

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

VANESSA DAIANY VIEIRA MEDEIROS

**ESTABELECIMENTO DE UMA BASE DE INFORMAÇÕES PARA
A PARTE ARBITRÁRIA DA FORÇA DE INTERAÇÃO EM UMA
SUSPENSÃO PARTICULADA**

São Cristóvão – SE
2018

VANESSA DAIANY VIEIRA MEDEIROS

**ESTABELECIMENTO DE UMA BASE DE INFORMAÇÕES PARA
A PARTE ARBITRÁRIA DA FORÇA DE INTERAÇÃO EM UMA
SUSPENSÃO PARTICULADA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Sergipe, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Santos Silva

Coorientador: Prof. Dr. Edilson de Jesus Santos

São Cristóvão – SE
2018

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Medeiros, Vanessa Daiany Vieira
M488e Estabelecimento de uma base de informações para a parte
arbitrária da força de interação em uma suspensão particulada /
Vanessa Dayany Vieira Medeiros ; orientador Antônio Santos
Silva. - São Cristóvão, 2018.
74 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - Universidade
Federal de Sergipe, 2018.

1. Engenharia química. 2. Operações unitárias. 3. Processos
químicos. 4. Modelos matemáticos. I. Silva, Antônio
Santos orient. II. Título.

CDU 66



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA
MESTRADO EM ENGENHARIA QUÍMICA

1 avaliação da Dissertação de Mestrado apresentada. Terminada a avaliação, o(a) Senhor(a)
2 presidente fez o convite para que todos retornassem ao recinto e proferiu o julgamento da Banca
3 Examinadora, sendo o(a) aluno(a) considerado(a) aprovado, conforme as
4 normas vigentes da Universidade Federal de Sergipe, e eu, Kathyanne Nunes de Oliveira, lavrei a
5 presente ata que, após lida e aprovada, será assinada pela Banca Examinadora e pelo(a)
6 mestrando(a). Cidade Universitária Prof. José Aloísio de Campos, 23 de fevereiro de 2018.

Prof. Dr. Antonio Santos Silva
Orientador

Prof. Dr. Pedro Leite de Santana
Membro Interno

Prof. Dr. Jose Carlos Leite dos Santos
Membro Externo

VANESSA DAIANY VIEIRA MEDEIROS
Mestrando(a)

“Se você vier me perguntar por onde andei, no tempo em que você sonhava, de olhos abertos
lhe direi: Amigo, eu me desesperava.”

Belchior

RESUMO

O escoamento em meios porosos é relevante em diversas áreas de interesse científico e tecnológico. É possível citar uma série de operações unitárias, concernentes à Engenharia de Processos Químicos, envolvendo sua aplicação, como em reatores de leito fixo, filtração, secagem, cromatografia, adsorção, conversores catalíticos para a redução de poluentes automotivos, sedimentação, transporte de sólidos por arraste de fluidos, dentre outras. A ampla aplicação do processo de escoamentos em meios porosos requer, cada vez mais, estudos sobre formulações teóricas, visando uma modelagem mais generalizada que contemple o aparecimento de novos termos nas equações de balanços, como o poder das forças de interação e acoplamentos termodinâmicos, inclusive grandezas arbitrárias quando há algum tipo de restrição. Neste sentido, pode ser destacada a formulação teórica para um meio poroso com restrição de incompressibilidade, modelado pela teoria contínua das misturas sem reações químicas, que, quando aplicada ao movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade, fornece equações de balanços envolvendo grandezas arbitrárias, onde relações entre grandezas produzem várias formas de sistemas de equações para o movimento de tal suspensão. Dentre tais grandezas, a força de interação arbitrária pode ser destacada. Na literatura, estudos sobre a força de interação arbitrária, em uma suspensão particulada, ainda são bastante escassos. Neste trabalho, foi obtida uma expressão para a parte arbitrária da força de interação, como função apenas da variável porosidade. Alcançada, por sua vez, com base em relações entre grandezas arbitrárias e por meio da introdução de uma nova função arbitrária, chamada fração de pressões arbitrárias. O estabelecimento de informações para a parte arbitrária da força de interação é feito com base na modelagem matemática do movimento gravitacional de uma suspensão particulada, com restrição de incompressibilidade, em proveta. A base de informações e a expressão para a parte arbitrária da força de interação, apresentadas neste trabalho, envolvem parâmetros básicos produzidos pela modelagem, de simples obtenção, o que resulta numa ferramenta eficaz para obtenção de dados e de resultados numéricos para a parte arbitrária da força de interação, consistindo numa importante contribuição ao estudo das suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade.

Palavras-chave: Suspensão particulada, Interação arbitrária, Modelagem matemática.

ABSTRACT

The flow in porous media are relevant in several areas of scientific and technological interest. It is possible to cite a series of unitary operations, interesting to Chemical Process Engineering, involving its application, as in fixed-oil reactors, filtration, drying, chromatography, adsorption, catalytic converters for reduction of automotive pollutants, sedimentation, transport of solids by drag of fluids, among others. The wide application of the flow process in porous media requires, more and more, studies on theoretical formulations, aiming at a more generalized model that contemplates the appearance of new terms in the balance equations such as the power of the interacting forces and thermodynamic couplings, including arbitrary quantities when there is some kind of restriction. In this sense, the theoretical formulation for a porous medium with restriction of incompressibility, modeled by the continuous theory of mixtures without chemical reactions, when applied to the movement of a specialized suspension with restriction of incompatibility, offers of balance equations involving arbitrary quantities, where relations between greatness produce various forms of systems of equations for the suspension movement. Among such magnitudes, the force of arbitrary interaction can be highlighted. In the literature, studies on the arbitrary interaction force in a particulate suspension are still quite scarce. In this work, an expression was obtained for the arbitrary part of the interaction force, as a function only of the porosity variable. It is achieved, on the other hand, on the basis of relations between arbitrary quantities and through the introduction of a new arbitrary function, called a fraction of arbitrary pressures. The establishment of information for the arbitrary part of the interaction force is based on the mathematical modeling of the gravitational movement of a particulate suspension, with incompressibility constraint, in a test tube. The information base and expression for the arbitrary part of the interaction force, presented in this paper, involve basic parameters produced by the modeling, from simple obtaining, which results in an efficient tool for obtaining data and numerical results for the arbitrary part of the interaction force, constituting an important contribution to the study of particulate suspensions with restriction of incompressibility.

Keywords: Particulate suspension, Arbitrary interaction, Mathematical modeling.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cálculo das funções w e W para uma suspensão aquosa de esferas de vidro.....	60
Tabela 2 – Cálculo de A_0 de uma suspensão aquosa de esferas de vidro.....	61
Tabela 3 – Comparação entre as alturas experimental e teórica de uma suspensão aquosa de esferas de vidro.....	61
Tabela 4 – Parâmetros da suspensão aquosa de esferas de vidro.....	62
Tabela 5 – Parte arbitrária da força de interação em uma suspensão aquosa de esferas de vidro.....	63

erro! Indicador não definido.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.....	45
Figura 2 – Comparação entre as alturas experimental e teórica da interface superior descendente.....	62

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Função comprimento
A_1	Energia de Helmholtz do constituinte 1
A_2	Energia de Helmholtz do constituinte 2
a_1	Aceleração do constituinte fluido
a_2	Aceleração do constituinte sólido
B	Função da porosidade
E_1	Energia de interação do constituinte 1
E_2	Energia de interação do constituinte 2
g	Aceleração da gravidade
g_1	Força de campo sobre o fluido
g_2	Força de campo sobre o sólido
H	Altura inicial da suspensão na proveta
h	Altura da onda de aceleração
l_1	Força de interação do constituinte 1
l_2	Força de interação do constituinte 2
m	Parte constitutiva da força de interação
P_f	Pressão do constituinte fluido
P_s	Pressão do constituinte sólido
P_{sf}	Diferença de pressões arbitrárias
p_1	Função escalar arbitrária do constituinte 1
p_2	Função escalar arbitrária do constituinte 2
Q	Função da porosidade
T_1	Tensor tensão do constituinte 1

T_2	Tensor tensão do constituinte 2
t	Variável tempo
t_0	Instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
t_c	Instante de encontro das duas interfaces
U	Velocidade de superfície em movimento
u_0	Velocidade de sedimentação livre
V_1	Velocidade do constituinte fluido
V_2	Velocidade do constituinte sólido
w	Função velocidade
w_0	Velocidade da onda de aceleração
W	Função velocidade
x	Altura da interface superior descendente
x_0	Altura de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
x_c	Altura de encontro das duas interfaces
y	Coordenada espacial
z	Altura da interface inferior ascendente
γ	Constante com dimensão de velocidade
ε	Porosidade
ε_0	Porosidade inicial
$\bar{\varepsilon}$	Porosidade média da suspensão
ε_m	Porosidade média na região de compactação
ρ_1	Densidade do constituinte fluido
ρ_2	Densidade do constituinte sólido
ρ_f	Massa específica do fluido puro
ρ_s	Massa específica do sólido puro

σ_1 Parte constitutiva do tensor tensão para o fluido

σ_2 Parte constitutiva do tensor tensão para o sólido

φ Função do tempo

ϕ Função da posição e do tempo

ψ Função da posição e do tempo

χ Fração de pressões arbitrárias

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REVISÃO DA LITERATURA	14
2.1	Queda acelerada de uma partícula esférica num fluido	14
2.2	Meio poroso saturado com fluido	18
2.2.1	Meio poroso com restrição de incompressibilidade	24
2.3	Movimento gravitacional de uma suspensão particulada.....	25
3	ELEMENTOS BÁSICOS	31
3.1	Meio poroso saturado com fluido	31
3.1.1	Meio poroso com restrição de incompressibilidade	32
4	METODOLOGIA	40
4.1	Fração de pressões arbitrárias	40
4.1.1	Considerações básicas	42
4.2	Soluções exatas	43
4.2.1	Primeira Solução	44
4.2.2	Segunda Solução.....	45
4.3	Modelagem matemática	46
4.4	Uso das soluções exatas	49
4.4.1	Região de sedimentação livre	49
4.4.2	Região de Transição	50
4.4.3	Movimento da Interface Superior Descendente	51
4.4.4	Velocidade da Onda de Aceleração	52
4.4.5	Condições para o ponto de encontro das interfaces	52
4.4.6	Ponto de encontro das interfaces	53
4.5	Base de informações	53
4.5.1	Roteiro para a execução da base	54
4.6	Equações para as grandezas constitutivas	57
4.7	Parte arbitrária da força de interação	60
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	62
6	CONCLUSÕES	66
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

1 INTRODUÇÃO

O escoamento em meios porosos é relevante em diversas áreas de interesse científico e tecnológico. Dentre os exemplos concernentes à Engenharia de Processos Químicos, pode-se citar uma série de operações unitárias envolvendo sua aplicação, como em reatores de leito fixo, filtração, secagem, cromatografia, adsorção, conversores catalíticos para a redução de emissões de poluentes automotivos, sedimentação, transporte de sólidos por arraste de fluidos. Na indústria petrolífera, é possível destacar os processos de injeção de água em reservatórios de petróleo, o uso de agentes seletivos para a uniformização da acidificação de formações que apresentam canalizações de fluxo, dentre outros. Na indústria eletrônica, meios porosos cerâmicos e metálicos são empregados em evaporadores capilares com o intuito de promover a dissipação de calor. Na indústria geotérmica, vale ressaltar sua importância na extração de energia geotérmica, em armazenamento de resíduos nucleares e movimentos de poluição e em fluxos de água subterrânea. Vale ressaltar também a geração de elevação em meios porosos, a exemplo do movimento de uma célula sanguínea em um capilar bem ajustado, microcirculação, lubrificação porosa macia, amortecimento por aperto e pó de neve (esqui).

A fluidodinâmica da partícula sólida, a exemplo da queda acelerada de uma partícula em um fluido, pode ser utilizada como ponto de partida para a obtenção de informações acerca de alguns parâmetros ou grandezas para o estudo de um meio poroso, principalmente para o movimento de uma suspensão particulada, como a força de arraste, o coeficiente de arraste e a força de interação relacionada à resistividade. Mas, a ampla aplicação do processo de escoamento em meios porosos requer, cada vez mais, estudo sobre formulações teóricas, visando modelar, de forma mais generalizada, um meio poroso, principalmente quanto ao aparecimento de novos termos nas equações dos balanços. Nesse sentido, é possível destacar a inclusão do poder das forças de interação, a possibilidade de comportamentos incomuns, como o fornecimento de calor a um constituinte resultante da interação com outro constituinte, termos para descrever acoplamentos termodinâmicos, termos referentes à fratura hidráulica, grandezas arbitrárias quando há algum tipo de restrição e outros termos (COSTA MATTOS e MARTINS-COSTA, 1995; ANGULO, 2015; LIU *et al.*, 2011; SILVA *et al.*, 2013; LIBÓRIO *et al.*, 2016; KUMAR e ABBAS, 2016.)

No caso de um meio poroso saturado com fluido, modelado pela Teoria Contínua das Misturas sólido-fluido na ausência de reações químicas, no qual as densidades do sólido e fluido puros são constantes (restrição de incompressibilidade), a formulação teórica, como apresentada em Silva *et al.* (2013), fornece equações de balanço generalizadas, envolvendo grandezas constitutivas e arbitrárias. Desse modo, é importante destacar o uso do movimento

de uma suspensão particulada, com restrição de incompressibilidade, modelada pelo meio poroso com tal restrição. Com isso, de acordo com Libório *et al.* (2015 c), os parâmetros que aparecem nas grandezas podem ser estudados utilizando-se modelagem matemática do movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta.

Este trabalho estende o estudo de grandezas constitutivas e arbitrárias de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade, tendo como base o movimento gravitacional de tal suspensão, em proveta, e a estrutura preliminar de informações desenvolvida por Libório (2016) para o cálculo da diferença de pressões arbitrárias.

A contribuição deste trabalho para o estudo do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade é o desenvolvimento de uma base de informações para a parte arbitrária da força de interação. Além disso, destaca-se: o estudo das relações entre grandezas arbitrárias, a introdução de uma nova função arbitrária denominada fração de pressões arbitrárias, a utilização de equações para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, a utilização de uma forma de sistema de equações do movimento de uma suspensão particulada e, por fim, a determinação da equação para o cálculo da parte arbitrária da força de interação, em função da porosidade, de modo que é possível obter resultados numéricos.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Queda acelerada de uma partícula esférica num fluido

A fluidodinâmica de sistemas particulados pode ser estudada tomando como ponto de partida a fluidodinâmica da partícula isolada. A determinação das propriedades do todo pela extrapolação do comportamento de um elemento da estrutura é intuitiva. Além disso, a fluidodinâmica da partícula pode ser descrita através de um conjunto de equações que inclui a equação do movimento da partícula, as equações da continuidade e movimento para o fluido e as condições limite pertinentes ao problema específico (MASSARANI, 2002).

Sobre a fluidodinâmica da partícula sólida, principalmente queda acelerada de partículas em fluidos, é importante destacar o levantamento bibliográfico feito por Libório (2016), evidenciando os trabalhos de Basset (1961), Feng e Joseph (1995) e Mollinger *et al.* (1999), Massarani (2002), Ardekani e Rangel (2006), Jalaal *et al.* (2010), Srivastava e Yadav (2012), Srivastava e Srivastava (2013) e Torabi e Yaghoobi (2013).

O trabalho de Silva e Jesus (2015) mostrou que a equação íntegro-diferencial proposta por Basset (1888) para a queda de uma partícula num fluido, envolvendo a história da aceleração, pode ser transformada em uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes, não homogênea, a qual gera alternativas para a determinação da velocidade. Tal transformação é importante para o estudo de quedas de corpos em fluidos que requerem termos adicionais. Esses termos podem ser adicionados à equação diferencial de segunda ordem, de modo a não envolver a história da aceleração. Com isso, o estudo da queda acelerada de uma partícula num fluido apresenta elementos que podem ser utilizados como ponto de partida para o estudo de uma suspensão particulada.

Inúmeros problemas de engenharia envolvem o fluxo de suspensões particuladas e, conseqüentemente, incluem equações para o movimento da partícula.

O trabalho de Nouri *et al.* (2014) inovou ao propor três diferentes métodos analíticos para o estudo do comportamento instável da queda acelerada de partículas esféricas em um fluido newtoniano, sugerindo soluções particularmente simples, que podem ser estendidas a problemas mais complexos que a sedimentação. Para a modelagem do problema, considerou-se uma partícula esférica e rígida caindo em um fluido newtoniano e incompressível de densidade e viscosidade conhecidas. O movimento da partícula no fluido foi descrito pela equação íntegro-diferencial de Basset, cuja resolução é dificultada devido à não linearidade do termo de coeficiente de arraste. O estudo de Nouri *et al.* (2014) introduziu três métodos simples para a resolução de tal termo não-linear e comparou a resolução a um método numérico, o de

Runge-Kutta. Os métodos analíticos apresentaram conformidade com o método numérico.

Posteriormente, Rahimi-Gorji *et al.* (2014) também investigaram analiticamente a queda vertical de uma partícula, mas em fluidos não newtonianos. O termo não linear da equação de Basset foi resolvido utilizando-se o Método da Intercalação (Collocation Method). A aplicação do método não exigiu nenhuma discretização, hipótese restritiva ou transformação. Além disso, esse método pode ser usado para desenvolver soluções válidas mesmo para problemas que são altamente não lineares e pode ser considerado como um refinamento importante e significativo dos métodos anteriormente desenvolvidos. Ao ser comparado a métodos numéricos para a resolução da equação integro-diferencial de Basset, o Método da Intercalação mostrou resultados bastante satisfatórios, fornecendo soluções analíticas altamente precisas para problemas não lineares e, assim, reduzindo consideravelmente a extensão dos cálculos necessários.

