola no ponto P será:

$$y = \frac{2p}{y_0}(x - x_0) + y_0.$$

E, por fim, sendo a equação da hipérbole,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \tag{2.20}$$

com $a, b > 0$. Nos vértices $V_1 = (-a, 0)$ e $V_2 = (a, 0)$ as equações da reta tangente são as retas vérticais $x = \pm a$ e para um outro ponto $P = (x, y)$ qualquer da hiperbole as retas tangentes obtem-se, novamente, através da substituição da equação da reta $y = m(x - x_0) + y_0$ na equação (2.20). Deste modo, ganha-se forma a equação (2.17) em que,

$$\begin{cases} A = b^2 - a^2m^2 \\ B = -2ma^2(y_0 - mx_0) \\ C = -a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 \end{cases}$$

E, assim como deve-se ter $x_0 = -\frac{B}{2A}$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{-2ma^2(y_0 - mx_0)}{2(b^2 - a^2m^2)} \Leftrightarrow \\ x_0 &= \frac{a^2(y_0 - mx_0)m}{b^2 - a^2m^2} \Leftrightarrow \\ m &= \frac{x_0b^2}{y_0a^2} \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente a hipérbole no ponto P será:

$$y = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0) + y_0$$

.

2.2 Equação polar de uma cônica

O sistema de coordenadas polares é um sistema de duas coordendas em que cada ponto no plano é determinado por uma distância e um ângulo em relação a um ponto fixo de referência. O ponto de referência é chamado *pólo* e a semirreta de origem no pólo é o *eixo polar*, de acordo com a figura (2.8).

Para determinar a localização de um ponto P no sistema de oordenadas polares, considere um ponto O (pólo) como referencial fixo e uma semirreta Ox (eixo polar). O segmento de reta OP de comprimento r é chamado de raio vetor e o ânngulo θ formado pelo eixo polar Ox e o segmento OP são dados pela par ordenado (r, θ).

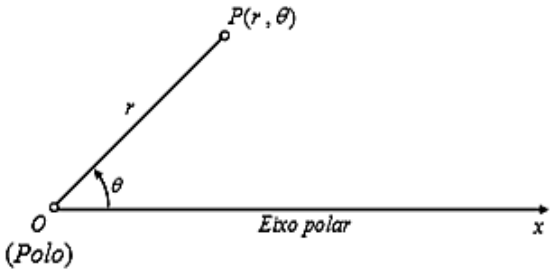

Figura 2.8: Sistema de coordenadas polares

Feito isso, a fim de relacionar os sistemas de coordenadas polares e cartesianas, faça com que o pólo coincida com a origem do referencial cartesiano e o eixo polar coincida com o semieixo Ox, conforme a figura (2.9).

Assim, veja que o ponto P tem coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) e

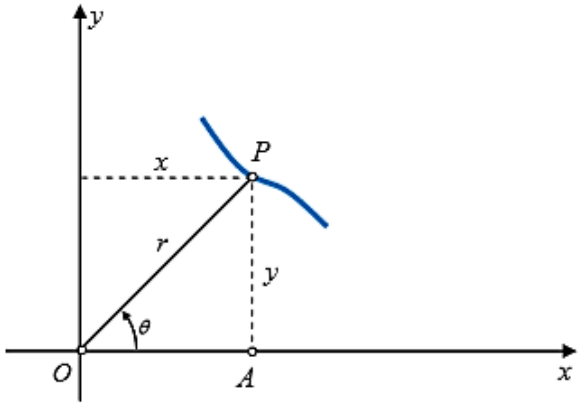

Figura 2.9: Relação entre coordenadas polares e cartesianas

além disso, que através do triângulo OAP, tem-se as relações:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Com isso, para determinar as equações polares das cônicas, considere dois casos:

- Primeiro caso: A diretriz d é perpendicular ao eixo polar, como pode ser visto na figura (2.10).

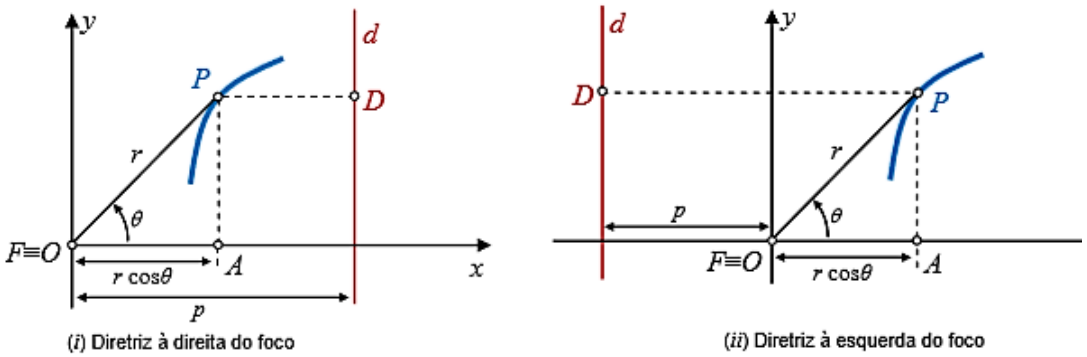

Figura 2.10: Diretriz perpendicular ao eixo polar

Assim, para este caso, considere P um ponto qualquer da cônica de coordenadas polares (r, θ),

sendo F um dos focos. Considere ainda que p é diatância de F a reta d. Assim, tem-se,

$$\begin{cases} PD = p - r\cos\theta, \text{ se a diretriz estiver à direita do foco F, veja a figura [2.10(i)];} \\ PD = p + r\cos\theta, \text{ se a diretriz estiver á esquerda do foco, conforme a figura [2.10(ii)].} \end{cases}$$

Logo pela Proposição (1.4), $\frac{PF}{PD} = \epsilon$, em que ϵ representa a excentricidade da cônica. E assim,

$$\begin{cases} \frac{r}{p - r\cos\theta} = \epsilon, \text{ se a diretriz estiver a direita do foco F;} \\ \frac{r}{p + r\cos\theta} = \epsilon, \text{ se a diretriz estiver a esquerda do foco F.} \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon\cos\theta} \tag{2.21}$$

- Segundo caso: A diretriz d é paralela ao eixo polar, como ser notado pela figura (2.11).

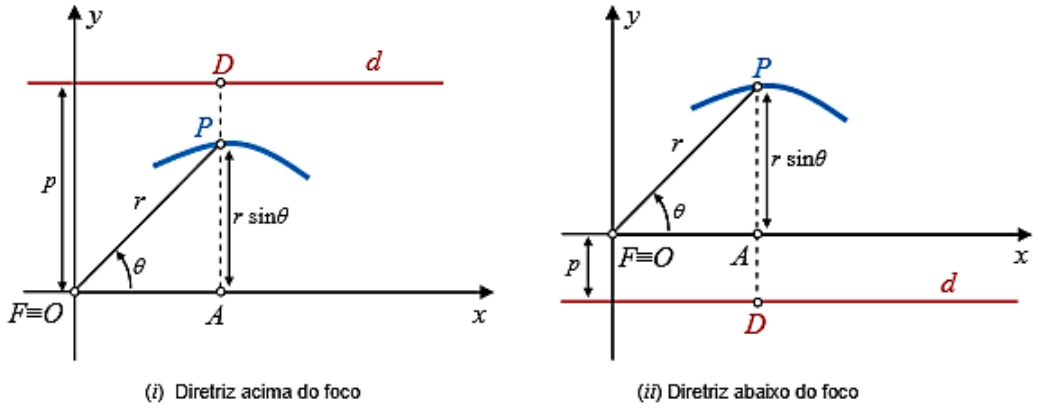

Figura 2.11: Diretriz paralela ao eixo polar

De forma análoga ao primeiro caso, tem-se,

$$\begin{cases} PD = p - r\ \text{sen}\theta, \text{ se a diretriz estiver acima do foco F, veja a figura [2.11(i)];} \\ PD = p + r\ \text{sen}\theta, \text{ se a diretriz estiver abaixo do foco F, conforme a figura [2.11(ii)].} \end{cases}$$

E assim, novamente, pela Proposição (1.4),

$$\begin{cases} \frac{r}{p - r\ \text{sen}\theta} = \epsilon, \text{ se a diretriz estiver acima do foco F;} \\ \frac{r}{p + r\ \text{sen}\theta} = \epsilon, \text{ se a diretriz estiver abaixo do foco F.} \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon\ \text{sen}\theta} \tag{2.22}$$

E portanto, a equação polar de uma cônica pode ter a forma de uma das equações (2.21) ou (2.22). Além disso, como já foi dito, se $\epsilon = 1$ a cônica é uma parábola, caso $\epsilon > 1$ a cônica é uma hipérbole e se por ventura $0 < \epsilon < 1$ a cônica é uma elipse.

2.3 Equação paramétrica de uma cônica

A parametrização de uma curva pode ser vista como o caminho de uma partícula, no plano, ao longo de um intervalo de tempo, ou seja, a parametrização consiste em descrever cada ponto da curva em função da variável t.

Para uma circunferência de equação $C : x^2 + y^2 = r^2$, com raio r e centro na origem, conforme a figura (2.12), tem-se que,

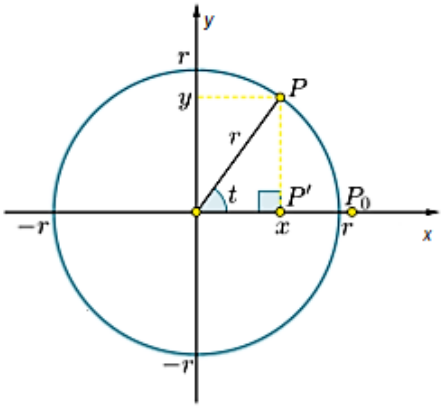

Figura 2.12: Circunferência C

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos t = \frac{x}{r} \\ sen\ t = \frac{y}{r} \end{array} \right. ; \quad t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\ sen\ t \end{array} \right. ; \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

em que fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, tem-se todos os pontos da circunferência. Portanto, o sistema de equações (2.23) representa uma possível parametrização da circunferência C.

Com isso, sejam a elipse $\mathcal{E}$ de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com centro na origem e a circunferência C' de equação $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ de raio 1 e centro na origem. Perceba que pelo sistema de equações (2.23), tem-se,

$$C' : \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \cos t \\ \beta = sen\ t \end{array} \right. ; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad C' : \left\{ \begin{array}{l} \alpha = sen\ t \\ \beta = \cos t \end{array} \right. ; t \in \mathbb{R}.$$

Assim, note que,

$$(x, y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \in C'.$$

e assim obtem-se duas possíveis parametrizações da elipse $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}:\left\{\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\ sen\ t \end{array}\right. ;t\in\mathbb{R},\ \text{ e }\ \mathcal{E}:\left\{\begin{array}{l} x=a\ sen\ t \\ y=b\cos t \end{array}\right. ;t\in\mathbb{R}$$

Para o caso de uma hipérbole $\mathcal{H}_0$ equilátera de equação $x^2-y^2=1$, considere as funções cosseno e seno hiperbólicos, respectivamente,

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\ \text{ e }\ \text{senh}\ t=\frac{e^t-e^{-t}}{2},\quad t\in\mathbb{R},$$

veja na figura (2.13) os respectivos gráficos destas funções. Perceba que os pontos $(\cosh t, \text{senh}\ t)$ e $(-\cosh t, \text{senh}\ t)$ pertencem a hipérbole $\mathcal{H}_0$, pois

$$(\cosh t)^2-(\text{senh}\ t)^2=\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}-\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}=1$$

para todo $t\in\mathbb{R}$.

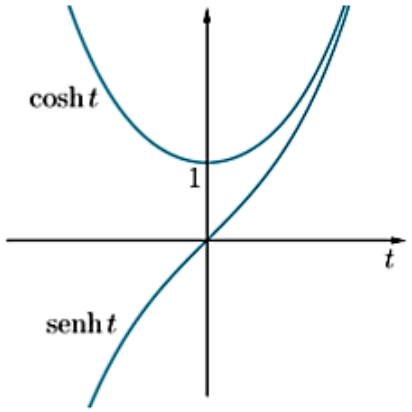

Figura 2.13: $\cosh t$ e $\text{senh}\ t$

Veja que variando t em $\mathbb{R}$ tem-se que $x=\cosh t$ ($x=-\cosh t$) percorre todos os valores em $[1,+\infty)$ (respectivamente, $(-\infty,1]$), enquanto $y=\text{senh}\ t$ percorre todos os valores reais. Assim, obtem-se uma parametrização para o ramo positivo, $\mathcal{H}_0^+$:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\cosh t \\ y=\text{senh}\ t \end{array}\right. t\in\mathbb{R}, \tag{2.24}$$

e uma parametrização para o ramo negativo, $\mathcal{H}_0^-$:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\cosh t \\ y=\text{senh}\ t \end{array}\right. t\in\mathbb{R} \tag{2.25}$$

Considere agora a hipérbole $\mathcal{H}$ de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a hipérbole $\mathcal{H}_0 : \alpha^2 - \beta^2 = 1$, pelas equações (2.24) e (2.25) tem-se que,

$$\mathcal{H}_0 : \begin{cases} \alpha = \pm \cosh t \\ \beta = \text{senh } t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, note que,

$$(x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \in \mathcal{H}_0,$$

logo obtem-se as equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = \pm a \cosh t \\ y = b \text{ senh } t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

E, por fim, para o caso da parábola $\mathcal{P}$ de equação $y^2 = 4px$, tome $y = t$ e assim,

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \frac{t^2}{4p} \\ y = t \end{cases}$$

2.4 Aplicação: As leis de Kepler

Desde muito cedo a humanidade já procurava entender os fenômenos astronômicos. A mitologia grega, romana e de outros povos do passado colocavam seus deuses no céu e procuravam explicar os fenômenos observados como manifestações divinas. Os filósofos da Grécia Antiga foram os que pela primeira vez tentaram explicar os movimentos dos corpos celestes sem recorrer aos mitos e à religião. Foram através de seus estudos que surgiram as primeiras descrições dos movimentos dos planetas.

