



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**TEORIA DO DANO CONCENTRADO APLICADA AO CÁLCULO DA FLECHA
IMEDIATA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

Adyson André Fortuna de Souza

São Cristóvão, SE

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**TEORIA DO DANO CONCENTRADO APLICADA AO CÁLCULO DA FLECHA
IMEDIATA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

Adysson André Fortuna de Souza

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil como requisito parcial à Obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientador: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.

Coorientador: Prof. Dr. Wayne Santos de Assis

São Cristóvão, SE

S729t Souza, Adysson André Fortuna de
Teoria do dano concentrado aplicada ao cálculo da flecha imediata em vigas de concreto armado / Adysson André Fortuna de Souza ; orientador David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim. - São Cristóvão, 2019.
88 f. : il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado. 3. Aço - Estruturas. 4. Mecânica da fratura. I. Amorim, David Leonardo Nascimento de Figueiredo Orient. II. Título.

CDU 625



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos 29 (vinte e nove) dias do mês de agosto de 2019, às 14h00min (catorze horas), reuniram-se, no Mini auditório do PROEC na cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos", os membros da Comissão Examinadora, formada pelos professores doutores DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM (Orientador – PROEC/UFS), REJANE MARTINS FERNANDES CANHA (Examinadora interna – PROEC/UFS), WESLEY GOIS (Examinador externo à Instituição – UFABC) e WAYNE SANTOS DE ASSIS (Examinadora Externa à Instituição – UFAL), para a realização da Defesa de Dissertação ao Mestrado do Trabalho intitulado "TEORIA DO DANO CONCENTRADO APLICADA AO CÁLCULO DE FLECHA IMEDIATA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO" do mestrando ADYSSON ANDRE FORTUNA DE SOUZA. Após a apresentação do candidato e a arguição dos membros da supracitada Comissão, o candidato foi considerado APROVADO. Não havendo nada mais a tratar, eu, DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM, presidente da Comissão, lavrei a presente ata, que será assinada por mim, pelo candidato e pelos demais membros da Comissão Examinadora. São Cristóvão, Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos", 29 de agosto de 2019.

David Leonardo N. de F. Amorim

Prof.^o Dr.^o DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM
(Presidente - Orientador)

Rejane Martins Fernandes Canha

Prof.^o Dr.^o REJANE MARTINS FERNANDES CANHA
(Examinadora – interna)

Wesley Gois

Prof.^o Dr.^o WESLEY GOIS
(Examinador – externo à Instituição)

Wayne Santos de Assis

Prof.^o Dr.^o WAYNE SANTOS DE ASSIS
(Examinadora – externa à Instituição)

Adyson Andre Fortuna de Souza

Eng.^o ADYSSON ANDRE FORTUNA DE SOUZA
(Candidato)

UFS/CCET/DEC/PROEC – Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos". Av. Marechal Rondon s/nº - Jardim Rosa Elze. CEP: 49100-000, São Cristóvão – SE. Tel: (79) 2105-6700/2105-6736. E-mail: coordproec@ufs.br; secretariaproec@ufs.br; proec.ufs@gmail.com www.posgraduacao.ufs.br/proec

AGRADECIMENTOS

A Deus, por mais esta oportunidade e alento nos momentos mais difíceis.

Ao professor David Amorim pela excelente orientação, disponibilidade e paciência para transmitir conhecimentos.

Ao professor Wayne Assis pela assistência, transmissão de conhecimentos e da experiência para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, meus irmãos e irmã que me deram o apoio necessário ao longo da minha vida que me fizeram chegar até aqui.

A minha esposa pelo apoio e incentivo no desenvolvimento deste trabalho e compreensão durante as minhas ausências.

Aos meus colegas, em especial a Leônidas, Maic, João Marcos e Leonardo pela ajuda e pelo apoio.

A coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pela bolsa de estudo concedida no início do mestrado.

A todos os professores e funcionários da UFS que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

RESUMO

A verificação da flecha em vigas é uma etapa fundamental do desenvolvimento do projeto estrutural, que tem o objetivo de estimar o comportamento da estrutura em situação de serviço. Nesta etapa é analisado o maior deslocamento do eixo do elemento estrutural submetido a flexão. Em uma viga de concreto armado, esse deslocamento tem um comportamento não linear, e para melhor descrevê-lo, é necessário um método de análise não linear de estruturas. Atualmente, algumas normas adotam a Fórmula de Branson ou o Método Bilinear que utilizam uma ponderação dos efeitos entre os Estádios I e II, na tentativa de precisar a flecha imediata em vigas de concreto armado. Porém, ambos os métodos de cálculo, se tratam de um método de análise linear de estruturas. Tendo isso em vista, este estudo propõe uma nova alternativa para quantificar as flechas em vigas de concreto armado, utilizando a Teoria do Dano Concentrado. Este é um método de análise não linear, que utiliza conceitos da Mecânica da Fratura e da Mecânica do Dano aliados a rótulas plásticas. A precisão da fórmula desenvolvida foi verificada através de comparativos com trabalhos experimentais desenvolvidos por outros autores, além de comparar com a Fórmula de Branson, com o Método de Bischoff que é uma adaptação da Fórmula de Branson, e com o Método Bilinear. Os resultados obtidos evidenciaram que o procedimento proposto necessita de modificações, a fim de melhor descrever o comportamento mecânico das vigas analisadas no Estádio II.

Palavras-chaves: Flecha. Teoria do Dano Concentrado. Análise não Linear.

ABSTRACT

The deflection evaluation in beams is a fundamental step for structural design development, which aims to estimate the behavior of the structure in service situation. In this step, is analyzed the largest axis bent displacement for the structural element. In a reinforced concrete beam, this displacement has a nonlinear behavior, and to better describe it, a nonlinear structure analysis method is required. Currently, some standards adopt the Branson Formula or the Bilinear Method that use an effect weighting between Stages I and II in an attempt to specify the immediate deflection in reinforced concrete beams. However, both calculation methods are a linear structural analysis method. Although, this study proposes a new alternative for quantifying deflection in reinforced concrete beams using the Lumped Damage Mechanics. This is a nonlinear analysis method using concepts of fracture mechanics and damage mechanics coupled with plastic hinges. The accuracy of the developed formula was verified through comparisons with experimental works developed by other authors, as well as comparing with the Branson Formula, the Bischoff Method which is an adaptation of the Branson Formula, and the Bilinear Method. The results showed that the proposed procedure needs modifications in order to better describe the mechanical behavior of the beams analyzed in Stage II.

Keywords: Deflection. Lumped Damage Mechanics, Nonlinear Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Comportamento do concreto armado com o surgimento de fissuras.	21
Figura 2: Comportamento da viga no Estádio I.	22
Figura 3: Comportamento da viga no Estádio II.	23
Figura 4: Comportamento da viga no Estádio III.	23
Figura 5: Seção transversal no Estádio I.	24
Figura 6: Seção transversal Estádio II.	25
Figura 7: Modelo reológico (Sistema de molas em paralelo).	28
Figura 8: Modelo reológico (Sistema de molas em série).	28
Figura 9: a) Ações e deformações do elemento b) deslocamentos do elemento	31
Figura 10: Deslocamentos generalizados.	32
Figura 11: Configurações possíveis de nova forma do elemento.	33
Figura 12: Concentração de tensão em placa com abertura circular e elíptica.	36
Figura 13: Energia total versus comprimento da fissura para um plano de tensão.	37
Figura 14: Elemento de Volume Representativo (EVR).	38
Figura 15: Tensão efetiva e deformação equivalente.	39
Figura 16: Elemento de Barra.	41
Figura 17: Elemento de pórtico de concreto armado.	43
Figura 18: Gráfico Força versus Deslocamento.	45
Figura 19: Gráfico Dano versus Taxa de Liberação de Energia.	46
Figura 20: Parâmetro q versus taxa de armadura longitudinal (ρ).	47
Figura 21: Gráfico Momento versus Dano conforme declarado no critério generalizado de Griffith. .	48
Figura 22: Variação da constante gama na função limite.	49
Figura 23: Calibração da variável γ	50
Figura 24: l para ensaio de quatro pontos (a) e para ensaio de três pontos (b).	51
Figura 26: Gráfico Momento versus Flecha da viga V1.	53
Figura 27: Viga V2 de Álvares (1993).	55
Figura 28: Gráfico Momento versus Flecha da viga V3.	56
Figura 29: Gráfico Momento versus Flecha da viga V4.	58
Figura 30: Gráfico Momento versus Flecha da viga V5.	59
Figura 31: Gráfico Momento versus Flecha da viga V6.	61
Figura 32: Esquema experimental de Fernandes (1996).	62
Figura 33: Gráfico Momento versus Flecha da viga V7.	63
Figura 34: Gráfico Momento versus Flecha da viga V8.	64
Figura 35: Gráfico Momento versus Flecha da viga V9.	66
Figura 36: Posicionamento dos deflectômetros elétricos.	67
Figura 37: Esquema experimental de Machado (2004).	67
Figura 38: Gráfico Momento versus Flecha da viga V10.	68
Figura 39: Posicionamento dos extensômetros.	69
Figura 40: Esquema experimental de Canaval (2016).	70
Figura 41: Gráfico Momento versus Flecha da viga V11.	71
Figura 42: Ensaio de flexão simples de Fernandes e Vargas (2015).	72
Figura 43: Esquema experimental de Fernandes e Vargas (2015).	72

Figura 44: Gráfico Momento versus Flecha da viga V12.	73
Figura 45: Ensaio da viga de referência de Santos (2006).	74
Figura 46: Esquema experimental de Santos (2006).	75
Figura 47: Gráfico Momento versus Flecha da viga V13.	76
Figura 48: Ensaio de flexão em três pontos.	77
Figura 49: Esquema experimental de Simões (2007).	77
Figura 50: Gráfico Momento versus Flecha da viga V14.	78
Figura 51: Ensaio de três pontos de Romero (2007).	80
Figura 52: Esquema experimental de Romero (2007).	80
Figura 53: Gráfico Momento versus Flecha da viga V15.	81

LISTA DE SIGLAS

CEB	Comitê Europeu do Concreto
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite de Último
EVR	Elemento de Volume Representativo
SCF	Fator de Concentração de Tensão
TDC	Teoria do Dano Concentrado

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área total da seção transversal
A_s	Área de aço do bordo tracionada
A'_s	Área de aço do bordo comprimido
a	Comprimento de fissura
a_{cr}	Comprimento crítico de fissura
b	Base da seção transversal
d	Altura útil da viga
D	Dano
D_a	Dano atuante
D_i, D_j	Variável de dano nas rótulas inelásticas i e j
D_u	Dano último
D_n	Dano local na seção transversal do elemento de volume representativo
E	Módulo de elasticidade de Young
E_c	Módulo de elasticidade do concreto
E_{cs}	Módulo de elasticidade secante
El	Rigidez à flexão
E_T	Energia total
$(EI)_{eq}$	Rigidez equivalente
f_{ck}	Resistência característica do concreto
f_{ct}	Resistência à tração direta do concreto

$f_{ct,m}$	Resistência média à tração do concreto
f_{tk}	Resistência característica à tração do concreto
f_r	Módulo de ruptura/resistência à tração na flexão do concreto
G	Taxa de liberação de energia
G_i^d, G_j^d	Momentos de condução do dano nas rótulas inelásticas i e j
I_I	Momento de inércia do concreto no Estádio I
I_{II}	Momento de inércia do concreto no Estádio II
I_e	Momento de inércia efetivo
I_{eD}	Momento de inércia equivalente via TDC
ℓ	Comprimento do elemento de barra
l	Distância entre a base da fissura e o eixo neutro
L	Comprimento deformado
L_0	Comprimento indeformado
L_b^0	Comprimento inicial
L_b	Comprimento corrente
m	Expoente que define a região considerada no cálculo da flecha
m_i, m_j	Momentos fletores generalizados nos nós i e j
M_I	Momento fletor no Estádio I
M_{II}	Momento fletor no Estádio II
M_a	Momento fletor atuante na seção crítica
M_r	Momento de fissuração
M_p	Momento de plastificação

M_u	Momento último
$M(x)$	Momento fletor ao longo do elemento
$\vec{n}$	Vetor normal ao plano
$\mathbf{n}$	Seção transversal do elemento de volume representativo
n_b	Força axial generalizada
$N(x)$	Esforço normal ao longo do elemento
P	Carga aplicada
q	Parâmetro de endurecimento
R	Resistência à fissuração
R_i^d, R_j^d	Resistência a fissuração nas rótulas inelásticas i e j
S	Área total do plano do elemento de volume representativo
$\bar{S}$	Área efetiva do plano do elemento de volume representativo
S_D	Área correspondente as microfissuras
t	Deslocamento
t_p	Deslocamento plástico residual
T	Matriz Transposta
U	Energia de deformação
u_i	Deslocamento na direção do eixo X
u_i^L	Deslocamento na direção de x_L
w_c	Peso específico do concreto
w_i	Deslocamento na direção do eixo Z
w_i^L	Deslocamento na direção de z_L

x	Posição da linha neutra na seção transversal ou direção longitudinal
x_1	Posição da linha neutra na seção transversal ou direção longitudinal no Estádio I
x_2	Posição da linha neutra na seção transversal ou direção longitudinal no Estádio II
XZ	Eixos das coordenadas globais
$x_L z_L$	Eixos das coordenadas locais
y_{tc}	Distância do centroide da seção à fibra mais tracionada
α	Fator que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta
α_b^0	Ângulo inicial
α_b	Ângulo corrente
α_e	Razão entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto
ε_e	Deformação elástica
ε_s	Deformação longitudinal no aço
ε_c	Deformação longitudinal no concreto
ε_d	Deformação devido a danificação
ε_p	Deformação plástica
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva
σ_c	Tensão no concreto
σ_{cr}	Tensão crítica
σ_s	Tensão no aço
σ_1	Tensão de compressão no concreto no Estádio 1
σ_2	Tensão de compressão no concreto no Estádio 2
σ_3	Tensão de compressão no concreto no Estádio 3

ϕ_i^d	Ângulo de abertura da fissura na rótula inelástica
ϕ_i, ϕ_j	Rotações generalizadas nos nós i e j
ϕ_i^p, ϕ_j^p	Rotações plásticas nas rótulas inelásticas i e j
δ	Alongamento ou encurtamento generalizados
θ_i	Rotação do nó i em relação a configuração inicial
θ_i^L	Rotação total do nó i em relação a configuração inicial
$\{q\}_b$	Matriz de deslocamentos nodais generalizados
$\{U\}_b$	Matriz de deslocamentos nodais generalizados de toda estrutura
$\{\Phi\}_b$	Matriz de deformações generalizadas
$\{\Phi^e\}_b$	Matriz de deformações generalizadas elástica
$\{\Phi^D\}_b$	Matriz de deformação do dano
$\{\Phi^p\}_b$	Matriz de deformação plástica
$[B^0]_b$	Matriz de transformação cinemática da configuração inicial
$[B_E^0]_b$	Matriz de transformação cinemática acrescida de zeros na configuração inicial
$\mathcal{W}_{int}^*$	Trabalho virtual interno
$\mathcal{W}_{ext}^*$	Trabalho virtual externo
$\{P\}$	Matriz de forças nodais generalizadas externas
$\{U^*\}$	Matriz dos deslocamentos virtuais globais
$\{M\}_b$	Matriz de esforços generalizados
$[F_0]_b$	Matriz de flexibilidade elástica
$[C(d)]_b$	Matriz adicional de flexibilidade
$[F(d)]_b$	Matriz de flexibilidade do elemento danificado

SUMÁRIO

RESUMO	6
ABSTRACT	7
LISTA DE SÍMBOLOS	11
1. INTRODUÇÃO	18
1.1 Objetivos	19
1.2.1 Objetivo geral	19
1.2.2 Objetivos específicos	19
1.2 Estrutura do trabalho	20
2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	21
2.1 Efeitos da fissuração na resposta mecânica da seção transversal	21
2.2 Processo de Colapso das Vigas	22
2.3 Momento de Fissuração	24
3 MÉTODOS DE CÁLCULO PARA DETERMINAÇÃO APROXIMADA DA FLECHA EM VIGAS	26
3.1 Métodos de Cálculo para Determinação da Flecha	26
3.1.1 <i>Fórmula de Branson</i>	26
3.1.2 <i>Fórmula de Branson na NBR 6118 (2014)</i>	27
3.1.3 <i>Método de Bischoff</i>	27
3.1.4 <i>Método Bilinear</i>	29
4 MODELO PROPOSTO PELA TEORIA DO DANO CONCENTRADO	30
4.1 Revisão da Teoria do Dano Concentrado	30
4.1.1 <i>Introdução a Notação de Powell</i>	30
4.1.2 <i>Cinemática de Vigas</i>	31
4.1.3 <i>Estática de Pórticos</i>	34
4.1.4 <i>Elasticidade de Pórticos</i>	35
4.1.5 <i>Mecânica da Fratura</i>	35
4.1.6 <i>Mecânica do Dano</i>	37
4.1.7 <i>Teoria do Dano Concentrado</i>	40
4.1.8 <i>Modelo de Alva</i>	48
4.2 Formulação Proposta Neste Trabalho	50
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO	52
5.1 Análise dos trabalhos experimentais	52
5.1.1 <i>ÁLVARES (1993)</i>	52

5.1.2 <i>FERNANDES (1996)</i>	61
5.1.3 <i>MACHADO (2004)</i>	67
5.1.4 <i>CANAVAL (2016)</i>	69
5.1.5 <i>FERNANDES E VARGAS (2015)</i>	71
5.1.6 <i>SANTOS (2006)</i>	74
5.1.7 <i>SIMÕES (2007)</i>	76
5.1.8 <i>ROMERO (2007)</i>	79
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
REFERÊNCIAS	84

1. INTRODUÇÃO

Na elaboração de um projeto, os elementos estruturais são verificados ao Estado Limite Último (ELU) e ao Estado Limite de Serviço (ELS). Dentre as verificações do ELS, é necessário estimar as flechas das vigas, que corresponde ao deslocamento máximo vertical do eixo da barra.

Segundo a ABNT NBR 6118 (2014), as flechas das vigas devem ser calculadas para combinações de carregamento quase permanente, ou seja, que podem atuar durante grande parte da vida útil da estrutura. O cálculo da flecha também deve levar em consideração a perda de rigidez à flexão, quando no concreto surge fissuras visíveis. O surgimento dessas fissuras acontece quando o momento atuante ultrapassa o momento de fissuração do elemento estrutural.

Atualmente, para a verificação da flecha, a norma vigente brasileira recomenda o uso da Fórmula de Branson (1963)¹ apud Junges (2011), que propõe um momento de inércia equivalente através de um cálculo que relaciona o momento atuante com o momento de fissuração.

Entretanto, segundo Bischoff (2007), a Fórmula de Branson é adequada para o cálculo de flecha em vigas com taxa de armadura entre 1% e 2%, mas não é adequada para taxa de armadura inferior a 1%, de modo que Bischoff (2007) propôs alterações na Fórmula de Branson.

Já o CEB “Design Manual on Cracking and Deformation” (1985), propõe o Método Bilinear para o cálculo de flechas. Este método estima um valor intermediário entre o valor da flecha calculada com rigidez no estágio I e a flecha calculada no estágio II puro.

Ao longo dos anos, muitos autores fizeram análises de estruturas em vigas de concreto armado e utilizaram o resultado da flecha como parâmetro fundamental na discussão de seus resultados, evidenciando assim a relevância do tema. Dentre os trabalhos recentes, Jones et al. (2008) verificaram a precisão da resposta flexão-carga-flecha de vigas de concreto reforçada com fibra de aço, a partir de dados de tensão, abertura de fissuras, também da distribuição das fibras. Já Ignjatović et al. (2013) analisaram o comportamento de vigas de concreto armado com a utilização de agregado reciclado, por meio da verificação da evolução da flecha imediata

¹ BRANSON, D. E. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams**. HPR Report, Nº 7, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, 1963.

sob um carregamento monotônico. Pituba e Delibera (2014) fizeram uma avaliação da flecha em estruturas de concreto armado, utilizando a mecânica do dano em elementos de concreto armado em regime de serviço, sendo restrito a concretos de resistência entre as classes C20 e C35. Por fim, Junges e Rovere (2017) compararam os resultados de flecha imediata calculados com métodos simplificados e simulações via o Método dos Elementos Finitos.