Malvandi *et al.* (2014) utilizaram um método semi-analítico para investigar o movimento acelerado de uma partícula não esférica em um fluxo viscoso quiescente. A técnica, assim como no trabalho de Rahimi-Gorji *et al.* (2014), foi aplicada sem a necessidade de suposições restritivas, discretização ou transformação. Os resultados indicam que, à medida que a esfericidade da partícula aumenta, a velocidade terminal da mesma também o faz. Ao mesmo tempo, foi pontuado que partículas com maior esfericidade atravessam uma distância mais longa até que suas velocidades terminais sejam atingidas.

Betancourt *et al.* (2015) desenvolveram uma equação teórica explícita para o coeficiente de arraste e para as velocidades de queda de partículas esféricas em um fluido não newtoniano, embasando-se nos trabalhos anteriores aqui citados. O efeito do caráter não newtoniano do fluido no movimento da partícula foi expresso como uma relação empírica, obtida a partir de dados experimentais disponíveis na literatura, relacionando o coeficiente de arraste e a espessura da camada limite sobre a esfera. A expressão proposta se mostrou de acordo com os dados experimentais.

Song *et al.* (2017) realizaram um vasto estudo experimental sobre o comportamento da queda acelerada de partículas esféricas e não esféricas em um fluido não newtoniano. Após um total de 336 experimentos, concluiu-se que a forma da partícula e a orientação da sedimentação é útil para a determinação precisa do coeficiente de arraste e da velocidade das partículas não esféricas no fluido newtoniano. A partir de tal observação, uma nova correlação para o coeficiente de arraste de partículas esféricas e não esféricas foi desenvolvida, incluindo o efeito da esfericidade e a orientação da sedimentação das partículas. Por fim, foi proposta uma equação explícita para prever diretamente a velocidade de sedimentação de partículas de diferentes formas, que é bem ajustada para número de Reynolds variando entre 0,001 e 100 e

esfericidade entre 0,471 e 1.

É notória a relevância do estudo do movimento de partículas, esféricas e não esféricas, em fluidos, uma vez que uma série de operações unitárias na indústria química, como a sedimentação, filtração, centrifugação, dentre tantas outras, necessitam de detalhes acerca da trajetória da queda da partícula acelerada para propor melhorias em sua operação e no desenvolvimento de novos projetos de equipamentos. Entretanto, grande parte dos estudos são concentrados no movimento de partículas em formato esférico, quando, na prática, as partículas apresentam formatos diversos e o movimento da suspensão é afetado por isso. Dogonchi *et al.* (2014) estudaram o movimento acelerado de uma partícula não esférica movendo-se em uma fase fluida contínua e incompressível, utilizando o método de Padé para obter soluções aproximadas para a velocidade. O algoritmo proposto foi empregado sem a necessidade de linearização, discretização, transformação, nem hipóteses restritivas, consistindo num método eficaz de estudar o movimento de suspensões particuladas, levando em consideração a não esfericidade das partículas.

Doostmohammadi *et al.* (2014) estudaram a dinâmica de sedimentação de uma partícula esférica num fluido linearmente estratificado com moderado número de Reynolds. Verificaram que além do coeficiente de arraste e das forças descritas pela equação de Basset, existe uma força adicional que age na sedimentação em um fluido estratificado devido à deflexão de camadas por trás da partícula e associada à força de flutuação. Doostmohammadi *et al.* (2014) propuseram um modelo simples para estimar a velocidade máxima que a partícula esférica experimenta durante sua descida vertical e concluíram que, após atingir sua velocidade máxima, os efeitos de estratificação podem levar à oscilação da velocidade de sedimentação e, até mesmo, à levitação de partículas.

Em determinadas aplicações do estudo da queda acelerada da partícula em fluido, como em processamento de minerais, em reatores de leito fluidizado, a massa e, por conseguinte, o diâmetro da partícula se reduz devido à solubilidade no fluido em escoamento, ou mesmo à presença de reação química. Nesses casos, há um erro associado ao modelar a partícula como rígida e insolúvel. Hatami *et al.* (2014) propuseram uma equação para a queda transiente de uma partícula solúvel em um fluido newtoniano, assumindo que a redução do diâmetro das partículas é governada por uma função linear.

Também se embasando no estudo da queda acelerada da partícula esférica num fluido, Ardekani *et al.* (2016) investigaram a sedimentação de pares de partículas isoladas e não esféricas em um fluido viscoso, através de simulação computacional. O tempo de interação aumenta significativamente para partículas não esféricas. Além disso, partículas elipsoides são atraídas por deslocamentos laterais. As implicações desses fenômenos são importantes para

a estimativa de núcleos de colisão, podendo resultar num aumento significativo de agrupamento em suspensões elipsoides sedimentares. O estudo sugere que o agrupamento em uma suspensão de elipsoides pode ser expressivamente maior que para partículas esféricas.

Yin *et al.* (2017) investigaram, analítica e experimentalmente, a queda acelerada de uma partícula num fluido imóvel, obtendo uma relação entre o coeficiente de arraste e o número de Reynolds, baseada na equação de Basset-Boussinesq-Oseen. Os parâmetros envolvidos na equação do coeficiente de arraste foram determinados, para uma ampla faixa de números de Reynolds. Um experimento simples foi conduzido para medir o tempo de queda e a distância percorrida por uma partícula esférica, caindo através de água parada, possibilitando a derivação de equações finais que relacionassem velocidade de queda, tempo e distância. O trabalho proposto por Yin *et al.* (2017) é relevante para a análise da relação entre o número de Reynolds e a deposição de partículas, podendo ser empregado em áreas da engenharia química e ambiental, a exemplo do tratamento de água e efluentes.

Liu *et al.* (2017) analisaram numericamente a queda livre de uma partícula esférica num fluido, utilizando o software de Dinâmica de Fluidos Computacionais (CFD). No trabalho, foi considerado o movimento da partícula frente a diferentes números de Reynolds, além das forças hidrodinâmicas atuantes e as características do campo de fluxo circundante. Observou-se que o campo de fluxo circundante à partícula perde a simetria gradualmente, à medida que o número de Reynolds aumenta, podendo variar de uma simetria axial a uma simetria plana, até tornar-se caótico. Os resultados obtidos fornecem uma referência básica para a pesquisa sobre o movimento de múltiplas partículas, com ampla aplicação, como na engenharia de transporte hidráulico vertical de minério e na mineração em águas profundas.

Mehrabian *et al.* (2017) também utilizaram o movimento da queda acelerada de uma partícula como base inicial para estudo da separação óleo-partícula, levando em consideração mecanismos hidrodinâmicos que, normalmente, não são considerados em diversas abordagens do estudo de processos de separação.

Fakour *et al.* (2017) introduziram métodos analíticos para a resolução do problema do comportamento instável da queda de partículas esféricas em um fluido newtoniano. Os experimentos foram realizados utilizando partículas de diferentes materiais (alumínio, cobre e chumbo) e empregando a água como fluido newtoniano e incompressível. As soluções analíticas foram validadas através dos dados experimentais obtidos, se mostrando um método bastante satisfatório na resolução da equação da velocidade terminal para a queda da partícula em líquidos, necessária em diversas aplicações industriais, como processamento de minerais, reatores de leito fluidizado, transporte hidráulico, dentre outras.

O levantamento bibliográfico aqui percorrido apresenta elementos básicos capazes de

nortear o estudo do movimento de suspensões particuladas, sobretudo nos aspectos referentes à resistência dinâmica. A Teoria Contínua das Misturas fornecerá equações de balanço de quantidade de movimento mais genéricas, envolvendo a força de interação.

2.2 Meio poroso saturado com fluido

Nos sistemas diluídos, a fluidodinâmica da partícula isolada constitui um ponto de partida para a sua análise. No entanto, para sistemas densos em partículas, a utilização dessa estratégia oferece grande dificuldade. Para contornar tal dificuldade, diversos autores desenvolveram uma teoria das misturas capaz de descrever diferentes fenômenos, como a difusão molecular e o escoamento em meios porosos.

O'Rourke *et al.* (2014) desenvolveram um modelo para o cálculo da aceleração de fluxos de partículas polidispersas. O modelo explica as forças de contato que ocorrem quando partículas de diferentes acelerações, causadas por um fluido intersticial, forçam partículas de diferentes tamanhos e/ou densidades a se aglomerarem, de modo que a força de uma partícula individual é transmitida para as partículas vizinhas. O resultado desse fenômeno é que as partículas experimentam uma aceleração total, decorrente da mistura das acelerações individuais e médias locais. Levando à conclusão de que, para se prever a separação de diferentes tipos de partículas em leitos fluidizados, se faz necessário o uso de um modelo numérico capaz de explicar as variações na força de contato que ocorrem nesses leitos. O trabalho é relevante no sentido de explicar numericamente a força de interação entre partículas num meio poroso saturado com fluido. Entretanto, não fornece base para que a força de interação seja descrita analiticamente, de forma direta.

Wei e Muraleetharan (2002) realizaram um estudo sobre Teoria das Misturas aplicada a um meio poroso saturado por múltiplos fluidos imiscíveis. A teoria proposta pode ser usada para caracterizar condições de compatibilidade dinâmica nas interfaces, condições estas que representam microscopicamente as restrições mecânicas nos saltos de pressão através das interfaces, desempenhando um papel fundamental no comportamento geral de meios porosos saturados com múltiplos fluidos. Foi, também, proposto um modelo elástico linear para o caso em que o meio poroso é saturado por fluidos bifásicos, analisando-se, para essa condição, a propagação de ondas acústicas no meio, chegando-se à conclusão de que existem, geralmente, três ondas de compressão no meio poroso insaturado, sendo a terceira associada à compressão capilar.

Da Gama e Martins-Costa (1996) propuseram uma simulação de transferência de energia e momento em um meio poroso saturado por um fluido incompressível. O trabalho

estudou os fenômenos de transporte de um fluido newtoniano incompressível através de uma matriz porosa rígida. O meio poroso saturado foi modelado como uma mistura de três constituintes sobrepostos: um sólido (a matriz porosa rígida, homogênea e isotrópica), um fluido newtoniano incompressível e um gás inerte. Nas equações de balanço, foram inseridos termos relacionados ao impulso e às fontes de energias, ausentes na abordagem clássica. A representação matemática resultante consistiu em um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares sujeitas a dados iniciais e condições de contorno, cujas incógnitas eram a velocidade do constituinte do fluido, a saturação e as temperaturas do fluido e dos constituintes do sólido. Para a resolução, fez-se uso de uma aproximação numérica não convencional, na qual o problema matemático foi decomposto em duas partes: uma elíptica (representando as equações de energia tanto para a matriz porosa, quanto para os constituintes fluidos) e uma hiperbólica (representando as equações de continuidade e momento para o constituinte fluido). Para simular casos unidimensionais de interesse, o problema hidrodinâmico (equações hiperbólicas) foi aproximado pelo método de Glinm, combinado com uma técnica de divisão do operador; já o problema térmico foi aproximado fazendo uso do método implícito de diferenças finitas.

Costa *et al.* (1992) propuseram um modelo para a descrição da transferência local de energia do escoamento de um fluido newtoniano através de uma matriz porosa rígida, fazendo uso da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo. A matriz porosa e o fluido foram considerados constituintes contínuos de uma mistura binária. Em cada ponto, assumiu-se a existência simultânea de duas temperaturas e duas velocidades distintas, o que origina uma geração de energia e uma geração de momento, proporcionando interações térmicas e dinâmicas na mistura sólido-líquido. O emprego da Teoria das Misturas se mostrou uma boa escolha para descrever fenômenos multifásicos cuja complexidade, quando descrita pelas usuais ferramentas da mecânica clássica, levam a aproximações drásticas para a realização de simulações.

O trabalho de Mattos *et al.* (1993) estabeleceu uma teoria geral para o momento e a transferência de energia em misturas contínuas, levando em consideração fenômenos dissipativos (importantes, por exemplo, nas simulações de processos como a fabricação de alguns compósitos ou o fluxo de petróleo através de uma matriz porosa). Equações básicas que descrevem a dinâmica de uma mistura foram obtidas a partir do princípio da potência virtual, o que leva a uma interpretação natural da força de interação entre os constituintes e a parte anti-simétrica do tensor de tensão parcial. O uso da abordagem da Teoria das Misturas dá origem a parâmetros que explicam a interação termodinâmica entre os constituintes. Nesse sentido, o trabalho propôs um procedimento sistemático para a obtenção de um conjunto completo de equações, oferecendo um mínimo de complexidade, que satisfizessem a primeira e a segunda

leis da Termodinâmica, levando em consideração a potência das forças de interação entre os constituintes, de modo a descrever adequadamente os acoplamentos termodinâmicos.

Barletta (2010) realizou uma extensa revisão bibliográfica acerca das instabilidades termoconvectivas que podem ocorrer em um meio poroso saturado com fluido, delineando a descrição macroscópica de escoamento do mesmo, baseando-se na lei de Darcy, e considerando que os efeitos de dissipação viscosa não são negligenciáveis. Para o caso do sistema de fluxo vertical, o efeito da dissipação viscosa rompe a simetria entre o fluxo ascendente e o fluxo descendente. Para o fluxo descendente, dois efeitos concorrem entre si: a convecção forçada devido ao fluxo contínuo, que leva a um resfriamento do sistema, em decorrência da entrada de fluido do ambiente, e a dissipação viscosa, que provoca um aquecimento interno da camada. A competição entre esses dois efeitos pode produzir um perfil linear básico de temperatura, como no problema de Darcy-Benard. Entretanto, em casos nos quais a dissipação viscosa é acentuada, nota-se um efeito desestabilizador para o fluxo ascendente.

A revisão bibliográfica realizada por Barletta (2010) abrange aspectos importantes, dentro da literatura, sobre as instabilidades, provenientes de efeitos convectivos, presentes em meios porosos saturados com fluido. Segundo o autor, o papel desempenhado pela dissipação viscosa, no início da instabilidade, pode ser uma mera interação com o efeito dos gradientes térmicos básicos induzidos por condições de contorno. Em alguns casos, a dissipação pode ser a única causa de instabilidade. Tem-se uma necessidade do desenvolvimento de formulações teóricas que abranjam tais fenômenos, na descrição do movimento do meio poroso.

Angulo (2015) empregou a abordagem da Teoria das Misturas para estudar o escoamento de um fluido newtoniano generalizado através de um canal poroso limitado por duas placas planas. Foram postuladas equações de balanço de massa e de quantidade de movimento linear, além de equações concernentes à primeira e à segunda leis da Termodinâmica. Postulou-se, ainda, uma equação relacionando permeabilidade e porosidade da matriz porosa, constituída de apenas dois parâmetros escalares, facilmente calculados a partir de dados experimentais. A metodologia exigiu um baixo custo computacional e se mostra de grande aplicabilidade em problemas práticos, como, por exemplo, na possível substituição do uso de materiais poluentes em problemas de fratura hidráulica – técnica usada em processos de extração de petróleo e gás de xisto.

Mahdi *et al.* (2014) fizeram um levantamento bibliográfico em relação à porosidade, permeabilidade, coeficiente de inércia e condutividade térmica efetiva para meios porosos, além de estudos sobre transferência de calor por convecção em meios porosos com nanofluido. Os estudos mostraram que a transferência de calor por convecção aumentou em meios porosos preenchidos com nanofluidos que apresentavam alta condutividade térmica.

Montienthong *et al.* (2016) estudaram a influência do campo magnético na distribuição de temperatura, velocidade e concentração durante o escoamento saturado em um meio poroso. Hipóteses simplificadoras foram adotadas, com intuito de reduzir a complexidade da modelagem do problema, dentre elas: fluido newtoniano incompressível, meio poroso isotrópico, dispersão térmica omitida. Observou-se que a magnitude das ondas eletromagnéticas impacta de forma substancial na temperatura do meio poroso saturado com fluido, de forma que um aumento na potência das ondas eletromagnéticas produz um aumento significativo na diferença de temperatura entre as fases sólida e fluida.

O estudo desenvolvido por Montienthong *et al.* (2016) contempla a análise do efeito do campo magnético nas equações de energia que descrevem o meio poroso saturado por fluido. Uma vez que a produção de calor por micro-ondas é de alta eficiência; dada sua capacidade de selecionar o calor recebido e a penetração de energia; e de ampla implementação em processos industriais, sobretudo na indústria de alimentos, o trabalho é extremamente relevante. A modelagem matemática proposta faz uso de equações transientes de momento, energia e concentração, juntamente com a equação de Maxwell, e o conjunto não linear de equações governantes do sistema é resolvido numericamente, por diferenças finitas.

Revil (2017) desenvolveu um modelo matemático para descrever fluxo cruzado em um meio poroso parcialmente saturado, incluindo acoplamento eletrocinético e efeito da filtração de íons, além da natureza multicomponente da fase molhante. Tais termos de acoplamento obedecem à reciprocidade de Onsager, que é uma condição necessária para que a função de dissipação total do sistema seja positiva. Os termos foram descritos em função de uma densidade de carga efetiva, controlada, por sua vez, pela permeabilidade e saturação do meio. Dessa forma, foi possível desenvolver um conjunto de relações constitutivas capazes de delinear o transporte de íons e água sob condições saturadas de um meio poroso carregado, comumente encontrado em solos. Tal modelo pode ser utilizado para monitorar processos de transporte em meios porosos com capacidade de permuta catiônica, empregando princípios geofísicos e métodos termográficos.

Gajo *et al.* (2016) propuseram uma estrutura abrangente para reproduzir características do comportamento de acoplamentos hidromecânicos em meios porosos saturados por três fluidos imiscíveis – amplamente aplicados em engenharia ambiental e de energia. A estrutura é composta por diferentes equações constitutivas para a permeabilidade relativa e para as pressões capilares, testadas em diferentes condições de carregamento, com o intuito de reproduzir aplicações realistas, condizentes com o estudo de escoamento de gás, óleo e água em uma rocha deformável.

Apesar de consideradas as aplicações em engenharia de petróleo, para efeito de

validação do modelo proposto por Gajo *et al.* (2016), a análise pode ser estendida à aplicação em uma variedade de situações envolvendo escoamento de três fluidos em um meio poroso saturado, a exemplo da poluição de águas subterrâneas e problemas envolvendo sequestro de dióxido de carbono. O trabalho apresenta uma abordagem versátil e modularizada, definindo modelos constitutivos para as permeabilidades relativas, em um contexto multifásico de três fluidos.