O último grande astrônomo da antiguidade, Claúdio Ptolomeu, que viveu no século II d. C. propôs um sistema planetário geocêntrico, com a Terra como centro do universo, sendo que a Lua e o Sol descreveriam òrbitas circulares em torno da Terra. Com relação aos demais planetas, cada um descreveria órbitas circulares em torno de um centro que, por sua vez, descreveria outra órbita circular em torno da Terra.

Somente no século XVI foram levantadas novas hipóteses sobre o universo com o astrônomo polonês Nicolau Copérnico, que em sua obra sobre a revolução dos corpos celestes, afirmou que o Sol é o centro do Universo e os seis planetas conhecidos descreveriam órbitas circulares em torno do Sol. Mas foi com Galileu Galilei com a utilização de instrumentos ópticos nas observações

astronômicas que possibilitou obter melhores evidências a favor do sistema planetário heliocêntrico de Copérnico.

Coube enfim ao astrônomo alemão Johannes Kepler, por volta de 1596, estabelecer de forma definitiva como os planetas se moviam ao redor do Sol. Kepler herdeu de Tycho Brahe registros de suas precisas observações possibilitando, após muito estudo, enunciar as três leis que descrevem o movimento planetário.

2.4.1 A 1ª Lei de Kepler

A primeira Lei de Kepler afirma que: *um planeta gira em torno do sol em uma órbita elíptica com o sol em um dos focos.* Para mostar esta afirmação considere que como a força gravitacional exercida do sol sobre um planeta é bem maior que as forças exercidas por outros astros, pode-se então desconsiderar todos os outros corpos do universo, exceto o sol e um planeta girando em torno dele. Sendo assim, tome um sistema de coordenadas com origem no sol e seja $\overrightarrow{r} = r(t)$ o vetor posição do planeta. Dessa forma, tem-se então que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}'$ e $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{r}''$ são os vetores velocidade e aceleração respectivamente.

Além disso, é necessario considerar duas leis propostas por Newton. A 2ª Lei de Newton, também conhecida como Princípio Fundamental da Dinâmica que diz que a força resultante $\overrightarrow{F}$ que age sobre um corpo deve ser igual ao produto da massa do corpo m por sua aceleração $\overrightarrow{a}$, ou seja,

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}.$$

E a Lei da Gravitação Universal, na qual dois corpos atraem-se com força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade, ou seja,

$$\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{r^3}.\overrightarrow{r} = -\frac{GMm}{r^2}.\overrightarrow{u}.$$

Em que $\overrightarrow{F}$ é a força da gravidade sobre o planeta, G a constante gravitacional, M e m as massas do planeta e do sol respectivamente, $r = ||\overrightarrow{r}||$ e $\overrightarrow{u} = \frac{1}{r}.\overrightarrow{r}$.

Perceba ainda que igualando estas duas leis de Newton para $\overrightarrow{F}$, tem-se que

$$\overrightarrow{a} = -\frac{GM}{r^3}.\overrightarrow{r}.$$

Assim, $\overrightarrow{a}$ é paralelo a $\overrightarrow{r}$, com isso segue que $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ e então,

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}' = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{h},$$

em que o vetor $\overrightarrow{h}$ é um vetor constante. Assim, o vetor $\overrightarrow{r} = r(t)$ é perpemdicular a $\overrightarrow{h}$ para todos os valores de t, logo o planeta está sempre em um plano que passa pela origem e é perpendicular a $\overrightarrow{h}$. Portanto, o planeta se move em um plano e sua órbita é uma curva plana.

Agora perceba que,

$$\overrightarrow{h} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{r}' = r\,\overrightarrow{u} \times (r\,\overrightarrow{u})' = r\,\overrightarrow{u} \times (r\,\overrightarrow{u}' + r'\,\overrightarrow{u}) = r^2(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}') + rr'(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}) = r^2(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}').$$

Logo,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{h} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u} \times (r^2\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}') = -GM\,\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}') = -GM(\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \rangle \overrightarrow{u} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u}').$$

Mas perceba que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 1$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \rangle = 0$ assim,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{h} = GM\,\overrightarrow{u}' \Rightarrow (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h})' = \overrightarrow{v}' \times \overrightarrow{h} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{h} = GM\,\overrightarrow{u}'.$$

Integrando ambos os lados desta última equação tem-se

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h} = GM\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{c}.$$

em que $\overrightarrow{c}$ é um vetor constante.

Para escolher um sistema de eixos coordenados coviniente com esta situação, ponha o vetor da base canônica $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ na mesma direção do vetor $\overrightarrow{h}$. Veja assim que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h}$ e $\overrightarrow{u}$ são perpendiculares a $\overrightarrow{h}$, logo pela equação anterior o vetor $\overrightarrow{c}$ pertence ao plano XY. Assim, também é oportuno por o vetor $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$ na direção do vetor $\overrightarrow{c}$.

Se θ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{r}$, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta, assim,

$$\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h} \rangle = \langle \overrightarrow{r}, GM\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{c} \rangle = \langle GM\,\overrightarrow{r}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle GMr\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + |\overrightarrow{r}||\overrightarrow{c}| \cos\theta = GMr + rc\cos\theta.$$

Em que $c = |\overrightarrow{c}|$, então

$$r = \frac{\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h} \rangle}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM} \cdot \frac{\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h} \rangle}{1 + e\cos\theta}.$$

Sendo $e = \frac{\overrightarrow{c}}{GM}$.

Ainda sim, perceba que

$$\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h} \rangle = \langle \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h} \rangle = \langle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{h} \rangle = |\overrightarrow{h}|^2 = h^2.$$

Logo,

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}.$$

E pondo $d = \frac{h^2}{c}$, obtem-se,

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}.$$

Portanto, como a equação anterior representa a equação polar de uma cônica de foco na origem e excentricidade e e a órbita de um planeta é uma curva fechada, tem-se então que esta curva descreve necessariamente uma elipse.

2.4.2 A 2ª Lei de Kepler

A segunda Lei de Kepler conclui que: *uma reta que liga o sol a um planeta, percorre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.* Para mostrar isso, considere que a órbita do planeta seja uma elipse no plano XY e que $r = f(\theta)$ seja uma função polar da órbita com o sol no foco O. Seja P_0 a posição do planeta na posição t_0 e P a posição no instante $t \geq t_0$. Adote ainda θ_0 e θ os ângulos medidos no eixo x-positivo para OP_0 e OP respectivamente.

Assim, usando a fórmula da área em coordendas polares, tem-se que a área percorrida por OP no intervalo $[t_0, t]$ é determinada por:

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow \frac{dA}{d\theta} = \frac{d\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 d\theta}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2.$$

Sendo assim, como θ depende do tempo, tem-se que pela regra da cadeia:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Veja agora que sendo $\overrightarrow{r} = r\cos\theta\,\overrightarrow{i} + r\sin\theta\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}$, o seu versor é dado por:

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{r}\overrightarrow{r} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}.$$

Logo,

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}.$$

E assim,

$$\overrightarrow{u} \times \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \cos^2\theta\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{k} + \sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{k} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{k}.$$

Tomando $\overrightarrow{h}$ o vetor constante obtido na demonstração da primeira lei, tem-se que,

$$\overrightarrow{h} = r^2\left(\overrightarrow{u} \times \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right) \Rightarrow \overrightarrow{h} = r^2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{k} \Rightarrow h = ||\overrightarrow{h}|| = r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Então pela equações anteriores tem-se,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h.$$

Portanto, a taxa de variação da área A em relação ao tempo é constante e então OP percorre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

2.4.3 A 3ª Lei de Kepler

A terceira Lei de Kepler confirma que: *o quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do maior eixo de sua orbita.* E para ver isso use as demonstrações anteriores, ou seja, admita que a órbita planetária é dada pela equação

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}.$$

Em que $ed = \frac{h^2}{GM}$ e $e = \frac{e}{GM}$. Sendo T o tempo necessário para que o planeta complete uma revolução em torno do sol, tem-se que a área percorrida no intervalo de tempo $[O, T]$ é dado por

$$A = \int_O^T \frac{dA}{dt}dt = \int_O^T \frac{1}{2}hdt = \frac{1}{2}hT.$$

Assim, $\frac{1}{2}hT$ é a área limitada pela elipse. No entanto, a área de uma elipse cujo eixo maior de comprimento $2a$ e eixo menor de comprimento $2b$ é dada por πab, logo

$$A = \frac{1}{2}hT = \pi ab \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{h}.$$

Sabe-se ainda que,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow ea = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow e^2a^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2).$$

Dessa forma, tem-se que,

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2a^4(1 - e^2)}{h^2}.$$

Além disso, sabe-se que da relção $c = ea$, tem-se que a distância d entre o foco e a diretriz é dada por

$$d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ea = \frac{a(1-e^2)}{e} \Rightarrow ed = a(1-e^2).$$

Logo, tem-se que

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4}{h^2}\frac{ed}{a} = \frac{4\pi^2 a^3}{h^2}ed.$$

E como $ed = \frac{h^2}{GM}$, tem-se então que

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{h^2}\frac{h^2}{GM} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3.$$

Pondo $k = \frac{4\pi^2}{GM}$ obtem-se, portanto,

$$T^2 = ka^3.$$

Capítulo 3

Abordagem Projetiva

O modelo geométrico usado até o momento, a Geometria Euclidiana, postula a existência de retas que não se interceptam, as chamadas retas paralelas. A Geometria Projetiva, nega este fato, ou seja, constrói um modelo em que quaisquer duas retas distintas se interceptam em um único ponto. Os trabalhos pioneiros foram protogonizados por Girard Desargues (1591-1661), em 1639 na obra *Brouillon Project d'une atteinte aux évenements des rencontres du Cone avec un plan*, pórem estes conceitos foram consolidados a partir da publicação em 1822 da obra *Tratado das Propriedades Projetivas das figuras*, do matemático e engenheiro francês *Jean-Victor Poncelet* (1788-1867). Nesta obra Poncelet utilizou uma linguagem semelhante a da Geometria Analítica, oferecendo meios próprios para demonstrar as propriedades de que gozam as figuras. Na Geometria Projetiva não faz sentido conceitos métricos como ângulos e distâncias, mas há outros conceitos e propriedades que podem ser analisados, como as relações de incidência e colinearidade entre diferentes objetos.

Neste último capítulo, as cônicas serão trabalhadas segundo uma visão da Geometria Projetiva, Geometria pouco explorada nos cursos de graduação e pós-graduação de Matemática. Assim, por usar um modelo geométrico pouco usual e diferente do que foi usado anteriormente, esta última parte do trabalho será abordado de maneira um pouco mais detalhada, pois antes de definir uma cônica segundo uma visão projetiva, é necessário conhecer os conceitos de ponto, reta e plano projetivo. Mas mesmo com um pouco mais de riqueza nos detalhes, o leitor terá que ter noções de Geometria Analítica no espaço, veja em [2], além de conhecimentos introdutórios de Álgebra Linear, para isto consulte [11] e de alguns resultados vistos no capítulo 2.

3.1 O plano projetivo $\mathbb{RP}^2$

Considere o conjunto obtido do $\mathbb{R}^3$ sem o vetor $O = (0,0,0)$, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Assim, um plano $ax + by + cz = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ é um plano perfurado na origem.

Definição 3.1. *Chama-se plano projetivo, $\mathbb{RP}^2$, o conjunto quociente obtido de $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, com a seguinte relação de equivalência,* [1]

$$v \sim w \Leftrightarrow \textit{existe um número real } \lambda \neq 0 \textit{ tal que } v = \lambda w,$$

ou seja, $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{O\})/\sim$.

Um elemento deste plano (uma classe de equivalência) é chamado de ponto projetivo ou simplesmente ponto, denotado por uma letra minúscula com uma barra em cima, $\overline{v}$. Dessa forma, $\overline{v}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, que pela relação de equivalência $\sim$, é um conjunto dos múltiplos não nulos de v, ou seja,

$$\overline{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda \neq 0\}.$$

A aplicação projeção é uma função definida por:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} &\longrightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\longmapsto \psi(v) = \overline{v} \end{aligned}$$

Para fins de notação sendo $v = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor de $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, ponha $\psi(v) = \overline{v} = \overline{(v_1, v_2, v_3)} = (v_1 : v_2 : v_3)$, em que a terna $\overline{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$ são chamada de *coordendas homogêneas* de $\overline{v}$.