Com o intuito de colaborar com os estudos do cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado, este trabalho propõe um modelo de cálculo de momento de inércia equivalente elaborado a partir da Teoria do Dano Concentrado (TDC).

A TDC surgiu como uma ferramenta para avaliação de estruturas de concreto armado sob solicitações sísmicas, sendo idealizada e formalmente apresentada por Flórez-López (1993, 1995) e Cipollina, López-Inojosa e Flórez-López (1995). Baseadas nestes trabalhos pioneiros, diversas abordagens da TDC em concreto armado foram desenvolvidas para diferentes problemáticas: vide, por exemplo, Perdomo, Ramírez e Flórez-López (1999), Araújo e Proença (2008), Faleiro, Oller e Barbat (2010), Santoro e Kunnath (2013), Amorim, Proença e Flórez-López (2013) para uma breve revisão sobre o tema. Ainda, algumas variações da TDC foram propostas para análise de estruturas de concreto simples (AMORIM; PROENÇA; FLÓREZ-LÓPEZ, 2014a), estruturas metálicas (FEBRES; INGLESSIS; FLÓREZ-LÓPEZ, 2003), e de alvenaria (AMORIM; PROENÇA; FLÓREZ-LÓPEZ, 2014b). O primeiro livro sobre a TDC foi publicado por Flórez-López, Marante e Picón (2015).

A TDC é baseada em procedimentos da mecânica da fratura e da mecânica do dano clássico aplicados ao conceito de rótulas plásticas. Na TDC são usados conceitos como tensão efetiva e a hipótese da equivalência de deformação. Pelo dano concentrado, o processo de fissuração é quantificado em variável de dano que pode assumir valores entre 0 e 1.

As leis de evolução do dano podem descrever satisfatoriamente o comportamento de vários tipos de estruturas com aplicações reais na Engenharia através da TDC.

1.1 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

- Propor um momento de inércia equivalente para o cálculo de flechas em vigas de concreto armado utilizando como base as formulações da Teoria do Dano Concentrado.

1.2.2 Objetivos específicos

- Verificar a eficácia da fórmula desenvolvida através de comparativos com ensaios experimentais em vigas de concreto armado de outros autores.
- Comparar os resultados das flechas obtidas em ensaios experimentais com os valores numéricos calculados através da formulação proposta por esse trabalho e outros métodos de cálculo de flecha.

1.2 Estrutura do trabalho

O capítulo 2 apresenta uma revisão do comportamento do concreto armado sobre cargas cíclicas, e carregamento monotônico até a ruptura, verificando seu comportamento no estágio I sem fissuras visíveis, seu comportamento com o aparecimento de fissuras caracterizando o Estádio II, até próximo da sua ruína no Estádio III.

O capítulo 3 traz o conceito de flecha imediata e alguns métodos de cálculo utilizados na verificação de flechas em vigas de concreto armado, inclusive o método utilizado pela NBR 6118 (2014). Estes serão comparados com o Modelo proposto.

No capítulo 4 é mostrada uma revisão da Teoria do Dano Concentrado, que foi utilizada como base para o desenvolvimento do Modelo Proposto. O roteiro de cálculo proposto para o cálculo da flecha também apresentado nesse capítulo.

Finalmente, o capítulo 5 apresenta como o Modelo Proposto se comporta diante dos resultados das flechas obtidas por trabalhos experimentais, e diante dos métodos de cálculos de flechas já utilizados, que foram apresentados no capítulo 3 deste trabalho.

2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

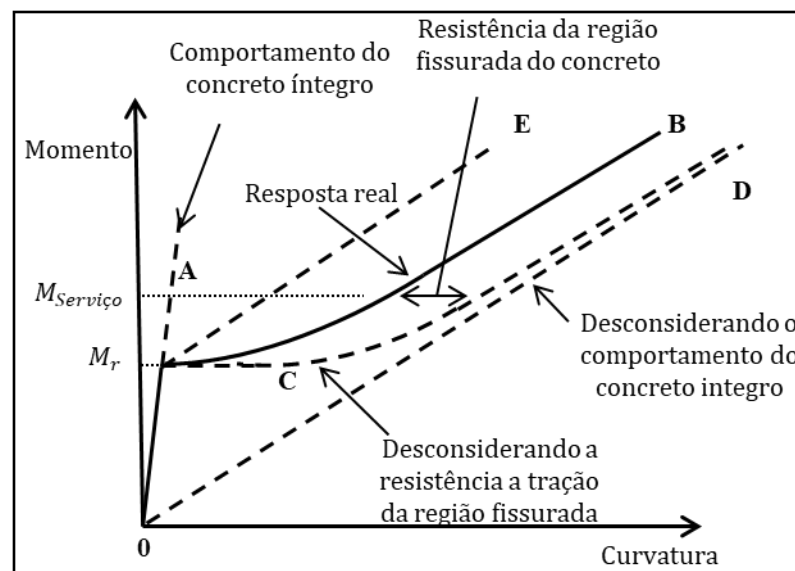
2.1 Efeitos da fissuração na resposta mecânica da seção transversal

A partir de certo nível de tensão, o concreto apresenta comportamento não linear. Tal comportamento é atribuído ao surgimento de microfissuras progressivas que ocorrem na interface entre o agregado graúdo e a pasta de cimento (ARAÚJO, 2014).

Quando o bordo tracionado do concreto armado sob flexão atinge a tensão de tração máxima, se inicia a abertura de fissuras, e nesse estágio, há uma mudança súbita na rigidez local e adjacente à primeira fissura.

Ao analisar a seção fissurada, verifica-se uma queda na rigidez à flexão, mas as demais seções do elemento podem continuar íntegras. Com o aumento da carga aplicada, mais fissuras se formam e a rigidez do elemento diminui. Esse comportamento pode ser visualizado na curva B da Figura 1.

Figura 1: Comportamento do concreto armado com o surgimento de fissuras.



Fonte: Adaptado de Gilbert (2008)

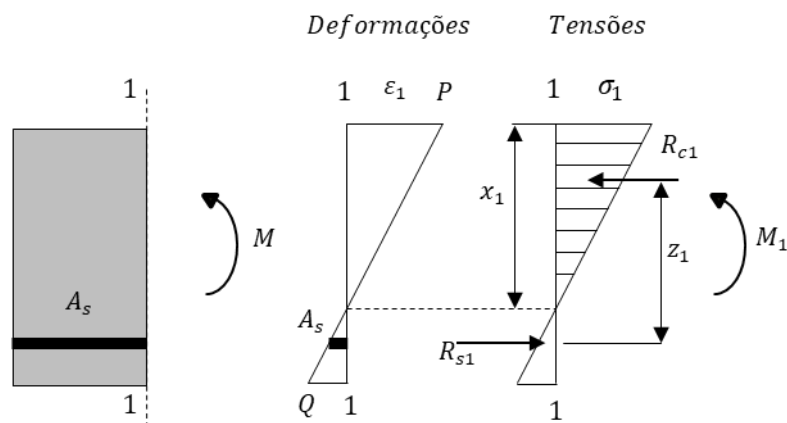
A Figura 1 também mostra o comportamento do concreto caso a região fissurada submetida à tração não resistisse a tensões, esse comportamento seria descrito pela curva C. Se o comportamento do concreto fosse analisado como uma seção íntegra, mesmo após a

fissuração, seu comportamento seria descrito pela reta A. Caso seja desconsiderada a resistência do concreto submetido à tração desde o início da aplicação do carregamento, seu comportamento seria descrito pela reta D. Unindo o comportamento do concreto íntegro da reta A até o momento de fissuração, com o comportamento descrito pela reta D, onde é desconsiderado o comportamento do concreto íntegro, resulta na reta E.

2.2 Processo de Colapso das Vigas

Uma viga de concreto armado, submetida a um momento fletor crescente, passa por três níveis de deformação. Estes níveis são denominados de estádios, que determinam o estado físico no qual a viga se encontra e, conseqüentemente, o seu comportamento mecânico. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2015), no Estádio I sob um momento fletor M_1 a tensão de tração no concreto não ultrapassa a sua resistência característica à tração f_{tk} . Nesse Estádio o concreto não possui fissuras visíveis. Logo, assume-se que o diagrama de tensão normal ao longo da seção transversal da viga é linear. As tensões nas fibras mais comprimidas são proporcionais às deformações, correspondendo ao trecho linear do diagrama tensão-deformação do concreto (Figura 2).

Figura 2: Comportamento da viga no Estádio I.

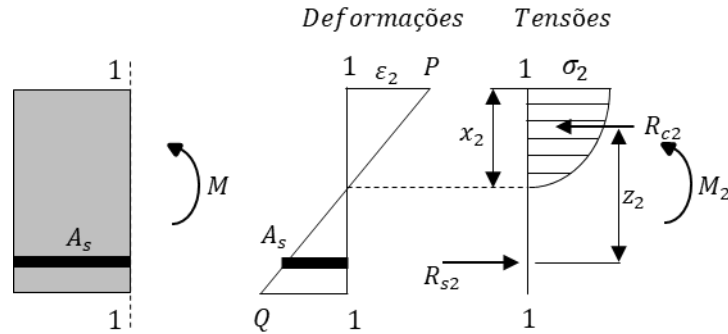


Fonte: Adaptado Carvalho e Figueiredo Filho (2015)

O Estádio II é caracterizado pelo aumento do momento aplicado para M_2 , onde as tensões de tração ultrapassam os valores de resistência características do concreto a tração f_{tk} , provocando abertura de fissuras visíveis. Nesse estágio, considera-se que apenas o aço irá

resistir aos esforços de tração e que a tensão de compressão no concreto continua linear (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

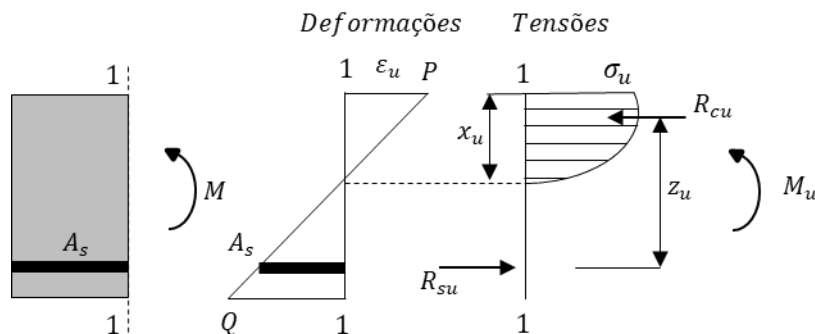
Figura 3: Comportamento da viga no Estádio II.



Fonte: Adaptado Carvalho e Figueiredo Filho (2015)

Aumentando o momento aplicado para um valor próximo ao de ruína M_u , a fibra mais comprimida do concreto começa a plastificar a partir da deformação específica de $\varepsilon_{c2} = 0,2\%$, podendo atingir a deformação específica de $\varepsilon_{cu} = 0,35\%$ sem o aumento da tensão. O diagrama de tensões tende a ficar vertical e uniforme, a peça estará bastante fissurada, com as fissuras se aproximando da linha neutra, fazendo com que sua profundidade diminua, e consequentemente a região comprimida. Caracterizando, assim, o Estádio III (Figura 4), supõe-se que nesse Estádio a distribuição de tensões no concreto ocorra segundo um diagrama parábola-retângulo (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Figura 4: Comportamento da viga no Estádio III.



Fonte: Adaptado Carvalho e Figueiredo Filho (2015)

Os Estádios I e II correspondem a condições de serviço, ou seja, quando atuam ações reais. O Estádio III corresponde ao Estado Limite Último, que ocorrem em situações extremas.

2.3 Momento de Fissuração

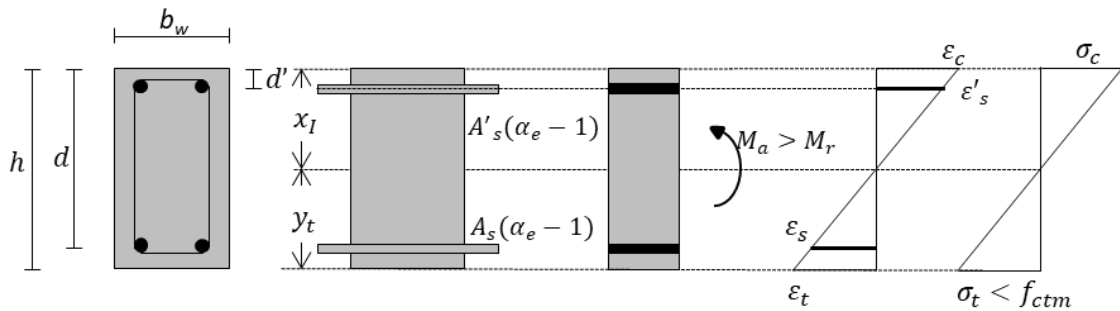
As estruturas trabalham parcialmente no Estádio I e no Estádio II, ambos considerados Estados Limites de Serviço. A separação desses dois Estádios é determinada através do momento de fissuração M_r . Segundo a NBR 6118 (2014), o momento de fissuração pode ser obtido através da Equação 1.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_I}{y_t} \quad (1)$$

sendo α um fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, que para viga de seção retangular deve ser adotado 1,5; y_t a distância do centroide da seção à fibra mais tracionada; I_I o momento de inércia da seção bruta homogeneizada de concreto; f_{ct} a resistência à tração direta do concreto, que na falta de ensaio pode ser adotado $f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$, onde f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto (em Mpa) e $f_{ct,m}$ é a resistência média à tração do concreto em MPa.

No Estádio I, o momento de inércia é calculado levando em consideração a seção bruta homogeneizada do concreto armado, conforme mostrado na Figura 5.

Figura 5: Seção transversal no Estádio I.



Fonte: Adaptado de Junges (2011)

O cálculo do momento de inércia para a seção composta de concreto armado no Estádio I pode ser feito através da Equação 2.

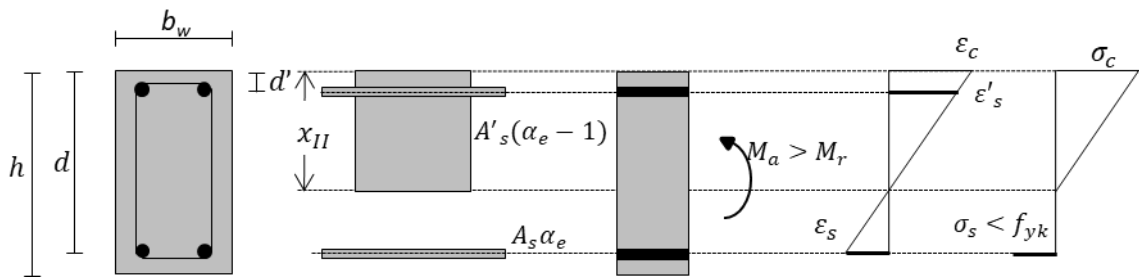
$$I_I = \frac{b h^3}{12} + b h \left(x_I - \frac{h}{2} \right)^2 + (\alpha_e - 1) A_s (d - x_I)^2 \quad (2)$$

Dessa forma a posição da linha neutra pode ser obtida através da Equação 3.

$$x_I = \frac{\frac{bh^2}{2} + (\alpha_e - 1)A_s d}{bh + (\alpha_e - 1)A_s} \quad (3)$$

No Estádio II, o momento de inércia é calculado levando em consideração apenas a seção comprimida do concreto armado e a armadura, conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6: Seção transversal Estádio II.



Fonte: Adaptado de Junges (2011)

O cálculo do momento de inércia para a seção composta de concreto armado no Estádio II, desconsiderando a resistência da seção tracionada do concreto pode ser feito através da Equação 4.

$$I_{II} = \frac{bx_{II}^3}{12} + bx_{II} \left(\frac{x_{II}}{2} \right)^2 + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 + (\alpha_e - 1) A'_s (d - x_{II})^2 \quad (4)$$

Sendo assim, a posição da linha neutra pode ser obtida através da Equação 5.

$$\frac{b}{2} x_{II}^2 + [\alpha_e A_s + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s] x_{II} - [\alpha_e A_s d + (\alpha_e - 1) A'_s d'] = 0 \quad (5)$$

3 MÉTODOS DE CÁLCULO PARA DETERMINAÇÃO APROXIMADA DA FLECHA EM VIGAS

3.1 Métodos de Cálculo para Determinação da Flecha

Seja uma viga indeformada reta, em equilíbrio, submetida a um momento fletor. Esta viga, deixa de ser reta assumindo uma nova forma. Admite-se que as seções da viga sofrerão deslocamentos na direção perpendicular ao seu eixo. O deslocamento máximo da viga é conhecido como flecha.

3.1.1 Fórmula de Branson

Branson (1963) apud Junges (2011) realizou um estudo experimental em vigas de seção retangulares e seção “T” aplicando um carregamento de curta duração uniformemente distribuído. Com base nesse ensaio foi proposta uma fórmula simplificada para o cálculo da flecha imediata, em que se adota um momento de inércia equivalente, fazendo uma relação entre os momentos de inércia dos Estádios I e II e o momento de fissuração como método simplificado de análise não linear de vigas em concreto armado.

O American Concrete Institute (ACI 435, 1966) adotou a Fórmula de Branson para cálculo de flecha imediata. Atualmente essa fórmula também é utilizada pela ACI 318RM-14/2015. O Brasil vem adotando esse método de cálculo desde a norma NBR 6118 (2003). Anteriormente, a norma NBR 6118 (1978), recomendava a utilização do momento de inércia do Estádio II puro, fazendo com que a flecha fosse superestimada.

O Momento de Inércia I_e sugerido por Branson (1963) apud Junges (2011), pode ser calculado através da Equação 6.

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m\right] I_{II} \quad (6)$$

onde M_r é o momento de fissuração da seção transversal; I_I é o momento de inércia da seção transversal do concreto armado no Estádio I; I_{II} é o momento de inércia do concreto armado no Estádio II; M_a é o momento fletor atuante na seção crítica.

Adota-se o expoente m igual a 3 para o cálculo de uma seção de referência para todo o seu vão, considerando assim a soma dos efeitos da perda de rigidez e a contribuição do concreto na zona de tração entre fissuras, na região fissurada do vão, e também a que ainda está no Estádio I. Para o cálculo de uma seção individual, é adotado o valor 4 no expoente m , dessa forma quando se calcula o I_e será desconsiderado o efeito do elemento que ainda está no Estádio I (SABNIS et al., 1973).

3.1.2 Fórmula de Branson na NBR 6118 (2014)

Para a norma brasileira, o modelo do comportamento estrutural do concreto armado pode ser adotado como elástico e linear, de maneira que as seções ao longo do elemento estrutural possam ter as deformações específicas no estágio I, ou seja, a tensão de tração atuante não ultrapassa a resistida pelo concreto. Caso contrário, deve ser utilizado o valor do módulo de elasticidade secante E_{cs} , sendo a consideração do efeito da fluência, obrigatória.

Desta forma, para uma avaliação aproximada da flecha imediata em vigas pode ser calculada utilizando a rigidez equivalente, utilizando-se a Equação 7.

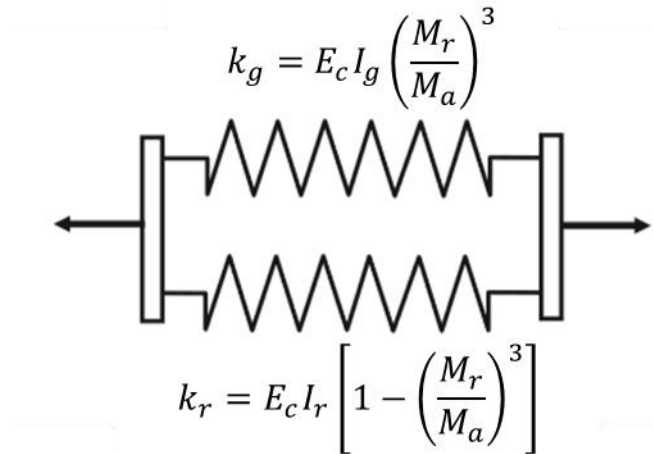
$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I_I \quad (7)$$

3.1.3 Método de Bischoff

Segundo Bischoff (2007), a Fórmula de Branson funciona bem para vigas de concreto armado com taxa de armadura entre 1% e 2%, que era a taxa de armadura comum no passado. No entanto, a equação de Branson subestima a flecha de vigas de concreto armado com taxa de armadura inferior a 1%.