Os estudos realizados por Montienthong *et al.* (2016), Revil (2017) e Gajo *et al.* (2016) incluem termos relacionados a forças de campo eletromagnéticas, efeitos de forças iônicas provenientes da interação eletrostática dos componentes do meio poroso saturado, além de acoplamentos hidromecânicos, para descrever as equações de balanço e equações constitutivas presentes na modelagem do meio poroso. A inserção de tais efeitos visa suprir a necessidade de formulações teóricas mais abrangentes, que descrevam, de forma mais precisa, fenômenos até então negligenciados.

Peng *et al.* (2017) apresentaram um modelo numérico para simular o fluxo da superfície livre, em um meio poroso saturado com porosidade espacialmente variável. As equações governantes foram baseadas na Teoria das Misturas e resolvidas a partir de uma abordagem multifásica, onde a água foi modelada como um fluido incompressível e a fase sólida foi discretizada por partículas fixas. Alguns fatores de influência, como a lei da resistência, tamanho de partículas e porosidade foram investigados. O desempenho do modelo se mostrou satisfatório, e em concordância com diversos dados experimentais, para delinear fluxos dinâmicos de água em estruturas porosas, como rochas. Entretanto, o estudo não abrange aspectos relacionados à energia de interação, ou à força de interação do meio poroso saturado.

Jin *et al.* (2017) investigaram o efeito da rugosidade na deposição de partículas em meios porosos saturados por fluido. Até então, tal efeito não fora observado de forma consistente, nem descrito sistematicamente na literatura. O trabalho avaliou os impactos da rugosidade na deposição de partículas no meio poroso, na presença de uma barreira de energia, ou seja, em condições onde a força iônica era baixa, portanto, sob condições desfavoráveis à deposição, demonstrando que, independentemente da presença de tal barreira, a rugosidade da superfície do meio poroso influencia consistentemente a deposição de partículas de maneira não linear. Sob condições de baixa força iônica, as mudanças associadas à energia de interação não são suficientes para explicar as diferenças observadas na deposição de partículas, por isso, a inclusão da descrição do retardo hidromecânico, de forças de adesão e de campos de fluxo, às equações do movimento propostas pelo modelo contínuo podem ajudar a melhorar modelos preditivos relacionados à deposição de partículas nas superfícies de meios porosos saturados, em situações nas quais as mudanças na energia de interação não são suficientes para explicar

adequadamente as diferenças, na deposição de partículas, associadas à rugosidade da superfície.

Outro emprego importante do estudo de meios porosos saturados é o transporte de nanopartículas, com ampla aplicação, sobretudo na área ambiental, onde a nanotecnologia vem permitindo o desenvolvimento de sensores cada vez mais seletivos para o monitoramento de poluentes orgânicos. Entretanto, a modelagem mecanicista teórica enfrenta desafios ao considerar os efeitos simultâneos dos mecanismos de transporte de nanopartículas em meios porosos. Nesse sentido, o trabalho de Babakhani *et al.* (2017) propõe uma revisão sistemática dos mecanismos importantes de transporte de nanopartículas, com seus modelos representativos de continuidade matemática, conforme encontrado na literatura científica atual. A falta de abordagens efetivas para a validação da diversidade de equações de modelo, desenvolvidas por diferentes autores, representa um grande obstáculo à aplicação robusta e bem-sucedida desses modelos na descrição e predição dos fenômenos envolvidos no transporte.

Sasidharan *et al.* (2014) exploraram sistematicamente os efeitos acoplados da hidrodinâmica e das condições químicas das soluções na deposição de nanopartículas em meios porosos saturados. As variações espaciais e temporais na taxa de deposição em meios porosos podem ocorrer por uma variedade de razões, incluindo: diferentes pontos de energia de interação, variações espaciais nas taxas de transferência de massa, maior retenção em locais específicos.

Zhao *et al.* (2015) derivaram um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o problema da dissolução química nos meios porosos saturados por fluidos sob condições não isotérmicas. O problema da dissolução foi tratado como um problema de valor limite, para o qual soluções estritamente analíticas foram derivadas. O método de simulação computacional foi usado como ferramenta complementar, para simular a evolução morfológica das frentes de dissolução química em meios porosos saturados não isotérmicos.

Os resultados teóricos e numéricos obtidos no trabalho de Zhao *et al.* (2015) demonstram que o gradiente de temperatura na direção a montante de uma frente de dissolução química é menor do que na direção a jusante da mesma, quando o sistema em questão é não isotérmico. O trabalho é fundamental no sentido de introduzir entendimentos importantes em relação às instabilidades do processo de dissolução química ocorrido em um meio poroso saturado por fluidos em condições onde há variação significativa de temperatura.

A revisão realizada por Babakhani *et al.* (2017) reforça a necessidade crítica de pesquisa em modelos, sejam conceituais, sejam computacionais, que não apenas reconheçam, mas avaliem de forma sistemática e variável a gama de processos capazes de atuar simultaneamente no transporte de nanopartículas em meios porosos, evidenciando a necessidade de se reconhecer que as condições uniformes e estáveis, comumente assumidas pela maioria das abordagens

matemáticas, são rara exceção, não regra, para os sistemas coloidais em meios porosos, mesmo em condições experimentais controladas. Os modelos contínuos multidimensionais que consideram múltiplos fenômenos de transporte representam a única abordagem conceitualmente viável para prever comportamentos de transporte de nanopartículas em escalas ambientalmente relevantes, em domínios realistas. Entretanto, existem diversas limitações atuais, e se faz essencial que os trabalhos teóricos continuem a definir relações de correlações entre parâmetros mensuráveis e não mensuráveis. Nesse sentido, é significativa a importância do uso de modelos abstratos e mecanicistas, além de combinações dos mesmos com abordagens contínuas, para a compreensão do meio poroso saturado por fluido.

Todos os trabalhos citados corroboram com a importância do desenvolvimento de formulações teóricas gerais para descrever o meio poroso saturado com fluido, uma vez que a aplicação desses modelos é relevante em diversas áreas de interesse tecnológico.

2.2.1 Meio poroso com restrição de incompressibilidade

Um meio poroso saturado com fluido, onde densidades de sólido e fluido puros são constantes, é caracterizado por uma restrição de incompressibilidade. Neste caso, as equações de quantidade de movimento, estabelecidas pela Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo para sistemas sólido-fluido que não apresentam reação química, envolvem grandezas arbitrárias, além das grandezas constitutivas.

Libório (2016) propôs uma base de informações para o estudo de grandezas arbitrárias e constitutivas de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. Para tal, duas soluções exatas de um sistema de equações do movimento de uma suspensão particulada foram determinadas, ambas inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta. A primeira solução foi inserida na região de sedimentação livre e a segunda na região de transição, de modo que os movimentos da onda de aceleração e das interfaces fossem estabelecidos por meio da compatibilização das duas soluções.

Através das soluções exatas e dos movimentos das interfaces, Libório (2016) estabeleceu duas funções velocidades que serviram como base para o cálculo de parâmetros básicos, e propôs equações constitutivas para a força de interação de cada tensor tensão, construindo uma base preliminar de informações que pôde ser utilizada para o cálculo da diferença de pressões arbitrárias, estabelecendo a pressão arbitrária da fase fluida diferente da pressão arbitrária da fase sólida. É importante ressaltar que, por causa da relação entre grandezas arbitrárias, a pressão arbitrária que aparece no balanço de quantidade de movimento

linear do fluido, sem incluir força de interação arbitrária, é diferente da pressão arbitrária que aparece no balanço de quantidade de movimento linear do sólido. Daí é que surge a diferença de pressões arbitrárias. Neste sentido, tal diferença é uma contribuição ao estudo do movimento de suspensões particuladas, uma vez que, na literatura, usualmente, a pressão arbitrária é negligenciada. Ou, quando aparece, a pressão arbitrária na equação do movimento do constituinte fluido é considerada a mesma da pressão arbitrária na equação do movimento do constituinte sólido.

2.3 Movimento gravitacional de uma suspensão particulada

Kynch (1952, *apud* AROUCA, 2007) foi o primeiro a propor uma teoria para o movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta (sedimentação gravitacional em batelada), baseada apenas nos balanços de massa e na suposição de que a velocidade das partículas sólidas é função da concentração de sólidos, ficando a sedimentação de partículas sólidas em um meio líquido descrita como um fenômeno de propagação de ondas, puramente cinemático. O uso apenas de balanço de massa motivou pesquisadores como Tiller (1981), Fitch (1983) e Font (1988) a revisar a teoria e a introduzirem balanços de quantidade de movimento linear.

Sobre o movimento gravitacional de suspensão particulada em proveta é importante destacar o levantamento bibliográfico realizado por Libório (2016), apresentando descrições resumidas dos trabalhos de Kynch (1952), Tiller (1981), Fitch (1983), Font (1988), Burguer e Wendland (2001), Wett (2002), Garrido *et al.* (2003, 2004), Bürger e Karlsen (2001), Usher e Scales (2005), Bürger *et al.* (2006), Pianet *et al.* (2007), Grassia *et al.* (2008; 2011; 2012), Iritani *et al.* (2009), Hogg e Dorrel (2010), Guo *et al.* (2012), Yu *et al.* (2013) e Hernando *et al.* (2014;2015).

É importante destacar o levantamento bibliográfico efetuado por Bürger e Wendland (2001) do ano de 1912 até 2000, que fornece um relato conciso das contribuições para a pesquisa em suspensão particulada, feita durante o século XX, mostrando que um grande avanço foi a teoria cinemática de Kynch, publicada em 1952.

Ao utilizar a equação de movimento apenas para o constituinte sólido, a teoria de Kynch (1952, *apud* AROUCA, 2007) não leva em consideração a força de interação sólido-líquido, além de desconsiderar os efeitos inerciais e gravitacionais, conferindo, assim, um caráter parabólico ao fenômeno, que resulta numa descrição matemática apenas para a interface ascendente. A interface descendente, por sua vez, é descrita apenas empiricamente. A teoria de Kynch descreve bem a sedimentação de partículas sólidas incompressíveis, tais como esferas

de vidro, e a sedimentação de partículas esféricas não floculantes. O sistema de equações diferenciais obtido pela aplicação da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo pode ser utilizado para modelar cada uma das três regiões bifásicas existentes no processo de sedimentação em batelada (regiões de sedimentação livre, de transição e de compactação). Entretanto, as equações constitutivas são específicas para cada região. A região de sedimentação livre, cuja velocidade de queda da partícula é constante, é caracterizada por uma fraca interação sólido-sólido, o que indica um efeito negligenciável da tensão nos sólidos. Na região de formação do sedimento a interação sólido-sólido por sua vez é extremamente significativa, acarretando um forte efeito de tensão nos sólidos seguido pela compactação das partículas pela ação de seu próprio peso. A região de transição por sua vez possui características em comum com as demais regiões e normalmente costuma-se considerar que a tensão nos sólidos é desprezível nessa região. Sendo as regiões distintas entre si, é presumível que as equações que governam o fenômeno também o sejam.

Oliveira *et al.* (2015) propuseram equações constitutivas relacionando pressão nos sólidos e permeabilidade em meios porosos a partir de fluidos newtonianos e não newtonianos em baixas e altas pressões. Os testes de sedimentação em batelada foram realizados utilizando-se soluções aquosas de goma xantana e carbonato de cálcio e, ao final de cada teste, os sedimentos resultantes foram avaliados por meio da utilização da Técnica de Atenuação de Raios Gama. Foram obtidas equações constitutivas para a distribuição e compactação do sedimento em função da posição e do tempo. O estudo de Oliveira *et al.* (2015) não traz equações generalizadas de balanço de massa e de quantidade de movimento linear, de modo que as grandezas arbitrárias, como a parte arbitrária da força de interação e a diferença de pressão arbitrária, não foram objetos de análise.

O trabalho de Boscarino (2016) proporciona uma ferramenta eficiente para a exploração numérica da formação e composição de sedimentos sob um modelo de sedimentação polidispersa, partindo do pressuposto de que os métodos Runge-Kutta explícito-implícito são adequados para a solução de problemas não lineares do tipo convecção-difusão, uma vez que as restrições de estabilidade, provenientes do tratamento explícito da parte convectiva, são menos severas que aquelas que seriam deduzidas de um tratamento explícito do termo difusivo. A discretização dos termos difusivos de tal maneira que se distinga cuidadosamente a severa da não severa dependência levam à resolução, em cada passo de tempo, de apenas um sistema linear.

O estudo de Boscarino (2016) é relevante do ponto de vista do tratamento numérico para a modelagem matemática da sedimentação, entretanto, não são apresentados balanços diferenciais de massa e de quantidade de movimento linear que possibilitem a construção de

soluções analíticas.

Bürguer (2016) aplicou os métodos descontínuos de Galerkin-Runge-Kuta (RKDG) e Elementos de Volume Finito (DFVE) em um problema de transporte que descrevia o deslocamento imiscível de um fluido incompressível viscoso num meio poroso não homogêneo. O problema do modelo consistia em lidar com equações não lineares de pressão-velocidade acopladas a uma equação hiperbólica não linear que governa o balanço de massa (equação de saturação). As propriedades de conservação de massa inerentes a métodos baseados em volumes finitos motivam um esquema DFVE para a aproximação do fluxo de Brinkman em combinação com um método RKDG para a discretização espaço-temporal da equação de saturação. A estabilidade dos esquemas desacoplados para o fluxo e para as equações de saturação foi analisada, e vários experimentos numéricos ilustraram a robustez do método numérico.

Torfs (2017) propôs um modelo numérico robusto para descrever a sedimentação em batelada. Para sedimentadores secundários, a metodologia de modelagem matemática conduz a uma equação diferencial parcial (EDP) não linear do tipo convecção-difusão, como um modelo unidimensional para a concentração dos sólidos em função da profundidade e do tempo. Essa EDP inclui um fluxo que depende descontinuamente da posição espacial e dos balanços de massa, uma fonte que descreve o mecanismo de alimentação, um termo que contabiliza a compressibilidade do sedimento e um termo de dispersão para turbulência. A solução, em si, é descontínua. Assim, o modelo proposto permite que relações constitutivas para a contenção, compressão e dispersão sejam incluídas dentro do mesmo.

Bürguer (2016) e Torfs (2017) propuseram modelos numéricos robustos para a resolução de equações diferenciais associadas aos balanços de massa e de quantidade de movimento que governam o fenômeno de sedimentação. Tais modelos, entretanto, não permitem a construção de uma base matemática que possibilite o cálculo da força de interação arbitrária de forma analítica e direta.

Apesar de não apresentar equações generalizadas para os balanços de quantidade de movimento linear, os trabalhos de Hernando *et al.* (2014; 2015) são basilares, no sentido de fornecer a percepção da existência das sub-regiões de sedimentação – região de líquido puro, região de sedimentação livre, regiões de transição e compactação e ondas de aceleração – características do movimento de suspensões particuladas em proveta.

Majumder *et al.* (2016) investigaram as interações partículas-partículas em sistemas de sedimentação, considerando as interações hidrodinâmicas e eletrodinâmicas e concluíram que essas interações ocorrem majoritariamente em dois modos: interações de campo próximo e de campo distante. No trabalho proposto, as interações hidrodinâmicas foram modeladas

empregando “Stokesian Dynamics”, enquanto as interações eletrodinâmicas foram contabilizadas por meio de uma formulação matricial capaz de abordar efeitos de um campo elétrico arbitrário, aplicado externamente. A presença de um campo elétrico arbitrário externo modifica fortemente a dinâmica das partículas esféricas rígidas, se comparada com o sistema de sedimentação não submetido a efeitos de campo elétrico. Como consequência, as alterações nos arranjos de partículas culminam com alterações na força de arraste líquido experimentada pelas partículas durante a sedimentação.

Dessa maneira, o trabalho de Majumder *et al.* (2016) suscita a importância do estudo das forças de interação que agem nas suspensões particuladas, evidenciando que alterações em tais forças estão diretamente ligadas a alterações no movimento da suspensão, tornando essencial a inclusão de termos que descrevam essas forças de interação nas equações de balanço de quantidade do movimento desses sistemas.

A simulação do escoamento de suspensões coloidais é desafiadora devido aos limites móveis das regiões de sedimentação das partículas e os problemas das fronteiras migratórias são usualmente tratados usando métodos cujos algoritmos exigem um custo computacional elevado. Alapati *et al.* (2015) estudaram numericamente a sedimentação de uma suspensão particulada sob ação da gravidade em um fluido viscoso, utilizando o método de Boltzmann, mas introduzindo um termo de força na equação do movimento. Em primeira instância, foi simulado um fluxo constante sobre uma esfera estática e o algoritmo numérico foi validado comparando-se os resultados a dados publicados anteriormente na literatura. Em seguida, simulações com uma única esférica foram realizadas. Os resultados da simulação da trajetória da esfera sob ação da gravidade e a velocidade de sedimentação, em diferentes números de Reynolds, foram estipulados e se mostraram de acordo com dados empíricos da literatura.

Chen *et al.* (2015) também utilizaram o modelo de Boltzmann para simular o movimento de partículas, mas em uma suspensão de dois fluidos imiscíveis, observando uma variação de densidade do fluido próxima à superfície sólida, causada pela interação sólido-fluido. Tanto Alapati *et al.* (2015), quanto Chen *et al.* (2015), conseguiram uma redução drástica do custo computacional associado à descrição do movimento de sedimentação de partículas e corroboraram com a importância de se inserir termos referentes às forças de interação nos balanços de quantidade de movimento, uma vez que as interações sólido-sólido e sólido-líquido afetam diretamente o escoamento.

Apesar da ampla aplicação do movimento gravitacional de suspensões particuladas, a complexidade inerente à sua modelagem torna impraticável a aplicação a um único modelo numérico, ou correlação empírica unificada. Por isso a necessidade de mais estudos nesse aspecto. Silva *et al.* (2015) realizaram um extenso apanhado acerca da evolução, ao longo dos

anos, das correlações empíricas, modelos analíticos e numéricos para prever o comportamento da sedimentação de suspensões particuladas, fornecendo informações sobre as vantagens e desvantagens de cada método.