Para melhor entendimento do plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ perceba que para cada classe de equivalência $\overline{v} = (v_1 : v_2 : v_3) \in \mathbb{RP}^2$ pode-se determinar dois elementos na esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ na classe de equivalência de $\overline{v}$, a saber,

$$u = \frac{1}{||v||} v \text{ e } -u = -\frac{1}{||v||} v.$$

Perceba que a divisão pela norma está bem definida, uma vez que $||v|| \neq 0$. E como u e $-u$ são multiplos não nulos um do outro, então valem as igualdades $\overline{v} = \overline{u} = \overline{-u}$. Dessa forma, tem-se uma função projeção sobrejetora, que é a restrição da função projeção antes definida, ou seja,

$$\begin{aligned} \psi_0 : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{RP}^2 &\longrightarrow \mathbb{RP}^2 \\ u &\longmapsto \psi_0(u) = \overline{u}, \end{aligned}$$

[1] Uma relação de equivalência é uma relação binária entre elementos de um dado conjunto, que satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

tal que para cada ponto $\overline{v}$ o conjunto pré-imagem é formado por dois pontos de $\mathbb{S}^2$,

$$\psi_0^{-1}(\overline{v}) = \left\{ \frac{1}{||v||}v, -\frac{1}{||v||}v \right\}$$

Visto isso, note que sendo $u, v \in \mathbb{S}^2$, diz-se que,

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \ \text{ ou } \ u = -v.$$

Portanto, pode-se ter um outro modelo de plano projetivo $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\sim$. Se for considerado somente o hemisfério norte da esfera unitária,

$$\mathbb{H}_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; \langle u, e_3 \rangle \geq 0\},$$

a restrição da função projeção $\psi_0 : \mathbb{H}_{e_3} \subset \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ é sobrejetiva, mas não é injetiva, uma vez que podem ocorrer duas pré-imagem de um ponto projetivo, $\overline{u} = (u_1 : u_2 : u_3)$ por ψ_0:

1. $\psi_0^{-1}(\overline{u}) = \{u\}$, se $u_3 > 0$;
2. $\psi_0^{-1}(\overline{u}) = \{u, -u\}$, se $u_3 = 0$.

Um grande círculo ou reta elíptica é o conjunto obtido pelo interseção de um plano que passa pela origem O com esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Dessa forma, considere a reta elíptica $r_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$ como sendo a interseção da esfera unitária com o plano $z = 0$. A imagem desta reta r_{e_3} pela projeção ψ_0 é chamada de conjunto de pontos ideais, $\mathbb{I}_\infty$, ou seja,

$$\mathbb{I}_\infty = \{\overline{u} \in \mathbb{RP}^2; \ \overline{u} = (x : y : 0)\}.$$

Assim, observe que a projeção ψ_0 aplicada ao conjunto $\mathbb{H}_{e_3} \backslash r_{e_3}$ estabelece uma relação biunívoca sobre $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{I}_\infty$, pois desta vez a injetividade é garantida. De fato, se $\overline{u} \in \mathbb{H}_{e_3} \setminus r_{e_3}$, então a pré-imagem de $\overline{u} = (u_1 : u_2 : u_3)$ por ψ_0 será $\psi_0^{-1}(\overline{u}) = \{u\}$.

3.1.1 Retas projetivas

Sabe-se que grandes círculos em $\mathbb{S}^2$ são equivalentes a retas na Geometria Euclidiana, no sentido de que a menor distância percorrida entre dois pontos na esfera unitária se torna a menor possível quando o caminho tomado é uma das duas possíveis direções de um grande círculo que contém estes dois pontos [2].

[2]ver ABREU, S. M.; OTTONI, J. E. Goemetria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT. Universidade Federal de São João del-Rei-UFSJ. Campo Alto Paraopeba: 2015, p. 16.

Definição 3.2. *Um subconjunto $r \subset \mathbb{RP}^2$ é chamado de reta projetiva se r for a imagem de um grande círculo pela projeção,*

$$\psi_0 : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2.$$

É sabido que a equação de um plano $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ que contém a origem $O = (0, 0, 0)$ é determinada pelo seu vetor normal $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ com $\eta \neq O$. Assim, para o plano Γ_η tem-se,

$$\Gamma_\eta : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0$$

.

Perceba assim que todo vetor normal $\lambda\eta$ com $\lambda \neq 0$ pertence a mesma classe $\overline{\eta} = \{\lambda\eta; \lambda \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}\}$ e, dessa forma, $\overline{\eta}$ determina um único plano Γ_η. Observe também que cada plano Γ_η é determinado por um único $\overline{\eta} \in \mathbb{RP}^2$, com efeito, pois se $\Gamma_\eta = \Gamma_{\eta'}$, então $\eta = \lambda\eta'$, $\lambda \neq 0$, logo $\eta, \eta' \in \overline{\eta}$ e então $\overline{\eta} = \overline{\eta}'$.

Logo, como a interseção de Γ_η com a esfera unitária $\mathbb{S}^2$ determina um único grande círculo e como todo grande círculo pode ser determinado deste modo por um único Γ_η, tem-se que a reta projetiva,

$$r_{\overline{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2,$$

é obtida pela imagem da aplicação $\psi_0 : r_\eta \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, com $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$.

3.1.2 Plano projetivo dual

Sejam o plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ e o conjunto de suas partes, $\mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$. Escolha o subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$ formado por todas as retas prjetivas.

Agora note que cada ponto projetivo $\overline{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ determina um único plano $\Gamma_{\overline{\eta}}$, que por sua vez determina um único grande círculo $\Gamma_{\overline{\eta}} \cap \mathbb{S}^2$, que por sua vez determina uma única reta projetiva $r_{\overline{\eta}}$. Por outro lado, uma única reta projetiva, $r_{\overline{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2$ é determinada por um único ponto projetivo $\overline{\eta}$. Com efeito, se $r_{\overline{\eta}} = r_{\overline{\eta}'}$ então, pelo que foi visto no final da seção sobre o plano $\mathbb{RP}^2$, $\Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 = \Gamma_{\eta'} \cap \mathbb{S}^2$, logo $\Gamma_\eta = \Gamma_{\eta'}$ e finalmente, $\overline{\eta} = \overline{\eta}'$.

Veja então que há uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{R}$ e $\mathbb{RP}^2$,

$$r_\eta \longleftrightarrow \overline{\eta}.$$

Logo existem tantas retas projetivas quantos pontos projetivos.

Assim, $\mathcal{R}$ será chamado *plano projetivo dual* e denotado por $\mathbb{RP}^{2*}$. Sendo $\mathbb{RP}^2$ um modelo geométrico de $\mathbb{RP}^{2*}$. Portanto, para fins de notação quando, for conveniente, denota-se por uma letra grega minúscula os elementos de $\mathbb{RP}^{2*}$, ou seja, no lugar de $r_{\overline{\eta}}$ põe-se $\overline{\eta}$.

3.1.3 Incidência

Diz-se que um ponto incide em uma reta se este ponto pertence a esta reta. Do mesmo modo, um reta incide em um ponto se esta reta intersecta este ponto. Assim, após definir plano projetivo, ponto projetivo e reta projetiva é interessante verificar alguns resultados sobre incidências. Primeiro veja, na proposição que segue, um critério de incidência entre um ponto projetivo e uma reta projetiva

Proposição 3.1. *Dada uma reta projetiva $r_{\overline{\eta}} \in \mathbb{RP}^{2*}$ e um ponto projetivo $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$. Então,*

$$r_{\overline{\eta}} \text{ e } \overline{v} \text{são incidentes se, e somente se,} \langle v, \eta \rangle = 0$$

.

Demonstração. Seja Γ_η o plano perfurado na origem, cujo vetor normal η. Assim,

$$\langle v, \eta \rangle = 0 \Leftrightarrow \pm v \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow \pm \frac{1}{||v||} v \in r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 \Leftrightarrow \overline{v} = \overline{\frac{1}{||v||} v} \in r_{\overline{\eta}}$$

□

Também é necessário mostar que por dois pontos distintos existe um única reta que os contém. Veja como isto pode ser verificado.

Proposição 3.2. *Por dois pontos projetivos distintos $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{RP}^2$ passa uma única reta projetiva, a saber ,*

$$r_{\overline{\eta}} \in \mathbb{RP}^{2*}, \textit{onde } \eta = v \times w.$$

Demonstração. Sendo $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{RP}^2$, tem-se que seus representantes em $\mathbb{S}^2$ são $\frac{v}{||v||}$ e $\frac{w}{||w||}$. Perceba que $\frac{v}{||v||} \neq \pm \frac{w}{||w||}$, senão $v = \lambda w$, com $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ e então $\overline{v} = \overline{w}$.

Pelo produto vetorial, obtem-se o vetor não nulo $\eta = \frac{v}{||v||} \times \frac{w}{||w||}$ do qual pode-se ter o plano perfurado na origem, Γ_η. Usando o produto interno, tem-se,

$$\langle v, \eta \rangle = ||v|| \left\langle \frac{v}{||v||}, \eta \right\rangle = 0 \text{ e } ||w|| \left\langle \frac{w}{||w||}, \eta \right\rangle = \langle w, \eta \rangle = 0,$$

logo $v, w \in \Gamma_\eta$.

Note que, Γ_η é o único plano de $\mathbb{R}^3$ que contém a origem e os pontos v e w, logo este determina a reta elíptica $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$. Como $\frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} \in r_\eta$, tem-se que,

$$\psi_0\left(\frac{v}{||v||}\right) = \overline{v} \quad \text{e} \quad \psi_0\left(\frac{w}{||w||}\right) = \overline{w}.$$

Pela aplicação projeção, $\psi_0(r_\eta) = r_{\overline{\eta}}$ e, portanto, $\overline{v}, \overline{w} \in r_{\overline{\eta}}$.

Para mostrar a unicidade suponha que exista uma outra reta projetiva $r_{\overline{\theta}} \in \mathbb{RP}^{2*}$ incidindo em $\overline{v}$ e $\overline{w}$. Logo existe uma reta elíptica $r_\theta = \Gamma_\theta \cap \mathbb{S}^2$, tal que $\psi_0(r_\theta) = r_{\overline{\theta}}$. Como os pontos $\frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} \in \mathbb{S}^2$ e

$$\begin{cases} \left\langle \frac{v}{||v||}, \theta \right\rangle = 0 \\ \left\langle \frac{w}{||w||}, \theta \right\rangle = 0 \end{cases},$$

com θ o vetor nornal ao plano Γ_θ, tem-se então que $\frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} \in \Gamma_\theta \cap \mathbb{S}^2$.

Assim, $\theta \neq 0$ e $\theta \in \overline{\frac{v}{||v||} \times \frac{w}{||w||}}$, logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$,com $\lambda \neq 0$ tal que,

$$\theta = \lambda\left(\frac{v}{||v||} \times \frac{w}{||w||}\right)$$

.

Logo, $\overline{\theta} = \overline{\frac{v}{||v||} \times \frac{w}{||w||}} = \overline{\eta}$ e, portanto, $r_{\overline{\eta}} = r_{\overline{\theta}}$ □

Como já foi mencionado, o paralelismo entre retas não é verificado no plano projetivo, ou seja, duas retas distintas sempre concorrem em um único ponto. Veja a demosntração deste fato.

Proposição 3.3. *Sejam $r_{\overline{\eta}}$ e $r_{\overline{\theta}}$ retas projetivas distintas. Então, $r_{\overline{\eta}}$ e $r_{\overline{\theta}}$ concorrem em um único ponto, a saber,*

$$\overline{v} = \overline{\eta \times \theta} \in \mathbb{RP}^2$$

.

Demonstração. Se $r_{\overline{\eta}}$ e $r_{\overline{\theta}}$ são duas retas projetivas, então existem retas elípticas $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ e $r_\theta = \Gamma_\theta \cap \mathbb{S}^2$, tais que $\psi(r_\eta) = r_{\overline{\eta}}$ e $\psi(r_\theta) = r_{\overline{\theta}}$.

Observe que $\frac{\eta}{||\eta||}, \frac{\theta}{||\theta||} \in \mathbb{S}^2$ e que $\frac{\eta}{||\eta||} \neq \pm\frac{\theta}{||\theta||}$, caso contrário $\eta = \lambda\theta$, com $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ e então $\overline{\eta} = \overline{\theta}$.

Considere agora que $v = \eta \times \theta$, assim,

$$\begin{cases} \langle \eta, v \rangle = 0 \\ \langle \theta, v \rangle = 0 \end{cases}$$

com $v \in \Gamma_\eta \cap \Gamma_\theta$. Daí tem-se que,

$$\frac{v}{||v||} \in \Gamma_\eta \cap \Gamma_\theta \cap \mathbb{S}^2, \text{ ou seja, } \frac{v}{||v||} \in r_\eta \cap r_\theta.$$

Pela aplicação projeção, tem-se que $\psi_0\left(\frac{v}{||v||}\right) \in \psi(r_\eta) = r_{\overline{\eta}}$ e $\psi_0\left(\frac{v}{||v||}\right) \in \psi(r_\theta) = r_{\overline{\theta}}$, logo $\psi_0\left(\frac{v}{||v||}\right) \in r_{\overline{\eta}} \cap r_{\overline{\theta}}$. Portanto, $\overline{v} \in r_{\overline{\eta}} \cap r_{\overline{\theta}}$.