A Fórmula de Branson fornece uma média ponderada dos momentos de inércia da seção bruta e da seção fissurada em qualquer nível de carga. Para Bischoff (2007), isso é análogo a ter uma mola não fissurada paralela a uma mola fissurada, conforme mostrado na Figura 7.

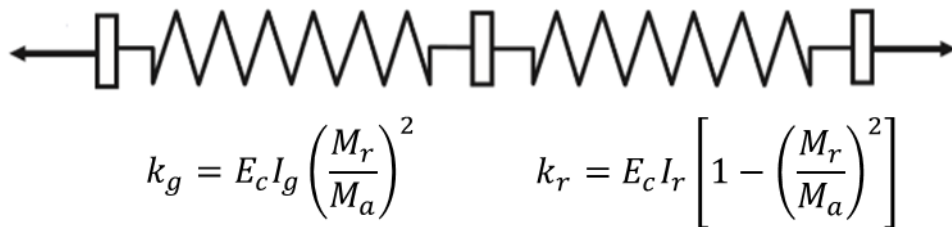
Figura 7: Modelo reológico (Sistema de molas em paralelo).



Fonte: Adaptado de Bischoff (2007)

A rigidez equivalente k_e é dada pela soma da rigidez da mola íntegra k_g com a rigidez da mola fissurada k_{cr} , correspondendo ao comportamento de concreto armado com taxa de armadura entre 1% e 2%. Ainda segundo o autor, o comportamento de uma viga em concreto armado com taxa de armadura inferior a 1% seria melhor descrito pela associação de molas em série conforme mostrado na Figura 8.

Figura 8: Modelo reológico (Sistema de molas em série).



Fonte: Adaptado de Bischoff (2007)

Nessa associação, a rigidez equivalente k_e é dada pela razão k_g/k_{cr} rigidez entre a mola íntegra e rigidez da mola fissurada, respectivamente. A partir dessa análise Bischoff (2007) fez alterações na Fórmula de Branson e sugeriu alterações no cálculo do momento de inércia efetivo, resultando na Equação 8.

$$\frac{1}{I_e} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2 \cdot \frac{1}{I_l} + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{I_{ll}} \quad (8)$$

3.1.4 Método Bilinear

O Método Bilinear foi descrito pelo CEB “Design Manual on Cracking and Deformation” (1985). Esse método estima um valor intermediário entre o valor da flecha calculada com rigidez no estágio I e a flecha calculada no estágio II puro, utilizando um coeficiente para fazer a interpolação entre as flechas (JUNGES, 2011).

A interpolação é feita utilizando a Equação 9.

$$W = (1 - \eta)W_I + \eta W_{II} \quad (9)$$

sendo W_I a flecha da viga no estágio I, W_{II} a flecha da viga calculada no estágio II puro, W é o valor estimado da flecha entre os estágios, e η é o coeficiente de interpolação, que é calculado através das Equações 10 e 11.

$$\eta = 0, \text{ se } M_a < M_r \quad (10)$$

$$\eta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^2, \text{ se } M_a \geq M_r \quad (11)$$

O coeficiente β_1 leva em conta a qualidade da aderência, ele assume o valor 1 para barras de alta aderência e 0,5 para barras lisas. Já o coeficiente β_2 , representa a influência da duração ou repetição do carregamento, esse coeficiente assume o valor 1 para o primeiro carregamento e 0,5 para cargas de longa duração ou para grande número de ciclos (ARAÚJO, 2014).

4 MODELO PROPOSTO PELA TEORIA DO DANO CONCENTRADO

4.1 Revisão da Teoria do Dano Concentrado

4.1.1 Introdução a Notação de Powell

No início da década de sessenta, as estruturas elásticas lineares eram comumente estudadas através do método das forças ou do método dos deslocamentos. Powell (1969) desenvolveu uma nova notação das equações matriciais, com o intuito de incorporar os efeitos da não linearidade geométrica em estruturas elásticas.

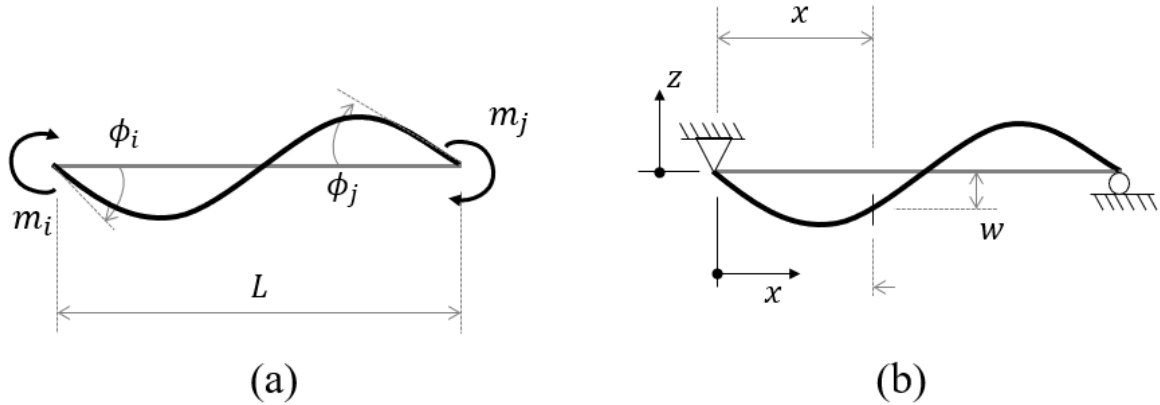
Para alcançar esse objetivo, Powell (1969) adotou uma formulação teórica admitindo pequenas tensões e grandes deslocamentos. A formulação desenvolvida foi utilizada em elementos de pórtico, que envolve efeitos de deformação axial e flexão. Porém, Powell assegurou que esta metodologia poderia ser aplicada a outros modelos mecânicos estruturais como flexão de placa, tensão no plano e tridimensional. O comportamento estrutural dos elementos de pórtico é deduzido considerando a teoria da flexão de Euler-Bernoulli:

$$M(x) = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (12)$$

onde $M(x)$ é o momento de flexão, atuante ao longo do elemento, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção transversal, w é o deslocamento.

Nesta teoria desenvolvida por Powell (1969), a estrutura é entendida como sendo de nós rígidos, ligados por elementos estruturais deformáveis. Inicialmente os elementos são considerados retos, e as forças são aplicadas exclusivamente sobre os nós. As deformações e os deslocamentos de corpo rígido do elemento estrutural são calculados separadamente. As deformações generalizadas dos elementos de pórtico plano são representadas por duas rotações (ϕ_i, ϕ_j) na direção z , sendo uma em cada nó. Associado a cada deformação, tem-se os momentos fletores generalizados (m_i, m_j) nos nós i e j respectivamente, ambos na direção z (Figura 9).

Figura 9: a) Ações e deformações do elemento b) deslocamentos do elemento



Fonte: Amorim (2016)

Os deslocamentos em qualquer ponto do elemento em termos de deformações generalizadas são obtidos considerando pequenos deslocamentos e desprezando a diferença entre o comprimento do elemento L . As equações para deslocamentos transversais ao longo do elemento e as condições de contorno correspondentes são escritas da seguinte maneira:

$$w(0) = w(L) = 0 \quad -\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \phi_i \quad -\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \phi_j \quad (13)$$

$$w(x) = \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{2x^2}{L} - x\right)\phi_i + \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L}\right)\phi_j \quad (14)$$

Através da teoria da flexão de Euler-Bernoulli, é possível obter a função de distribuição do momento fletor $M(x)$ ao longo do elemento estrutural.

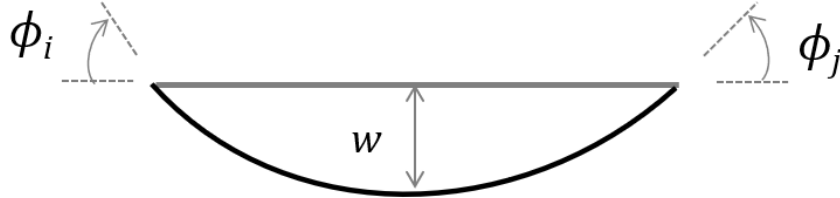
$$M(x) = EI \left[\left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)\phi_i + \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L}\right)\phi_j \right] \quad (15)$$

A teoria do dano concentrado tem como base a notação de Powell. Para compor a teoria das estruturas por meio da notação de Powell, é necessário determinar as leis que regem a cinemática, a estática e as relações constitutivas do elemento estrutural (FLÓREZ-LÓPEZ, et al., 2015).

4.1.2 Cinemática de Vigas

Seja uma viga de comprimento L e com os nós i e j nas suas extremidades (FIGURA 10).

Figura 10: Deslocamentos generalizados.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

A matriz deslocamento generalizados é representada pela Equação 16.

$$\{u\}_i = \{ w_i \ \theta_i \}^T \quad (16)$$

onde w é o deslocamento na direção do eixo y , e θ_i é a rotação total do nó; o termo sobrescrito “ T ” significa transposta. Então a matriz dos deslocamentos nodais generalizados é dada por reunir os deslocamentos generalizados de todos os nós:

$$\{q\}_b = \{\{u\}_i^T \ \{u\}_j^T\}^T = \{ w_i \ \theta_i \ w_j \ \theta_j \}^T \quad (17)$$

Sendo assim, de forma geral, tem-se:

$$\{U\}_b = \{\{u\}_1^T \ \{u\}_2^T \ \dots \ \{u\}_j^T\}^T = \{w_2 \ \theta_3 \ \dots \ w_n \ \theta_n\}^T \quad (18)$$

A matriz de deslocamento nodal não apresenta informações explícitas em relação ao comportamento elástico e a deformação da estrutura, descreve apenas movimento de corpo rígido. Para descrever as deformações dos elementos, é necessário um segundo conjunto de variáveis, chamadas de deformações generalizadas (Equação 19).

$$\{\Phi\}_b = [B^0]_b \{q\}_b \quad (19)$$

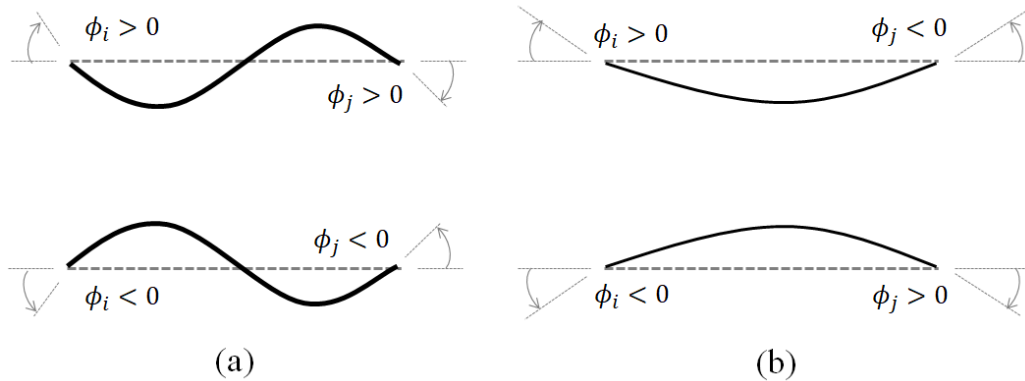
onde a matriz $[B^0]_b$ é chamada de matriz de transformação cinemática do elemento b em relação ao estado inicial, dada por:

$$[B^0]_b = \begin{bmatrix} -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 \\ -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 \\ -\sin \alpha_b & 0 & \sin \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Sendo L_b e α_b o comprimento e a inclinação em relação à horizontal do elemento b respectivamente.

Se o elemento de pórtico b sofre apenas um movimento de corpo rígido, a matriz de deformação generalizada $\{\Phi\}_b$ é nula. Se houver deformação no elemento de pórtico, a matriz de deformações generalizadas indica a nova forma do elemento. As deformações podem ser verificadas através da rotação nos nós ϕ_i e ϕ_j . Conforme mostrado na Figura 11.

Figura 11: Configurações possíveis de nova forma do elemento.



Fonte: AMORIM (2016)

Esse equacionamento pode ser utilizado para o cálculo de toda a estrutura considerando os deslocamentos generalizados da estrutura e a matriz de transformação $[B^0]_b$, que terá zeros adicionados nas colunas referentes aos nós que não pertencem ao elemento b (FLÓREZ-LÓPEZ, et al., 2015):

$$\{\Phi\}_b = [B^0]_b \{U\}_b \quad (21)$$

4.1.3 Estática de Pórticos

A equação de equilíbrio da estrutura pode ser obtida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), onde o trabalho virtual interno W_{int}^* , que é descrito pelas deformações generalizadas, é igualado ao trabalho virtual externo W_{ext}^* , que é descrito pelas forças externas.

$$W_{int}^* = W_{ext}^* \quad (22)$$

Sendo, o trabalho virtual interno e o trabalho virtual externo dado pelas Equações 23 e 24, respectivamente.

$$W_{int}^* = \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{M\}_b \quad (23)$$

$$W_{ext}^* = \{U^*\}^T \{P\} \quad (24)$$

onde $\{M\}_b$ é a matriz de esforços internos generalizados em cada elemento definido por Powell:

$$\{M\}_b = \{m_i \ m_j\}^T \quad (25)$$

O termo $\{P\}$ se refere às forças e momentos que são aplicados nos nós da estrutura. A matriz de esforços externos generalizados pode ser descrita conforme a Equação 26.

$$\{P\} = \{ P_{w1} \ P_{\theta1} \ \dots \ P_{wn} \ P_{\theta n} \}^T \quad (26)$$

onde P_{wn} refere-se as forças verticais no nó n e $P_{\theta n}$ os momentos fletores no nó n .

Igualando os trabalhos interno e externo, é obtida a Equação 27.

$$\sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{M\}_b = \{U^*\}^T \{P\} \quad (27)$$

Que pode ser reescrita conforme a Equação 28.

$$\sum_{b=1}^m \{B_E^0\}_b^T \{M\}_b = \{P\} \quad (28)$$

4.1.4 Elasticidade de Pórticos

Utilizando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, obtém-se a relação constitutiva para materiais elásticos lineares:

$$\{\Phi\}_b = [F_0]_b \{M\}_b \quad (29)$$

onde $[F_0]_b$ é a matriz de flexibilidade do elemento b .

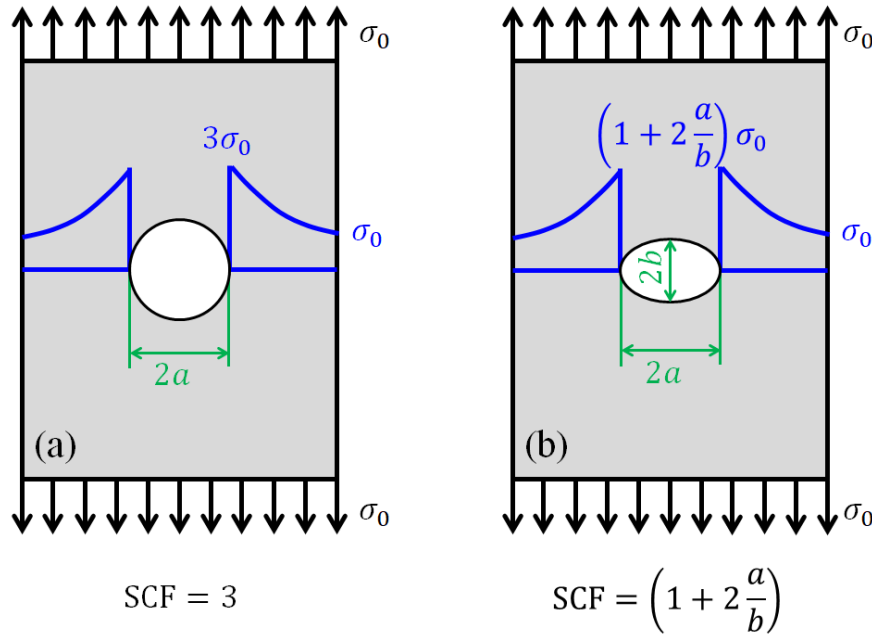
$$[F_0]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI_b} & -\frac{L_b}{6EI_b} \\ -\frac{L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3EI_b} \end{bmatrix} \quad (30)$$

4.1.5 Mecânica da Fratura

O objetivo da mecânica da fratura é desenvolver um modelo que represente a propagação de fissuras em uma estrutura. Com essa modelagem, é possível prever a velocidade de crescimento das fissuras assim como a perda de resistência (BROEK, 1984).

No princípio, o estudo do crescimento de fissuras utilizava uma abordagem de equilíbrio de forças, mas essa abordagem levava a uma tensão infinita no elemento, ao tentar descrever aberturas muito estreitas (Figura 12). Esta observação mostra que o critério de fratura baseada em forças aplicadas é ineficiente (MIER, 2013).

Figura 12: Concentração de tensão em placa com abertura circular e elíptica.



Fonte: Amorim (2016)

Como solução, Griffith (1921, 1924) propôs o uso da termodinâmica de processos irreversíveis para quantificar o processo de fratura por critérios energéticos, levando em consideração o comprimento da fissura e sua propagação.

Para uma fissura de comprimento $2a$, segundo o critério de Griffith (1921, 1924), a energia total do sistema pode ser descrita por:

$$E_T = U - W_{ext} + E_S \quad (31)$$

onde: U é a energia de deformação, W_{ext} é o trabalho externo e E_S é a energia necessária para formação de novas superfícies de fissuras.

O resultado de balanço energético de Griffith (1921, 1924) é:

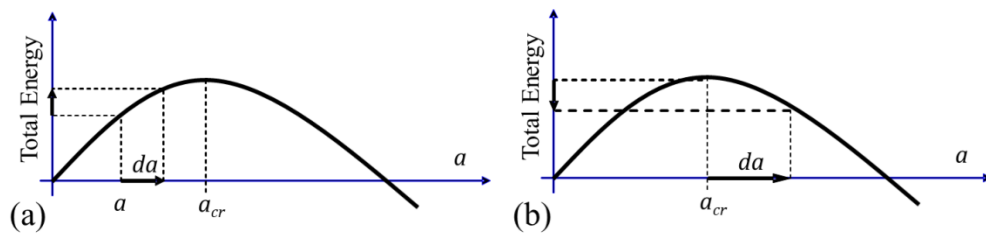
$$\frac{\partial E_T}{\partial a} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial(U - W_{ext})}{\partial a} = \frac{\partial E_S}{\partial a} \Rightarrow G^a = R^a \quad (32)$$

onde: G^a é a taxa de liberação de energia, que está disponível no sistema para provocar um aumento na fissura, e o termo R^a é a resistência à fissura. Sendo assim, caso a taxa de liberação de energia seja maior que a resistência à fissura, será ocasionada a propagação da fissuração.

Através do equilíbrio do sistema, pode-se entender a propagação da fissuração. Há propagação da fissuração se $G^a = R^a$. Enquanto $G^a < R^a$, não há propagação da fissuração. Quando G^a atinge um valor acima de R^a , a fissura cresce e ocorre um rearranjo de energia no sistema, de forma que $G^a = R^a$ para todo ponto. Os termos G^a e R^a podem ser obtidos através de análise estrutural e análise experimental, respectivamente (FLÓREZ-LÓPEZ, et al., 2015).

A energia potencial, em termos do comprimento da fissura, é expressa por uma função parabólica (Figura 13). Observando o gráfico, pode-se afirmar que se o comprimento da fissura a é menor que o comprimento crítico a_{cr} (Figura 13 a), qualquer aumento no comprimento da fissura, requer um aumento de energia. Caso o comprimento da fissura a seja igual ou maior que o comprimento crítico a_{cr} (Figura 13 b), qualquer aumento da fissura, resulta em valores menores de energia para propagação da trinca.