Outra aplicação industrial do estudo da queda acelerada da partícula é o tratamento de águas residuais através da sedimentação de lodo ativado. A opacidade do lodo, no entanto, faz com que métodos óticos convencionais sejam ineficientes, o que dificulta a obtenção de informações sobre o comportamento interno da sedimentação.

O lodo apresenta o comportamento de uma emulsão. Fenomenologicamente, isso é convalidado pela abordagem do meio poroso, segundo a qual o leito de lama se comporta como uma rede contínua de deformação, através da qual a água circula. O trabalho de Locatelli *et al.* (2015) permitiu a investigação da sedimentação de lodo ativado, utilizando um método não invasivo, baseado em um transdutor ultrassônico. O tratamento do sinal tornou possível a obtenção de dados sobre a velocidade de sedimentação e os perfis de concentração dentro da suspensão. Esses dados são particularmente úteis para a compreensão do comportamento das suspensões de lamas ativadas, e para a calibração de modelos numéricos, além da proposição de parâmetros que impliquem em modelos teóricos mais representativos.

Comportamentos coesivos dependem das características das partículas em sedimentação. A influência exata dessas características sobre os comportamentos coesivos, no entanto, ainda é pouco conhecida. Sun et al. (2017) investigaram o processo de sedimentação, considerando a influência das forças de colisão inter-partículas, forças de Van der Waals, além da força de interação. O aumento da coesão das partículas entre as partículas de sedimento evita a formação de estruturas mais fechadas, a densidade estrutural média diminui quando a polidispersidade do tamanho da partícula aumenta, o que pode ser atribuído ao fato de que há uma maior força de coesão entre partículas menores. O estudo proposto por Sun et al. (2017) é essencial no sentido de prever a influência das forças de interação entre as partículas durante a condução da sedimentação. Entretanto, o estudo não fornece relações teóricas capazes de quantificar tais forças.

Li e Stentstrom (2015) propuseram soluções analíticas para descrever o modelo de sedimentação contínua ideal. As soluções foram validadas com dados experimentais e se mostraram bastante precisas para prever a altura e a concentração dos sedimentos em função do tempo e das condições de carregamento. Outros três métodos alternativos, usando diferenças finitas, foram comparados às soluções analíticas, se mostrando confiáveis para a resolução de problemas de sedimentação. Li e Stentstrom (2015), entretanto, não levaram em consideração as forças de interação, nem diferenças de pressão entre as fases, nas equações de balanço do modelo proposto.

Os trabalhos aqui citados são essenciais para o entendimento da necessidade de se desenvolver novos modelos teóricos mais generalizados para o estudo do movimento de suspensões particuladas, que abranjam novos termos nas equações de balanço para o movimento.

3. ELEMENTOS BÁSICOS

3.1 Meio poroso saturado com fluido

Em um meio poroso saturado com fluido, onde não ocorrem reações químicas, modelado pela Teoria Contínua das Misturas, podem ser escritas as relações:

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \quad (1)$$

$$\rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s \quad (2)$$

onde ε é a função porosidade, ρ_1 é a densidade do constituinte fluido, ρ_2 é a densidade do constituinte sólido, ρ_f e ρ_s , são, respectivamente, as densidades do sólido e do fluido puros (SILVA e JESUS, 2013).

Balanços básicos

No contexto da teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, dos trabalhos de Green *et al.* (1970), Atkin e Craine (1976a,b), Demiray (1981) e Ahmadi (1985), escrevem-se a seguir os balanços de massa e de quantidade de movimento linear.

Balanços de massa:

$$\dot{\rho}_\alpha + \rho_\alpha \operatorname{div} V_\alpha = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\rho}_\alpha \equiv \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + (\operatorname{grad} \rho_\alpha) \cdot V_\alpha \quad \text{com } \alpha = 1, 2 \quad (4)$$

onde div é o operador divergente espacial, V_α é a velocidade, t é a variável tempo, grad é o operador gradiente espacial e $\alpha = 1$ indica o constituinte fluido.

Balanços de quantidade de movimento linear:

$$\rho_\alpha a_\alpha = \operatorname{div} T_\alpha + l_\alpha + \rho_\alpha g_\alpha \quad (5)$$

$$a_\alpha \equiv \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (\operatorname{grad} V_\alpha) V_\alpha \quad (6)$$

onde a_α é a aceleração, T_α é o tensor tensão, l_α é uma parte da força de interação e g_α é a força de campo.

Além da parte da força de interação l_α , outro tipo de interação importante para a formulação da teoria quase mecânica para o Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade (MPRI) é

a energia de interação E_α . Desse modo, além das Equações (03)- (06), para a mistura como um todo, também se pode escrever:

$$l_1 + l_2 = 0 \quad (7)$$

$$E_1 + E_2 = 0 \quad (8)$$

3.1.1 Meio poroso com restrição de incompressibilidade

Silva (1990) desenvolveu uma teoria puramente mecânica para o caso das suspensões particuladas saturadas com fluido, baseada na teoria das misturas da mecânica do contínuo, sem reações químicas e com densidades do sólido e fluido constantes, o que caracteriza uma restrição de incompressibilidade. Segundo essa teoria, cada tensor tensão é desmembrado em duas partes: uma constitutiva, e outra arbitrária – não determinada pela história do movimento, por força de um axioma que estabelece que a parte arbitrária não realiza trabalho para todo movimento compatível com a restrição. As partes arbitrárias são determinadas com base em desigualdade entrópica, sob o princípio de que a soma das produções entrópicas das mesmas é nula para todo movimento compatível com a restrição de incompressibilidade.

O axioma utilizado por Silva (1990), contudo, é baseado apenas na parte mecânica da desigualdade entrópica, o que, por consequência, produz a mesma pressão arbitrária entre as fases sólida e fluida. Silva e Jesus (2013) estabeleceram uma teoria quase mecânica para o MPRI, não envolvendo produções entrópicas com derivadas ou gradientes de temperatura. O trabalho adicionou, ao axioma puramente mecânico, a produção entrópica da parte arbitrária de cada energia livre de Helmholtz, permitindo a produção de pressões arbitrárias distintas para as fases sólida e fluida, além de provocar o aparecimento de novos termos de interação nas equações de balanço da quantidade de movimento linear.

A teoria apresentada por Silva e Jesus (2013), parte do pressuposto de que ρ_s e ρ_f são constantes, dessa maneira, as Equações (01)-(04) podem ser reescritas da seguinte forma, para cada fase:

$$\varepsilon \mathbf{1} \cdot L_1 + V_1 \cdot \text{grad} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 ; L_1 \equiv \text{grad} V_1 \quad (9)$$

$$(1 - \varepsilon) \mathbf{1} \cdot L_2 - V_2 \cdot \text{grad} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 ; L_2 \equiv \text{grad} V_2 \quad (10)$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade.

As formas das Equações (09) e (10), o tensor tensão T_α , a força de interação l_α , a

energia de interação E_α e a energia livre de Helmholtz A_α são elementos básicos para o estabelecimento de uma teoria quase mecânica para o MPRI, começando com as seguintes decomposições:

$$l_\alpha = l_\alpha^a + l_\alpha^c \quad (11)$$

$$T_\alpha = T_\alpha^a + T_\alpha^c \quad (12)$$

$$E_\alpha = E_\alpha^a + E_\alpha^c \quad (13)$$

$$A_\alpha = A_\alpha^a + A_\alpha^c \quad (14)$$

onde o índice superior a indica parte arbitrária, não determinada pela história do movimento, e o índice superior c indica parte constitutiva. Além disso, postula-se aqui que as partes arbitrárias e constitutivas, de cada força de interação e cada energia de interação, também devem satisfazer as equações:

$$l_1 + l_2 = 0 \quad (15)$$

$$E_1 + E_2 = 0 \quad (16)$$

onde E_α é a energia de interação do componente α e é de extrema relevância para a formulação da Teoria Quase Mecânica do Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade. As partes arbitrárias e constitutivas de cada força de interação e, por conseguinte, a energia de interação, devem satisfazer às Equações (7) e (8), de modo que se pode escrever:

$$l_1^a + l_2^a = 0 \quad (17)$$

$$l_1^c + l_2^c = 0 \quad (18)$$

$$E_1^a + E_2^a = 0 \quad (19)$$

$$E_1^c + E_2^c = 0 \quad (20)$$

A soma das produções entrópicas das partes arbitrárias é nula para todo o movimento compatível com a restrição de incompressibilidade, de modo que é possível escrever:

$$\frac{\partial A_\alpha^a}{\partial t} + (l_\alpha^a + \rho_\alpha \text{grad} A_\alpha^a) \cdot V_\alpha - T_\alpha^a \cdot L_\alpha - E_\alpha^a = 0 \quad (21)$$

Para que a Equação (9), do constituinte fluido, satisfaça o axioma expresso na Equação (21), escreve-se:

$$l_1^a = p_1 \text{grad} \varepsilon - \rho_1 \text{grad} A_1^a \quad (22)$$

$$T_1^a = -\varepsilon p_1 \quad (23)$$

$$E_1^a = \rho_1 \frac{\partial A_1^a}{\partial t} - p_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (24)$$

onde p_1 é uma função escalar arbitrária. Analogamente, para que a Equação (10) do constituinte sólido satisfaça o axioma expresso na Equação (21), para $\alpha = 2$, também deve-se ter:

$$l_2^a = -p_2 \text{grad} \varepsilon - \rho_2 \text{grad} A_2^a \quad (25)$$

$$T_2^a = -(1 - \varepsilon) p_2 \mathbf{1} \quad (26)$$

$$E_2^a = \rho_2 \frac{\partial A_2^a}{\partial t} + p_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (27)$$

onde p_2 é outra função escalar arbitrária.

Com isso, as Equações (17)-(20) e (22)-(27) fornecem:

$$\rho_1 \text{grad} A_1^a + \rho_2 \text{grad} A_2^a = (p_1 - p_2) \text{grad} \varepsilon \quad (28)$$

$$\rho_1 \frac{\partial A_1^a}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial A_2^a}{\partial t} = (p_1 - p_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (29)$$

Por meio da introdução das funções arbitrárias definidas por:

$$P_e = \rho_1 A_1^a + \rho_2 A_2^a \quad (30)$$

$$P_f = p_1 + \rho_f A_1^a \quad (31)$$

$$P_s = p_2 + \rho_s A_2^a \quad (32)$$

o par de Equações (28) e (29) transforma-se em:

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} + (P_s - P_f) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (33)$$

$$\text{grad} P_e + (P_s - P_f) \text{grad} \varepsilon = 0 \quad (34)$$

Rearranjando as Equações (33) e (34), de modo que o termo P_e seja suprimido, chega-se à equação:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} (\text{grad} (P_s - P_f)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} (P_s - P_f) \right) \text{grad} \varepsilon \quad (35)$$

Além dos resultados expressos pelas Equações (33)-(35), outros podem ser destacados com a introdução de mais duas funções arbitrárias definidas por:

$$P = \varepsilon p_1 + (1 - \varepsilon) p_2 \quad (36)$$

$$\Pi = P - P_f \quad (37)$$

Desse modo, das Equações (28), (29), (35) e (36) e (37), é possível escrever:

$$(1 - \varepsilon)\text{grad}(P_s - P_f) = \text{grad}\Pi \quad (38)$$

$$(1 - \varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}(P_s - P_f) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad (39)$$

Que, através da Equação (35), produz a relação:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \text{grad}\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial t} \text{grad}\varepsilon \quad (40)$$

Outro destaque é obtido com o uso das Equações (22)-(30) e (36)-(37) para as partes arbitrárias de cada força de interação caracterizadas por:

$$l_1^a = -\varepsilon \text{grad}P + \text{grad}(\varepsilon p_1) + \varepsilon \text{grad}\Pi \quad (41)$$

$$l_2^a = +\varepsilon \text{grad}P - \text{grad}(\varepsilon p_2) - \varepsilon \text{grad}\Pi \quad (42)$$

onde a grandeza l_α , definida pela Equação (43), é uma parte arbitrária da força de interação:

$$l_\alpha = \varepsilon \text{grad}\Pi \quad (43)$$

Além disso, é importante destacar também o resultado obtido na Equação (44), como uma característica de balanço de forças de interação.

$$\varepsilon \text{grad}\Pi + (1 - \varepsilon)\text{grad}(P - P_s) = 0 \quad (44)$$

Desenvolvidas as relações entre grandezas arbitrárias, é possível escrever as equações da quantidade de movimento linear e balanço de massa para o MPRI, a partir das equações do balanço de massa e quantidade de movimento estabelecidas pela teoria das misturas da mecânica do contínuo, de modo que se chega às seguintes relações:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\varepsilon V_1) = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \text{div}((1 - \varepsilon)V_2) = 0 \quad (46)$$

Além das equações:

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \text{grad}P_f + \text{div}\sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (47)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon)\text{grad}P_s + \text{div}\sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (48)$$

obtidas através das Equações (11), (12), (22), (23), (25),(26), (28) e (30)-(32).

onde:

$$m = l_1^c \quad (49)$$

$$\sigma_1 = T_1^c \quad (50)$$

$$\sigma_2 = T_2^c \quad (51)$$

são as partes constitutivas da força de interação l_1 e de cada tensor tensão, respectivamente, e as acelerações a_1 e a_2 são dadas por:

$$a_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + (grad V_1)V_1 \quad (52)$$

$$a_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + (grad V_2)V_2 \quad (53)$$

Por causa das grandezas arbitrárias e de relações entre elas, o movimento do MPRI fica estabelecido por uma das formas de sistemas de equações, destacados a seguir.

Sistema I

É o sistema formado pelas Equações (33), (34), (45)-(53) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P_f , P_s e P_e , uma vez que σ_1 , σ_2 e m são grandezas constitutivas.

Sistema II

As relações definidas pelas Equações (07), (08), (47) e (48) fornecem a equação de interseção:

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -grad(P_s - P_f) + \frac{1}{1 - \varepsilon} div \sigma_2 - \frac{1}{\varepsilon} div \sigma_1 - \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (54)$$

E o sistema é formado pelas Equações (35), (45), (46), (52)-(54) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 e $P_s - P_f$.

Sistema III

As relações definidas pelas Equações (38), (43), (44), (47) e (48) produzem as equações:

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon grad P + l_a + div \sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (55)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) grad P - l_a + div \sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (56)$$

E o sistema é formado pelas Equações (40), (43), (45), (46), (52), (53), (55) e (56) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P e Π .

Sistema IV

As Equações (38), (43) e (48) fornecem a relação:

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \text{grad} P_f + \text{div} \sigma_2 - m - \frac{l_a}{\varepsilon} + \rho_2 g_2 \quad (57)$$

E o sistema é formado pelas Equações (36), (39), (41)- (43), (46), (47) e (51) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P_f e Π .

Sistema V

As relações definidas pelas Equações (01), (02), (43), (47) e (57) fornecem a equação de interseção:

$$\varepsilon \rho_2 (a_2 - g_2) - (1 - \varepsilon) \rho_1 (a_1 - g_1) = \varepsilon \text{div} \sigma_2 - (1 - \varepsilon) \text{div} \sigma_1 - m - l_a \quad (58)$$

E o sistema é formado pelas Equações (40), (43), (45), (46), (52), (53) e (58) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , e Π .

Como m é a parte constitutiva da força de interação l_1 , das Equações (11)-(14) e (49)-(51):

$$m = l_1 - l_1^a \quad (59)$$

Dos trabalhos de Liu (1980) e Silva (1990), a grandeza m é a força difusiva ou resistiva definida por:

$$m = l_1 - l_1^0 \quad l_1^0 = l_1 \text{ para } V_1 = V_2 \quad (60)$$

Logo, das Equações (59) e (60):

$$l_1^a = l_1^0 \quad (61)$$

ou seja, a parte arbitrária l_1^a é a força de interação l_1 no equilíbrio. Desse modo, das Equações (22), (30)-(32) e (61):

$$l_1^0 = P_f \text{grad} \varepsilon - \text{grad}(\rho_1 A_1^a) \quad (62)$$

Para discussão da Equação (62) e da função arbitrária P_f , com base na Equação (60) e no Sistema I, considera-se o MPRI sob a ação da gravidade na situação estática constante caracterizada por:

$$\varepsilon = \text{constante} \quad V_1 = V_2 = 0 \quad m = 0 \quad \text{div}\sigma_1 = 0 \quad (63)$$

Neste caso, como

$$g_1 = g_2 = g \quad (64)$$

onde g é a aceleração da gravidade, das Equações (01), (47), (48) e (62)-(64)

$$\text{grad}P_f = \rho_f g \quad (65)$$

$$l_1^0 = -\text{grad}(\rho_1 A_1^a) = \text{grad}(\rho_2 A_2^a) \quad (66)$$

$$\text{grad}P_s = \frac{1}{1-\varepsilon} \text{div}\sigma_2 + \rho_s g \quad (67)$$

A Equação (65) mostra que, para a situação estática constante sob ação da gravidade, P_f é a pressão do fluido, concordando com os dados bem conhecidos dos experimentalistas (MASSARANI, 1984; SILVA TELLES, 1993).

O resultado dado pela Equação (66) mostra que, na mesma situação, a força de interação não precisa ser nula. Este resultado está coerente com aqueles de pesquisadores como Liu (1980), que afirma que em tal situação a força de interação não é nula e é ela que equilibra o empuxo, aqui implícito em cada gradiente de l_1^0 da Equação (66).

Sobre a Equação (67), a análise depende de como se estabelece a situação estática constante. Se ela só acontece quando o sólido é rígido, σ_2 é indeterminada e tal equação pode não produzir informações sobre P_s e, neste caso, P_s é simplesmente uma função escalar arbitrária vista como equilibradora do Sistema I. Por outro lado, se o sólido não é rígido ou σ_2 não é considerado na Equação (50), tem-se que $\text{div}\sigma_2 = 0$ e, como no caso do fluido, P_s pode ser interpretada como uma pressão arbitrária associada ao sólido.