Para mostrar a unicidade suponha que exista $\overline{w}$ tal que $\overline{w} = r_{\overline{\eta}} \cap r_{\overline{\theta}}$. Logo segue que

$$\frac{w}{||w||} \in r_\eta \cap r_\theta = \left\{ -\frac{\eta \times \theta}{||\eta \times \theta||}, \frac{\eta \times \theta}{||\eta \times \theta||} \right\}$$

.

Assim, $w = \lambda(\eta \times \theta)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$. Portanto, $\overline{w} = \overline{\frac{w}{||w||}} = \overline{\eta \times \theta} = \overline{v}$. □

Definição 3.3. *Diz-se que três pontos projetivos $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ são colineares se existe uma reta projetiva incidindo sobre estes.*

Definição 3.4. *Diz-se que três retas projetivas $r_{\overline{\eta}}, r_{\overline{\theta}}, r_{\overline{\nu}}$ são concorrentes se existe um único ponto incidindo sobre estas.*

Veja a seguir um critério que verifica se três pontos projetivos são colineares, como também para identificar se três retas são concorrentes. Antes é necessário informar que o terno $[u, v, w]$ representa uma matriz, na qual os elementos das colunas são formados pelas coordenadas dos representantes das classes $\overline{u}$, $\overline{v}$ e $\overline{w}$, respectivamente.

Proposição 3.4. *Sejam $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ pontos projetivos distintos em $\mathbb{RP}^2$. Tem-se que, $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ são colineares se, e somente se, $det[u, v, w] = 0$.*

Demonstração. Suponha que os três pontos projetivos são distintos, caso contrário a demosntração é verificada trivialmente. Assim, dados $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{RP}^2$, tem-se que,

$$\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in r_{\overline{\eta}} = \psi(r_\eta) \Leftrightarrow \frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} \in r_\eta \Leftrightarrow \frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow$$

$$\left\langle \frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||} \times \frac{w}{||w||} \right\rangle = det\left[\frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{||u||} \cdot \frac{1}{||v||} \cdot \frac{1}{||w||} \cdot det[u, v, w] = 0 \Leftrightarrow det[u, v, w] = 0$$

□

Proposição 3.5. *Sejam três retas projetivas distintas* $r_{\overline{\eta}}, r_{\overline{\theta}}, r_{\overline{\nu}} \in \mathbb{RP}^{2*}$. *Tem-se que as retas* $r_{\overline{\eta}}, r_{\overline{\theta}}, r_{\overline{\nu}}$ *são concorrentes se, e somente se,* $det[\eta, \theta, \nu] = 0$.

Demonstração. Dadas $r_{\overline{\eta}}, r_{\overline{\theta}}, r_{\overline{\nu}} \in \mathbb{RP}^{2*}$, tem-se que,

$$\overline{v} \in (r_{\overline{\eta}} = \psi_0(r_\eta)) \cap (r_{\overline{\theta}} = \psi_0(r_\theta)) \cap (r_{\overline{\nu}} = \psi_0(r_\nu)) \Leftrightarrow v \perp \eta,\ v \perp \theta,\ v \perp \nu \Leftrightarrow$$

$$\langle \overline{\eta} \times \overline{\theta}, \overline{\nu} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, \nu \rangle = det[\eta, \theta, \nu] = 0.$$

□

3.1.4 Geometria Afim

O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ pode ser identificado com qualquer plano Euclidiano utilizando um sistema de eixos cartesianos. Já no plano projetivo este pode ser identificado como uma parte deste, neste contexto o espaço $\mathbb{R}^2$ será chamado de *plano afim*. Na geometria afim não são considerados grupos de congruência, nem noções de origem, extensão ou ângulos. Ela ocupa lugar intermadiário entre a geometria euclidiana e a geometria projetiva.

Assim, o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ é naturalmente identificado com o plano horizontal $\pi : z = 1$ (paralelo ao plano xy) em $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ que por sua vez é um plano tangente à esfera unitária $\mathbb{S}^2$ no pólo norte, $p_n = (0, 0, 1)$. A identificação é simples, veja na figura (3.1) que,

$$(x, y) \longleftrightarrow (x, y, 1)$$

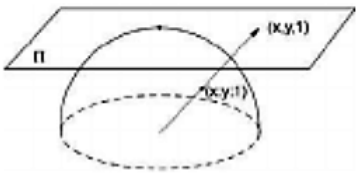

Figura 3.1: Identificação de $\mathbb{R}^2$ em π

Sendo assim, para cada ponto $(x, y, 1) \in \pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ determina um único ponto em $\mathbb{RP}^2$, ou seja, $(x : y : 1)$.

Definição 3.5. *Chama-se plano afim o conjunto* $\mathbb{AP}^2 = \{(x : y : 1) \in \mathbb{RP}^2;\, (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}$.

Note que qualquer ponto $\overline{v} = (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2$, com $z \neq 0$, está no plano afim, pois $\overline{v} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$ e $\overline{v}$ corresponde ao ponto $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2$, a este processo é dado o nome de *identificação afim*. Além disso, note que o plano afim é o plano projetivo sem a reta ideal $\mathbb{I}_\infty$.

Definição 3.6. *Chama-se reta afim a interseção de uma reta projetiva com* $\mathbb{AP}^2$.

Assim, verifique que qualquer reta projetiva intercepta a reta ideal $\mathbb{I}_\infty$, num único ponto, logo segue que uma reta afim é uma reta projetiva menos o seu ponto ideal.

O plano afim dual é o conjunto formado por retas afins, será denotado por $\mathbb{AP}^{2*}$ e uma reta afim será indicada tanto por $\overline{\eta} \in \mathbb{AP}^{2*}$, quanto por $r_{\overline{\eta}} \subset \mathbb{AP}^2$, em que (η_1, η_2, η_3) com $\eta_3 \neq 0$. Assim, o plano afim dual pode ser identificado com o plano projetivo menos o ponto $\overline{\eta} = (0 : 0 : 1)$.

Perceba que, uma reta euclidiana $l \in \mathbb{R}^2$ fica determinada por um vetor normal $n = (\eta_1, \eta_2)$, não nulo, e por um ponto no qual ela incide, $p = (p_1, p_2) \in l$. Assim, a equação linear que define a reta será:

$$l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0,$$

em que o valor da constante η_3 depende do vetor normal n e do ponto p. Para identificar o plano $\mathbb{R}^2$ com a plano $\pi \subset \mathbb{R}^2$, em termos de equação, $\pi : z = 1$, faz-se necessário identificar

$$(x, y) \longleftrightarrow (x, y, 1).$$

Dessa forma, a reta l fica definida como uma reta s contida naquele plano horizontal.

Por outro lado, uma reta em $\mathbb{R}^3$ fica determinada pela intersecão de dois planos em $\mathbb{R}^3$, neste caso, um plano vertical (perpendicular ao plano $z = 0$) e outro plano horizontal, a saber

$$s : \begin{cases} \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Mas existem infinitos planos que interceptados pelo plano $\pi : z = 1$ determinam a mesma reta s, mas entre tantos planos é preferível àqueles que contém a origem, mais precisamente o plano $\Gamma_\eta : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0$, em que $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ um vetor normal ao plano.

Agora perceba que sendo $l, l' \in \mathbb{R}^2$ retas paralelas, mas não coincidentes, tem-se que suas equações assumem a forma,

$$l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0$$

$$l' : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3' = 0,$$

com $\eta_3 \neq \eta_3'$. As retas afins determinadas por elas são, respectivamente, $\overline{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ e $\overline{\nu} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3')$, elementos de $\mathbb{AP}^{2*}$. Para calcular o ponto de interseção das retas afins, deve-se utilizar o método estabelecido para o cálculo de interseções de retas projetivas, ou seja,

$$\overline{p} = \overline{\eta \times \nu} = (\eta_2\eta_3' - \eta_2\eta_3 : \eta_1\eta_3 - \eta_1\eta_3' : 0).$$

Mas perceba que este ponto é um ponto ideal que não pertence ao plano afim. Assim, retas euclidianas paralelas determinam retas afins que também não se interceptam na plano afim e, dessa forma, o ponto $\overline{p}$ é o chamado *ponto de fuga* o qual, aparentemente, retas paralelas se encontram.

3.2 Projetividades

As aplicações projetivas ou projetividades são classificadas em dois tipos: as colineações e as correlações. Tem-se ainda que as correlaçoes podem ser polares ou não polares.

3.2.1 Colineações

Definição 3.7. *Uma colineação é uma aplicação bijetiva $\psi : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ que preserva colinearidade.*

Segundo esta definição se $\overline{u}, \overline{v}$ e $\overline{w}$ são pontos projetivos colineares, então as imagens $\psi(\overline{u}), \psi(\overline{v})$ *e* $\psi(\overline{w})$ são também pontos projetivos colineares. Veja na proposição que segue, que uma colineação é induzida por um operador linear em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 3.6. *Seja $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear invertível. Então a aplicação $\overline{A} : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, $\overline{A}(\overline{v}) = \overline{A(v)}$, está bem definida e é uma colineação.*

Demonstração. Seja $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$, logo $v \neq (0,0,0)$. E sendo A invertível segue que $A(v) \neq (0,0,0)$. Logo, o elemento $\overline{A(v)} \in \mathbb{RP}^2$ está bem definido.

Seja agora $v, u \in \mathbb{R}^3$, tais que $\overline{v} = \overline{u}$. Sendo assim, existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $u = \lambda v$, logo levando em conta que A é um operador linear em $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\overline{A(u)} = \overline{A(\lambda v)} = \overline{\lambda A(v)} = \overline{A(v)}.$$

Logo, a aplicação $\overline{A}$ está bem definida.

Perceba ainda que

$$\overline{A}(\overline{v}) = \overline{A}(\overline{u}) \Rightarrow \overline{A(v)} = \overline{A(u)} \Rightarrow$$

$$A(v) = \lambda A(u), \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 \Rightarrow A(v) - \lambda A(u) = 0 \Rightarrow$$

$$A(v - \lambda u) = 0 \Rightarrow v = \lambda u \Rightarrow \overline{v} = \overline{u}.$$

Além disso, dado $u \in \mathbb{R}^3 \setminus O$, tem-se que existe $v \in \mathbb{R}^3 \setminus O$ tal que $u = A(v)$, logo $\overline{u} = \overline{A(v)} = \overline{A}(\overline{v})$. Assim, para todo $\overline{u} \in \mathbb{RP}^2$ existe $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$ tal que $\overline{u} = \overline{A}(\overline{v})$. Portanto, segue que a aplicação $\overline{A}$ é injetiva e sobrejetiva.

E por fim para mostrar que $\overline{A}$ é uma colineação, suponha que $\overline{u}, \overline{v}$ e $\overline{w}$ são pontos projetivos colineares. Pelo critério de colinealidade, visto na Proposição (3.4), tem-se que $det[u, v, w] = 0$, logo

$$det[A(u), A(v), A(w)] = det[[A][u, v, w]] = det[A]det[u, v, w] = 0.$$

Segue então que os pontos projetivos $\overline{A(u)}, \overline{A(v)}$ e $\overline{A(w)}$ são colineares. E assim, aplicação $\overline{A}$ é uma colinearidade. □

Exemplo 3.1. *O operador linear $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, invertível, definido pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

induz no plano projetivo a colineação, $\overline{A} : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, $\overline{A} : (x : y : z) = (x - z : 2x + 3z : 2x + 2y + 2z)$.

Perceba ainda que o operador inverso de um operador linear invertível é também um operador linear invertível. E também perceba que a composição de operadores lineares invertíveis também é um operador linear invertível. Diante disto, pode-se dizer que a inversa de colineação é uma colineação e a composta de colineações é uma colineação. Além disso, se A é um operador linear invertível em $\mathbb{R}^3$ e $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus O$, tem-se que $A(u) = v$ se, e somente se, $A^{-1}(v) = u$, logo

$$\overline{A}(\overline{u}) = \overline{v} \Leftrightarrow \overline{A}^{-1}(\overline{v}) = \overline{u}.$$

Portanto, a aplicação inversa de um operador linear invertível A em $\mathbb{R}^3$ define uma colineação que é a inversa da colineação definida por A.

Para construir um operador linear $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ basta estabelecer quais são os valores de A nos vetores da base canônica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$. Assim, determinados os vetores $A(e_1) = u$, $A(e_2) =$

v e $A(e_3) = w$, a matriz canônica do operador linear é a matriz $[A] = [u, v, w]$. Quando o conjunto $\{u, v, w\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^3$, o operador linear A é invertível. A construção de colineações procede-se da mesma forma, porém com um grau de liberdade menor, pois é necessário prefixar o valor da colineação em quatro pontos projetivos, três a três não colineares. Veja na proposição que segue.