Figura 13: Energia total versus comprimento da fissura para um plano de tensão.



Fonte: Amorim (2016)

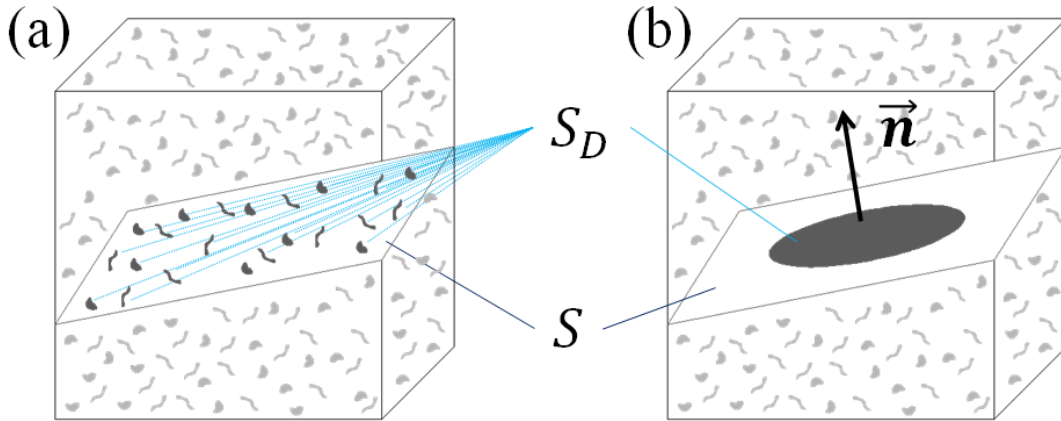
Dessa forma, se tem um comprimento crítico de fissura que garante a propagação da mesma, com carga constante.

4.1.6 Mecânica do Dano

A teoria da Mecânica do Dano foi estabelecida por Lemaitre e Charboche (1985) com o uso da termodinâmica dos processos irreversíveis, utilizando o princípio básico na criação de uma variável interna que quantifica microdefeitos como vazios e fissuras no sistema. Esses defeitos são muito pequenos para serem considerados como fissuras discretas, assim como na mecânica da fratura, e ao mesmo tempo relativamente grandes para serem desprezados (AMORIM, 2016).

Para a inclusão dessa variável no sistema, é feito uso de um elemento de volume representativo do sistema (EVR) (Figura 14). O EVR é um volume de material que permite a quantificação de microdefeitos com uso de uma variável de dano.

Figura 14: Elemento de Volume Representativo (EVR).



Fonte: Amorim (2016)

Dada a seção transversal do EVR $\vec{n}$ com uma área total S e uma área referente aos microdefeitos S_D , pode-se definir uma área efetiva $\bar{S}$ dada por:

$$\bar{S} = S - S_D \quad (33)$$

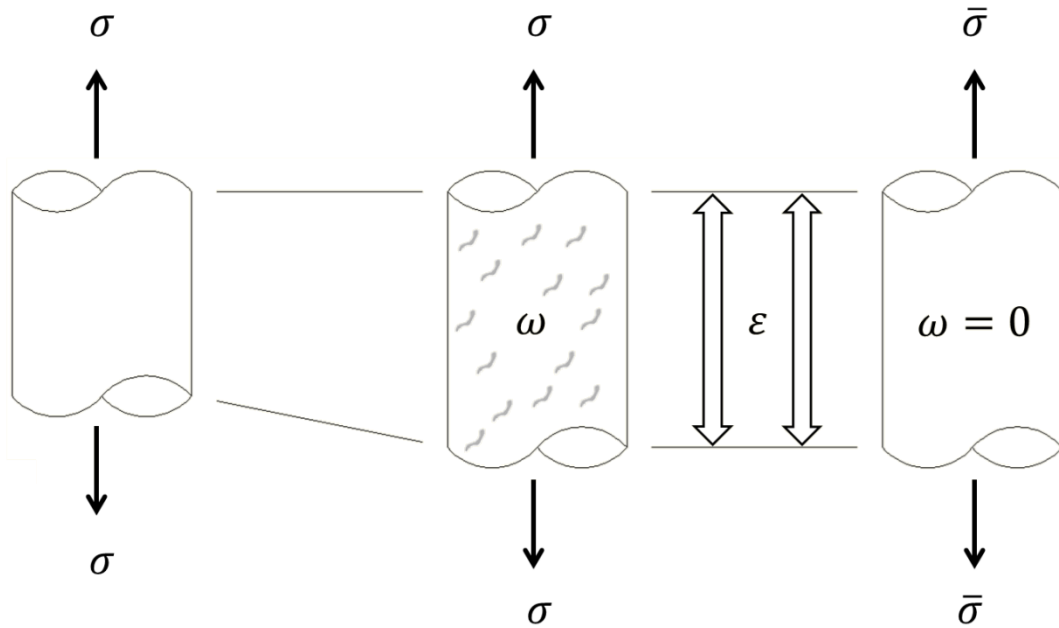
Relacionando a área de microdefeitos e a área total, tem-se a perda de resistência mecânica no elemento, ou seja, dano local. Inclui-se assim a variável de dano $\omega_{\vec{n}}$ no sistema (LEMAITRE; CHARBOCHE, 1985), dada por:

$$\omega_{\vec{n}} = \frac{S_D}{S} \quad (34)$$

O valor de $\omega_{\vec{n}}$ varia de 0 a 1, onde 0 indica a ausência de dano e o valor 1 indica um elemento totalmente danificado e dividido em duas partes.

Para adicionar as leis que ditam o comportamento estrutural, utilizam-se os conceitos de tensão efetiva e a hipótese de equivalência em deformações também propostos no trabalho de Lemaitre e Chaboche (1985). Essa hipótese de equivalência afirma que o comportamento de deformação de um material pode ser descrito apenas pelo dano em forma de tensão efetiva. Tal tensão efetiva é a que atua na área efetiva definida anteriormente (Figura 15).

Figura 15: Tensão efetiva e deformação equivalente.



Fonte: Amorim (2016)

Aplicando uma força F em um EVR, em um primeiro caso sem dano e em um caso com dano (Figura 15), tem-se:

$$\text{EVR sem dano: } F = \sigma S \quad (35)$$

$$\text{EVR com dano: } F = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (36)$$

Para F igual em ambos os casos, igualando os termos, é obtido:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (37)$$

Aplicando-se o conceito de tensão efetiva na lei de Hooke, tem-se:

$$\bar{\sigma} = E \varepsilon^e \Rightarrow \sigma = (1 - \omega) E (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (38)$$

sendo ε^e a deformação elástica na estrutura, ε^p a deformação plástica e ε a deformação total.

Fazendo um rearranjo dos termos da equação anterior, tem-se:

$$\varepsilon - \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \frac{\omega}{1 - \omega} \frac{\sigma}{E} = \varepsilon^e + \varepsilon^D \quad (39)$$

No segundo membro da equação, a parcela que não depende do dano se refere à deformação elástica ε^e e a parcela que depende do dano se refere à deformação devido ao dano ε^D . Tem-se, portanto, as três parcelas que somam a deformação total, ou seja:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^D \quad (40)$$

Marigo (1985), uniu em seu trabalho o conceito de equivalência de deformações com o critério de Griffith escrito em termos de dano.

$$G^\omega - R^\omega \leq 0 \quad (41)$$

Flórez-López, et al. (2015), mostram que G^ω pode ser descrito por:

$$G^\omega = \frac{\sigma^2}{2(1 - \omega)^2 E} = \frac{E \varepsilon^2}{2} \quad (42)$$

4.1.7 Teoria do Dano Concentrado

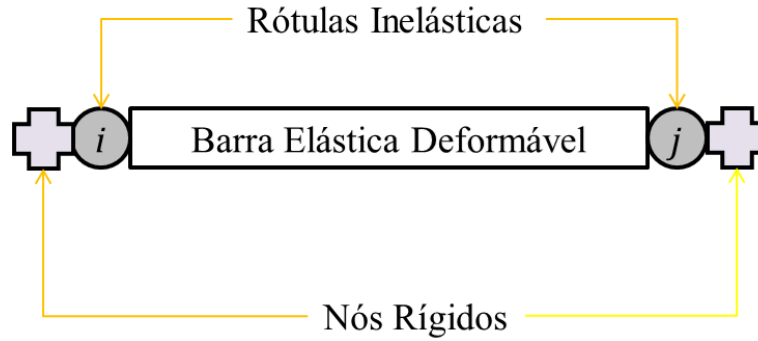
A mecânica da fratura e a mecânica do dano não são adequadas para fins práticos em aplicações na Engenharia Civil, por esse motivo, atualmente não são usadas com frequência nesse ramo, tendo assim um uso limitado em campos específicos. Mas, os conceitos que dão base a ambas as teorias são fortemente apoiados pela termodinâmica (AMORIM, 2016).

Flórez-Lopez (1993, 1995) modelou estruturas em concreto armado usando os conceitos da mecânica da fratura e mecânica do dano, juntamente com o conceito de rótula plástica. Tal modelo foi a base de vários estudos em todo o mundo, com várias aplicações para edifícios em concreto armado, pontes, arcos, entre outros. Esses desenvolvimentos estão reunidos em um novo ramo da mecânica estrutural, que é chamado de Teoria do Dano Concentrado (TDC).

A modelagem não linear de estruturas em concreto armado com a TDC é realizada assumindo que os fenômenos inelásticos estão concentrados nas rótulas plásticas, localizadas nas extremidades do elemento estrutural. Dessa forma, o elemento estrutural, é considerado

como um elemento de pórtico com comportamento elástico linear, com duas rótulas inelásticas nas extremidades (Figura 16).

Figura 16: Elemento de Barra.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Considerando a hipótese de equivalência, as deformações generalizadas podem ser descritas conforme a Equação 43.

$$\{\Phi\}_b = \{\Phi^e\}_b + \{\Phi^p\}_b + \{\Phi^D\}_b \quad (43)$$

sendo $\{\Phi^e\}_b$ a matriz de deformações generalizadas da barra elástica, $\{\Phi^p\}_b$ a matriz de deformações plástica e $\{\Phi^D\}_b$ a matriz de deformação de dano.

Utilizando a teoria de Euler-Bernoulli, em notação de Powell, tem-se que as deformações generalizadas elásticas podem ser descritas pela Equação 44.

$$\{\Phi^e\}_b = [F_0]_b \{M\}_b + \{\Phi^0\}_b \quad (44)$$

onde $\{\Phi^0\}_b$ é a matriz de deformações iniciais.

Normalmente, os alongamentos plásticos são negligenciados no cálculo de estruturas em concreto armado. Portanto, a matriz de deformações plásticas contém apenas as rotações, podendo ser expressa como:

$$\{\Phi^p\}_b = \begin{Bmatrix} \phi_i^p \\ \phi_j^p \end{Bmatrix} \quad (45)$$

onde ϕ_i^p e ϕ_j^p são as rotações plásticas nas rótulas que ficam nos nós do elemento.

A deformação no elemento provocada pela presença de fissuras no concreto, é chamada de deformação de dano, que é levada em conta pela variável interna de dano, assim como na mecânica do dano, poderá assumir valores de 0 a 1. Essa variável de dano se aplica nas rótulas dos nós i e j , que serão aqui apresentados por D_i e D_j .

Com base na lei constitutiva e na equivalência de deformações, tem-se:

$$\{\Phi^D\}_b = [C(D)]_b \{M\}_b \quad (46)$$

onde $[C(D)]_b$ é a matriz de flexibilidade adicional devido a fissuração que é escrita:

$$[C(D)]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b D_i}{3EI_b(1-D_i)} & 0 \\ 0 & \frac{L_b D_j}{3EI_b(1-D_j)} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Quando se tem $D_i = 0$ e $D_j = 0$, ou seja, tem-se uma estrutura íntegra, a matriz de flexibilidade adicional $[C(D)]_b$ terá um valor nulo. Caso $D_i = 1$ e $D_j = 1$, as rótulas do elemento se comportam como articulações perfeitas.

Substituindo a eq. (44) e eq. (46) na eq. (43), a relação constitutiva resulta em:

$$\{\Phi - \Phi^p\}_b = [F(D)]_b \{M\}_b \quad (48)$$

onde $[F(D)]_b$ é a matriz de flexibilidade do elemento danificado, dada pela soma de $[F_0]_b$ com $[C(D)]_b$.

$$[F(D)]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI_b(1-D_i)} & -\frac{L_b}{6EI_b} \\ -\frac{L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3EI_b(1-D_j)} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Dessa forma, está incluída a variável de dano e a rotação plástica na equação constitutiva do elemento.

Aplicando o critério de energia de Griffith nas rótulas inelásticas i , tem-se:

$$\text{Se } G_i^D < R_i^D, \Delta D_i = 0 \quad (50)$$

$$\text{Se } G_i^D = R_i^D, \Delta D_i > 0 \quad (51)$$

onde G_i^D é a taxa de liberação de energia da rótula em termos de variável de dano, que também pode ser entendida como um momento de condução de dano. Tal quantidade pode ser determinada pela Equação 52.

$$G_i^D = \frac{L_b m_i^2}{6EI_b(1 - D_i)^2} \quad (52)$$

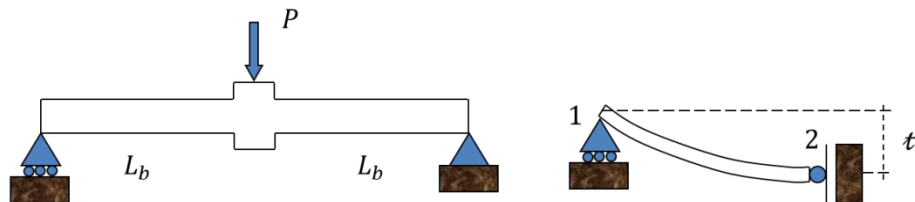
É importante salientar que ao escrever o índice i nas formulações aqui expostas, entende-se por qualquer uma das articulações (i ou j). São as mesmas equações.

O termo R_i^D é a função da resistência ao dano (ou fissuração) das rótulas inelásticas, sua definição é feita com base no material, sendo assim, determinado através de experimentos.

Na abordagem da mecânica da fratura, durante a modelagem, a quantidade de fissuras e seu comprimento são importantes. Já pela abordagem da TDC, essas medidas são irrelevantes. A variável interna de dano é medida por meio de testes a flexão com ciclos de carga e descarga, onde se pode obter por análise dos dados experimentais a perda de rigidez à flexão devido ao surgimento de fissuras que é exatamente a variável de dano (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

Dado um elemento de pórtico plano de concreto armado, efetua-se uma análise à flexão, onde é simulado uma rótula ou nó no ponto onde está sendo aplicada a carga. Portanto, é considerada a metade do elemento estando entre os nós i e j (Figura 17).

Figura 17: Elemento de pórtico de concreto armado.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Como o nó i não possui restrição quanto à rotação, não há flexão no nó, isto é: $\phi_i = 0$. Desta forma, para o elemento da Figura 17, a relação constitutiva é dada por:

$$\phi_j - \phi_j^p = -\frac{L_b}{6EI_b} m_i + \frac{L_b}{3EI_b(1 - D_j)} m_j \quad (53)$$

Do equilíbrio no elemento, os momentos fletores nos nós são:

$$m_i = 0 \quad m = \frac{PL_b}{2} \quad (54)$$

De acordo com a cinemática de deformação do elemento, a rotação no nó j é dada por:

$$\phi_j = \frac{t}{L_b} \quad \phi_j^p = \frac{t_p}{L_b} \quad (55)$$

sendo t o deslocamento total no centro do vão do elemento no ponto de aplicação da carga P e t_p é o deslocamento plástico residual ao fim do descarregamento.

Substituindo a Equação 54 e 55 na Equação 53 e partindo da relação clássica que relaciona uma força com um deslocamento, obtém-se:

$$P = E(D)(t - t^p) \quad (56)$$

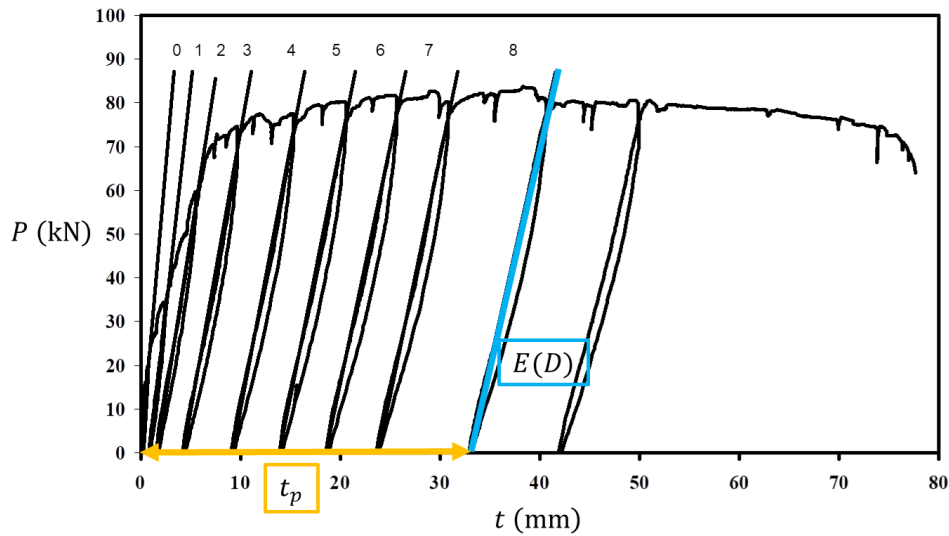
$$E(D) = \frac{6EI_b}{L_b^3} (1 - D) \quad (57)$$

$$\frac{6EI_b}{L_b^3} = E_0 \quad (58)$$

onde E_0 é a rigidez inicial e D_j foi reescrito apenas como D .

A obtenção da função $E(D)$ é feita através de um ensaio de carga e descarga no elemento, com os dados, formado um gráfico de Força versus Deslocamento (Figura 18).

Figura 18: Gráfico Força versus Deslocamento.



Fonte: Adaptado de Flórez-López, et al., (2015).

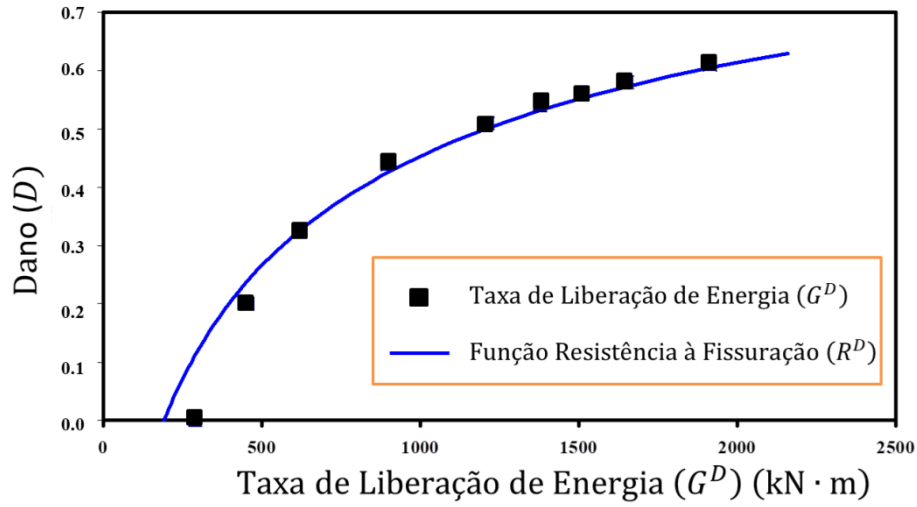
Como é mostrado na Figura 18, o valor de $E(D)$ é a inclinação da reta que liga o ponto de início do descarregamento e o ponto de deslocamento residual plástico após fim do descarregamento em um determinado ciclo. A variável $E(D)$ indica a cada ciclo de carga, a perda de rigidez e consequentemente um aumento na variável de dano na medida em que a inclinação em relação ao eixo horizontal diminui.