Quanto ao sistema II, para o MPRI sob a ação da gravidade, das Equações (01) e (64), vale a observação de que o termo

$$\rho_s g_2 - \rho_f g_1 = (\rho_s - \rho_f)g \quad (68)$$

aparece naturalmente no mesmo sem precisar outro tipo de decomposição para a força de interação l_1 .

Outra grandeza a considerar nesta discussão, com base nas Equações (30)-(32), é a parte arbitrária da energia livre de Helmholtz A^a para a mistura, definida por

$$(\rho_1 + \rho_2)A^a = \rho_1 A_1^a + \rho_2 A_2^a = P_e \quad (69)$$

Assim, observando que, sob o axioma caracterizado pela Equação (11), a parte arbitrária da energia livre de Helmholtz de um corpo único incompressível é constante, considera-se, para efeito de discussão e comparação que a energia A^a é constante; uma vez que a mesma é definida para a mistura como um todo. Desse modo, das Equações (01), (34) e (69), obtém-se o resultado

$$P_s - P_f = (\rho_s - \rho_f)A^a \quad (70)$$

Sobre a componente da parte arbitrária da força de interação l_a , pode-se obter informação a partir da equação de interseção, Equação (58) do Sistema V, considerando-se os casos em que $\text{div}\sigma_1 = 0$, $\text{div}\sigma_2 = 0$ e $m = 0$. Nestes casos, as Equações (07), (08) e (58) mostram que l_a é função da porosidade e das acelerações reduzidas $a_2 - g_2$ e $a_1 - g_1$. Baseado nisso, pode-se propor para l_a , em qualquer situação, a relação:

$$l_a = d_1(a_1 - g_1) + d_2(a_2 - g_2) \quad (71)$$

Onde d_1 e d_2 são funções densidades arbitrárias, já discutidas em Silva Telles (1993) para toda parte arbitrária da força de interação. Aqui l_a é apenas uma parte da força de interação arbitrária (LIBÓRIO, 2016).

A soma das Equações do Sistema III sugere que a grandeza arbitrária P pode ser interpretada como a pressão no meio poroso. Além disso, a função arbitrária Π pode ser interpretada como sendo uma pressão arbitrária de interação, uma vez que na situação estática constante sob a ação da gravidade $P - \Pi = P_f$ é a pressão do fluido no poro.

Sobre as grandezas constitutivas nos Sistemas I até V, m é a força difusiva ou resistiva como função da diferença de velocidades. Em muitos problemas σ_1 é desprezada e σ_2 é a chamada pressão constitutiva do sólido considerada como função da porosidade. São também estudados os casos em que σ_1 é dada por uma relação semelhante à do fluido newtoniano. (LIBÓRIO, 2016).

4 METODOLOGIA

O início da construção da base de informações para a parte arbitrária da força de interação se deu através da relação entre grandezas arbitrárias, de modo que se obteve uma função arbitrária denominada Fração de pressões arbitrárias, χ .

A introdução dessa nova grandeza, a decomposição da parte arbitrária da força de interação e uma situação particular estudada, permitiram a obtenção de mais informações acerca da fração de pressões arbitrárias. A função χ é significativa para a obtenção de uma expressão, apenas em função da porosidade, para a parte arbitrária da força de interação.

Em seguida, foram obtidas soluções exatas de um sistema de equações do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade, essas soluções foram utilizadas para construir uma base preliminar de informações. A base preliminar, juntamente com o uso de equações constitutivas, resultou numa expressão final para a parte arbitrária da força de interação, em função da porosidade.

Essa expressão é uma contribuição ao estudo das suspensões particuladas e permite a obtenção de resultados numéricos em diversas situações, como no movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta, uma vez que depende unicamente da porosidade em cada região.

A metodologia é descrita a seguir:

4.1 Fração de pressões arbitrárias

O estudo de relação entre grandezas arbitrárias é uma contribuição ao movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade, permitindo a obtenção de novos parâmetros, de modo a se obter modelos mais generalistas. Neste sentido, a Equação (36) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\varepsilon p_1}{P} + \frac{(1 - \varepsilon)p_2}{P} = 1 \quad (72)$$

Isso motiva a introdução das grandezas arbitrárias χ_1 e χ_2 , definidas por:

$$\chi_1 = \frac{\varepsilon p_1}{P} \quad (73)$$

$$\chi_2 = \frac{(1 - \varepsilon)p_2}{P} \quad (74)$$

com

$$\chi_1 + \chi_2 = 1 \quad (75)$$

Onde χ_1 e χ_2 são chamadas de frações de pressões arbitrárias dos constituintes fluido e sólido, respectivamente.

Desse modo, fazendo:

$$\chi = \chi_1 \quad (76)$$

Das Equações (72)-(76), tem-se:

$$\chi P = \varepsilon p_1 \quad (77)$$

$$(1 - \chi)P = (1 - \varepsilon)p_2 \quad (78)$$

Vale ressaltar que, das Equações (77) e (78), χ é a porosidade ε quando $p_1 = P$ ou $p_2 = P$.

Além da introdução de frações de pressões arbitrárias, também é importante destacar que de acordo com as equações (41), (42) e (43), a parte arbitrária da força de interação pode ser decomposta nos seguintes termos:

$$l_1^a = \bar{l}_a + l_a \quad (79)$$

$$l_2^a = -\bar{l}_a - l_a \quad (80)$$

Onde

$$\bar{l}_a = -\varepsilon \text{grad} P + \text{grad}(\varepsilon p_1) \quad (81)$$

$$l_a = \varepsilon \text{grad} \pi \quad (82)$$

Das equações (36), (37), (42) e (82), l_a pode ser escrito em função da diferença de pressões arbitrárias P_{sf} . Sendo que, se P_{sf} é função da porosidade, l_a , por consequência, também o é:

$$l_a = \varepsilon(1 - \varepsilon) \text{grad} \text{grad}(P_s - P_f) \quad (83)$$

Com isso, das Equações (30)-(32), (36), (78) e (79) a parte $\bar{l}_a$ é dada por:

$$\bar{l}_a = (\chi - \varepsilon) \text{grad} P + P \text{grad} \chi \quad (84)$$

e

$$l_a = -\varepsilon \text{grad} P + \varepsilon \text{grad} P_f \quad (85)$$

Desse modo, a parte arbitrária da força de interação pode ser escrita da forma:

$$l_1^a = \chi \text{grad}P + P\text{grad}(\chi) - \varepsilon \text{grad}P_f \quad (86)$$

Do Sistema III para o balanço da quantidade de movimento, a soma das Equações (55) e (56), produzem a relação:

$$\text{grad} P = \text{div}\sigma_1 + \text{div}\sigma_2 + \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 - (\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2) \quad (87)$$

Rearranjando a Equação (47), pode-se destacar a expressão:

$$\text{grad}P_f = \frac{\text{div}\sigma_1 + m + \rho_1 g_1 - \rho_1 a_1}{\varepsilon} \quad (88)$$

Através das Equações (87) e (88), a Equação (86) para a parte arbitrária da força de interação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} l_1^a = & [\chi \text{div}\sigma_2 - (1 - \chi)\text{div}\sigma_1] + [\chi \rho_2 g_2 - (1 - \chi)\rho_1 g_1 + m] \\ & + [(1 - \chi)\rho_1 a_1 - \chi \rho_2 a_2] + P\text{grad}\chi \end{aligned} \quad (89)$$

Além disso, as Equações (55) e (56) fornecem elementos para o cálculo de outra grandeza arbitrária, l_a , de modo a se obter a seguinte equação de intersecção:

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = \frac{1}{1 - \varepsilon} \text{div}\sigma_2 - \frac{1}{\varepsilon} \text{div}\sigma_1 - \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} - \frac{l_a}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (90)$$

Vale ressaltar que χ é constante, tal que, $P\text{grad}\chi = 0$ na Equação (89).

4.1.1 Considerações básicas

Informações sobre χ podem ser obtidas com base em duas considerações.

A primeira delas é a situação constante, na qual:

ε , V_1 e V_2 , χ constantes e $\text{grad}P_f = \text{grad}P_s$.

Nesses casos, a soma das Equações (47) e (48) produz a relação:

$$\text{grad}P_f = \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 \quad (91)$$

A intersecção do sistema III, para ε, V_1 e V_2, χ constantes, produz a relação:

$$\text{grad}P = \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 \quad (92)$$

Assim, segue das Equações (91) e (92) que:

$$\text{grad}P_f = \text{grad}P = \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 \quad (93)$$

Dessa forma, para tal situação, da Equação (36), tem-se que $\text{grad}\pi = 0$, com base nas relações descritas em (93), a Equação (86) para l_1^a fica da forma:

$$l_1^a = (\chi - \varepsilon)(\rho_1 g_1 + \rho_2 g_2) \quad (94)$$

Além disso, da Equação (68), para a situação em que $\text{grad}P_f = \text{grad}P$, tem-se que:

$$l_a = 0 \quad (95)$$

A segunda consideração é que a parte arbitrária da força de interação é o empuxo, com base no constituinte fluido, caracterizada por:

$$l_1^a = (1 - \varepsilon)\rho_1 g_1 \quad \text{com} \quad g_1 = g_2 \quad (96)$$

Das Equações (89) e (94) é possível destacar a expressão (97):

$$\chi = \varepsilon \left[\frac{(1-\varepsilon)\rho_s + \rho_f}{\varepsilon\rho_f + (1-\varepsilon)\rho_s} \right], \quad \varepsilon = \text{constante} \quad (97)$$

É importante observar que, da Equação (97):

$$\begin{aligned} \chi &= 0, \text{ para } \varepsilon = 0 \\ \chi &< 1, \text{ para } \varepsilon = 0,5 \\ \chi &= 1, \text{ para } \varepsilon = 1 \end{aligned}$$

indicando que a fração de pressões arbitrárias realmente fica identificada como uma porosidade.

4.2 Soluções exatas

O Sistema formado pelas Equações (45), (46), (52), (53), (55), (56), (86), (90) será determinado, favorecendo a obtenção de, pelo menos, duas soluções exatas, as mais simples possíveis.

Vale ressaltar a equação de intersecção usada por Libórtio *et al.* (2015)

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -grad P_{sf} + \frac{1}{1-\varepsilon} div \sigma_2 - \frac{1}{\varepsilon} div \sigma_1 - \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (98)$$

onde P_{sf} é a diferença de pressões arbitrárias, ou seja

$$P_{sf} = P_s - P_f$$

A determinação das soluções exatas desse sistema, seguindo o trabalho de Libório *et al.* (2015b), começa com a introdução de notações básicas para as velocidades do constituinte líquido e sólido, além da porosidade. As velocidades são consideradas funções da porosidade, e o escoamento é considerado unidirecional, na direção y :

$$V_1 = V_1(y, t) = V_1(\varepsilon) ; V_2 = V_2(y, t) = V_2(\varepsilon) ; \varepsilon = \varepsilon(y, t) ; \phi = \phi(y, t) = \phi(\varepsilon) \quad (99)$$

em que ϕ é uma função suficientemente suave, dada por:

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon) V_2 = \varphi = \varphi(t) \quad (100)$$

As equações constitutivas generalizadas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, assim como as velocidades, também serão assumidas funções da porosidade, de tal maneira que é possível escrever:

$$m = m(y, t) = m(\varepsilon) \quad (101)$$

$$\sigma_1 = \sigma_1(y, t) = \sigma_1(\varepsilon) \quad (102)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(y, t) = \sigma_2(\varepsilon) \quad (103)$$

4.2.1 Primeira Solução

A primeira solução, a solução constante, é caracterizada por apresentar porosidade e velocidades constantes. Dessa maneira, seguindo a metodologia proposta por Libório *et al.* (2015b), para tal solução:

$$V_1(y, t), V_2(y, t) \text{ são constantes} \quad (104)$$

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 = \text{constante} \quad (105)$$

Na situação constante, as acelerações, representadas pelas Equações (52) e (53) são nulas, assim como o operador divergente de cada tensor tensão. Dessa maneira, a parte arbitrária da força de interação, descrita pela Equação (89), se apresenta da seguinte forma:

$$l_1^a = [\chi(1 - \varepsilon)\rho_s g_2 - (1 - \chi)\varepsilon\rho_f g_1 + m] \quad (106)$$

$$l_a = m - \varepsilon(1 - \varepsilon)(\rho_s g_2 - \rho_f g_1) \quad (107)$$

com

$$\chi = \varepsilon \left[\frac{(1-\varepsilon)\rho_s + \rho_f}{\varepsilon\rho_f + (1-\varepsilon)\rho_s} \right], \text{ com } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad (108)$$

4.2.2 Segunda Solução

Para a obtenção da segunda solução exata, segue-se a construção proposta por Libório *et al.* (2015a), com as velocidades dos constituintes fluido e sólidos dadas pelas expressões:

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \quad (109)$$

$$V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0) + \varphi}{\varepsilon} \quad (110)$$

onde w_0 e u_0 são velocidades constantes e, neste caso, φ é constante. Tanto w_0 , quanto u_0 são parâmetros básicos e relevantes para o estudo das suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade.

Outra função arbitrária importante para o estabelecimento da base de informações sobre a força de interação arbitrária é a função $A(\varepsilon)$, uma função arbitrária da porosidade com unidade de comprimento, proposta por Libório *et al.* (2015 a), representada por:

$$\int A(\varepsilon) d\varepsilon = y - w_0 t + cte$$

$$A(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 1 \quad (111)$$

Assim, as Equações (52), (53), (99), (101)-(103), (97) e (98) produzem as seguintes relações:

$$l_1^a = I(\varepsilon) + J(\varepsilon)A(\varepsilon) - K(\varepsilon) \quad (112)$$

onde

$$I(\varepsilon) = \left[\chi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon} - (1 - \chi) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon} \right] \quad (113)$$

$$J(\varepsilon) = [\chi(1 - \varepsilon)\rho_s g_2 - \varepsilon(1 - \chi)\rho_1 g_1 + m] \quad (114)$$

$$K(\varepsilon) = [(1 - \chi)\rho_f(w_0 - V_1)^2 - \chi\rho_s(w_0 - V_2)^2] \quad (115)$$

E, as Equações (52), (53), (80), (87), (89)-(91), (109) e (110) produzem as relações:

$$G(\varepsilon)A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{l_a}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}A(\varepsilon) - Q(\varepsilon) \quad (116)$$

onde

$$G(\varepsilon) = \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} - (\rho_s g_2 - \rho_f g_1) \quad (117)$$

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} \quad (118)$$

$$Q(\varepsilon) = \rho_s \left[\frac{(w_0 - V_2)^2}{1 - \varepsilon} \right] + \rho_f \left[\frac{(w_0 - V_1)^2}{\varepsilon} \right] \quad (119)$$

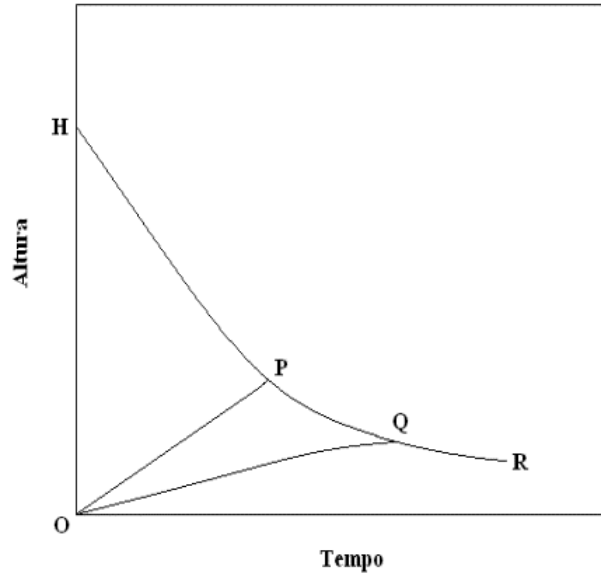
As Equações (109)-(111) e (113)-(119) podem ser utilizadas como fonte de informações para a parte arbitrária da força de interação. A grandeza arbitrária $A(\varepsilon)$ é aqui definida como função comprimento. m é a força resistiva, ou resistividade, e foi Henry Darcy, em 1856, o primeiro a propor uma equação constitutiva para representá-la. Segundo Arouca (2007), a representação da força resistiva se tornou essencial para a determinação do sistema de equações que governam o fenômeno de separação sólido-líquido, uma vez que ela leva em consideração a força exercida pelo fluido sobre a matriz porosa e a força de empuxo. E, no presente trabalho, tem uma importância particular, uma vez que a força de interação arbitrária, em alguns casos, pode ser decomposta em força resistiva e empuxo.

4.3 Modelagem matemática

As soluções exatas foram estudadas com base no movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, sedimentação gravitacional em proveta, com as suposições de que, nesses casos, a sedimentação é considerada um fenômeno unidimensional, os efeitos

das paredes são desprezíveis, as fases da mistura são incompressíveis e os tensores tensão dos constituintes sólido e líquido são considerados função da porosidade do meio. Feitas tais aproximações, a estrutura desenvolvida por Libório *et al.* (2015a) é utilizada, caracterizada de acordo com a Figura 1.

Figura1. Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.



Fonte: Libório *et al.* (2015a)

No gráfico da Figura 1, HPQR até a altura H corresponde à região de líquido puro, OPHO corresponde à região de sedimentação livre, OPQO corresponde à região de transição e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à região de compressão. As curvas HPQR, OP e OQ correspondem, respectivamente, às alturas da interface superior descendente, da onda de aceleração e da interface inferior ascendente. A introdução da região de transição OPQO foi motivada pelo trabalho de Tiller (1981) e estendida pelos trabalhos de Fitch (1983) e Font (1988). A onda de aceleração, que não precisa ser visível, corresponde à propagação inicial da onda de concentração, a única que parte do fundo da proveta.