Proposição 3.7. *Sejam $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ e $\overline{t}$ pontos de $\mathbb{RP}^2$ não colineares três a três. Então existe uma colineação $A : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ induzida por um operador linear invertível $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que*

$$\overline{A}(\overline{e_1}) = \overline{u},\ \overline{A}(\overline{e_2}) = \overline{v},\ \overline{A}(\overline{e_3}) = \overline{w},\ \overline{A}(1,1,1) = \overline{t}.$$

Mais ainda o operador linear é definido pela matriz $[A] = [k_1u, k_2v, k_3w]$, onde $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$ são as constantes

$$k_1 = \frac{det[t, v, u]}{det[u, v, w]},\ k_2 = \frac{det[u, t, w]}{det[u, v, w]},\ k_3 = \frac{det[u, v, t]}{det[u, v, w]}$$

Além disso, se um outro operador linear invertível $B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ define a mesma colineação que A, então $\overline{B}(\overline{x}) = \overline{A}(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{RP}^2$, ou seja, $B \equiv \lambda A$.

Demonstração. Sejam $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$ e $t = (t_1, t_2, t_3)$ os representantes dos pontos projetivos. Por hipótese três pontos diferentes não são colineares, sendo que u, v e t formam uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $det[u, v, w] \neq 0$.

Lembre que para qualquer $\overline{p} \in \mathbb{RP}^2$ vale a igualdade $\overline{p} = \overline{kp}$, sendo um escalar $k \neq 0$. Logo, a fim de cumprir a exigência que $\overline{A}(\overline{e_1}) = \overline{u},\ \overline{A}(\overline{e_2}) = \overline{v},\ \overline{A}(\overline{e_3}) = \overline{w}$, tem-se,

$$\begin{cases} A(e_1) = & (k_1u_1, k_1u_2, k_1u_3) \\ A(e_2) = & (k_2v_1, k_2v_2, k_2v_3) \\ A(e_3) = & (k_3w_1, k_3w_2, k_3w_3) \end{cases}$$

em que $k_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Assim, a matriz $[A]$ assume a forma

$$[A] = \begin{bmatrix} k_1u_1 & k_2v_1 & k_3v_1 \\ k_1u_2 & k_2v_2 & k_3w_2 \\ k_1u_3 & k_2v_3 & k_3w_3 \end{bmatrix}.$$

Observe ainda que $det[A] = k_1k_2k_3det[u, v, w] \neq 0$, ou seja, $[A]$ é invertível.

Para determinar o valor dos k_is, põe-se $\overline{A}(1, 1, 1) = (t_1 : t_2 : t_3)$. Dessa forma, a condição $A(1, 1, 1) = (t_1, t_2, t_3)$ leva ao sistema de equações lineares expresso na forma matricial da seguinte

forma,

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1u_1 & k_2v_1 & k_3v_1 \\ k_1u_2 & k_2v_2 & k_3w_2 \\ k_1u_3 & k_2v_3 & k_3w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

e como $det[u, v, w] \neq 0$, o sistema possui única solução e pela regra de Cramer obtem-se os valores k_1, k_2, k_3 como no enunciado.

Agora veja que se $\overline{B}(\overline{x}) = \overline{A}(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{RP}^2$, então $B(x) = \lambda A(x), \lambda \neq 0$. Assim, $[B] = \lambda[A]$ e então $B \equiv \lambda A$ para algum escalar $\lambda \neq 0$. □

Proposição 3.8. *Sejam dois conjuntos de pontos projetivos* $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{t}\}$, $\{\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}', \overline{t}'\}$ *tais que três pontos quaisquer de cada um dos conjuntos não são colineares. Então existe uma colineação* $\overline{A} : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ *induzuda por um operador linear invertível* $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, tal que*

$$\overline{A}(\overline{u}) = \overline{u}',\ \overline{A}(\overline{v}) = \overline{v}',\ \overline{A}(\overline{w}) = \overline{w}',\ \overline{A}(\overline{t}) = \overline{t}'.$$

Além disso, se um outro operador linear invertível $B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *define a mesma colineação que* A *então* $B \equiv \lambda A$ *para algum escalar* $\lambda \neq 0$.

Demonstração. Veja que é possível construir colineações $\overline{C} : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ e $\overline{D} : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ tais que,

$$\overline{C}(\overline{e_1}) = \overline{u},\ \overline{C}(\overline{e_2}) = \overline{v},\ \overline{C}(\overline{e_3}) = \overline{w},\ \overline{C}(1:1:1) = \overline{t}$$
$$\overline{D}(\overline{e_1}) = \overline{u}',\ \overline{D}(\overline{e_2}) = \overline{v}',\ \overline{D}(\overline{e_3}) = \overline{w}',\ \overline{D}(1:1:1) = \overline{t}'.$$

Agora, como a inversa de uma colineação é uma colineação e a composta de duas colineações é também uma colineação, então a aplicação $\overline{D} \circ \overline{C}^{-1}$ é a colineação procurada.

A demonstração da última afirmação é semelhante a demonstração da última afirmação da proposição anterior. □

Foi mostrado que um operador linear invertível em $\mathbb{R}^3$ induz uma colineação. A recíproca deste fato também é verdadeira e constitui o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva. Para mostra-ló será necessário dois lemas, o primeiro afirma que o único automorfismo do corpo dos Reais é a aplicação identidade, já o segundo classifica todas as funções do $\mathbb{R}^2$ nele próprio que aplica retas em retas.

Lema 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação não identicamente nula, tal que para quaisquer x e y reais valem as igualdades:*

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

b) $f(xy) = f(x)f(y)$

Então, $f(x) = x$.

Demonstração. Veja os seguintes observações:

1ª Observação Note que $f(a) = 0$ se, e somente se, $a = 0$. Com efeito, as igualdades $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ implicam que $f(0) = 0$. Suponha, por absurdo, que exista $a \neq 0$ tal que $f(a) = 0$. Então

$$f(x) = f\left(a\frac{x}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0f\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Isto significa que f é identicamente nula, uma contradição.

2ª Observação Observe que f é uma função ímpar, pois

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x).$$

3ª Observação Afirma-se que $f(1) = 1$. De fato, para qualquer x real tem-se que $f(x) = f(1x) = f(1)f(x)$, portanto, $f(x)(f(1) - 1) = 0$. Como f não é identicamente nula, existe x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$. Logo, $f(1) = 1$.

4ª Observação Naturalmente, $f(x^2) = [f(x)]^2$ para quaisquer x, pois $f(x^2) = f(xx) = f(x)f(x)$.

Afirmação 1 Para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $f(nx) = nf(x)$.

Fixe x real. Para $n = 0$ a afirmação é verdadeira pelas observações iniciais. Assuma que a afirmação é veraddeira para $n > 0$. Veja que

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Assim, pelo princípio de indução, afirmação é verdadeira para qualquer $n \geq 0$.

Para $n < 0$ utilize o fato da função ser ímpar, $f(nx) = f((-n)(-x)) = -nf(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$. O que completa a demosntração desta afirmação.

Afirmação 2 Para quaisquer $r = \frac{n}{m}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}*$ e ainda $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)$.

Fixe qualquer x. Seja $m \neq 0$ um inteiro. Pela afirmação anterior,

$$f(x) = f\left(\frac{m}{m}x\right) = mf\left(\frac{1}{m}x\right).$$

Logo $f\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}f(x)$. E assim, $f\left(\frac{n}{m}x\right) = nf\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)$.

Afirmação 3 $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}$ para todo racional $\frac{m}{n}$.

Veja,

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}1\right) = \frac{n}{m}f(1) = \frac{n}{m}$$

.

Afirmação 4 f preserva a ordem, isto é, $x < y$ então $f(x) < f(y)$.

Seja $x > 0$. Como existe $a > 0$ tal que $a^2 = x$, tem-se que $f(x) = f(a^2) = [f(a)]^2 > 0$. Assim, se $x < y$, então $0 < y - x$. Pelo visto, $0 < f(y - x) = f(y) - f(x)$ e então, $f(x) < f(y)$.

Para concluir a demonstração do lema, suponha que exista x_0 tal que $f(x_0) \neq x_0$. Sem perda de generalidade assuma $f(x_0) < x_0$. Saba-se que dados dois números reais distintos, existe um racional entre eles. Assim, escolha a racional tal que $f(x_0) < a < x_0$. Como f preserva a ordem e a é racional, tem-se que $a = f(a) < f(x_0)$, uma contradição. Logo, $f(x) = x$ para qualquer x real. □

Lema 3.2. *Seja B uma função biunívoca tal que $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $B(O) = O$. Se B aplica retas euclidianas em retas euclidianas então B é um operador linear invertível.*

Demonstração. O termo "aplica retas em retas"significa que a imagem de uma reta Euclidiana está contida numa reta Euclidiana.

Assim, sejam l_1 e k retas tais que $B(l_1) \subset k$. Suponha, por absurdo, que exista um ponto $q \in k$, mas $q \notin B(l_1)$. Neste caso, como B é biunívoca existe um único ponto q_0 tal que $B(q_0) = q$. É claro que $q_0 \notin l_1$. Seja l_2 uma reta que contém q_0 e é perpendicular a l_1 em $q_1 \in l_1$. Como B aplica retas em retas e $B(q_0), B(q_1) \in k$ estão em $B(l_2) \subset k$. Agora, dado um ponto qualquer p de $\mathbb{R}^2$, ele pertence a uma reta l que intercepta $l_1 \cup l_2$ em pelo menos dois pontos, chamados de p_1 e p_2. Novamente, como $B(p_1), B(p_2) \in k$ segue que $B(l) \subset k$. Isto mostra que $B(\mathbb{R}^2) \subset k$. Uma contradição, pois B é sobrejetiva. Portanto, só existe a reta l_1 tal que $B(l_1) = k$.

Seja agora, l_1 e l_2 retas paralelas. Pelo que foi visto, suas imagens $B(l_1)$ e $B(l_2)$ são retas distintas. Suponha, por absurdo, que exista um ponto de interseção $p \in B(l_1) \cap B(l_2)$. Sendo assim, a pré-imagem $B^{-1}(p)$ tem pelo menos dois pontos, um em cada reta paralela, contradizendo a hipótese de B ser biunívoca. Portanto, imagens por B de quaisquer duas retas paralelas são duas retas paralelas.

Afirmação 1 Seja $\{v, w\}$ é uma base $\mathbb{R}^2$ então $B(v + w) = B(v) + B(w)$.

A hipótese de ser uma base implica que v e w não são nulos e não colineares. Sejam l_1 e l_2 as retas distintas que concorrem na origem e tais que $v \in l_1$ e $w \in l_2$. Sendo assim, $\{v + w\} = l_1' \cap l_2'$, em que l_1' é a reta que passa por w e é paralela à reta l_1, enquanto l_2' é a reta que passa por v e é paralela à l_2. Veja ainda que, $B(O), B(v) \in k_1 = B(l_1)$ e $B(O), B(w) \in k_2 = B(l_2)$.

Como k_1 e k_2 são retas distintas, tem-se que $\beta = \{B(v), B(w)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois nenhum vetor é nulo e são não colineares. Agora, as retas $k_1' = B(l_1')$ e $k_2' = B(l_2')$ são retas que passam, respectivamente, por $B(w)$ e $B(v)$ e são paralelas, respectivamente, a k_1 e k_2. É claro $\{B(v) + B(w)\} = k_1' \cap k_2'$. Por outro lado, $\{B(v + w)\} = B(l_1' \cap l_2') = k_1' \cap k_2'$, portanto, $B(v + w) = B(v) + B(w)$.

Afirmação 2 Existe uma transformação linear invertível $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que a composta $C = A^{-1} \circ B$ é uma expressa na forma $C(x, y) = (f(x), g(y))$, em que f e g são biunívoca, $f(0) = g(0) = 0$ e $f(1) = g(1) = 1$. E mais, C satisfaz as hipóteses do Lema.

Como efeito da Afirmação 1, $\beta = \{B(e_1), B(e_2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Seja $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear ta que $A(e_1) = B(e_1)$ e $A(e_2) = B(e_2)$. Mais precisamente, seja $A(x, y) = xB(e_1) + yB(e_2)$. Como β é uma base então A é invertível. Recorde que A^{-1} é uma transformação linear, logo aplica retas em retas, com $A^{-1}(O) = O$ e ainda é sobrejetiva, pois A^{-1} é invertível. Assim, $C = A^{-1} \circ B$ também é uma aplicação biunívoca, aplica retas em retas e $C(O) = O$. Portanto, C satisfaz as hipóteses do Lema.

Por construção, $C(O) = O$, $C(e_1) = e_1$ e $C(e_2) = e_2$. Logo, C preserva os eixos e transforma retas verticais em retas verticais e retas horizontais em retas horizontais. Assim, $C(x, y) = (f(x), f(y))$.

Para mostrar que f é biunívoca suponha, por contradição, que $f(x') = f(x'')$ para $x' \neq x''$ ou que não exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x_0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Sendo assim, teria-se respectivamente $C(x', y) = C(x'', y)$ para $(x', y) \neq (x'', y)$ ou não existiria $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $C(x, y) = (x_0, y)$ para algum $(x_0, y) \in \mathbb{R}^2$. Contradições, pois C é uma aplicação biunívoca. A demosntração que

g é biunívoca é similar. Além disso, como $C(O) = O$, $C(e_1) = e_1$ e $C(e_2) = e_2$ tem-se que $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $g(1) = 1$. Isto conclui a demonstração da afirmação.

Afirmação 3 As funções coordenadas de $C(x, y) = (f(x), f(y))$ são aditivas, ou seja, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ e $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$.