A inclinação E_0 da reta refere-se ao início do ensaio cíclico quando ainda não ocorreu dano, se tratando, portanto, da rigidez inicial do elemento. Assim, com base na equação anterior, a variável interna de dano pode ser facilmente calculada a partir de dados experimentais.

$$D = 1 - \frac{E(D)}{E_0} \quad (59)$$

Utilizando os parâmetros de G^D e D , pode-se plotar um gráfico $D \times G^D$ que pode ser visualizado na Figura 19.

Figura 19: Gráfico Dano versus Taxa de Liberação de Energia.



Fonte: Adaptado de Cipollina, et al., (1995)

Como os pontos do gráfico são computados à medida que o dano cresce, pelo critério generalizado de Griffith tem-se que $G^D = R^D$. Assim, pode-se obter a melhor curva que se ajusta aos pontos do gráfico e obter a função de resistência à fissuração do elemento.

A expressão matemática que descreve os dados experimentais foi desenvolvida por Flórez-López, et al., (2015). É dada por:

$$R^D(D) = R_0 + q \frac{\ln(1 - D)}{1 - D} \quad (60)$$

onde R_0 e q são parâmetros que dependem das propriedades do elemento e podem ser obtidos por meio de uma análise via teoria clássica do concreto armado. R_0 pode ser entendido como a resistência inicial a fissuração e ocorre enquanto o elemento não apresenta dano (AMORIM, 2016). Seu valor pode ser obtido pela equação 61.

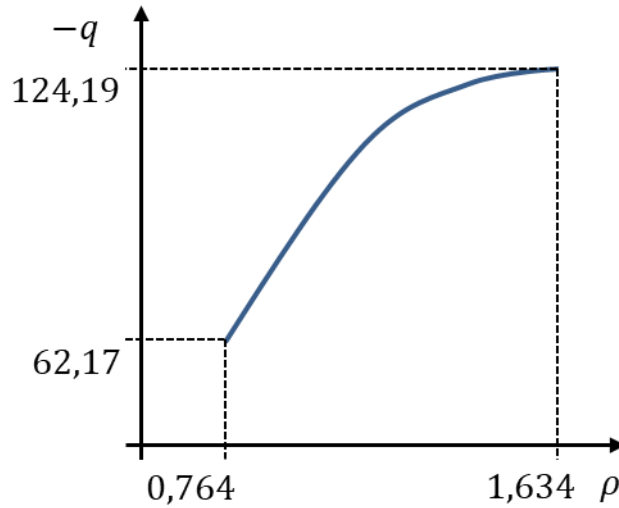
$$R_0 = \frac{F^0 M_r^2}{2} \quad (61)$$

onde M_r^2 como visto anteriormente, é o momento de fissuração que ocorre quando o momento na rótula atinge o ponto de formação da primeira fissura e F^0 é dado por:

$$F^0 = \frac{L_b}{3EI_b} \quad (62)$$

O termo q , é a adição da resistência da fissuração, pela presença da armadura, e precisa ser determinado através de equações que formam sistemas não lineares. Sua variação em relação a taxa de armadura longitudinal é apresentada na Figura 20.

Figura 20: Parâmetro q versus taxa de armadura longitudinal (ρ).



Fonte: Autor

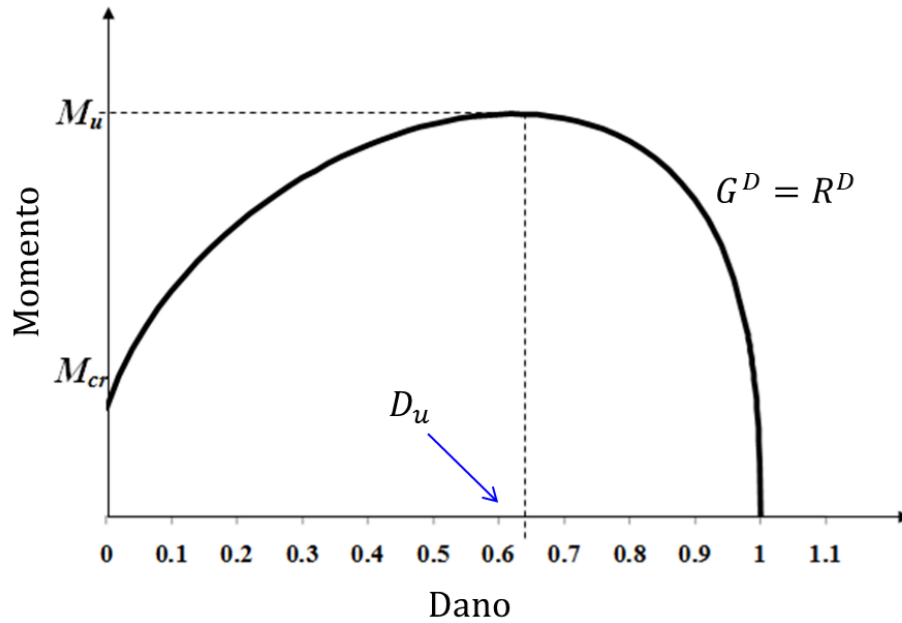
As equações são deduzidas do entendimento do comportamento do gráfico da Figura 21, onde o Momento Último (M_u) ocorre para um determinado valor de dano, chamado de Dano Último (D_u).

$$\frac{F^0 M_u^2}{2(1 - D_u)^2} = R_0 + q \frac{\ln(1 - D_u)}{1 - D_u} \quad (63)$$

Se $D = D_u$ então tem-se que $M = M_u$ e substituindo os valores de R_0 na Equação 63, obtém-se:

$$\frac{F^0 M^2}{2(1 - D)^2} = \frac{F^0 M_r^2}{2} + q \frac{\ln(1 - D)}{1 - D} \quad (64)$$

Figura 21: Gráfico Momento versus Dano conforme declarado no critério generalizado de Griffith.



Fonte: Flórez-López, et al., (2015)

Resolvido o sistema entre a Equações 64 e a sua derivada na Equação 65, é obtido o valor do dano último (D_u), assim como o parâmetro de encruamento (q).

$$2(1 - D_u)R_0 + q[\ln(1 - D_u) + 1] = 0 \quad (65)$$

Em elementos de concreto armado, D_u tem valores entre 0,6 e 0,65, mostrando que o colapso do elemento é atingido antes do dano teórico máximo de 1 (AMORIM, 2016).

Segundo Flórez-López; et al., (2015), com a aplicação dessas equações em rotinas baseada na teoria dos elementos finitos, é possível determinar o equilíbrio e o comportamento de uma estrutura de forma não linear. Nesse processo é levado em consideração o dano e o incremento na perda de rigidez do elemento em seus nós, levando assim em consideração a degradação da estrutura por fissuração que provoca de ruína em estruturas.

4.1.8 Modelo de Alva

Com o intuito de melhorar o desempenho do modelo proposto por Flórez-López (1995), em particular o processo de evolução da variável de dano da Equação 64, Alva (2004) sugeriu uma modificação na função limite que controla a danificação, inserindo um novo parâmetro f conforme mostrado na Equação 66.

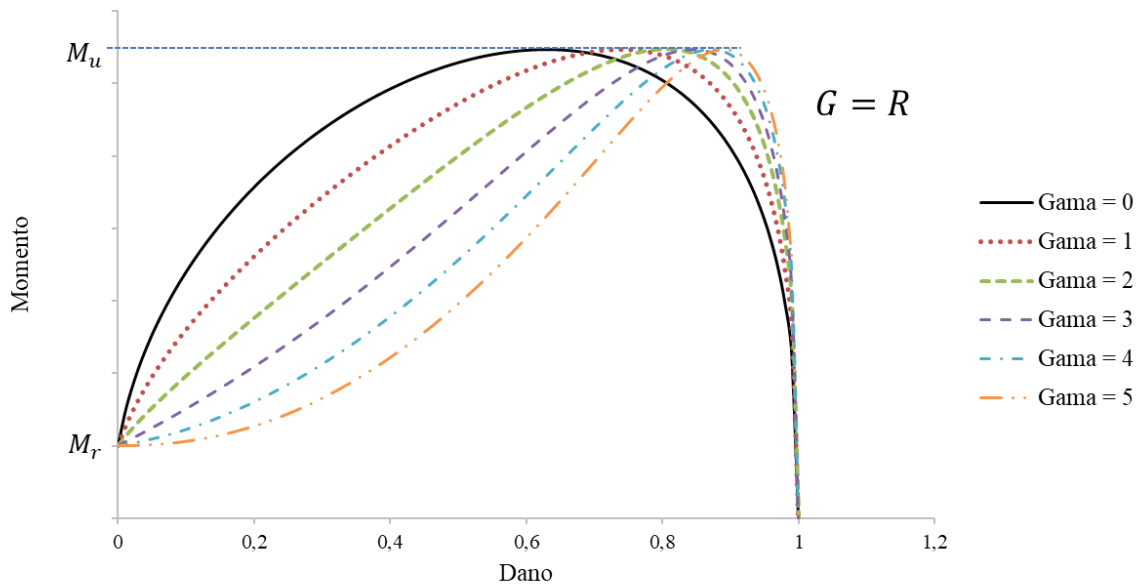
$$R^D(D) = R_0 + f \cdot q \frac{\ln(1-D)}{1-D} \quad (66)$$

Após diversos testes com diferentes funções, buscando simular uma maior evolução inicial da variável de dano em relação à fornecida pela função limite original, Alva (2004) propôs a função f conforme mostrado na Equação 67.

$$f = e^{-\gamma(1-D_a)} \quad (67)$$

onde γ é uma constante que necessita de uma calibração com base em resultados experimentais, como realizado por Alva (2004, 2010) e Araújo (2007). A variação da curva $G = R$ com a adição do Modelo de Alva (2004) é apresentado na Figura 22.

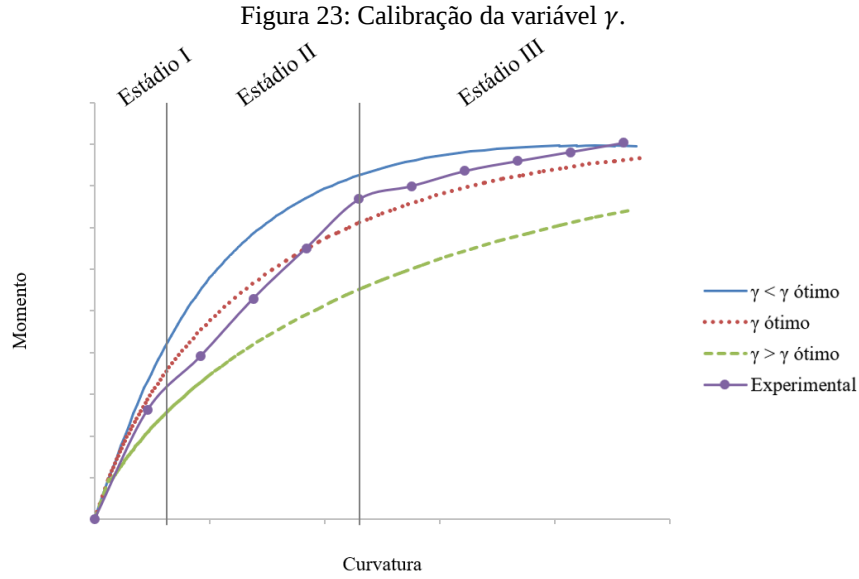
Figura 22: Variação da constante gama na função limite.



Fonte: Autor

Para $\gamma = 0$, a curva $G = R$ permanece com sua forma original proposta por Flórez-López (1995), e à medida que o valor de γ é aumentado, a curva assume maiores valores de dano para o mesmo momento atuante, aproximando cada vez mais o dano último do valor 1.

O valor de γ é calibrado em função do comportamento experimental do elemento e a curva numérica momento versus curvatura. Calibrando-se assim um $\gamma_{ótimo}$, tal que se $\gamma > \gamma_{ótimo}$ o dano e o deslocamento ficam superestimados, porém se $\gamma < \gamma_{ótimo}$ o dano e o deslocamento ficam subestimados, conforme ilustrado na Figura 23.



Fonte: Autor

Neste trabalho foi feita uma calibração da constante γ para cada tipo de ensaio analisado.

4.2 Formulação Proposta Neste Trabalho

Através do estudo da Teoria do Dano Concentrado, foi proposto um modelo de cálculo para o momento de inércia equivalente, utilizado para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado (Equação 68).

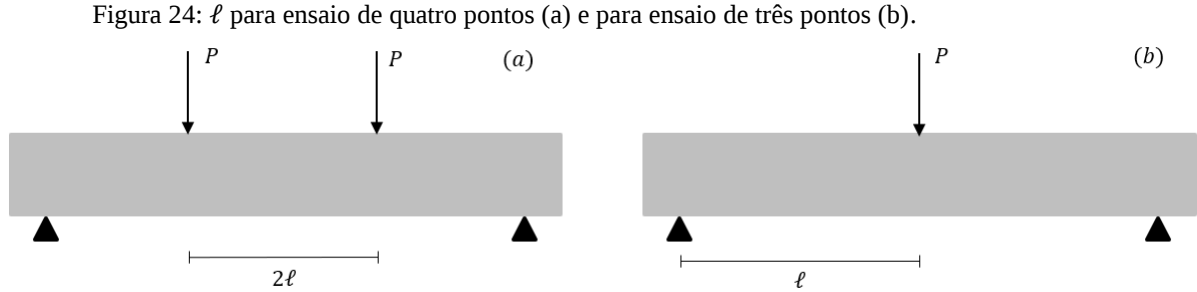
$$I_{eD} = I_I \cdot (1 - D_a) \quad (68)$$

onde o I_{eD} é o momento de inércia equivalente com dano, I_I é o momento de inércia da seção transversal do concreto armado no Estádio I, e D_a é o dano atuante na peça que varia de acordo com o momento atuante e é obtido através da TDC, com seguinte roteiro:

$$\frac{M_u^2 \ell}{6E_c I_I (1 - D_u)^2} = \frac{M_r^2 \ell}{6E_c I_I} + e^{-\gamma(1-D_u)} \cdot q \frac{\ln(1 - D_u)}{1 - D_u} \quad (69)$$

onde M_u é o momento último da viga, obtido através da teoria do concreto armado; E_c é o módulo de elasticidade do concreto; M_r é o momento de fissuração; γ é a calibração sugerida

por Alva (2004); ℓ é o comprimento do elemento de barra como mostrado na Figura 24 a e Figura 24 b para ensaio de quatro pontos e três pontos respectivamente.



Fonte: Autor

As variáveis q que se refere a adição da resistência da fissuração pela presença da armadura e D_u que é o dano presente na viga quando o momento atuante é igual ao momento último, devem ser calculadas através de um sistema linear entre a Equação 69 e a sua derivada igualada a 0 mostrada na Equação 70.

$$\frac{\partial M_u}{\partial D_u} = 0 \quad (70)$$

Esse sistema linear pode ser resolvido através de um processo de cálculo numérico.

Após ter encontrado todas as variáveis, elas devem ser substituídas na Equação 71, onde M_a é uma variável de entrada, que se refere ao momento atuante na viga, o qual se deseja verificar a flecha e D_a é o seu respectivo dano, encontrado nessa equação.

$$\frac{M_a^2 \ell}{6E_c I_I (1 - D_a)^2} = \frac{M_r^2 \ell}{6E_c I_I} + e^{-\gamma(1-D_a)} \cdot q \frac{\ln(1 - D_a)}{1 - D_a} \quad (71)$$

Finalmente encontrado o D_a , este poderá ser substituído na Equação 68, para obter o valor de I_{eD} . Para $M_a < M_r$ o concreto ainda não fissurou, logo, o valor de D_a será igual a 0, e a Equação 68 poderá ser reescrita, resultando na Equação 72.

$$I_{eD} = I_I \quad (72)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo proposto foi comparado com a Fórmula de Branson, o Método de Bischoff e o Método Bilinear, e sua precisão foi testada em trabalhos experimentais de outros autores, que fizeram ensaios de quatro e três pontos. Através da calibração, foi adotado $\gamma = 4$ para vigas ensaiadas à flexão em quatro pontos e $\gamma = 5$ para vigas ensaiadas à flexão em três pontos.

As características das vigas utilizadas e os resultados obtidos estão descritos de nos itens a seguir.

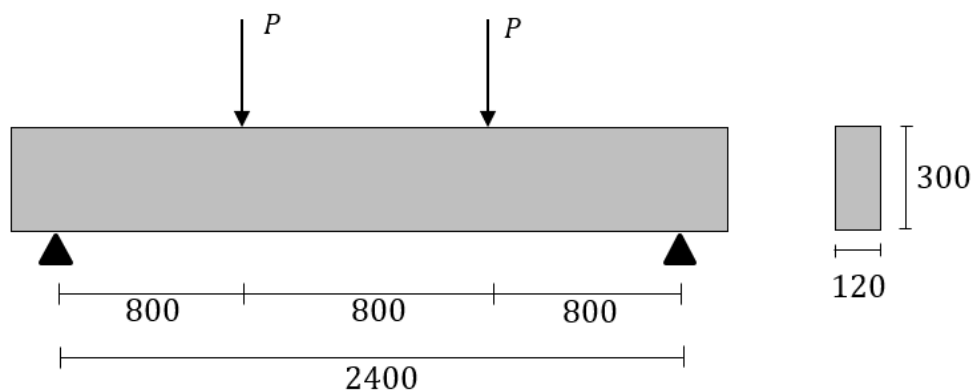
5.1 Análise dos trabalhos experimentais

5.1.1 ÁLVARES (1993)

Com o intuito de estudar um modelo de dano para concreto armado, Alvares (1993) ensaiou seis vigas e coletou os dados de força e deslocamento. A resposta experimental de cada tipo de viga foi colhida com controle de carga, sendo as leituras de deslocamentos feitas em relógios comparadores colocados nos apoios e no trecho central. Além disso foram distribuídos extensômetros elétricos nas faces superior e inferior, abrangendo a seção transversal central, e também nas armaduras longitudinais tracionadas.

As seis vigas foram distribuídas em três grupos distintos, que se diferenciavam pela taxa de armadura. As duas vigas de cada grupo tinham as mesmas propriedades, que estão descritas nas Tabelas 1, 4 e 7. O esquema de carregamento mostrado na Figura 25, foi utilizado em todas as vigas.

Figura 25: Esquema experimental de Álvares (1993).



Fonte: Adaptado de Álvares (1993)

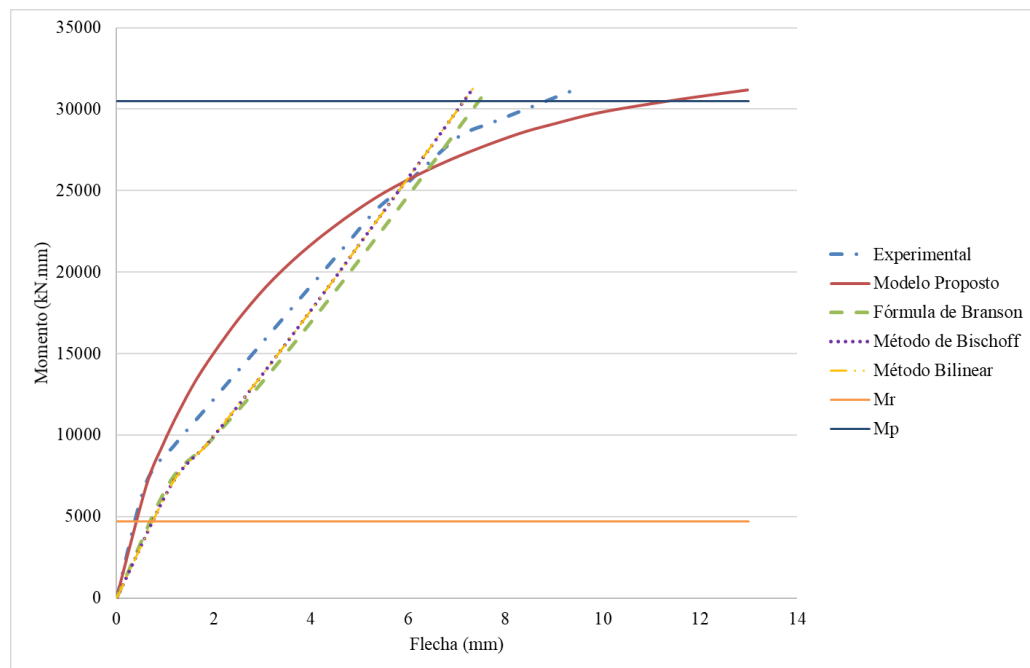
Tabela 1: Propriedades das vigas V1 e V2.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V1 e V2	120 X 300	39,27	235,61	0,764	285	155,15
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($kN \cdot mm$)	M_u ($kN \cdot mm$)
70,68	800	200	29,2	0,0272	4708	32000

Fonte: ÁLVARES (1993)

O modelo de cálculo proposto se manteve com valores de flecha inferiores a resposta experimental da viga V1 durante maior parte da evolução do momento, e menores valores de flecha para os momentos mais altos. Os demais métodos de cálculo fazem o caminho oposto, se mantendo com maiores valores de flecha durante maior parte da evolução do momento, e tendo valores de flecha menores que o experimental à medida que vai se aproximando do momento de plastificação.