$x(t)$ será a notação usada para descrever a altura da interface superior descendente, que é correlata à curva HPQR na Figura 1.

$$x(t) = (0 \leq t < \infty) \quad (120)$$

$h(t)$ representará a altura da onda de aceleração correspondente à curva OP, na Figura 1, que, por sua vez, se encontra com a interface superior descendente no tempo t_0 .

$$h = h(t) \quad (0 \leq t \leq t_0) \quad (121)$$

$z(t)$ indica a altura da interface inferior ascendente e t_c corresponde ao instante de encontro entre a interface superior descendente e a interface inferior ascendente.

$$z = z(t) \quad (0 \leq t \leq t_c) \quad (122)$$

No instante inicial, a altura da interface superior descendente corresponde à altura inicial da suspensão da proveta (H), e as alturas da onda de aceleração e interface inferior ascendente são nulas, fornecendo, assim, as condições iniciais necessárias à modelagem. Vale ressaltar que, na Figura 1, a coordenada espacial está orientada para cima e, portanto, $y=0$ representa o fundo da proveta:

$$x(0) = H \quad (123)$$

$$h(0) = z(0) = 0 \quad (124)$$

No instante t_0 , há o encontro entre a interface superior descendente e a onda de aceleração, assim como, no instante t_c , as duas interfaces se encontram. Dessa maneira, as condições de encontro entre as superfícies ficam representadas por:

$$x(t_0) = h(t_0) \equiv x_0 \quad (125)$$

$$x(t_c) = z(t_c) \equiv x_c \quad (126)$$

A porosidade é constante na condição inicial, e tem valor de uma unidade na região de líquido puro:

$$\varepsilon(y, t) = 1 \quad x < y \leq H \quad 0 \leq t < \infty \quad (127)$$

$$\varepsilon(y, 0) = \varepsilon_0 = cte \quad 0 \leq y \leq H \quad (128)$$

A onda de aceleração e as interfaces caracterizadas na Figura 1 são superfícies singulares em movimento e algumas propriedades apresentam uma descontinuidade através das interfaces, sendo necessário o uso de condições de salto nessas interfaces. Por meio do salto da função é possível relacionar as propriedades entre um lado e outro da interface, através de balanços de quantidade de movimento, balanços de massa, dentre outros, produzindo as condições de saltos necessárias à modelagem nessas superfícies. Dessa maneira, as velocidades e a porosidade serão representadas por um índice + quando acima da superfície em movimento, e, um índice -, quando abaixo dela.

No lado superior da interface superior descendente, região de líquido puro, a porosidade se define por:

$$\varepsilon^+ = 1 \quad 0 \leq t < \infty \quad (129)$$

No fundo da proveta, $y = 0$, as velocidades dos constituintes fluido e sólidos são nulas, além disso, próximo ao fundo da proveta, ou seja, numa vizinhança próxima de $y=0$, a constante definida anteriormente por φ é nula, de modo que se tem a relação:

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon)V_2 = 0 \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (130)$$

O conceito de porosidade média, definida pelo teorema do valor médio para integrais, foi considerado para qualquer região da suspensão. Assim, Libório *et al.* (2015b) definiu a expressão para a porosidade média, por meio de um balanço de massa de sólidos, como sendo:

$$(1 - \bar{\varepsilon})x = (1 - \varepsilon_0)H \quad 0 \leq t < \infty \quad (131)$$

Seguindo o mesmo princípio, para a região de compactação, a porosidade média ε_m da suspensão foi definida no trabalho de Libório *et al.* (2015 b), como sendo:

$$(1 - \varepsilon_m)z = \int_0^z (1 - \varepsilon) dy \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (132)$$

Para cada força de campo, nesta situação, onde a coordenada espacial y está orientada para cima:

$$g_1 = g_2 = -g \quad (133)$$

sendo g é a aceleração da gravidade.

4.4 Uso das soluções exatas

As duas soluções exatas, obtidas anteriormente, foram estudadas, respectivamente, na região de sedimentação livre e de transição. Para essas regiões, que são superfícies singulares em movimento, foram utilizadas condições de salto através das interfaces.

4.4.1 Região de sedimentação livre

Seguindo a estrutura de Libório *et al.* (2015b), a região de sedimentação livre é limitada por $h(t) \leq y \leq x(t)$ e $0 \leq t \leq t_0$, que corresponde à região OPHO no gráfico da Figura 1, a função porosidade, e as funções velocidades são constantes nessa região, o que facilita a obtenção da primeira solução exata. Como a onda de aceleração é uma superfície singular em movimento, usa-se condições de salto para a porosidade e para a velocidade de sólidos no limite superior dessa interface, sendo a velocidade de sólidos no limite superior constante e igual à velocidade da interface superior descendente:

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (134)$$

$$V_2(y, t) = V_2^+ = cte = -u_0 \quad h(t) \leq y \leq x(t) \quad 0 < t \leq t_0 \quad (135)$$

4.4.2 Região de Transição

A segunda solução exata é definida na região de transição, delimitada por $z(t) \leq y \leq h(t)$ para $0 \leq t \leq t_0$ e $z(t) \leq y \leq x(t)$, para $t_0 \leq t \leq t_c$, correspondente à região OPQO, no gráfico da Figura 1, e limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à região de compressão.

Ao contrário da região de sedimentação livre, na região de transição. As velocidades do fluido e sólido variam em função da porosidade e são dadas por:

$$V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0)}{\varepsilon} \quad 0 < t \leq t_c \quad (136)$$

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \quad 0 < t \leq t_c \quad (137)$$

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi = w_0 t - y \quad 0 < t \leq t_c \quad (138)$$

Nesse caso, parte das funções porosidade que compõem a parte arbitrária da força de interação, das Equações (115) e (119) são reescritas da seguinte maneira:

$$K(\varepsilon) = \left[(1 - \chi) \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} (u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0))^2 - \chi \rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2 (1 - \varepsilon_0)^2}{(1 - \varepsilon)^2} \right] \quad (139)$$

$$Q(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1 - \varepsilon)^3} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^3} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right] \quad (140)$$

É importante ressaltar que a região de transição é limitada pela parte inferior da interface da onda de aceleração e pela parte superior da interface da região de compressão, sendo necessárias funções de salto para a porosidade e para a velocidade dos sólidos, de modo que, através da onda de aceleração, são usadas as condições :

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^- = \varepsilon_0 \quad 0 < t \leq t_0 \quad (141)$$

$$V_2^+ = V_2^- = -u_0 \quad 0 < t \leq t_0 \quad (142)$$

É possível destacar uma equação para a altura da onda de aceleração e, através dela, o

ponto (x_0, t_0) de encontro entre a interface superior descendente e a onda de aceleração também pode ser calculado, sendo outro parâmetro básico para a construção da base de informações sobre a parte arbitrária da força de interação.

$$h = h(t) = w_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (143)$$

$$x_0 = w_0 t_0 \quad (144)$$

Libório *et al.* (2015b) destaca ainda a introdução de outra função comprimento denotada por $N(\varepsilon)$, introduzida pela definição:

$$2 \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \xi) A(\xi) d\xi \right) N(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi \right)^2 \quad (145)$$

4.4.3 Movimento da Interface Superior Descendente

Uma relação para a altura da interface superior descendente, no intervalo de tempo da curva de sedimentação livre, também pode ser definida, de modo que o seu coeficiente angular corresponda à velocidade de sedimentação livre:

$$x = H - u_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (146)$$

A Equação (146) pode ser reescrita, de modo que se obtenham informações acerca do ponto (x_0, t_0) de encontro entre a onda de aceleração e a interface superior descendente, parâmetro básico para a execução da base de informações.

$$(u_0 + w_0)t_0 = H \quad (147)$$

$$(u_0 + w_0)x_0 = Hw_0 \quad (148)$$

Também é possível escrever uma relação para a altura da interface superior descendente, porém no intervalo de tempo da curva de transição, para tal, são utilizadas as funções comprimento $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$, definidas por Libório *et al.* (2015b). Além disso, é imprescindível salientar que, no intervalo da curva de transição, tem-se condições de salto para a porosidade e para as funções comprimento no lado inferior da interface superior ascendente. Assim, obtém-se a expressão:

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon = (1 - \varepsilon_0)(x + u_0 t - H) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (149)$$

4.4.4 Velocidade da Onda de Aceleração

Com base nas Equações (120)-(123), (147) e (148), quando o ponto final da reta HP da Figura 1 está bem definido, a velocidade da onda de aceleração é dada por:

$$w_0 = \frac{x_0}{t_0} \quad (150)$$

Entretanto, é necessária a definição de uma outra função para o cálculo da velocidade da onda de aceleração w_0 , que possa ser utilizada em qualquer situação, para os casos em que o ponto final HP da reta (Figura 1) não esteja bem definido.

Essa necessidade motivou a construção da seguinte equação, por Libório *et al.* (2015b):

$$w = \frac{u_0 x^2}{2H(H - x) - (2H - x)u_0 t} \quad (151)$$

O estudo da função w , com denominador positivo, indica que tal função possui um mínimo positivo, esse mínimo positivo corresponde à velocidade da onda de aceleração w_0 , e pode ser obtido pela substituição de pontos experimentais x versus t , encontrados na literatura, à Equação (151). O ponto (x_0, t_0) corresponde ao ponto de encontro entre a onda de aceleração e a interface superior descendente.

4.4.5 Condições para o ponto de encontro das interfaces

A condição para o ponto (x_c, t_c) de encontro das interfaces está expressa nas Equações (120)-(123). Dessa forma, seguindo Libório *et al.* (2016), das Equações (120)-(123) e (139)-(141), pode-se escrever:

$$(1 - \varepsilon_m)z = (1 - \bar{\varepsilon})x = (1 - \varepsilon_0)H \quad \text{para} \quad t = t_c \quad (152)$$

a qual produz outra condição expressa por

$$\bar{\varepsilon}(t_c) = \varepsilon_m(t_c); \quad \varepsilon^-(t_c) = \varepsilon^+(t_c) \equiv \varepsilon_c \quad (153)$$

onde os sinais $-$ e $+$ indicam, respectivamente, valores no lado inferior da interface superior descendente e no lado superior da interface inferior ascendente.

4.4.6 Ponto de encontro das interfaces

De Libório *et al.* (2015b), motivou-se a introdução da função $W = W(x, t)$ definida por:

$$W = \frac{u_0 x}{2(H - x) - u_0 t} \quad (154)$$

com denominador positivo.

Então, segue das Equações (153) e (154) que

$$\frac{dW}{dt} = 0, \text{ para } t = t_c \quad (155)$$

Das equações teóricas produzidas pelo modelo, foi destacada a equação que pode ser comparada com dados experimentais da literatura, para a determinação de parâmetros envolvidos nas equações constitutivas, como também na força de interação arbitrária.

4.5 Base de informações

A construção da base de informações principia com a determinação de três parâmetros básicos: velocidade de sedimentação livre u_0 , que pode ser definida através da Equação (146); velocidade da onda de aceleração w_0 , que pode ser calculada através do mínimo positivo da função w , expressa na Equação (151);

O ponto de encontro entre a interface superior descendente e a onda de aceleração (x_0, t_0) pode ser calculado através das Equações (147) e (148) reescritas da seguinte forma:

$$t_0 = \frac{H}{u_0 + w_0} \quad (156)$$

$$x_0 = w_0 \cdot t_0 = \frac{H w_0}{u_0 + w_0} \quad (157)$$

E o ponto (x_c, t_c) de encontro da interface superior descendente com a interface superior ascendente é ponto onde ocorre o mínimo da função W , definida pela Equação (154).

Os dados para a determinação de tais parâmetros são retirados da literatura, através de resultados da altura *versus* tempo da interface superior descendente, em experimentos de sedimentação em proveta.

O cálculo dos parâmetros básicos e a estrutura apresentada entre as Equações (01)-(157) estabelecem uma ordem sequencial para a determinação dos demais parâmetros e funções, resultando numa base preliminar de informações para o estudo do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade.

A base preliminar é uma fonte de informações para os parâmetros envolvidos em equações propostas para as partes constitutivas e arbitrárias da força de interação e de cada tensor tensão.

4.5.1 Roteiro para a execução da base

I) Obter dados experimentais de altura da interface superior descendente *versus* tempo, oriundos de teste de proveta com a suspensão particulada a ser estudada com porosidade inicial ε_0 e altura inicial H da suspensão na proveta.

II) Determinar a velocidade de sedimentação livre u_0 , com base nos dados experimentais x versus t e na equação :

$$x = H - u_0 t$$

III) Calcular a velocidade da onda de aceleração w_0 , como o mínimo positivo da função w , obtido pela substituição de pontos experimentais (x, t) na relação

$$w = \frac{u_0 x^2}{2H(H - x) - (2H - x)u_0 t}$$

IV) Calcular o ponto (x_0, t_0) de encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente, por meio das equações

$$t_0 = \frac{H}{u_0 + w_0}$$

$$x_0 = w_0 \cdot t_0 = \frac{H w_0}{u_0 + w_0}$$

V) Calcular o ponto (x_c, t_c) de encontro da interface superior descendente com a interface inferior ascendente, onde o ponto (x_c, t_c) é o ponto onde ocorre o mínimo positivo da função W , obtido pela substituição de pontos experimentais (x, t) na equação

$$W = \frac{u_0 x}{2(H - x) - u_0 t}$$

VI) Altura da onda de aceleração

$$h(t) = w_0 t$$

VII) Altura da interface superior descendente

$$x = H - u_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0$$

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - x \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$\frac{dx}{dt} = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^-} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$(w_0 t - x)^2 = 2N^-(x + u_0 t - H) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$x = w_0 t + N^- - \sqrt{2N^-(u_0 + w_0)t - H + (N^-)^2} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$2\left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon\right) N^- = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon\right)^2 \quad N^- = N(\varepsilon^-)$$

VIII) Região de Sedimentação Livre: $h(t) \leq y \leq x(t)$ em $0 \leq t \leq t_0$

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0$$

$$V_2(y, t) = -u_0$$

$$V_1(y, t) = \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0} u_0$$

$$\chi = \varepsilon \left[\frac{(1-\varepsilon)\rho_s + \rho_f}{\varepsilon\rho_f + (1-\varepsilon)\rho_s} \right], \text{ com } \varepsilon \text{ constante}$$

IX) Região de Transição: $z(t) \leq y \leq h(t)$ em $0 \leq t \leq t_0$; $z(t) \leq y \leq x(t)$ em $0 \leq t \leq t_c$

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi = w_0 t - y$$

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon}$$

$$V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0)}{\varepsilon}$$

$$l_1^a = I(\varepsilon) + J(\varepsilon)A(\varepsilon) - K(\varepsilon)$$

$$I(\varepsilon) = \left[\chi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon} - (1 - \chi) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon} \right]$$

$$J(\varepsilon) = [\chi(1 - \varepsilon)\rho_s g_2 - \varepsilon(1 - \chi)\rho_1 g_1 + m]$$

$$k(\varepsilon) = [(1 - \chi)\rho_f(w_0 - V_1)^2 - \chi\rho_s(w_0 - V_2)^2]$$

$$G(\varepsilon)A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{l_a}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}A(\varepsilon) - Q(\varepsilon)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} - (\rho_s g_2 - \rho_f g_1)$$

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon}$$

$$Q(\varepsilon) = \rho_s \left[\frac{(w_0 - V_2)^2}{1 - \varepsilon} \right] + \rho_f \left[\frac{(w_0 - V_1)^2}{\varepsilon} \right]$$

X) Propor equações para as grandezas constitutivas m, σ_1 e σ_2 ;

XI) Observar a equação que relaciona as funções arbitrárias $A(\varepsilon)$ e l_1^a , pois, por serem arbitrárias, l_1^a pode ser determinada a partir de considerações feitas sobre $A(\varepsilon)$, ou vice versa.

4.6 Equações para as grandezas constitutivas

Os parâmetros básicos obtidos na base preliminar de informações norteiam a obtenção dos demais parâmetros necessários para a determinação da parte arbitrária da força de interação, assim, temos as Equações (89) e (90) escritas da seguinte maneira:

$$l_1^a = I(\varepsilon) + J(\varepsilon)A(\varepsilon) - K(\varepsilon) \quad (158)$$

$$G(\varepsilon)A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{l_a}{\varepsilon(1-\varepsilon)}A(\varepsilon) - Q(\varepsilon) \quad (159)$$

onde:

$$K(\varepsilon) = [\chi(1-\varepsilon)\rho_s g_2 + \varepsilon(1-\chi)\rho_1 g_1 + m] \quad (160)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + (\rho_s - \rho_f)g \quad (161)$$

Além do mais, vale ressaltar que:

$$I(\varepsilon) = \left[\chi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon} - (1-\chi) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon} \right] \quad (162)$$

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} \quad (163)$$

É fácil perceber que, para a determinação da parte arbitrária da força de interação, faz-se necessário que a parte constitutiva da força de interação, m , além dos tensores tensão σ_1 e σ_2 sejam definidos.

As equações para as partes constitutivas da força de interação l_1 , além do componente l_a e de cada tensor tensão utilizados neste trabalho foram propostas por Libório *et al.* (2015), dadas por:

$$\sigma_1 = 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial y} \quad (164)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \left(\frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \right)^\beta \quad (165)$$

$$m = (1-\varepsilon)R(V_2 - V_1) \quad R = R(\varepsilon) \quad (166)$$

onde μ , σ_0 e β são constantes e R é a resistividade (SILVA e JESUS, 2015).