Dados x_1 e x_2. Se $x_1 \neq 0$, considere a base $\{v, w\}$ do $\mathbb{R}^2$, em que $v = (x_1, 0)$ e $w = (x_2, 1)$. Pela Afirmação 1, vale aditividade $C(v+w) = C(v)+C(w)$, implicando que $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$. Se $x_1 = 0 =$, como $f(0) = 0$, é imediato verificar que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. A demonstração para g é similar.

Afirmação 4 $f \equiv g$ e $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere uma reta l com iclinação α, a saber $l : y = \alpha x + b_0$. Para calcular a inclinação $i(\alpha)$ da reta imagem $C(l)$, sejam $(0, b_0)$ e $(x, \alpha x + b_0)$ dois pontos distintos de l. É claro que $x \neq 0$. A inclinação de $C(l)$ é

$$i(\alpha) = \frac{g(\alpha x + b_0) - g(b_0)}{f(x) - f(0)} = \frac{g(\alpha x)}{f(x)}.$$

Da ultima igualdade segue que $g(\alpha x + b_0) = g(\alpha x) + g(b_0)$ e $f(0) = 0$. Avaliando em $x = 1$ obtem-se que $i(\alpha) = g(\alpha)$, pois $f(1) = 1$. Logo, $g(\alpha x) = g(\alpha)f(x)$ para quaisquer x e α. Avaliando em $\alpha = 1$ conclui-se que $g \equiv f$, pois $g(1) = 1$. Portanto, $f(\alpha x) = f(\alpha)f(x)$. Isto encerra a demonstração da afirmação.

Assim pelo visto, $f(x) = x = g(x)$. Logo, $C(x, y) = (f(x), g(y)) = (x, y)$, encerrando a demonstração do Lema. □

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva)**.** *Toda colineação $\psi : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ é induzida por um operador linear invertível $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ uma colineação. Sem preda de generalidade, assuma que ψ preserva a reta ideal I_∞ e fixa o ponto $(0 : 0 : 1)$. Caso isso não ocorra, considere os pontos projetivos não colineares três a três,

$$\overline{a} = \psi(1 : 0 : 0) \in \psi(I_\infty),\ \overline{b} = \psi(0 : 1 : 0) \in \psi(I_\infty) \text{ e } \overline{c} = \psi(0 : 0 : 1)$$

e construa a colineação $D : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ induzida por um operador linear do $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\overline{D}(\overline{a}) = (1 : 0 : 0),\ \overline{D}(\overline{b}) = (0 : 1 : 0),\ \overline{D}(\overline{c}) = (0 : 0 : 1).$$

Logo, a composta $D \circ \psi : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ é uma colineação que fixa o ponto $(0:0:1)$ e preserva a reta ideal, pois fixa dois de seus pontos, quais sejam $(1:0:0), (0:1:0)$.

Suponha que a colineação ψ está sob as condições descritas acima. Sendo assim, ψ aplica biunívocamente o plano afim no plano afim. Isto permite definir uma aplicação $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ via identificação afim, estabelecendo que

$$B(x,y) \text{ é tal que } (B(x,y):1) = \psi(x:y:1).$$

Como ψ é uma aplicação biunívoca do plano afim que aplica retas afins em retas afins, a identificação afim aplica retas Euclidianas em $\mathbb{R}^2$ em retas afins e como $(B(0,0):1) = \psi(0:0:1) = (0:0:1)$ é imediato concluir que B aplica retas Euclidianas em retas Euclidianas, é biunívoca e fixa a origem $O \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um operador linear invertível. Considere o operador linear invertível $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $A(x,y,z) = (B(x,y),z)$. Como, por construção, $\psi(1:1:1), (1:0:0), (0:1:0)$ e $(0:0:1)$ não são colineares três a três, pela Proposição (3.7), tem-se que $\psi(x:y:z) = \overline{A}(x:y:z)$ é induzida por pelo operador linear $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $A(x,y,z) = (B(x,y),z)$. □

3.2.2 Correlações

Seja uma aplicação bijetiva entre os planos projetivos $\rho : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$, possuindo a propriedade de colinearidade dual, ou seja, se $\overline{u}, \overline{v} \text{e} \overline{w}$ são três pontos projetivos colineares então $\rho(\overline{u}) = \overline{\eta}, \rho(\overline{v}) = \overline{\mu}$ e $\rho(\overline{w}) = \overline{\nu}$ são retas projetivas concorrentes. Tais aplicações e suas inversas são chamadas de *correlações*.

Assim, sendo $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear invertível, pode-se definir uma aplicação $A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$, na qual associa-se o ponto projetivo $\overline{v}$ a uma reta projetiva r. A utilização do asterisco nesta notação tem o objetivo de destingui-la de uma colineação. A inversa de A^* é aplicação $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, em que se $\overline{\eta}, \overline{\mu} \text{ e } \overline{\nu}$ são três retas projetivas concorrentes, então $A_*(\overline{\eta}) = \overline{u}, A_*(\overline{\mu}) = \overline{v}$ e $A_*(\overline{\nu}) = \overline{w}$ são pontos projetivos colineares. Da mesma forma que as colineações, um operador linear invertível de $\mathbb{R}^3$ induz uma correlação. Veja nas proposições a seguir.

Proposição 3.9. *Seja A um operador linear invertível em $\mathbb{R}^3$. Os pontos projetivos $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{RP}^2$ são colineares, se e somente se, as retas projetivas $A^*(\overline{u}), A^*(\overline{v}), A^*(\overline{w}) \in \mathbb{RP}^2$ são concorrentes.*

Demonstração. A colinealidade e a concorrência estão relacionados por

$$det[A(u), A(v), A(w)] = det([A][u, v, w]) = det[A]det[u, v, w].$$

Assim, $det[u, v, w] = 0$, se e somente se, $det[A(u), A(v), A(w)] = 0$. □

Proposição 3.10. *Seja A um operador linear invertível em $\mathbb{R}^3$. As retas projetivas $\overline{\eta}, \overline{\mu}, \overline{\nu} \in \mathbb{RP}^{2*}$ são concorrentes, se e somente se, os pontos projetivos $A_*(\overline{\eta}), A_*(\overline{\mu}), A_*(\overline{\nu}) \in \mathbb{RP}^2$ são colineares.*

Demonstração. Analogamente ao que foi mostrado na proposição anterior

$$det[A(\eta), A(\mu), A(\nu)] = det([A][\eta, \mu, \nu]) = det[A]det[\eta, \mu, \nu].$$

Assim, $det[\eta, \mu, \nu] = 0$, se e somente se, $det[A(\eta), A(\mu), A(\nu)] = 0$ □

Pelo Teorema Fundamental da Geometria Projetiva, cada correlação é induzida por um operador linear invertível de $\mathbb{R}^3$ e este operador é único a menos de uma multiplicação por um escalar diferente de zero. Assim, dado um operador linear invertível $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, a correlação induzida por A é a aplicação:

$$A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}, \;\; A^*(\overline{v}) = \overline{A(v)}.$$

Recorde ainda que $A^*(\overline{v})$ e $r_{A^*(\overline{v})}$ tem o mesmo significado, indicam a m esma reta projetiva. Por outro lado, a inversa da correlação induzida por A é a correlação induzida pelo operador A^{-1}, ou seja,

$$A_* : \mathbb{RP}^{2*} \longrightarrow \mathbb{RP}^2, \;\; A_*(\overline{\eta}) = \overline{A^{-1}(\eta)}.$$

Definição 3.8. *Uma correlação é uma polaridade se sua matriz é simétrica.*

Definição 3.9. *Uma aplicação polar é uma correlação simétrica $A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$, e uma aplicação pólo é uma correlação simétrica $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$.*

Uma propriedade relevante de operadores simétricos invertíveis é que seu operador inverso também é simétrico e $[A^{-1}]^t = [A^{-1}]$. Assim, a inversa de uma polaridade é uma polaridade e ao se definir uma polaridade induzida por um operador A fica subentendido que são as duas aplicações, polar e pólo.

Proposição 3.11. *Polaridade preserva incidência: $\overline{v} \in r_{\overline{\eta}} \Leftrightarrow A_*(\eta) \in r_{A^*(\overline{v})}$.*

Demonstração. Segundo a equações de incidência

$$\langle A^{-1}(\eta), A(v)\rangle = \langle \eta, A^{-1^t} \circ A(v)\rangle = \langle \eta, A^{-1} \circ A(v)\rangle = \langle \eta, v\rangle = \langle v, \eta\rangle.$$

Assim, $\langle A^{-1}(\eta), A(v)\rangle = 0$, se e somente se, $\langle v, \eta\rangle$. □

Sejam $A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ e $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, as aplicações polar e pólo, respectivamente, associados a um operador linear simétrico invertível A em $\mathbb{R}^3$.

Definição 3.10. *Quando $\overline{v} \in r_{A^*(\overline{v})}$ diz-se que o ponto projetivo $\overline{v}$ é autoconjugado, ou seja, $\langle v, A(v)\rangle = 0$. Em outras palavras v pertence ao seu polar.*

Definição 3.11. *Quando $A_*(\eta) \in r_{\overline{\eta}}$ diz-se que a reta projetiva $\overline{\eta}$ é autoconjugada, ou seja, $\langle A^{-1}(\eta), \eta\rangle = 0$. Dito de outra forma a reta projetiva incide em seu pólo.*

Proposição 3.12. *Uma reta projetiva $r_{\overline{\eta}}$ contém no máximo dois pontos autoconjugados associados a uma aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$.*

Demonstração. Sejam $\overline{v}$ e $\overline{w}$ dois pontos autoconjugados e distintos sobre a reta $r_{\overline{\eta}}$. Assim, sendo $r_{A^*(v)}$ e $r_{A^*(w)}$ são retas distintas e qualquer ponto do plano $\Gamma_\eta \subset \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos dois vetores v e w. Portanto, os pontos da reta projetiva $r_{\overline{\eta}}$ são expressos na forma $\overline{u} = \overline{sv + tw}$, em que s e t são números reais não nulos simultaneamente. Pela equação de autoconjugação tem-se que $\langle v, A(v)\rangle = 0 = \langle w, A(w)\rangle$. Suponha, por absurdo, que $\overline{u_0} = \overline{s_0 v + t_0 w}$ seja um ponto autoconjugado em $r_{\overline{\eta}}$. Assim, pela bilinearidade do produto interno e a simetria, $A = A^t$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_0, A(u_0)\rangle \\ &= s_0^2\langle v, A(v)\rangle + 2s_0t_0\langle v, A(w)\rangle + t_0^2\langle w, A(w)\rangle \\ &= 2s_0t_0(v, A(w)\rangle. \end{aligned}$$

Como $s_0 \neq 0$ e $t_0 \neq 0$ então, $\langle v, A(w)\rangle = 0$, significando que $\overline{v} \in r_{A^*(\overline{w})}$, mas $\overline{v}$ é autoconjugado, então $\overline{v} \in r_{A^*(\overline{v})}$, logo

$$\overline{v} \in r_{A^*(\overline{w})} \cap r_{A^*(\overline{v})}.$$

Pelo fato de A ser simétrica tem-se também que $\langle w, A(v)\rangle = 0$, significando que $\overline{w} \in r_{A^*(\overline{v})}$. E assim, novamente pela autoconjugação,

$$\overline{w} \in r_{A^*(\overline{v})} \cap r_{A^*(\overline{w})}.$$

Mas duas retas projetivas incidem em um único ponto. Logo, $\overline{v} = \overline{w}$, uma contradição, já que assumiu-se que estes pontos eram distintos. Portanto, não existe um terceiro autoconjugado na reta projetiva $r_{\overline{\eta}}$. □

3.3 Cônicas em $\mathbb{RP}^2$

Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é uma curva obtida pelo transporte, via identificação afim, da interseção de um cone e o plano horizontal $\Gamma_{e_3} : z = 1$. A projeção de um cone (menos o seu vértice, que neste caso será sempre origem O), no plano projetivo é uma curva $\mathcal{C}$ denominada *cônica em* $\mathbb{RP}^2$. Entenda melhor pelas figuras (3.2), (3.3) e (3.4).

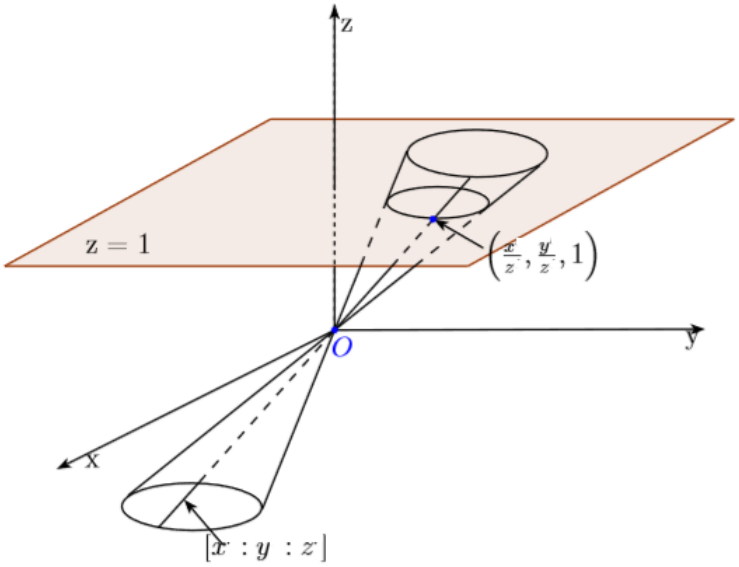

Figura 3.2: Elipse

Note que a equação de um cone é dado por $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, tal que os parâmetros a, b e c são todos positivos e as razões $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$ destes parâmteros são as inclinações da geratriz deste cone com os planos $x = 0$ e $y = 0$.