Figura 26: Gráfico Momento versus Flecha da viga V1.



Fonte: Autor

Dentre os métodos utilizados para o cálculo da flecha, o Método de Bischoff e o Método Bilinear tiveram uma melhor aproximação do experimento. Tais características podem ser melhor analisadas através da Tabela 2, que mostra o valor da flecha para cada momento atuante, além do desvio médio simples, que quando assume valores negativos, indica que o método de cálculo teve maiores valores de flecha que a resposta experimental, proporcionando uma maior segurança no dimensionamento do elemento estrutural.

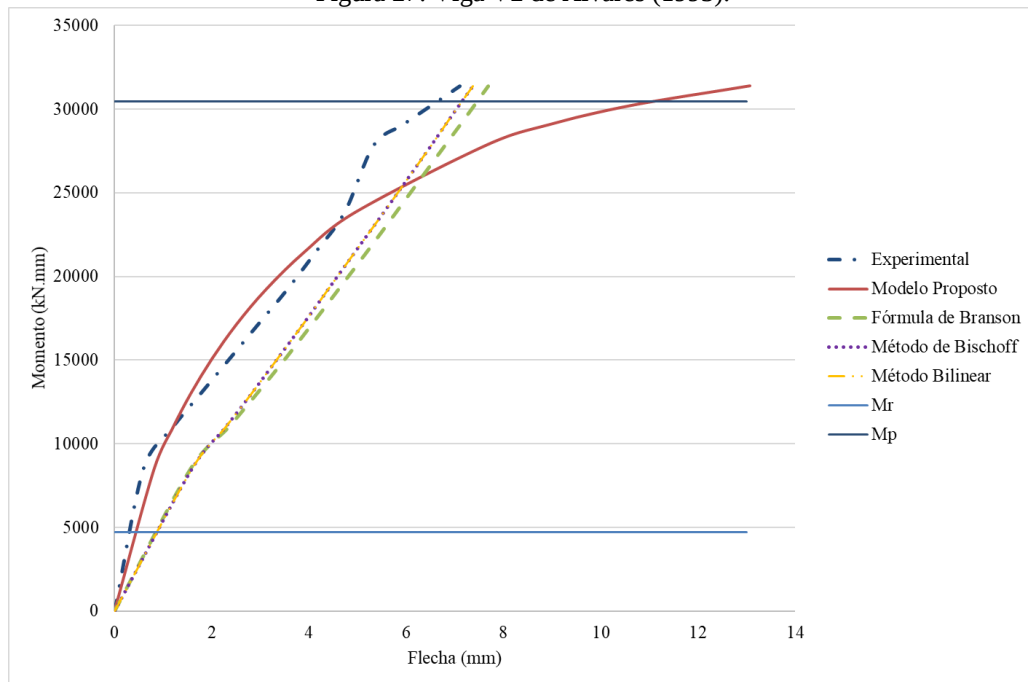
Tabela 2: Resultados da viga V1.

Tabela 2: Resultados da viga V1.									
Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V1 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
6960	0,59	0,62	0,95	1,06	0,56	1,13	0,52	1,13	0,52
9360	1,18	0,95	1,24	1,84	0,64	1,84	0,64	1,84	0,64
11416	1,78	1,28	1,39	2,47	0,72	2,4	0,74	2,4	0,74
13480	2,37	1,66	1,43	3,06	0,77	2,94	0,81	2,94	0,81
15536	2,96	2,12	1,40	3,63	0,82	3,47	0,85	3,47	0,85
17600	3,55	2,64	1,34	4,18	0,85	3,99	0,89	3,99	0,89
19656	4,14	3,25	1,27	4,71	0,88	4,5	0,92	4,5	0,92
21712	4,73	4,01	1,18	5,24	0,90	5,00	0,95	5,00	0,95
23768	5,33	4,92	1,08	5,77	0,92	5,51	0,97	5,51	0,97
25280	5,92	5,74	1,03	6,15	0,96	5,88	1,01	5,88	1,01
26944	6,51	6,89	0,94	6,57	0,99	6,29	1,03	6,29	1,03
28424	7,10	8,19	0,87	6,94	1,02	6,65	1,07	6,65	1,07
29128	7,69	9,02	0,85	7,11	1,08	6,82	1,13	6,82	1,13
29832	8,28	9,97	0,83	7,29	1,14	6,99	1,18	6,99	1,18
30560	8,88	11,44	0,77	7,47	1,18	7,16	1,24	7,16	1,24
31200	9,47	12,98	0,73	7,63	1,24	7,33	1,29	7,33	1,29
Desvio Médio Simples		0,208		-0,456		-0,225		-0,225	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

Já a viga V2, que tem as mesmas propriedades da viga V1, o modelo proposto teve uma maior aproximação ao longo de toda a evolução do momento atuante, embora tenha obtido menores valores de flecha em parte da evolução do momento, como mostrado na Figura 27. Os resultados das flechas e o desvio médio simples estão dispostos na Tabela 3.

Figura 27: Viga V2 de Álvares (1993).



Fonte: Autor

Tabela 3: Resultados da viga V2.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V2 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
8504	0,59	0,82	0,72	1,56	0,38	1,59	0,37	1,59	0,37
10952	1,18	1,20	0,98	2,33	0,51	2,27	0,52	2,27	0,52
13024	1,78	1,57	1,13	2,93	0,61	2,82	0,63	2,82	0,63
15096	2,37	2,01	1,18	3,51	0,68	3,35	0,71	3,35	0,71
17168	2,96	2,52	1,17	4,06	0,73	3,88	0,76	3,88	0,76
19232	3,55	3,12	1,14	4,60	0,77	4,39	0,81	4,39	0,81
21496	4,14	3,92	1,06	5,19	0,80	4,95	0,84	4,95	0,84
23864	4,73	4,96	0,95	5,79	0,82	5,54	0,85	5,54	0,85
27840	5,33	7,64	0,70	6,79	0,78	6,51	0,82	6,51	0,82
29064	5,92	8,92	0,66	7,10	0,83	6,80	0,87	6,80	0,87
30224	6,51	10,63	0,61	7,39	0,88	7,08	0,92	7,08	0,92
31392	7,10	13,06	0,54	7,68	0,92	7,37	0,96	7,37	0,96
Desvio Médio Simples									
		-1,18		-1,06		-0,86		-0,86	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

As vigas V3 e V4 possuem uma taxa de armadura superior as das vigas V1 e V2, suas propriedades estão descritas na Tabela 4.

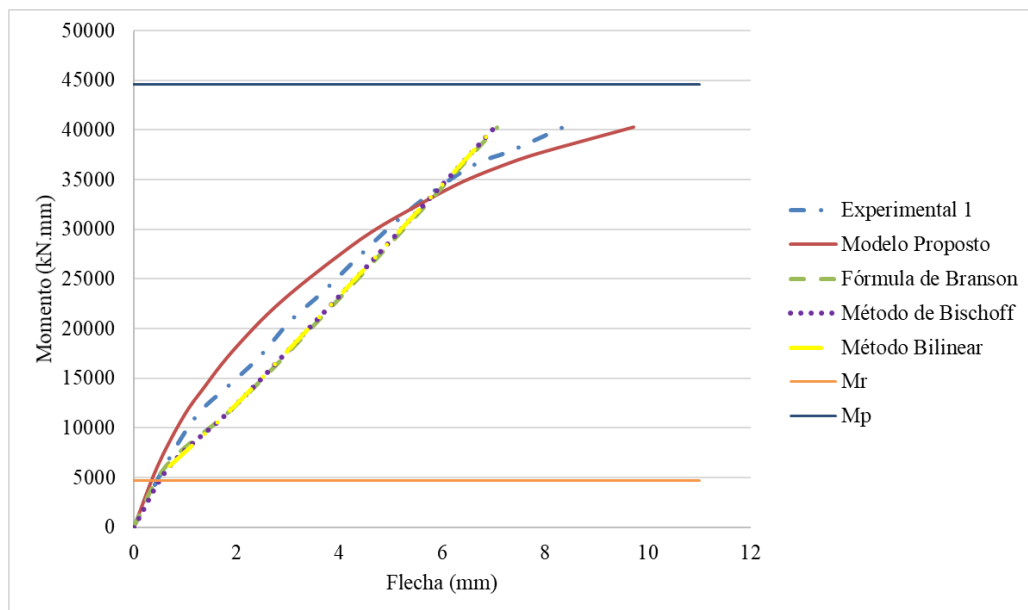
Tabela 4: Propriedades das vigas V3 e V4.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V3 e V4	120 X 300	39,27	393	1,20	275	157,34
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($kN \cdot mm$)	M_u ($kN \cdot mm$)
85,93	800	200	29,2	0,0272	4708	48000

Fonte: Álvares (1993)

O ensaio da viga V3 foi interrompido antes do momento de plastificação. Neste experimento, o modelo proposto teve uma aproximação numérica de acurácia similar aos demais métodos de cálculo de flecha (Figura 28), porém seus valores de flecha são menores que o experimento. O desvio médio simples é dado na Tabela 5.

Figura 28: Gráfico Momento versus Flecha da viga V3.



Fonte: Autor

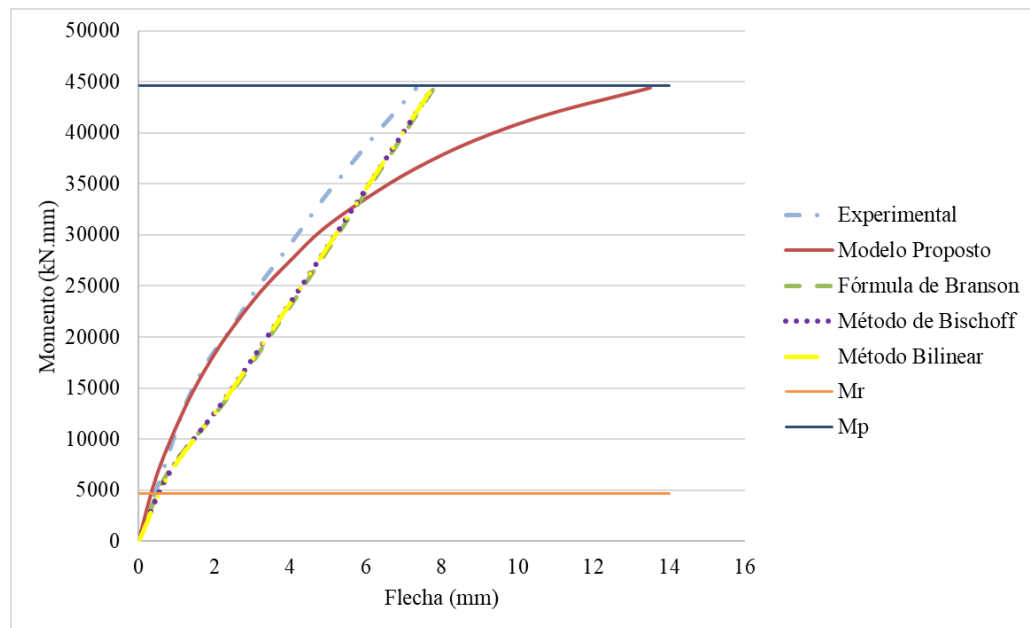
Tabela 5: Resultados da viga V3.

Tabela 3: Resultados da viga V3:									
Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V3 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
6144	0,61	0,46	1,33	0,63	0,97	0,69	0,88	0,69	0,88
11184	1,22	0,97	1,26	1,76	0,69	1,75	0,70	1,75	0,70
14176	1,83	1,38	1,33	2,36	0,78	2,33	0,79	2,33	0,79
17120	2,44	1,82	1,34	2,92	0,84	2,87	0,85	2,87	0,85
20800	3,05	2,47	1,23	3,59	0,85	3,54	0,86	3,54	0,86
23600	3,66	3,06	1,20	4,10	0,89	4,05	0,90	4,05	0,90
26720	4,27	3,82	1,12	4,66	0,92	4,61	0,93	4,61	0,93
29760	4,88	4,63	1,05	5,2	0,94	5,15	0,95	5,15	0,95
32496	5,49	5,55	0,99	5,69	0,96	5,64	0,97	5,64	0,97
34848	6,10	6,42	0,95	6,1	1,00	6,06	1,01	6,06	1,01
36768	6,71	7,35	0,91	6,44	1,04	6,40	1,05	6,40	1,05
37904	7,32	8,04	0,91	6,64	1,10	6,60	1,11	6,60	1,11
40296	8,34	9,72	0,86	7,07	1,18	7,02	1,19	7,02	1,19
Desvio Médio Simples		0,02		-0,10		-0,06		-0,06	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

Em relação a viga V4, que tem as mesmas propriedades da viga V3, o modelo proposto se manteve muito próximo da resposta experimental ao longo da evolução do momento atuante (Figura 29). Entretanto, o modelo proposto superestimou a flecha para os momentos maiores, fazendo com que o desvio médio simples se afastasse de zero (Tabela 6).

Figura 29: Gráfico Momento versus Flecha da viga V4.



Fonte: Autor

Tabela 6: Resultados da viga V4.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V4 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
6656	0,61	0,50	1,22	0,75	0,81	0,81	0,75	0,81	0,75
13312	1,22	1,26	0,97	2,19	0,56	2,16	0,56	2,16	0,56
17720	1,83	1,91	0,96	3,03	0,60	2,98	0,61	2,98	0,61
20864	2,44	2,47	0,99	3,6	0,68	3,55	0,69	3,55	0,69
24448	3,05	3,23	0,94	4,25	0,72	4,20	0,73	4,20	0,73
27448	3,66	4,00	0,92	4,79	0,76	4,74	0,77	4,74	0,77
30496	4,27	4,85	0,88	5,33	0,80	5,28	0,81	5,28	0,81
33624	4,88	6,03	0,81	5,89	0,83	5,84	0,84	5,84	0,84
36448	5,49	7,29	0,75	6,39	0,86	6,34	0,87	6,34	0,87
39224	6,10	8,85	0,69	6,88	0,89	6,84	0,89	6,84	0,89
41840	6,71	10,84	0,62	7,34	0,91	7,30	0,92	7,30	0,92
44392	7,32	13,51	0,54	7,79	0,94	7,75	0,94	7,75	0,94
Desvio Médio Simples		-1,43		-0,89		-0,85		-0,85	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo. Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

Dentre as vigas ensaiadas por Álvares (1993), as vigas V5 e V6 tiveram a maior taxa de armadura. Suas propriedades são mostradas na Tabela 7.

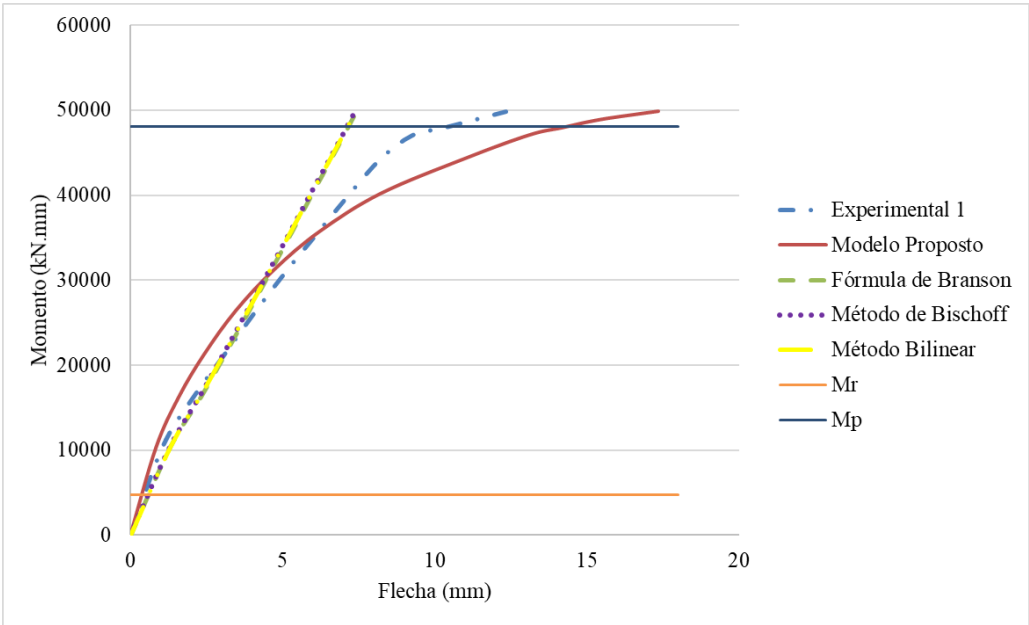
Tabela 7: Propriedades das vigas V5 e V6.

Viga	Dimensões (<i>b x h</i>)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	<i>d</i> (<i>mm</i>)	<i>x</i> ₁ (<i>mm</i>)
V5 e V6	120 X 300	39,27	550,00	1,634	245,00	160,58
<i>x</i> ₂ (<i>mm</i>)	<i>ℓ</i> (<i>mm</i>)	<i>E_s</i> (<i>kN/mm</i> ²)	<i>E_c</i> (<i>kN/mm</i> ²)	<i>f_{ck}</i> (<i>kN/mm</i> ²)	<i>M_r</i> (<i>kN.m</i>)	<i>M_u</i> (<i>kN.m</i>)
100,61	800	200	29,20	0,0272	4708	52000

Fonte: Álvares (1993)

Na viga V5, tanto o modelo proposto quanto os demais métodos de cálculo, tiveram em algum trecho, flechas menores que a experimental. O modelo proposto obteve melhores resultados para os momentos atuantes mais altos, diferente dos outros métodos que tiveram melhores resultados para momentos atuantes mais baixos. O melhor desvio médio simples foi o do modelo proposto, pois o resultado foi negativo, que indica que há maiores valores de flecha (Tabela 8).

Figura 30: Gráfico Momento versus Flecha da viga V5.



Fonte: Autor

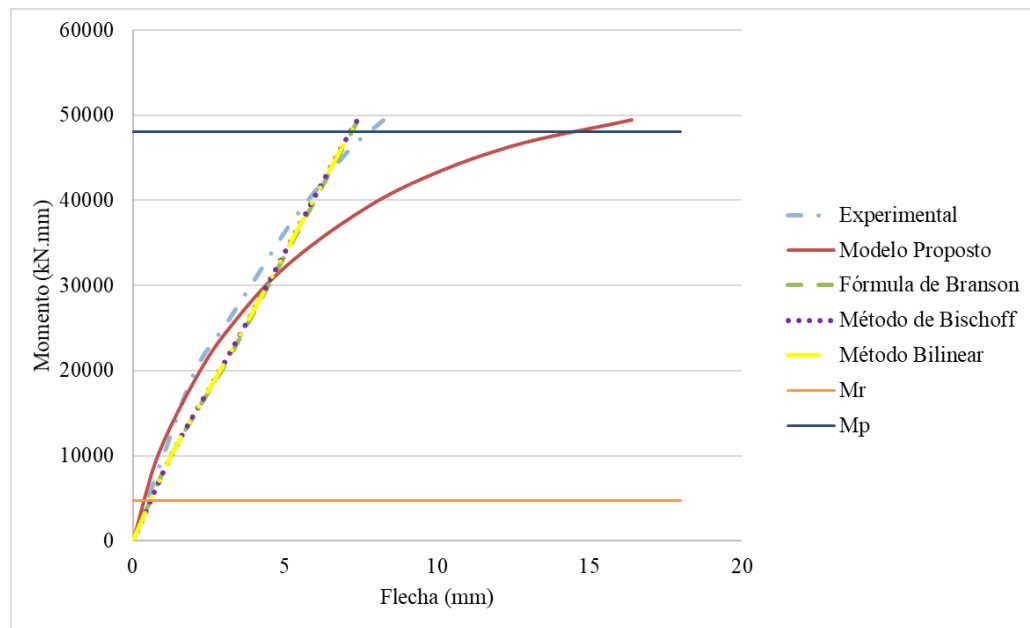
Tabela 8: Resultados da viga V5.