Começa-se por definir as funções $B(\varepsilon)$ e $I(\varepsilon)$, de forma que as derivadas de cada tensor tensão, em função da porosidade, são obtidas e substituídas às Equações (162) e (166),

resultando em:

$$I(\varepsilon) = \frac{\beta\sigma_2\chi}{(1-\varepsilon)} + (1-\chi) \frac{2\mu\tau}{\varepsilon^3} \left(\frac{\varepsilon}{A} \frac{dA}{d\varepsilon} + 2 \right) \quad (167)$$

$$B(\varepsilon) = \frac{\beta\sigma_2}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{2\mu\tau}{\varepsilon^4} \left(\frac{\varepsilon}{A} \frac{dA}{d\varepsilon} + 2 \right) \quad (168)$$

com τ dada por

$$\tau = \frac{\varepsilon_0(u_0 + w_0) - u_0}{A} \quad (169)$$

Usando as Equações (100) e (120) tem-se que

$$m = \frac{(1-\varepsilon)RV_2}{\varepsilon} \quad (170)$$

Assim, com base na região de sedimentação livre, das Equações (106), (133)-(135), (141),(142), (161), (166) e (170), para $\varepsilon = \varepsilon_0$, pode-se escrever que

$$\chi = \varepsilon_0 \left[\frac{(1-\varepsilon_0)\rho_s + \rho_f}{\varepsilon_0\rho_f + (1-\varepsilon_0)\rho_s} \right] \quad (171)$$

$$u_0 = \frac{\varepsilon_0^2(\rho_s - \rho_f)g}{R_0} \quad R_0 = R(\varepsilon_0) \quad (172)$$

Com isso, a Equação (172) motiva a introdução de uma velocidade u dada por:

$$u = u(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2(\rho_s - \rho_f)g}{R} \quad (173)$$

Dessa forma, das Equações (172) e (173), são adotadas as seguintes relações, seguindo Libório *et al.* (2015b):

$$u = u_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^M \quad (174)$$

$$R = R_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{M-2} \quad (175)$$

onde M é uma constante.

Assim, para a determinação de $G(\varepsilon)$ e $K(\varepsilon)$ é necessária a obtenção da parte constitutiva da força de interação arbitrária, m . Através das Equações (170) e (175), as funções podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$J(\varepsilon) = R_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{M-2} \frac{[(\varepsilon_0 - \varepsilon)(u_0 + w_0) - (1 - \varepsilon)u_0]}{\varepsilon} + (\chi(1 - \varepsilon)\rho_s - \varepsilon(1 - \chi)\rho_f)g \quad (176)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{R_0}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^M \left[w_0 - (u_0 + w_0) \left(\frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \right) \right] + (\rho_s - \rho_f)g \quad (177)$$

Para

$$\frac{dG}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = \frac{R_0}{\varepsilon_0^2} \left[\frac{M u_0}{\varepsilon_0} - \frac{(u_0 + w_0)}{1 - \varepsilon_0} \right] \quad (178)$$

A derivada da Equação (159) fornece a relação:

$$G(\varepsilon) \frac{dA}{d\varepsilon} + A(\varepsilon) \frac{dG}{d\varepsilon} = \frac{dB}{d\varepsilon} - \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{l_a}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} \right) A(\varepsilon) - \frac{l_a}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} \frac{dA}{d\varepsilon} - \frac{dQ}{d\varepsilon} \quad (179)$$

A derivada da Equação (135) produz a relação

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = 3(1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1 - \varepsilon)^4} - \frac{\rho_f}{\varepsilon^4} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right] \quad (180)$$

com:

$$\frac{dl_a}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = l_a(\varepsilon_0) = 0 \quad (181)$$

Assim, para a classe de suspensões particuladas considerada, destaca-se a subclasse com a constante M dada por

$$M = \frac{\varepsilon_0(u_0 + w_0)}{u_0(1 - \varepsilon_0)} \quad (182)$$

Segundo Libório *et al.* (2015a), usando a Equação (100), podem ser estudados os casos para os quais

$$A = A(\varepsilon) = A_0 = \text{constante}; \quad N = N^- = \text{constante} = N_0 = (1 - \varepsilon_0)A_0 \quad (183)$$

Então, segue das Equações. (106)-(111), para $t = t_c$ e (118)-(122) que

$$I(\varepsilon_0) = \frac{\beta\sigma_0\chi}{(1-\varepsilon_0)} + \frac{4\mu\tau}{\varepsilon_0^3} (1 - \varepsilon^*) \quad \text{com} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0(u_0+w_0)-u_0}{A_0} \quad (184)$$

$$Q(\varepsilon_0) = \frac{\beta\sigma_0}{(1-\varepsilon_0)^2} + \frac{4\mu\tau}{\varepsilon_0^4} \quad \text{com} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0(u_0+w_0)-u_0}{A_0} \quad (185)$$

Libório *et al.*(2015b) destacam ainda uma relação entre a altura da interface superior descendente e a função comprimento N, para os casos nas quais a mesma é constante, obtendo, dessa forma, uma expressão para N_0 :

$$x(t) = N_0 + w_0 t - \sqrt{2N_0(u_0 + w_0)t - N_0(2H - N_0)}, \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (186)$$

$$N_0 = \frac{(w_0 t_c - x_c)^2}{2(x_c + u_0 t_c - H)} \quad (187)$$

4.7 Parte arbitrária da força de interação

Com a estrutura desenvolvida, as Equações (01)-(187) fornecem as relações para a parte arbitrária da força de interação, tendo-se:

$$l_1^a = I(\varepsilon) + J(\varepsilon)A_0 - K(\varepsilon) \quad (188)$$

$$l_a = \frac{B(\varepsilon) - Q(\varepsilon)}{A_0} - G(\varepsilon) \quad (189)$$

Com

$$I(\varepsilon_0) = \frac{\beta\sigma_0\chi}{(1-\varepsilon_0)} + \frac{4\mu\tau}{\varepsilon_0^3} (1 - \chi) \quad (190)$$

$$K(\varepsilon) = \left[(1 - \chi) \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} (u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0))^2 - \chi \rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2 (1 - \varepsilon_0)^2}{(1 - \varepsilon)^2} \right] \quad (191)$$

$$J(\varepsilon) = R_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{M-2} \frac{[(\varepsilon_0 - \varepsilon)(u_0 + w_0) - (1 - \varepsilon)u_0]}{\varepsilon} + (\chi(1 - \varepsilon)\rho_s - \varepsilon(1 - \chi)\rho_f)g \quad (192)$$

$$B(\varepsilon_0) = \frac{\beta\sigma_0}{(1 - \varepsilon_0)^2} + \frac{4\mu\tau}{\varepsilon_0^4} \quad (193)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{R_0}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^M \left[w_0 - (u_0 + w_0) \left(\frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \right) \right] + (\rho_s - \rho_f)g \quad (194)$$

$$Q(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1 - \varepsilon)^3} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^3} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right] \quad (195)$$

A parte arbitrária da força de interação fica definida pela Equação (188), a expressão obtida é função apenas da porosidade, o que faz com que resultados numéricos possam ser facilmente obtidos. Para os casos nos quais as soluções sejam inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta, por exemplo, o conhecimento da porosidade inicial e da porosidade na interface superior descendente são suficientes para se determinar a força de interação arbitrária numericamente.

O estabelecimento da base de informações acerca da parte arbitrária da força de interação é uma contribuição significativa ao estudo das suspensões particuladas, uma vez que os trabalhos presentes na literatura apenas citam a parte arbitrária da força de interação, mas não apresentam expressões para calculá-la, ou mesmo para descrever o seu comportamento no escoamento em meios porosos.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para a base de informações, primeiramente obteve-se dados, na literatura, que relacionassem a altura da interface superior descendente e o tempo de sedimentação. O trabalho de Shannon et al. (1964) serviu como ponto de partida para a determinação dos parâmetros básicos do modelo. Uma suspensão aquosa de esferas de vidro, com porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,850$, sedimenta em uma proveta de altura $H = 31\text{cm}$, a uma velocidade de sedimentação livre $u_0 = 10,10\text{cm/min}$. As massas específicas das esferas e do fluido são, respectivamente $\rho_s = 2,45\text{g/cm}^3$ e $\rho_f = 1,0\text{g/cm}^3$.

Os dados de altura da interface superior descendente *versus* tempo, além da velocidade de sedimentação livre u_0 , permitem o cálculo das funções w , definida pela Equação (151), e W , definida pela Equação (154). Os resultados para os mesmos são expressos na Tabela 1.

Tabela 1: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31\text{ cm}$, $\varepsilon_0 = 0,850$, $u_0 = 10,10\text{ cm min}^{-1}$).

$t\text{ (min)}$	$x\text{ (cm)}$	$w\text{ (cm min}^{-1}\text{)}$	$W\text{ (cm min}^{-1}\text{)}$
0,00	31,00	-----	-----
1,25	18,19	13,86	14,14
1,50	15,76	10,27	10,38
1,75	13,52	8,14	7,90
2,00	11,01	5,85	5,62
2,25	8,75	4,56	4,06
2,50	7,26	5,94	3,30
2,75	7,12	-11,71	3,60

Fonte: Shannon *et al.* (1964)

O procedimento que sucede o cálculo das funções w e W , para a execução da Base, é a determinação da velocidade da onda de aceleração w_0 , que é o mínimo positivo da função w . Na Tabela 1, é possível notar que o mínimo da função w ocorre no ponto (2,25 ;8,75) e, portanto, $w_0 = 4,56\text{ cm/min}$.

Determinada a velocidade da onda de aceleração, o mínimo positivo da função W fornece o ponto de encontro entre a interface superior descendente e a interface inferior ascendente, o ponto (t_c, x_c) . A determinação do ponto (t_c, x_c) é fundamental para o cálculo de outros dois parâmetros básicos, N_0 e A_0 , que, por sua vez são calculados através das equações (187) e (183).

Os parâmetros básicos calculados estão ordenados na Tabela 2.

Tabela 2: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31 \text{ cm}$, $\varepsilon_0 = 0,850$).

Sequência por linha do cálculo de A_0	
$u_0 = 10,10 \text{ cm min}^{-1}$	$w_0 = 4,56 \text{ cm min}^{-1}$
$t_c = 2,50 \text{ min}$	$x_0 = 9,64 \text{ cm}$
$t_c = 2,50 \text{ min}$	$x_c = 7,26 \text{ cm}$
$N_0 = 5,67 \text{ cm}$	$A_0 = 37,84 \text{ cm}$

A força de interação arbitrária não é um dado que se mede diretamente, portanto é necessário que se estabeleça uma equação possível de ser comparada a dados experimentais presentes na literatura. Dito isto, foi calculada a altura teórica da interface superior descendente na região de sedimentação livre, por meio das equações (146), e na região de transição, através da Equação (149). A altura teórica foi comparada à altura experimental, de modo que os valores podem ser vistos na Tabela 3.

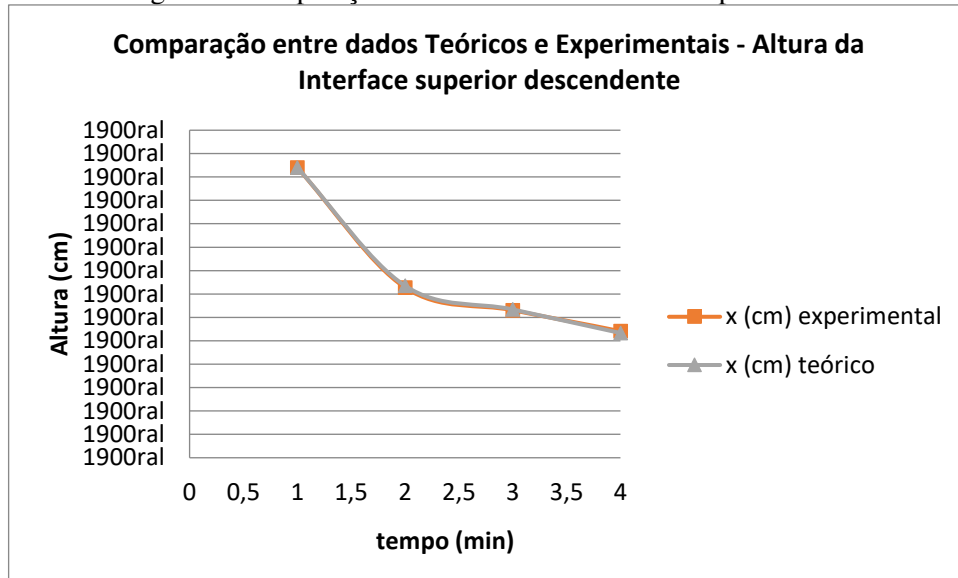
Tabela 3: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31 \text{ cm}$, $\varepsilon_0 = 0,850$, $u_0 = 10,10 \text{ cm min}^{-1}$)

$t(\text{min})$	$x(\text{cm})$ experimental	$x(\text{cm})$ teórica
0,00	31,00	31,00
1,25	18,19	18,38
1,50	15,76	15,85
1,75	13,52	13,33
2,00	11,01	10,80
2,25	8,75	8,58
2,50	7,26	7,26

Fonte: Shannon *et al.*. (1964)

O gráfico da Figura 2 ilustra visualmente a comparação entre os dados, de altura da interface superior descendente, experimentais e teóricos. Dessa forma, os valores obtidos através do modelo estão em concordância com os valores experimentais.

Figura 2. Comparação entre os dados teóricos e experimentais



Os valores obtidos para as funções arbitrárias constantes A_0 e N_0 , expressos na Tabela 2 são aceitáveis e são primordiais para o cálculo dos demais parâmetros das equações constitutivas propostos pelo modelo. Caso haja uma discrepância entre os valores experimentais e teóricos da altura da interface superior descendente, a função arbitrária comprimento A_0 não pode ser utilizada para o cálculo dos demais parâmetros das equações constitutivas do modelo. Nesses casos, outra função arbitrária comprimento deve ser proposta, uma vez que a função utilizada não é adequada para o estudo das suspensões particuladas com restrição de compressibilidade. Aqui, o valor $A_0 = 37,84$ cm é confiável e foi utilizado para o cálculo dos parâmetros β e σ_0 , através das Equações (165), (169), (170), (172), (175), (182) os valores obtidos são mostrados na Tabela 4.

Tabela 4: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31$ cm, $\varepsilon_0 = 0,850$, $\rho_s = 2,45$ g cm⁻³, $\rho_f = 1$ g cm⁻³, $\mu = 0,6$ g cm⁻¹min⁻¹)

Parâmetros
$M = 8,23$
$\beta = 0,99$
$\mu = 0,6$ g cm ⁻¹ min ⁻¹
$R_0 = 365942,67$ g cm ⁻³ min ⁻¹
$\sigma_0 = 79,88$ g cm ⁻¹ min ⁻²

Calculados os parâmetros do modelo, e averiguado que tais parâmetros estão em consonância com dados experimentais, para a situação assumida anteriormente, na qual a

função arbitrária comprimento é considerada constante e dada por A_0 , a equação para a parte arbitrária da força de interação fica determinada pela Equação (188)

$$l_1^a = I(\varepsilon) + J(\varepsilon)A_0 - K(\varepsilon)$$

Além disso, a componente l_a fica determinada pela Equação (189)

$$l_a = \frac{B(\varepsilon) - Q(\varepsilon)}{A_0} - G(\varepsilon)$$

Os parâmetros necessários para o cálculo da parte arbitrária da força de interação estão disponíveis nas Tabelas 2 e 4. Assim, é possível obter valores numéricos para a força de interação na suspensão particulada, através de simples substituição dos parâmetros nas equações propostas. Na região de sedimentação livre, a porosidade é constante, portanto $\varepsilon_0 = \varepsilon = 0,85$.

Para a região de transição, entretanto, a porosidade será definida com base no movimento da interface superior descendente, para $t_0 \leq t \leq t_c$, através da Equação (149) que, integrada, assumindo $A(\varepsilon)$ constante nos fornece uma relação para o cálculo da porosidade na superfície que limita essa região:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 2 \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon_0)(x + u_0 t - H)}{2A_0}} \quad (196)$$

Assim, é possível obter dados numéricos acerca da parte arbitrária da força de interação:

Tabela 5: Parte Arbitrária da força de interação em uma suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31$ cm, $\varepsilon_0 = 0,850$, $\rho_s = 2,45$ g cm⁻³, $\rho_f = 1$ g cm⁻³, $\mu = 0,6$ g cm⁻¹min⁻¹)

t (min)	x (cm)	l_1^a (N)	l_a (N)
0,00	31,00	-0,1845	0,0142
1,25	18,19	-0,1845	0,0142
1,50	15,76	-0,1845	0,0142
1,75	13,52	-0,1845	0,0142
2,00	11,01	-0,2619	0,0147
2,25	8,75	-0,3098	0,0152
2,50	7,26	-0,4596	0,0171
2,75	7,12	-0,8308	0,0207

6 CONCLUSÕES

As várias formas de sistemas para o movimento de um meio poroso com restrição de incompressibilidade, a introdução da chamada fração de pressões arbitrárias e o uso de soluções exatas permitiram o estabelecimento de uma base de informações para a parte arbitrária da força de interação, que é mais uma contribuição ao estudo de grandezas arbitrárias envolvidas em equações do movimento de uma suspensão particulada, com restrição de incompressibilidade, por meio de modelagem matemática do movimento gravitacional de tal suspensão em proveta.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMADI, G. A Generalized continuum theory for multiphase suspensions flows. **International Journal of Engineering Science**, v. 23, n. 1, p. 1-25, 1985.

ALAPATI, S.; CHE, W. S.; SUH, Y.K. Simulation of Sedimentation of a Sphere in a Viscous. **Advances in Multiscale Modeling and Computational Mechanics**, v. 07, 2015.

ALLEN, T. Particle Size Measurement. [S.l.]: London, 1981.

ANGULO, J. A. P. **Escoamento em Meios Porosos: Efeito da Temperatura a Altas Pressões e Baixa Permeabilidade; Dependência da Permeabilidade/Porosidade em Mistura Sólido-Fluido**, 2015. 116 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ, Brasil, 2015.

ARDEKANI, M. N; COSTA, P.; BREYGEN, W. P.; BRANDT, L. Numerical study of the sedimentation of spheroidal particles. **International Journal of Multiphase Flow**, 2016.

AROUCA, F.O. **Uma Contribuição ao Estudo da Sedimentação Gravitacional em Batelada**. 2007. 286 f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia, UFU, 2007.

ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 29, n. 2, p. 209-244, 1976a.

BABAKHANI, P.; BRIDGE, J.; DOONG, R.; PHENRAT, T. Continuum-based models and concepts for the transport of nanoparticles in saturated porous media: A state-of-the-science review. **Advances in Colloid and Interface Science**, v. 246, p. 75–104, 2017.