Assim, perceba que se $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então o cone C fica definido por:

$$C : \langle v, A(v) \rangle = 0.$$

Definição 3.12. *Um conjunto de pontos $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação polinomial homogênea de ordem 2 em $\mathbb{R}^3$,*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0,$$

é chamado de quádrica.

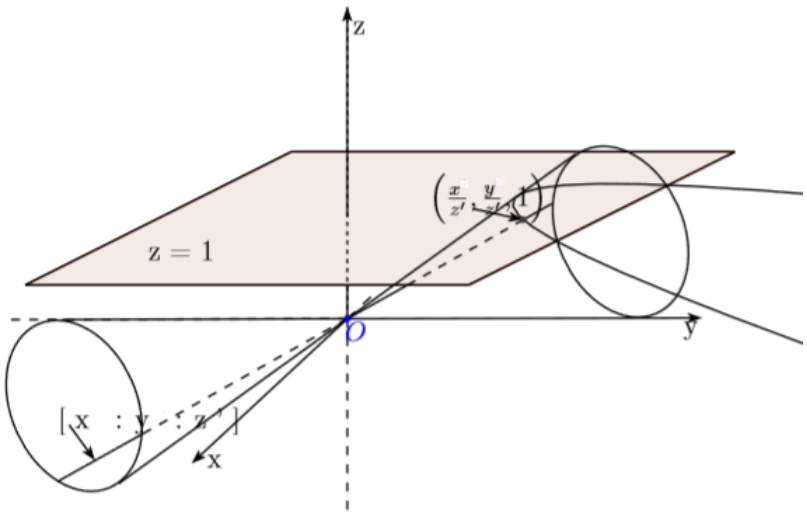

Figura 3.3: Parábola

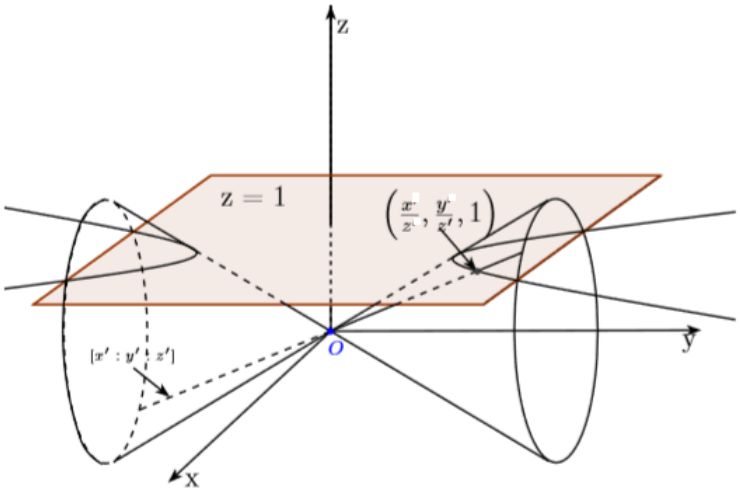

Figura 3.4: Hipérbole

Esta equação polinomial associa-se a um operador linear simétrico $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\langle v, A(v)\rangle = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

cuja matriz na baes canônica é

$$\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}.$$

O *Teorema Espectral para Operadores Simétricos*, afirma que todo operador simétrico possui uma base ortonormal de autovetores, ou seja, que matriz do operador é diagonalizável [3]. Sendo assim, para que o operador linear simétrico seja invertível, tem-se necessariamnete que seus autovalores sejam todos não nulos. Além disso, em Álgebra Linear diz-se que um operador simétrico com todos os autovalores positivos é dito positivo e vale a condição $\langle v, A(v)\rangle > 0$ para todo vetor não nulo v. Neste caso, o operador linear simétrico produz uma quádrica (degenerada) que se reduz a um ponto, a origem. Caso parecido ocorre com um operador linear com todos os autovalores negativos, vale a inequação $\langle v, A(v)\rangle < 0$ para todo $v \neq O$. E também para este caso a quádrica correspondente reduz-se a um ponto [4].

Assim, a fim de não cair não situações descritas acima, é interessante a partir de agora, considerar as quádricas provinientes de operadores lineares A de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz as seguintes condições:

- Simétricos;
- Autovalores distintos de zero (A é invertível);
- Autovalores não tem o mesmo sinal.

O conjunto solução C_A em $\mathbb{R}^3$ da quádrica cujo operador linear associado está sob as condições acima é chamado de cone em $\mathbb{R}^3$. E assim, o cone associado a matriz A, utilizando a condição de incidência entre ponto e reta, será:

$$C_A = \{v \in \mathbb{R}^3; \langle v, A(v)\rangle = 0\rangle\}.$$

Portanto, a projeção $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{o\} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, $\psi(v) = \overline{v}$, aplica o cone C_A (menos sua origem) numa curva sobre o plano projetivo, chamada de cônica projetiva, ou simplemente, cônica.

[3] ver em AR06 p. 226

[4] ver BARBOZA, D. F.; MELO, W G. Álgebra Linear II. CESAD-UFS. Aracaju: 2011.

A interseção do cone C_A com o plano Γ_{e_3}, produz os três tipos de curvas em $\mathbb{R}^2$, via identificação afim, chamadas de cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

Numa definição mais técnica, uma cônica $\mathcal{C}_A$ é o conjunto do pontos projetivos autoconjugados em relação a aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$. Dito de outra forma, a cônica é o conjunto de pontos que satisfazem a condição $\overline{v} \in r_{A^*(\overline{v})}$, isto é,

$$\mathcal{C}_A = \{\overline{v} \in \mathbb{RP}^2; \langle v, A^*(v)\rangle = 0\}.$$

Observe que o conjunto $\mathcal{C}_A$ não depende do representante do ponto projetivo tomado, pois se $\langle v, A^*(v)\rangle = 0$ e $\lambda \neq 0$ então $\langle \lambda v, A(\lambda v)\rangle = \lambda^2 \langle v, A^*(v)\rangle = 0$.

E dessa forma, uma cônica pode ser classificada a depender da sua interseção com a reta ideal, veja novamente as figuras (3.2), (3.3) e (3.4). Diz-se, assim que uma cônica $\mathcal{C}_A$ é:

- uma elipse, se $\mathcal{C}_A$ não intercepta $\mathbb{I}_\infty$;
- uma parábola, se $\mathcal{C}_A$ intercepta $\mathbb{I}_\infty$ num único ponto;
- hipérbole, se $\mathcal{C}_A$ intercepta $\mathbb{I}_\infty$ em dois pontos.

Estas são as três possibilidades para a interseção coma reta ideal pois, segundo a Proposição (3.12) uma reta projetiva possui no máximo dois pontos autoconjugados.

Exemplo 3.2. *Considere a matriz simétrica*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Verifique que o determinante da matriz é diferente de zero. Assim, pode-se então garantir que $[A]$ *define uma correlação* $A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$,

$$A^*(x : y : z) = (x - y + 3z : -x + y + 5z : 3x + 5y - 2z).$$

. Além disso, os autovalores de A *são distintos de zero e não tem o mesmo sinal. Assim, o conjunto no qual* $\langle v, A(v)\rangle = 0$ *não é vazio. Logo, da condição* $\langle v, A(v)\rangle = 0$ *tem-se a equação homogênea*

$$C_A : x^2 - 2xy + 6xz + y^2 + 10yz - 2z^2 = 0.$$

Fazendo $\overline{v} = (x : y : 0)$ *e substituindo na equação obtem-se,*

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 0.$$

Portanto o ponto ideal $\overline{v} = (x : y : 0)$ *pertence a* $\mathcal{C}_A$ *se, e somente se,* $x = y$*, ou seja,* $\mathcal{C} \cap \mathbb{I}_\infty = \{(1 : 1 : 0)\}$*. Logo, existe pelo menos um ponto autoconjugado e assim,* $\mathcal{C}_A$ *é uma parábola.*

Dito isso, deseja-se saber quais os pontos do $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *que através de indentificação afim pertence a cônica? Para responder a esta pergunta, considere o ponto* $\overline{v} = (x : y : 1) \in \mathbb{RP}^2$ *e exiga que este pertença à cônica* $\mathcal{C}_A$*, isto é, que suas coordenadas satisfaçam à equação de incidência. Assim, obtem-se a parábola em* $\mathbb{R}^2$*,*

$$C_A : x^2 - 2xy + 6x + y^2 + 10y - 2 = 0.$$

Exemplo 3.3. *Considere a matriz simétrica*

$$[B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como o determiante de $[B]$ *náo é nulo, tem-se a correlação* $A^* : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^{2*}$*,*

$$A^*(x : y : z) = (3x + y : x - y : -z)$$

. Além disso, seus autovalores são distintos de zero e não possuem o mesmo sinal, garantindo que o conjunto $\langle v, A(v)\rangle = 0$ *não é vazio. Logo, de* $\langle v, A(v)\rangle = 0$ *tem-se a equação homogênea*

$$\mathcal{C}_A : 3x^2 - y^2 + 2xy - z^2 = 0.$$

Veja que procurando as interseções com a reta ideal $\mathbb{I}_\infty$*, ou seja, substituindo* $\overline{v} = (x : y : 0)$ *na equação* $C_A : 3x^2 - y^2 + 2xy - z^2 = 0.$*, tem-se*

$$3x^2 - y^2 + 2xy = 4x^2 - (x - y)^2 = 0.$$

Logo $\mathcal{C} \cap \mathbb{I}_\infty = \{(1 : -1 : 0), (1 : 3 : 0)\}$ *e então,* $\mathcal{C}$ *é hipérbole. E fazendo a identificação afim destes pontos, tem-se a equação da hipérbole em* $\mathbb{R}^2$*,*

$$\mathcal{C}_A : 3x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0.$$

3.4 Aplicações: Teoremas de Pascal e Brianchon

A Geometria Projetiva começou a ganhar vida a partir do século XV, quando os artistas do Renascimento encontraram dificuldades em dar aos seus quadros uma aprarência naturalista, tal

qual a visão humana. Um dos que foram decisivos para a consolidação deste ramo da Matemática foi o matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo católico Blaise Pascal (1623-1662). Além disso, ele contribuiu fortemente para a criação da teoria das probabilidades. Em Física, estudou a mecânica dos fluídos, e esclareceu conceitos sobre pressão e vácuo. Foi ainda o criador de uma das primeiras calculadoras e de estudos sobre o método científico. Aos 16 anos encontrou alguns dos invariantes projetivos (incidências e colinearidades) entre diferentes objetos da Geometria Projetiva, fato que ficou conhecido como o celebre Teorema de Pascal ou Teorema do Hexagrama Místico. Um artifício corriqueiro na Geometria Projetiva está em encontrar uma figura mais simples que a original e homóloga a ela, estudar as suas propriedades que são invariantes por projeções e seções e assim obter propriedades da figura original, veja a figura (3.5). Para mostar o Teorema de Pascal será usado teoremas da Geometria Euclidiana e o Teorema de Menelaus. Veja, então a seguir o Teorema de Menelaus que será usado como resultado para a demonstração Teorema de Pascal.

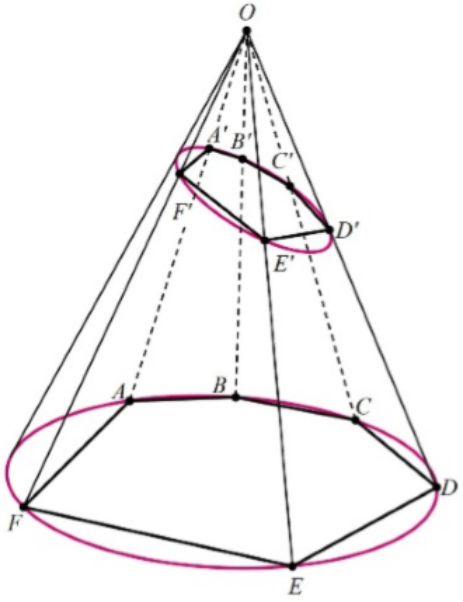

Figura 3.5: Teorema de Pascal pelo método de projeções e seções

Teorema 3.2 (Teorema de Menelaus)**.** *Seja um triângulo ABC, e uma reta transversal que corta os lados AC, BC e AB, ou o seus prolongamentos, nos pontos E, D e F, respectivamente. Então*

$$\frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1.$$

Inversamente, se E, D e F são pontos sobre os lados AC, BC e AB do triângulo ABC tais que

$$\frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1.$$

Então, E, D e F são colineares.

A demonstração deste Teorema está em [12] (p. 70-73). Assim, agora para a demonstração do Teorema de Pascal, primeiro veja nas figuras (3.6) e (3.7) a ilustração deste resultado na elipse e na hipérbole. No entanto, a demonstração seguira para hexágonos inscritos em uma circunferência, uma vez que, se o Teorema for verdadeiro para hexágonos inscritos em círculos e como as cônicas são projeções de círculos, então o resultado será válido para hexágonos inscritos em cônicas [5].