Tabela 6: Resultados da viga V3.									
Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V5 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
10280	1,03	0,84	1,23	1,29	0,80	1,29	0,80	1,29	0,80
16240	2,06	1,59	1,30	2,31	0,89	2,27	0,91	2,27	0,91
21280	3,09	2,43	1,27	3,11	0,99	3,06	1,01	3,06	1,01
26400	4,12	3,47	1,19	3,9	1,06	3,85	1,07	3,85	1,07
31200	5,14	4,72	1,09	4,63	1,11	4,58	1,12	4,58	1,12
35680	6,17	6,21	0,99	5,31	1,16	5,26	1,17	5,26	1,17
40160	7,20	8,23	0,87	5,98	1,20	5,93	1,21	5,93	1,21
44320	8,23	11,03	0,75	6,61	1,25	6,57	1,25	6,57	1,25
47040	9,26	13,11	0,71	7,02	1,32	6,98	1,33	6,98	1,33
47920	10,29	14,20	0,72	7,15	1,44	7,11	1,45	7,11	1,45
48880	11,32	15,48	0,73	7,29	1,55	7,25	1,56	7,25	1,56
49840	12,35	17,36	0,71	7,44	1,66	7,4	1,67	7,4	1,67
Desvio Médio Simples		-1,54		1,52		1,56		1,56	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

Para a viga V6, o modelo proposto teve um bom resultado para os primeiros momentos atuantes, mas para maiores momentos os resultados do modelo proposto se afastaram muito do resultado experimental, aumentando o valor do desvio médio simples (Tabela 9). Os demais métodos de cálculo tiveram melhores resultados para essa viga.

Figura 31: Gráfico Momento versus Flecha da viga V6.



Fonte: Autor

Tabela 9: Resultados da viga V6.

Tabela 5. Resultados da Viga V6.									
Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V5 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
10280	1,03	0,84	1,23	1,29	0,80	1,29	0,80	1,29	0,80
20080	2,06	2,22	0,93	2,92	0,71	2,87	0,72	2,87	0,72
25600	3,09	3,30	0,94	3,78	0,82	3,73	0,83	3,73	0,83
31360	4,12	4,75	0,87	4,65	0,89	4,61	0,89	4,61	0,89
37120	5,14	6,80	0,76	5,53	0,93	5,48	0,94	5,48	0,94
41920	6,17	9,13	0,68	6,25	0,99	6,20	1,00	6,20	1,00
46320	7,20	12,41	0,58	6,91	1,04	6,87	1,05	6,87	1,05
49440	8,23	16,40	0,50	7,34	1,12	7,38	1,11	7,38	1,11
Desvio Médio Simples		-2,35		-0,21		-0,17		-0,17	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo. Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

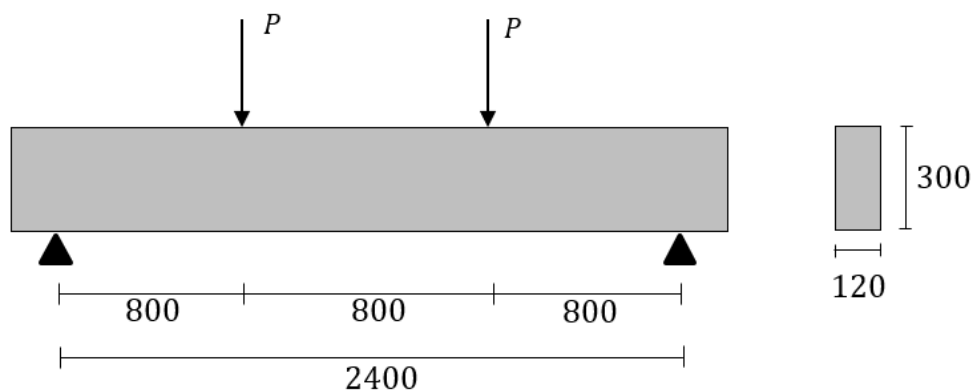
5.1.2 FERNANDES (1996)

Fernandes (1996) fez uma análise das deformações e do comportamento de vigas em concreto armado submetidas a flexão simples através de ensaios experimentais, cujo esquema do ensaio é apresentado na Figura 32. O carregamento foi aplicado gradualmente até a viga atingir a ruína. Em cada incremento de carga foram medidas as deformações na armadura e no

concreto através de extensômetros elétricos. Os deslocamentos foram determinados através de transdutores de deslocamentos.

Foram ensaiadas seis vigas com três grupos distintos, as propriedades destas são apresentadas nas Tabelas 10, 12 e 14. Durante os ensaios, os resultados das vigas de um mesmo grupo obtidos por Fernandes (1996), eram muito próximos, por esse motivo ele expôs os resultados das vigas através de média aritmética de cada grupo, e não de cada viga individualmente.

Figura 32: Esquema experimental de Fernandes (1996).



Fonte: Adaptado de Fernandes (1996)

Tabela 10: Propriedades das vigas V7.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V7	120 X 300	39,27	235,61	0,764	285	155,15
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)	M_u ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)
70,68	800	200,00	32,286	0,02393	5579,65	30492

Fonte: Fernandes (1996)

A viga V7 de Fernandes (1996) tem as mesmas dimensões e taxa de armadura das vigas V1 e V2 ensaiadas por Álvares (1993), o resultado obtido em ambos se assemelham. O modelo proposto tem valores de flecha mais baixo que a resposta experimental, diferente dos demais modelos de cálculo que tiveram resultados mais próximos dos obtidos pelo experimento. Estes resultados podem ser observados no gráfico da Figura 33 e na Tabela 11.

Figura 33: Gráfico Momento versus Flecha da viga V7.

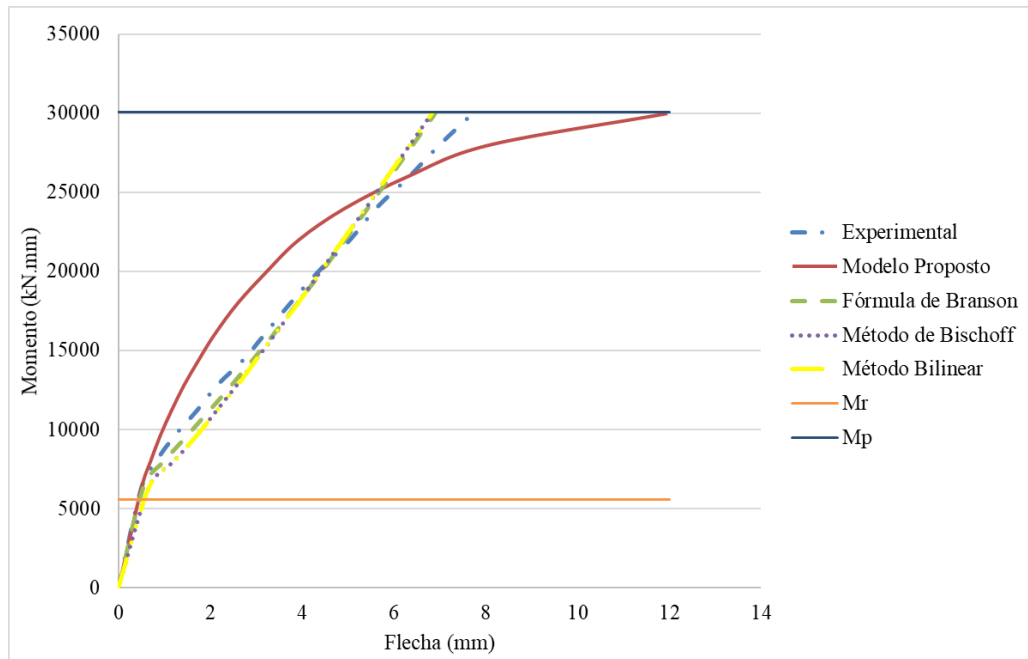


Tabela 11: Resultados da viga 7.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V7 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
6400	0,51	0,50	1,02	0,55	0,93	0,67	0,76	0,67	0,76
8000	0,82	0,69	1,19	0,99	0,83	1,21	0,68	1,21	0,68
9600	1,22	0,90	1,36	1,49	0,82	1,70	0,72	1,70	0,72
11200	1,71	1,15	1,49	1,98	0,86	2,14	0,80	2,14	0,80
12800	2,15	1,42	1,51	2,46	0,87	2,58	0,83	2,58	0,83
14400	2,72	1,74	1,56	2,92	0,93	3,00	0,91	3,00	0,91
16000	3,18	2,08	1,53	3,37	0,94	3,41	0,93	3,41	0,93
18000	3,75	2,59	1,45	3,90	0,96	3,91	0,96	3,91	0,96
20000	4,36	3,23	1,35	4,43	0,98	4,41	0,99	4,41	0,99
22000	5,05	3,92	1,29	4,93	1,02	4,90	1,03	4,90	1,03
24000	5,62	4,93	1,14	5,43	1,03	5,40	1,04	5,40	1,04
26000	6,34	6,29	1,01	5,92	1,07	5,87	1,08	5,87	1,08
28000	7	8,07	0,87	6,41	1,09	6,36	1,10	6,36	1,10
30000	7,73	11,95	0,65	6,90	1,12	6,84	1,13	6,84	1,13
Desvio Médio Simples		0,19		0,03		-0,02		-0,02	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

A viga V8, que tem taxa de armadura maior que a viga V7, tem propriedades apresentadas na Tabela 12.

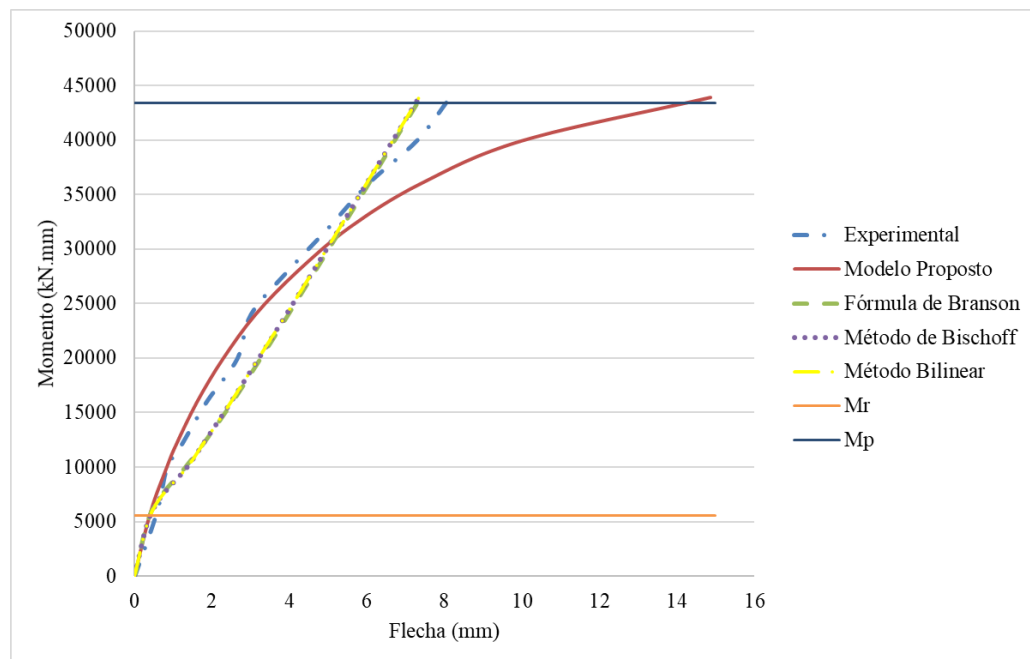
Tabela 12: Propriedades das vigas V8.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V8	120 X 300	39,27	393,00	1,2	275	157,34
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)	M_u ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)
85,93	800	200	32,286	0,02393	5579,65	45640

Fonte: Fernandes (1996)

O modelo proposto teve um bom resultado em relação aos demais métodos de cálculo, embora tenha menores valores de flecha que a resposta experimental em alguns pontos, o modelo proposto teve uma maior aproximação ao longo da evolução do momento, mas se afastou da resposta experimental nos dois últimos pontos, como mostra a Tabela 13 e o gráfico da Figura 34.

Figura 34: Gráfico Momento versus Flecha da viga V8.



Fonte: Autor

Tabela 13: Resultados da viga V8.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V8 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
5976	0,58	0,43	1,35	0,43	1,35	0,46	1,26	0,46	1,26
9936	0,83	0,83	1,00	1,29	0,64	1,35	0,61	1,35	0,61
12000	1,2	1,07	1,12	1,74	0,69	1,75	0,69	1,75	0,69
15960	1,85	1,61	1,15	2,52	0,73	2,49	0,74	2,49	0,74
19960	2,65	2,29	1,16	3,25	0,82	3,21	0,83	3,21	0,83
24000	3,00	3,13	0,96	3,97	0,76	3,92	0,77	3,92	0,77
27960	3,95	4,21	0,94	4,66	0,85	4,61	0,86	4,61	0,86
32000	5,02	5,56	0,90	5,36	0,94	5,31	0,95	5,31	0,95
36000	6,04	7,39	0,82	6,05	1,00	5,99	1,01	5,99	1,01
39960	7,30	10,03	0,73	6,72	1,09	6,67	1,09	6,67	1,09
43912	8,15	14,87	0,55	7,40	1,10	7,35	1,11	7,35	1,11
Desvio Médio Simples		-0,99		-0,26		-0,23		-0,23	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

A viga V9 de Fernandes (1996) tem uma taxa de armadura maior do que as vigas V7 e V8, suas propriedades são apresentadas na Tabela 14.

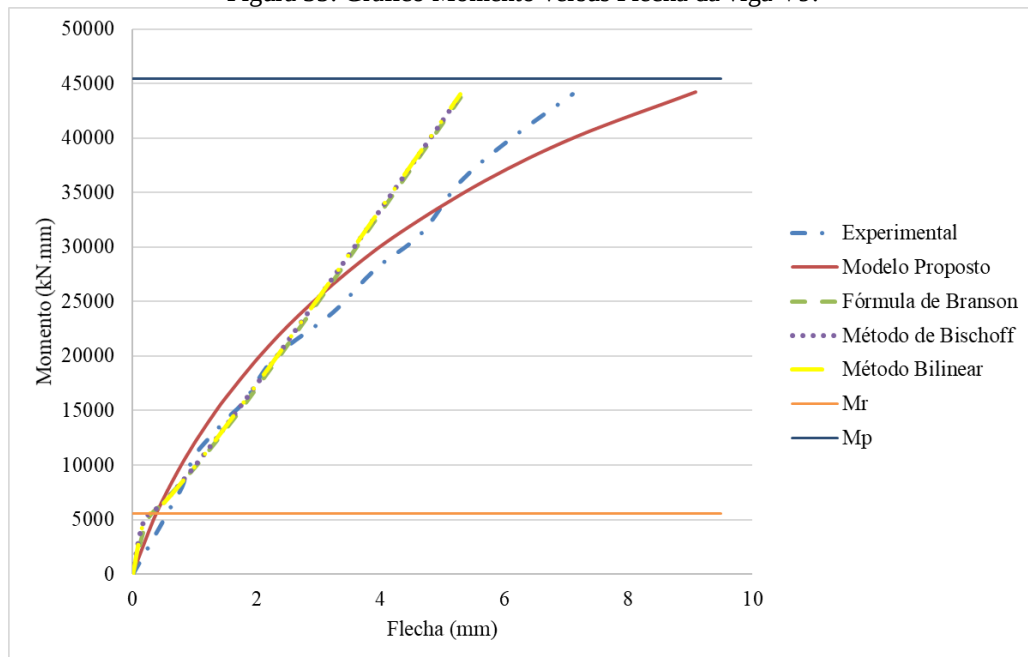
Tabela 14: Propriedades das vigas V9.

Viga	Dimensões (b x h)	A'_s (mm ²)	A_s (mm ²)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V9	120 X 300	39,27	550,00	1,634	245	160,58
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm ²)	E_c (kN/mm ²)	f_{ck} (kN/mm ²)	M_r (kN.mm)	M_u (kN.mm)
100,61	800	200	32,286	0,02393	5579,65	56168

Fonte: Fernandes (1996)

Assim como em resultados anteriores, o modelo proposto apresentou resultados menores que a resposta experimental da viga V9, porém se manteve próximo da resposta experimental durante a evolução do momento. Os demais métodos de cálculo tiveram um resultado mais próximo no início, mas prevaleceram com resultados de flecha menores que o experimental, deixando-os com os desvios médio simples com valores maiores que o modelo proposto. Estes resultados podem ser observados no gráfico da Figura 35 e na Tabela 15.

Figura 35: Gráfico Momento versus Flecha da viga V9.



Fonte: Autor

Tabela 15: Resultados da viga V9.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V7 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
4800	0,48	0,32	1,50	0,22	2,18	0,18	2,67	0,18	2,67
6360	0,63	0,46	1,37	0,45	1,40	0,47	1,34	0,47	1,34
7960	0,79	0,59	1,34	0,71	1,11	0,72	1,10	0,72	1,10
9600	0,89	0,79	1,13	0,97	0,92	0,96	0,93	0,96	0,93
11160	1,03	0,92	1,12	1,2	0,86	1,18	0,87	1,18	0,87
12800	1,28	1,07	1,20	1,43	0,90	1,40	0,91	1,40	0,91
14400	1,54	1,30	1,18	1,65	0,93	1,61	0,96	1,61	0,96
16000	1,82	1,50	1,21	1,86	0,98	1,82	1,00	1,82	1,00
20000	2,31	2,06	1,12	2,37	0,97	2,33	0,99	2,33	0,99
24000	3,23	2,68	1,21	2,87	1,13	2,83	1,14	2,83	1,14
28000	3,92	3,49	1,12	3,37	1,16	3,33	1,18	3,33	1,18
31200	4,65	4,35	1,07	3,76	1,24	3,72	1,25	3,72	1,25
36000	5,29	5,69	0,93	4,35	1,22	4,31	1,23	4,31	1,23
40000	6,12	7,16	0,85	4,84	1,26	4,80	1,28	4,80	1,28
44000	7,1	9,08	0,78	5,33	1,33	5,29	1,34	5,29	1,34
Desvio Médio Simples		-0,02		0,38		0,41		0,41	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo. Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

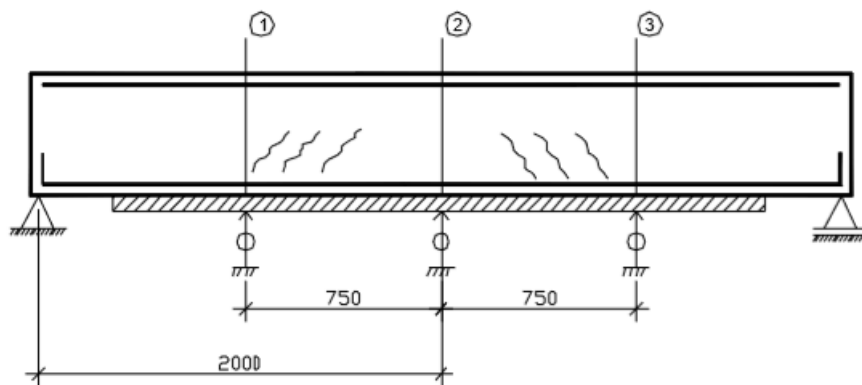
Fonte: Autor

5.1.3 MACHADO (2004)

Machado (2004) fez um estudo experimental da ductilidade de vigas em concreto armado reforçadas à flexão, utilizando compósitos com tecido de fibras de carbono. Para ter um parâmetro, Machado (2004) ensaiou uma viga de referência em concreto armado sem reforço, cujo esquema de carregamento é mostrado na Figura 37. As propriedades da viga são apresentadas na Tabela 16.