BARLETTA, A.; STORESLETTEN, L. : Viscous dissipation and thermoconvective instabilities in a horizontal porous channel heated from below, **International Journal of Thermal Sciences**. v 49, p. 621—630, 2010.

BASSET, A. B. Dynamic simulation of sheared suspensions. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, v. 179, p. 43-63, 1888 (also in A treatise on hydrodynamics: with numerous examples, 2 vol. Dover Publications, 1961. 592 p).

BETANCOURT, F.; CONCHA, F.; URIBE, L. Settling velocities of particulate systems part 17. Settling velocities of individual spherical particles in Power-Law non-Newtonian fluids. **International Journal of Mineral Processing**, 2015.

BOSCARINO, S.; BÜRGUER, R.; MULET, P.; RUSSO, G. ; VILLADA, L, M. On linearly implicit IMEX Runge-Kutta methods for degenerate convection-diffusion problems modeling polydisperse sedimentation. **Bull Braz Math Soc**, Vol. 47, N. 1, 2016.

BÜRGER R, CAREAGA J, DIEHL S, MEJÍAS C, NOPENS I, VANROLLEGHEM PA Simulations of reactive settling of activated sludge with a reduced biokinetic model. **Comp Chem Eng** v. 92, p. 216–229, 2016.

BÜRGER, R.; CONCHA, F.; KARLSEN, K. H.; NARVÁEZ, A. Numerical simulation of clarifier-thickener units treating ideal suspensions with a flux density function having two inflection points. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 44, n. 3-4, p. 255-275, 2006.

BÜRGER, R.; KUMAR, S. ; KENETTINKARA, K, S.; BAIER, R.R.; Discontinuous approximation of viscous two-phase flow in heterogeneous porous media. **Journal of Computational Physics**. V. 321, p. 126-150, 2016.

BÜRGER, R; WENDLAND, W. Sedimentation and suspension flows: Historical perspective and some recent developments. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 41, n. 2, p. 101-116, 2001.

CHEN, Y.; KANG, Q.; CAI, Q.; WANG, M. ZHANG. D. Lattice Boltzmann Simulation of Particle Motion in Binary Immiscible Fluids. **Commun. Comput. Phys.** V. 18, No. 3, p. 757-786, 2015.

CLOETE, M; SMITH,G. J.F; KOSINSKI, P. Analytical modelling and numerical verification of non-Newtonian fluid flow through and over two-dimensional porous media. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v 227, p 1–16, 2016.

COSTA MATTOS, H.S.; MARTINS-COSTA, M. L. On the modelling of momentum and energy transfer in incompressible mixtures. **Int. J. Non. Linear. Mech.**, v. 30, n. 4, p 419-431, 1995.

COSTA, M. L. M.; SAMPAIO, R.; Sampaio, DA GAMA, R. M. S., Modelling and simulation of energy transfer in a saturated flow through a porous medium. **Appl. Math. Model.**, v. 16, n. 11, p. 589–597, 1992.

CREMASCO, M. A. **Operações Unitárias em Sistemas Particulados e Fluidomecânicos**. São Paulo: Editora Blücher, 2012.

D'ÁVILA, J. S.; SAMPAIO, R. Influência de equações de estado para a pressão no sólido no projeto de um sedimentador contínuo. *Anais do V Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, v. 3, p. 1–11, 1977c.

DA GAMA, R. M.; MARTINS-COSTA, M. L.; Porous médium nonsaturated by na incompressible fluid. **Int. Comm. HeatMass Transfer**, V. 23, N. 3, p. 407-416, 1996.

DEMIRAY, H. A continuum theory of chemical Reacting Mixtures of fluids and solids. **International Journal of Engineering Science**, v. 19, n. 2, p. 253-68, 1981.

DOGONCHI, A.S.; HATAMI, M.; HOSSEINZADEH, K.; DOMAIRRYD, G. Non-spherical particles sedimentation in an incompressible Newtonian medium by Padé approximation. *Powder Technology*. v. 278, p. 248–256, 2014.

DOOSTMOHAMMADI, A.; DABIRI, S.; ARDEKANI, A. M. A numerical study of the dynamics of a particle settling at moderate Reynolds numbers in a linearly stratified fluid. **J. Fluid Mech.** v. 750, p. 5-32, 2014.

FAKOUR, M.; RAHBARI, A.; MOGHADASI, H.; RAHIMIPETROUDI, I.; DOMAIRRY, D. D.; VARMAZAR, M. Analytical Study Of Unsteady Sedimentation Analysis Of Spherical Particle In Newtonian Fluid Media. **Thermal Science**, 2016.

FENG, J; JOSEPH, D. D. The unsteady motion of solid bodies in creeping flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 303, p. 83-102, 1995.

FITCH, B. Kynch theory and compression zones. **AIChE Journal**, v. 29, n. 6, p. 940-947, 1983.

FONT, R. Compression zone effect in batch sedimentation. **AIChE Journal**, v. 34, n. 2, p. 229-252, 1988.

GAJO, A.; CECINATO, F.; LORETZ, B. Deformable Porous Media Saturated by Three Immiscible Fluids: Constitutive Modelling and Simulations of Injection and Imbibition Tests. **Transp Porous Med.** v. 116, p. 19–51, 2016.

GARRIDO, P.; BURGOS, R.; CONCHA, F.; BÜRGER, R. Settling velocities of particulate systems: 13. A simulator for batch and continuous sedimentation of flocculated suspensions. **International Journal of Mineral Processing**, v. 73, n. 2-4, p. 131-144, 2004.

GARRIDO, P.; CONCHA, F.; BÜRGER, R. Settling velocities of particulate systems: 14. Unified model of sedimentation, centrifugation and filtration of flocculated suspensions. **Internation Journal of Mineral Processing**, v. 72, n. 1-4, p. 57-74, 2003.

GRASSIA, P.; USHERB, S. P.; SCALESB, P. J. A simplified parameter extraction technique using batch settling data to estimate suspension material properties in dewatering applications. **Chemical Engineering Science**, v. 63, n. 7, p. 1971-1986, 2008.

GRASSIA, P.; USHERB, S. P.; SCALESB, P. J. Closed-form solutions for batch settling height from model settling flux functions. **Chemical Engineering Science**, v. 66, n. 5, p. 964-972, 2011.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M.; TRAPP, J. A. Thermodynamics of a continuum with internal constraints. **International Journal of Engineering Science**, v. 8, n. 11, p. 891-908, 1970.

HATAMI, M.; DOMAIRRY, G. Transient vertically motion of a soluble particle in a Newtonian fluid media. **Powder Technology**. v. 253, p. 481–485, 2014.

HERNANDO, L.; OMARI, A.; REUNGOAT, D. Experimental investigation of batch sedimentation of concentrated bidisperse suspensions. **Powder Technology**, v. 275, p. 273–279, 2015.

HERNANDO, L.; OMARI, A.; REUNGOAT, D. Experimental study of sedimentation of concentrated mono-disperse suspensions: Determination of sedimentation modes. **Powder Technology**, v. 258, p. 265–271, 2014.

JALAAL, M.; GANJI, D. D.; AHAMADI, G. Analytical investigation on acceleration motion of a vertically falling spherical particle in incompressible Newtonian media. **Advanced Powder Technology**, v. 21, n. 3, p. 298-304, 2010.

JIN, C.; ZHAO, W.; NORMANI, S.; ZHAO, P.; EMELKO, M. Synergies of media surface roughness and ionic strength on particle deposition during filtration. *Water Research*. v.114 286-295, 2017.

KYNCH, G. J. A theory of sedimentation. **Transactions of the Faraday Society**, v. 48, p. 166-176, 1952.

LI, BEN.; STENSTROM, M. K. Construction of analytical solutions and numerical methods comparison of the ideal continuous settling model. **Computers and Chemical Engineering**. v.80, p. 211–222, 2015.

LIBÓRIO, D O. **Construção de uma Base de Informações para a Diferença de Pressões Arbitrárias em uma Suspensão Particulada**. 2016, 74f, Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Sergipe, UFS, 2016.

LIBÓRIO, D O., SANTOS, E. J., SANTANA, P. L., PAGANO, R. L., SILVA, A. S. Estudo sobre a diferença de pressões arbitrárias em uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. In: XVIII ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL E VI ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, 2015b, Salvador. **Proceedings of XVIII ENMC – National Meeting on Computational Modeling and VI ECTM – Meeting on Materials Science and Technology Salvador, BA – 13-16 October 2015 b**

LIBÓRIO, D O., SANTOS, E. J., SANTANA, P. L., SILVA, C. F., SILVA, A. S. Uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. **Scientia Plena**, v. 11, n. 10, p. 1042021-14, 2015a.

LIBÓRIO, D O., SANTOS, E. J., SANTANA, P. L., SILVA, C. F., SILVA, A. S. Estudo do movimento de uma suspensão particulada por meio de modelagem matemática com base em soluções exatas. In: XVIII ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL E VI ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, 2015c, Salvador. **Proceedings of XVIII ENMC – National Meeting on Computational Modeling and VI ECTM – Meeting on Materials Science and Technology Salvador, BA – 13-16 October 2015 c**.

LING, Xu. Fluid Using the Lattice Boltzmann Method Combined with the Smoothed Profile Method. **Hindawi Publishing Corporation Advances in Mechanical Engineering**, 2016.

LIU G, DING S, YE R, LIU X. Relaxation effects of a saturated porous media using the two-dimensional generalized thermoelastic theory. **Transp Porous Med**, v. 86, p. 283–303, 2011.

LIU, L.; LU, H.; YANG, J.; PENG, T.; TIAN, X. Numerical Study of the Motion of a Freely Falling Sphere in Fluid. **Proceedings of the Twenty-seventh (2017) International Ocean and Polar Engineering Conference**, San Francisco, CA, USA, June 25-30, 2017.

LOCATELLI, P.; FRANÇOIS, P.; LAURENT, J.; LAWNICZAK, F.; DUFRESNE, M.; VASQUEZ, J.; BEKKOUR, K. Detailed Velocity and Concentration Profiles Measurement During Activated Sludge Batch Settling Using an Ultrasonic Transducer. **Separation Science and Technology**, v.50, p. 1059–1065, 2015

MAHDI, A.; MOHAMMEDC, H. A.; MUNISAMY, K. M; SAEID, N. H. Review of convection heat transfer and fluid flow in porous media with nanofluid. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**. v. 41, p. 715–734, 2014.

MAJUMDER, S.; DHAR, J.; CHAKRABORTY, S. Dynamic Simulation of Electro-Hydrodynamically Interacting and Sedimenting Particles. arXiv preprint arXiv:1605.00426, 2016.

MALVANDI, A.; GANJI, D.D.; MALVANDI, A.; Analytical study on accelerating falling of non-spherical particle in viscous fluid. **International Journal of Sediment Research** v.29, p.423-430, 2014.

MASSARANI, G. **Fluidodinâmica em sistemas particulados**. 2 ed. E-Papers, Rio de Janeiro, 2002. 152 p.

MASSARANI, G. **Problemas em sistemas particulados**. 1 ed. Edgard Blücher, 1984. 114 p.

MATTOS, H. C.; MARTINS-COSTA, M, L.; SAMPAIO, R.; SALDANHA DA GAMA, R. M., A thermodynamically consistent constitutive theory for a rigid solid-Stokesian fluid mixture. **Mech. Research Comm.** V 20, p. 243-249, 1993.

MEHRABIAN, S.; ACOSTA, E.; BUSSMAN, M. Oil-particle separation in a falling sphere configuration: Effect of viscosity ratio & interfacial tension. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 98, p. 190-127, 2017.

MOLLINGER, A. M; CORNELISSEN, E. C; VAN DEN BRULE B. H. A. A. An unexpected phenomenon observed in particle settling: oscillating falling spheres. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.**, v. 86, n. 3, p. 389-393, 1999.

MOLLINGER, A. M; CORNELISSEN, E. C; VAN DEN BRULE B. H. A. A. An unexpected phenomenon observed in particle settling: oscillating falling spheres. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.**, v. 86, n. 3, p. 389-393, 1999.

MONTIENTHONG, P.; RATTANADECHO, P.; KLINBUN, W. Effect of electromagnetic field on distribution of temperature, velocity and concentration during saturated flow in porous media based on Local Thermal Non-Equilibrium models (influent of input power and input velocity). **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 2016.

NOURI, R. ; GANJI, D.D.; HATAMI, M. Unsteady sedimentation analysis of spherical particles in Newtonian fluid media using analytical methods. **Propulsion and Power Research** v.3(2), p.96–105, 2014.

O'ROURKE J. P.; SNIDER, M. D. A new blended acceleration model for the particle contact forces induced by an interstitial fluid in dense particle/fluid flows. **Powder Technology**, v.256, p. 39–51, 2014.

OLIVEIRA, J. H.; DAMESCENO, J.J.R.; AROUCA, F.O. Tensão Nos Sólidos Para O Espessamento E Filtração Em Suspensões De Fluidos Não Newtonianos. In: **VI ENCONTRO NACIONAL DE HIDRÁULICA DE POÇOS DE PETRÓLEO E GÁS**, Rio Quente, GO, 2015.

PENG, C.; XU, G.; WUA, W.; YU, H.; WANGC, C. Multiphase SPH modeling of free surface flow in porous media with variable porosity. **Computers and Geotechnics**. v.81, p. 239–248, 2017.

RAHIMI-GORJI, M.; POURMEHRAN, O.; BANDPY, M.; GANJI, D.D. An analytical investigation on unsteady motion of vertically falling spherical particles in non-Newtonian fluid by Collocation Method. **Ain Shams Engineering Journal**. 2014.

REVIL, A. Transport of water and ions in partially water-saturated porous media. Part 1. Constitutive equations. **Advances in Water Resources**, v. 103, p. 119–138, 2017.

SASIDHARANA, S.; TORKZABANA, S.; BRADFORD, S. A.; DILLONA, P. J.; COOK, P. G. Coupled effects of hydrodynamic and solution chemistry on long-term nanoparticle transport and deposition in saturated porous media. *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*. v. 457, p. 169–179, 2014.

SHANNON, P. T; DEHAAS, R. D; STROUPE, E. P; TORY, E. M. Batch and Continuous Thickening. Prediction of batch settling behavior from initial rate data with results for rigid spheres. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, v. 3, n. 3, p. 250-260, 1964.

SILVA TELLES, A. Considerações sobre as equações do movimento em sistemas Polifásicos. In: **XXI CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS PARTICULADOS**, 1., 1993, Ouro Preto.

SILVA, A. S. Sobre Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade. In: **XVIII CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS PARTICULADOS**, 2., 1990, Nova Friburgo.

SILVA, A. S., JESUS, E., PAGANO, R. L. e PACÍFICO, J. A. Estimação de parâmetros de suspensões particuladas com base em modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta. In: **II CONGRESSO BRASILEIRO DE REOLOGIA**, 2013, Aracaju.

SILVA, A. S.; JESUS, E. S. Queda transiente de uma partícula esférica em um fluido viscoso: Transformação da equação íntegro-diferencial em uma equação diferencial. In: **XXXV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL**, 3., 2014, Natal. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2015. p 1-7.

SOARES, A. A; CAMELO, L; ANDRADE, M. A. P. M. Study of the motion of a vertically falling sphere in a viscous fluid. **European Journal of Physics**, v.33, n. 5, p. 1053-1062, 2012

SONG, X.; XU, Z.; LI, G.; PANG, Z.; ZHU, Z. A new model for predicting drag coefficient and settling velocity of spherical and non-spherical particle in Newtonian fluid. **Powder Technology**, 2017. doi:10.1016/j.powtec.2017.08.017.

SRIVASTAVA, D. K; SRIVASTAVA, N. Stokes flow past axially symmetric isolated bodies: A review article. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 9, n. 8, p. 1-53, 2013.

SRIVASTAVA, D. K; YADAV R. R. Steady Stokes flow past dumbbell shaped axially symmetric body of revolution: An analytic approach. **Theoretical and Applied Mechanics**, vol. 39, n. 3, p. 255-289, 2012.

SUN, R.; XIAO, H.; SUN, H. Investigating the Settling Dynamics of Cohesive Silt Particles With Particle-Resolving Simulations. 2017

TILLER, F. M. Revision of Kynch sedimentation theory. **AIChE Journal**. V. 27, p. 823-829, 1981

TILLER, F. M.; D'ÁVILA, J. S. Zona de compressão em sedimentação. In: **VIII ENCONTRO SOBRE ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS**, 1980, Curitiba.

TORABI, M.; YAGHOOBI, H. Accurate solution for acceleration motion of a vertically falling spherical particle in incompressible Newtonian media. **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 91, n. 2, p. 376-381, 2013.

TORFS, E; BALEMANS, S; LOCATELLI, F; DIEHL, S; BÜRGUER, R; LAURENT, J; FRANÇOIS, P; NOPENS, I. On constitutive functions for hindered settling velocity in 1-D settler models: Selection of appropriate model structure. **Water Research**, v.110, p. 38-47, 2017.

WEI, C.; MURALEETHARAN, K. K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: II . Lagrangian description and variational structure. **Int. J. Eng. Sci.**, vol. 40, p. 1835–1854, 2002.

WETT, B. A straight interpretation of the solids flux theory for a three-layer sedimentation model. **Water Research**, v. 36, n. 12, p. 2949-2958, 2002.

YIN, Z.; WANG, Z.; LIANG, B.; ZHANG, L. Initial Velocity Effect on Acceleration Fall of a Spherical Particle through Still Fluid. **Mathematical Problems in Engineering**, 2017.

YU, L.; MA, J.; FREAR, C.; ZHAO, Q.; DILLON, R.; LI, X.; CHEN, S. Multiphase modeling of settling and suspension in anaerobic digester. **Applied Energy**, v. 111, p. 28-39, 2013.

ZHAO, C.; HOBBS, B. E.; ORD, A. Theoretical analyses of chemical dissolution-front instability in fluid-saturated porous media under non-isothermal conditions. **International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics.**; v.39, p.799–820, 2015.