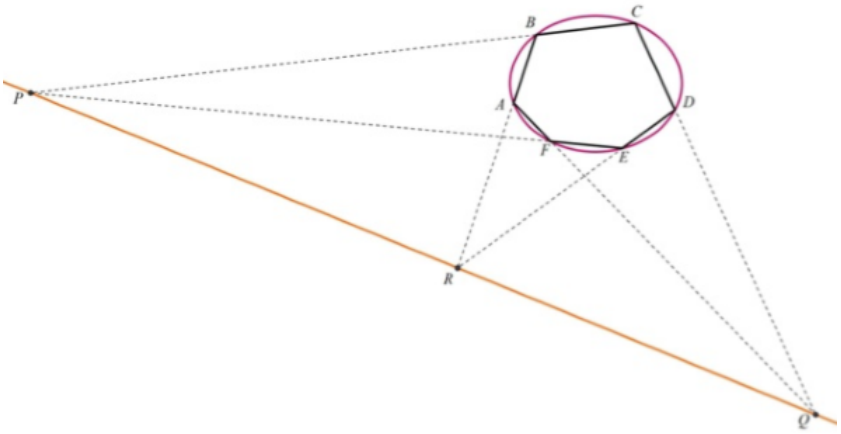

Figura 3.6: Teorema de Pascal na elipse

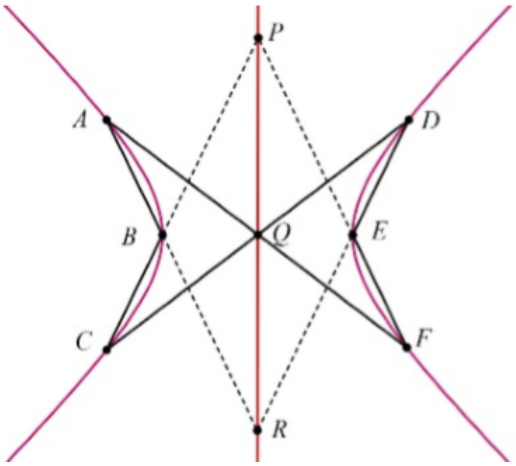

Figura 3.7: Teorema de Pascal na hipérbole

[5]GARBI, G. G. A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

Teorema 3.3 (Hexágrama Místico de Pascal)**.** *Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em uma cônica, então os pontos de interseção dos três pares de lados opostos, ou de seus prolongamentos, são colineares e reciprocamente.*

Demonstração. Considere o triângulo XYZ dterminado pelas retas AB, CD e EF. Os pares de lados opostos BC e EF, AB e ED, AF e CD, possuem um pontos de interseção P, R e Q, respectivamente. Será mostrado que P, R e Q são colineares.

Considere, agora a reta CP que intersecta as retas dos lados do triângulo XYZ, conforme a figura (3.8). Pelo Teorema de Menelaus, pode-se escrever:

$$\frac{XP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CY} \cdot \frac{YB}{BX} = 1. \tag{3.1}$$

De maneira análoga, considere a reta DR que intersecta as retas de lados do triângulo XYZ, como na figura (3.9). Aplicando novamente o Teorema de Menelaus, tem-se que

$$\frac{ZD}{DY} \cdot \frac{YR}{RX} \cdot \frac{XE}{EZ} = 1. \tag{3.2}$$

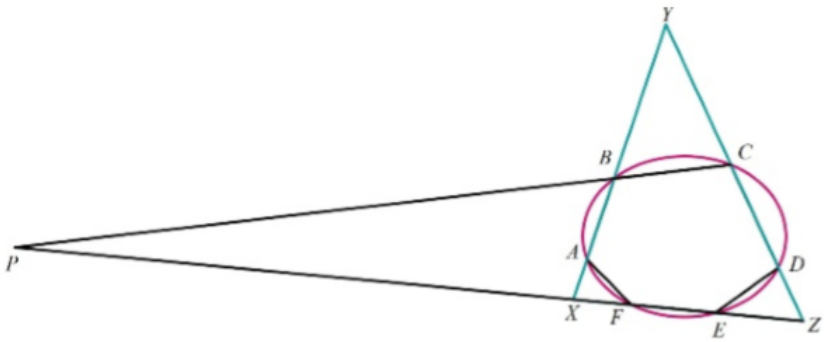

Figura 3.8: Reta CP

Finalmete, a reta AQ que intersecta as retas dos lados do triângulo XYZ, como na figura (3.10). E assim , mais uma vez pelo Teorema de Menelaus, obtem-se,

$$\frac{ZQ}{QY} \cdot \frac{YA}{AX} \cdot \frac{XF}{FZ} = 1. \tag{3.3}$$

Multiplicando as equações (3.1), (3.2) e (3.3), tem-se então,

$$\frac{XP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CY} \cdot \frac{YB}{BX} \cdot \frac{ZD}{DY} \cdot \frac{YR}{RX} \cdot \frac{XE}{EZ} \cdot \frac{ZQ}{QY} \cdot \frac{YA}{AX} \cdot \frac{XF}{FZ} = 1.1.1$$

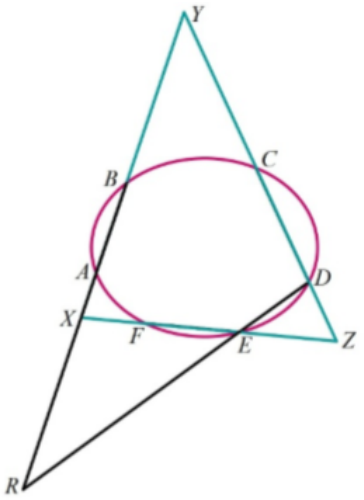

Figura 3.9: Reta DR

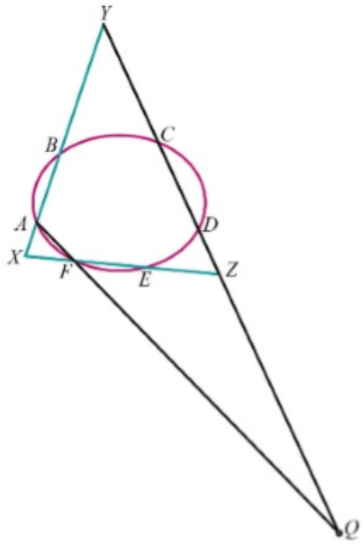

Figura 3.10: Reta AQ

Lembrando das propriedades métricas na circunferência, tem-se as igualdades

$$XA \cdot XB = XF \cdot XE$$

$$YB \cdot YA = YC \cdot YD$$

$$ZD \cdot ZC = ZE \cdot ZF,$$

as multiplicações acima ficam reduzidas,

$$\frac{XP}{ZP} \cdot \frac{YR}{RX} \cdot \frac{ZQ}{QY}.$$

E assim, finalmente, está última equação satisfaz o Teorema de Menelaus para o triângulo XYZ, logo P, R e Q são colineares. □

Na geometria projetiva existe uma ideia especulativa chamada de *princípio de dualidade* que significa que todo enunciado as palavras ponto e reta podem ser trocadas (com as devidas adaptações) dando origem a novos resultados. Por exemplo, tanto na Geometria Projetiva, quanto de Geometria Euclidiana tem-se que dois pontos distintos quaisquer determinam uma única reta, pelo princípio de dualidade este resultado propõe que quaisquer duas retas distintas determinam um único ponto, fato válido na Geometria Projetiva. Perceba que, pelo que foi visto na seção sobre plano projetivo $\mathbb{RP}^2$, as coordendas homogêneas de um ponto representa uma reta que o liga à origem, logo entende-se que daí se origina tal princípio.

Assim, um Teorema que é considerado uma dualidade do Teorema de Pascal é o Teorema de Brianchon, teorema atribuído ao matemático geômetra e químico, o francês Charles Julien Brianchon (1783-1864). Se dualizar o Teorema de Pascal tem-se que, os seis pontos sobre uma cônica, passam a ser seis retas tangentes a uma cônica em seis pontos distintos. Estas seis retas aos se intersectam dão origem a um hexágono circunscrito à cônica. Logo a primeira parte do teorema terá um hexágono circunscrito a uma cônica.

Na segunda parte os três pontos de interseção dos pares de lados opostos, passam a ser as três retas de interseção dos pares de vértices (pontos) opostos, ou seja, os três diagonais que ligam os vértices opostos. E por fim, tem-se que os pontos são colineares, passam a ser as retas são concorrentes.

veja então o referido teorema:

Teorema 3.4 (Teorema de Brianchon)**.** *As diagonais determinadas por pares de lados opsotos de vértices de um hexágono circunscrito a uma cônica são concorrentes em um ponto (ponto de Brianchon).*

Demonstração. Sejam U, V, W, U', V', W' os pontos de tangência do hexágono $ABCDEF$ circunscrito à cônica. Por sua vez, estes pontos determinam um segundo hexágono $UVWU'V'W'$ agora inscrito na cônica dual (constituída pelas retas de tangência à cônicas original), conforme a figura (3.11).

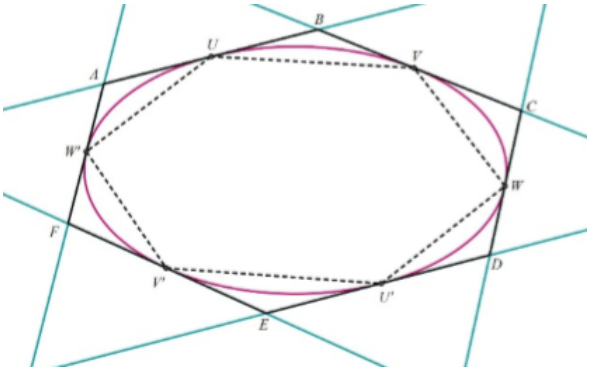

Figura 3.11: Reta AQ

Pelo Teorema de Pascal, existe uma única reta (a reta de Pascal) que incide sobre os três pontos de interseção dos pares de lados opostos do hexágono inscrito. No plano projetivo dual $\mathbb{RP}^{2*}$, estes três pontos são as três diagonais que ligam os três pares de vértices opostos do hexágono circunscrito e a reta de Pascal é o ponto onde estas três diagonais concorrem. □

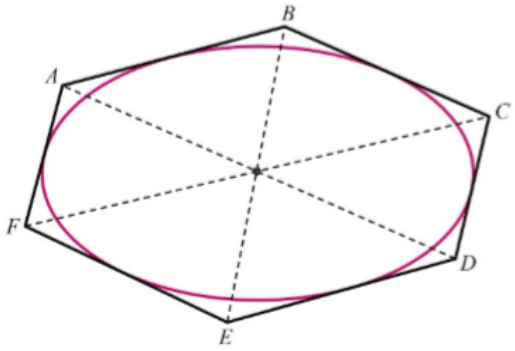

Figura 3.12: Teorema de Brianchon na elipse

Referências Bibliográficas

[1] CORREIA, M.C.L.F. **Diferentes Abordagens ao Estudo das Cónicas**. Dissertação de Mestrado em Matemática-Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 2013.

[2] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Coleção PROFMAT, 2ª Edição. Rio de Janeiro: Editora da Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

[3] SOUZA, L.D. **Cônicas e Suas Propriedades Notáveis**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina, 2014.

[4] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; trad. Hygino H. Domingues. 5ª Edição. Campinas: Editora UNICAMP, 2011.

[5] GALVÃO, M. E. E. L.. **História da Matemática: dos números à geometria**. Osasco: Editora Edifieo, 2008.

[6] STEWART, James **Cálculo**; trad. técnica Antônio Carlos Moretti; rev. técnica Helena Castro. Vol 2. 6ª Edição. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2011.

[7] BARROS, Abdênago A. de; ANDRADE, Plácido Francisco de A. **Introdução à Geometria Projetiva com tratamento vetorial**. Rio de Janeiro: Editora SBM, (2010).

[8] SANTOS, T. S. R. S.. **Introdução à Mecânica Celeste: As leis de Kepler e os Problemas dos Dois Corpos**; Relatório Final: PIBIC-Departamento de matemática. Aracaju: UFS, 2017.

[9] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2005.

[10] WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2007.

[11] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S. **Introdução à Álgebra Linear**. Coleção PROFMAT, 2ª Edição. Rio de Janeiro: Editora da Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[12] GONÇALVES, T. S.. **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, 2013.

[13] RIBEIRO, Gerarda N. B. S. M. A.. **Teoremas Clássicos sobre Cônicas Projetivas**. Tese de Mestrado. Universidade do Minho. Gualtar, 2012.

[14] <http://matemabio.blogspot.com/p/regras-de-derivacao-e-derivadas.html>. Acesso em 26 de Setembro de 2018.

[15] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_sint\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactortica>. Acesso em 26 de Setembro de 2018.

[16] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Apol\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent94o\egroup\spacefactor\accent@spacefactornio_de_Perga>. Acesso em 26 de Setembro de 2018.

[17] <http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Dandelin>. Acesso em 26 de Setembro de 2018.

[18] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_anal\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{\OT1\i\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19\OT1\i\egroup\spacefactor\accent@spacefactortica>. Acesso em 26 de Setembro de 2018.

[19] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_projetiva>. Acesso em 26 de Setembro de 2018.