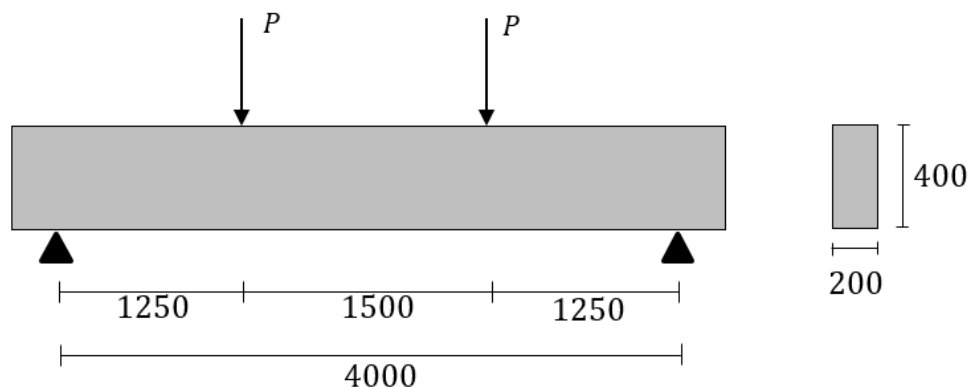
Foram utilizados extensômetros elétricos para medir as deformações das armaduras longitudinal de tração e transversal, a flecha da viga foi medida através de três deflectômetros elétricos com os valores obtidos diretamente em milímetros. Os deflectômetros foram posicionados nos pontos 1, 2 e 3 apresentados na Figura 36.

Figura 36: Posicionamento dos deflectômetros elétricos.



Fonte: Machado (2004)

Figura 37: Esquema experimental de Machado (2004).



Fonte: Adaptado de Machado (2004)

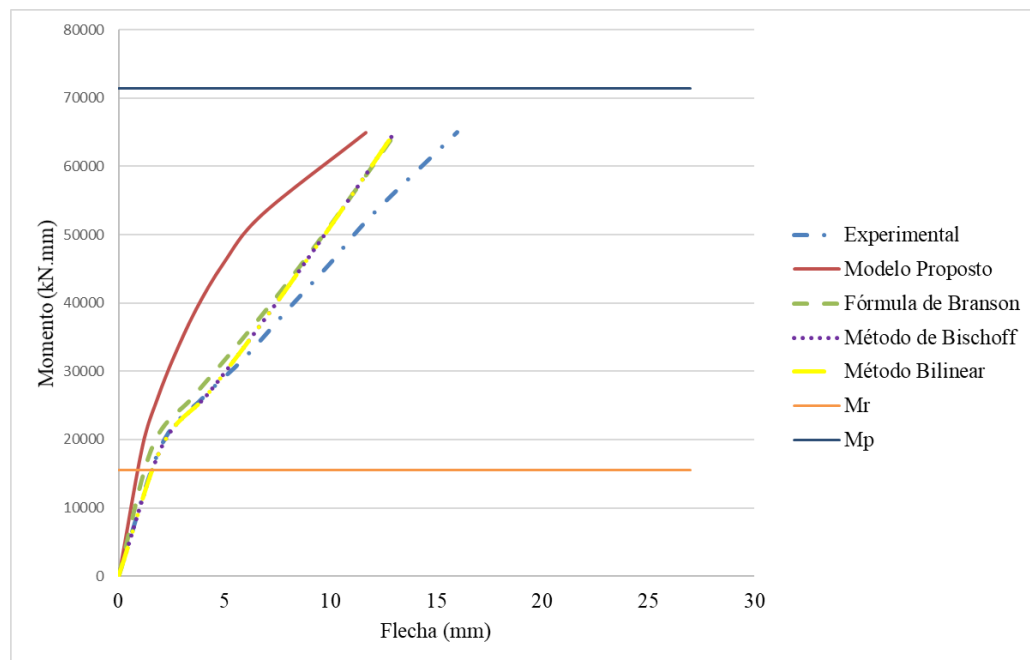
Tabela 16: A Propriedades da viga V10.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V10	200 X 400	39,27	403	0,551	385	205,30
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($kN \cdot mm$)	M_u ($kN \cdot mm$)
86,31	750	200	31,56	0,028	15491	73952,3

Fonte: Machado (2004)

Em relação a viga V10, tanto o Modelo Proposto quanto os demais métodos de cálculo, tiveram valores de flecha menores que a resposta experimental, porém os demais métodos de cálculo tiveram uma maior aproximação do resultado obtido através do experimento. Estes resultados são apresentados no gráfico da Figura 38 e na Tabela 17.

Figura 38: Gráfico Momento versus Flecha da viga V10.



Fonte: Autor

Tabela 17: Resultados da viga V10.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V10 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
19012,5	2,00	1,11	1,80	1,60	1,25	2,04	0,98	2,04	0,98
26187,5	4,00	1,84	2,17	3,49	1,15	4,07	0,98	4,07	0,98
32125,0	6,00	2,59	2,32	5,13	1,17	5,57	1,08	5,57	1,08
39087,5	8,00	3,64	2,20	6,98	1,15	7,23	1,11	7,23	1,11
45818,7	10,00	4,93	2,03	8,66	1,15	8,77	1,14	8,77	1,14
52968,7	12,00	6,75	1,78	10,36	1,16	10,38	1,16	10,38	1,16
65000,0	16,00	11,66	1,37	13,10	1,22	13,02	1,23	13,02	1,23
Desvio Médio Simples		1,62		1,28		1,24		1,24	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo. Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

5.1.4 CANAVAL (2016)

Canaval (2016) fez um estudo experimental referente ao estudo de vigas de concreto armado reforçadas à flexão por meio de graute, armaduras e conectores. Foram ensaiadas 5 vigas de referência que foram usadas como parâmetro em seu trabalho. As medidas de deformação no aço e no concreto foram obtidas através de extensômetros elétricos de resistência (FIGURA 39), e as flechas por sensor para deslocamento linear no centro da viga.

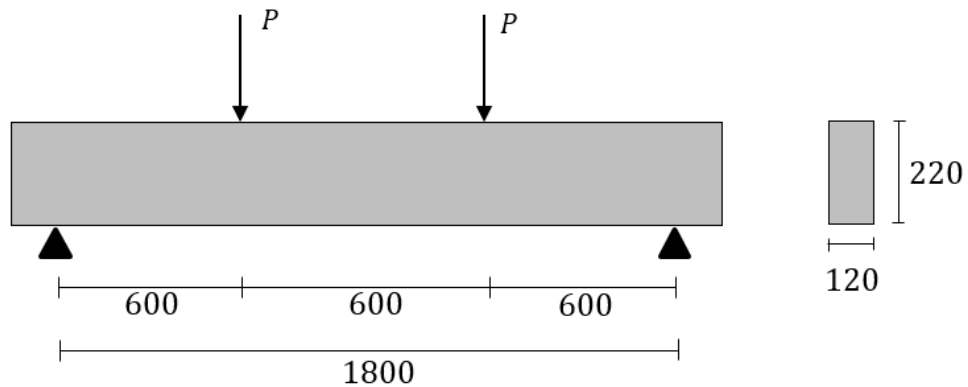
Figura 39: Posicionamento dos extensômetros.



Fonte: Canaval (2016)

O esquema de carregamento de Canaval (2016) é mostrado na Figura 40, para esta dissertação essa viga será chamada de V14. As propriedades da viga estão descritas na Tabela 18.

Figura 40: Esquema experimental de Canaval (2016).



Fonte: Adaptado de Canaval (2016)

Tabela 18: Propriedades da viga V11.

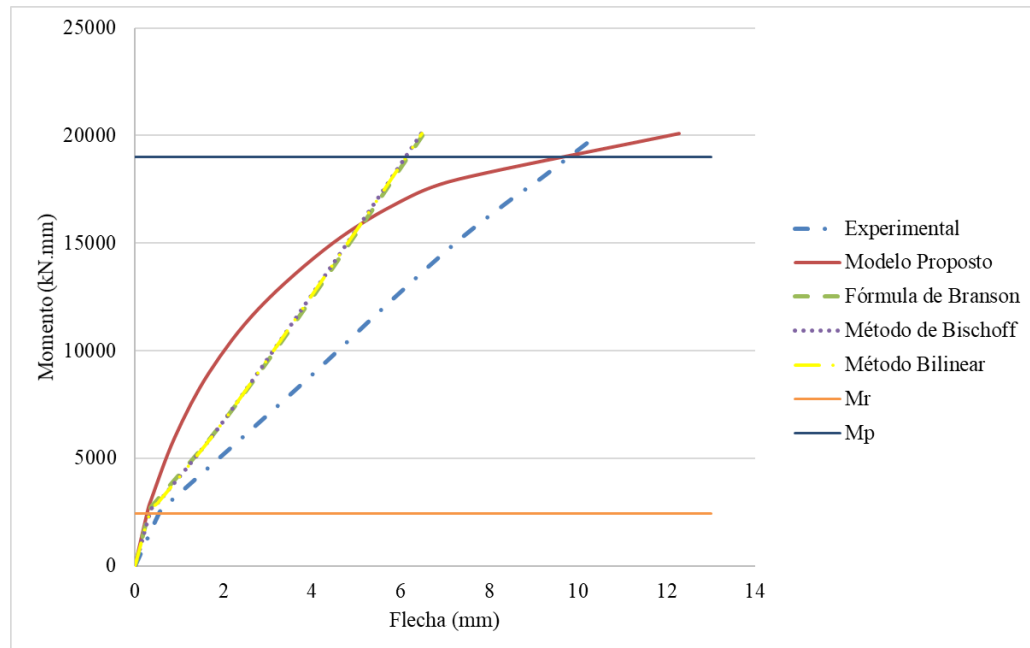
Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V11	120 X 220	39,27	245	1,077	190	115,15
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)	M_u ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)
61,16	600	200,00	27,04	0,02278	2448	20530

Fonte: Canaval (2016)

Assim como no resultado anterior, tanto o Modelo Proposto quanto os demais métodos de cálculo, tiveram valores de flecha menores que a resposta experimental, porém, o modelo proposto se aproxima da resposta experimental a medida que o momento aumenta, diferente dos demais métodos que se afastam da resposta experimental com o aumento do momento.

Estes resultados são apresentados no gráfico da Figura 41 e no desvio médio simples da Tabela 19.

Figura 41: Gráfico Momento versus Flecha da viga V11.



Fonte: Autor

Tabela 19: Resultados da viga V11.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V11 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
2622	0,58	2622	0,58	0,58	1,00	0,33	1,76	0,36	1,61
3000	0,80	3000	0,8	0,80	1,00	0,47	1,70	0,54	1,48
6000	2,44	6000	2,44	2,44	1,00	1,72	1,42	1,73	1,41
9000	4,06	9000	4,06	4,06	1,00	2,81	1,44	2,78	1,46
12000	5,61	12000	5,61	5,61	1,00	3,84	1,46	3,79	1,48
15000	7,23	15000	7,23	7,23	1,00	4,84	1,49	4,79	1,51
16980	8,46	16980	8,46	8,46	1,00	5,5	1,54	5,45	1,55
18000	9,16	18000	9,16	9,16	1,00	5,83	1,57	5,78	1,58
20109	10,50	20109	10,5	10,50	1,00	6,52	1,61	6,47	1,62
Desvio Médio Simples		1,41		1,89		1,91		1,91	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

5.1.5 FERNANDES E VARGAS (2015)

Fernandes e Vargas (2015) fizeram uma análise experimental de vigas de concreto armado sujeitas à flexão reforçadas com fibra de carbono (Figura 42), a fim de obter um

parâmetro foram ensaiadas quatro vigas de referência, cujas características são mostradas a seguir.

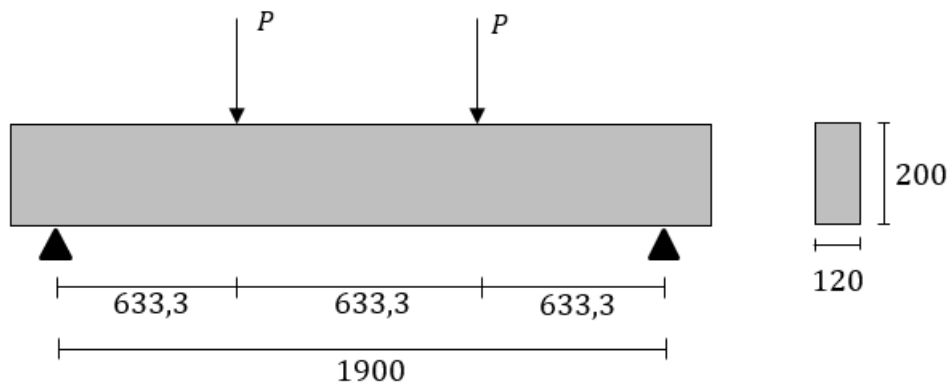
Figura 42: Ensaio de flexão simples de Fernandes e Vargas (2015).



Fonte: Fernandes e Vargas (2015)

O esquema de carregamento e as dimensões das vigas são mostrados na Figura 43 e as propriedades da viga de referência estão dispostas na Tabela 9.

Figura 43: Esquema experimental de Fernandes e Vargas (2015).



Fonte: Adaptado de Fernandes e Vargas (2015)

Tabela 20: Propriedades da viga V12.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V12	120 X 200	39,27	160	0,83	175,00	104,72
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($\text{kN}.\text{mm}$)	M_u ($\text{kN}.\text{mm}$)
52,87	633,33	200	24,11	0,01854	1794	12561

Fonte: Fernandes e Vargas (2015)

Os resultados da viga V12, tiveram as mesmas características dos obtidos nos trabalhos de Machado (2004) e Canaval (2016), onde o Modelo Proposto e o os demais métodos de cálculo, tiveram valores de flecha menores que a resposta experimental, porém, o modelo proposto se aproxima da resposta experimental a medida que o momento aumenta, diferente

dos demais métodos que se afastam da resposta experimental com o aumento do momento. Estes resultados são apresentados no gráfico da Figura 44 e na Tabela 21.

Figura 44: Gráfico Momento versus Flecha da viga V12.

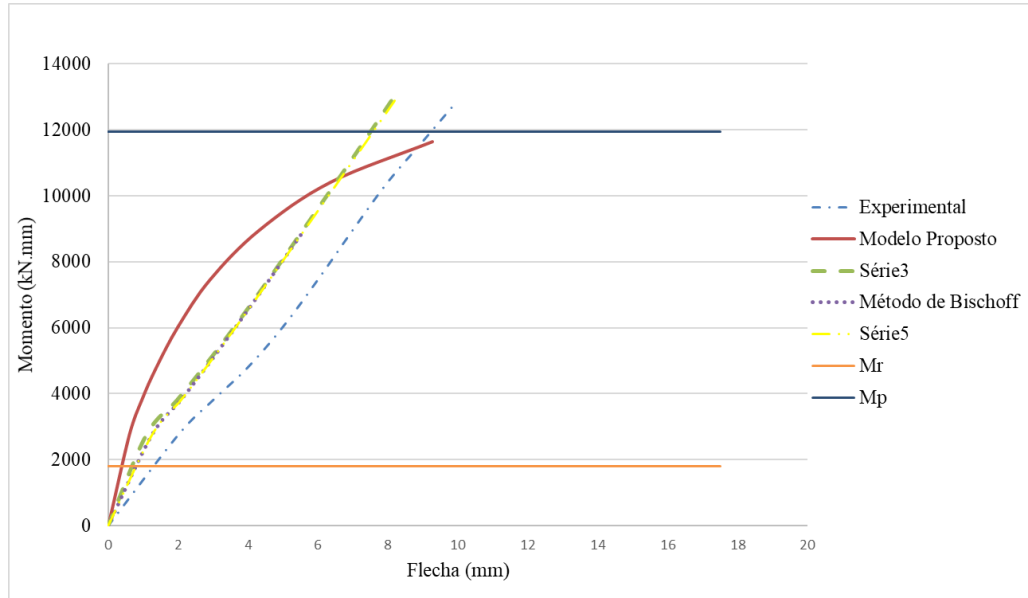


Tabela 21: Resultados da viga V12.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V12 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
2748,522	2	0,6	3,33	1,09	0,55	1,25	0,48	1,25	0,48
3809,3	3	0,96	3,13	1,97	0,49	2,08	0,46	2,08	0,46
4803,581	4	1,38	2,90	2,73	0,51	2,8	0,49	2,8	0,49
6025,85	5	1,99	2,51	3,61	0,55	3,65	0,55	3,65	0,55
7453,941	6	2,91	2,06	4,58	0,64	4,61	0,63	4,61	0,63
8961,195	7	4,33	1,62	5,57	0,78	5,61	0,77	5,61	0,77
10414,62	8	6,37	1,26	6,52	0,98	6,57	0,97	6,57	0,97
11643,22	9	9,29	0,97	7,312	1,27	7,38	1,26	7,38	1,26
Desvio Médio Simples		2,02		1,33		1,26		1,26	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo. Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

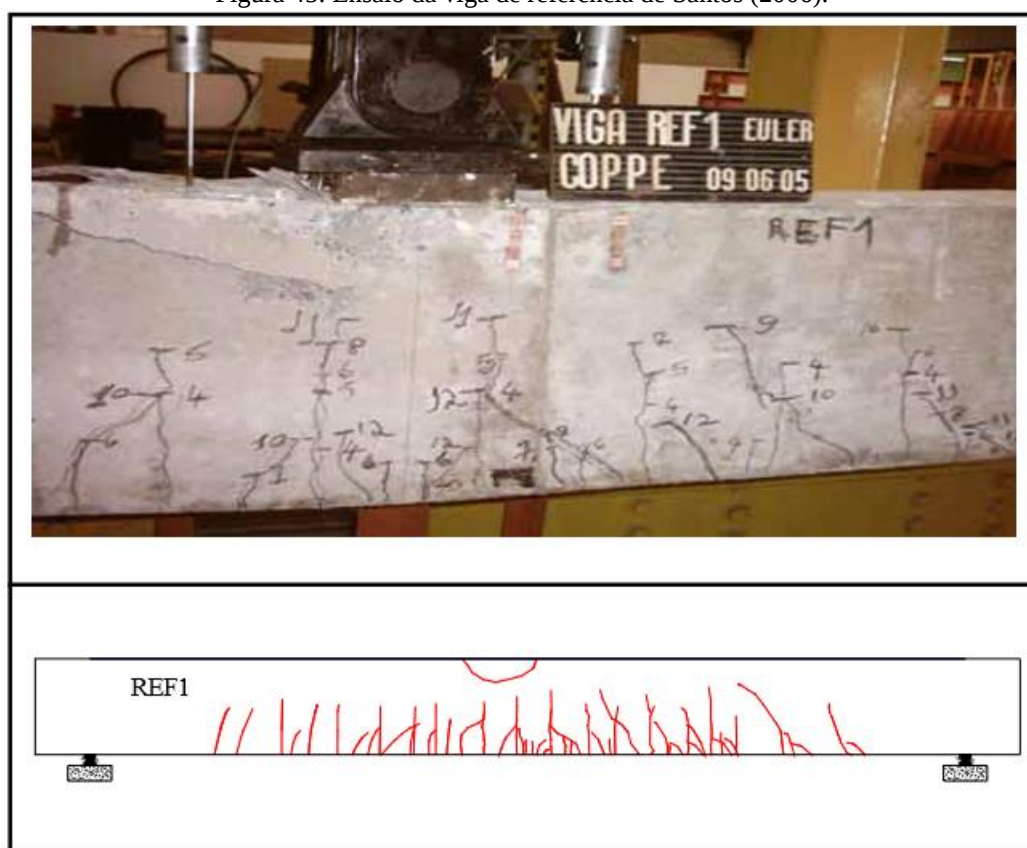
5.1.6 SANTOS (2006)

O trabalho experimental de Santos (2006) tinha como objetivo propor um reforço para vigas de concreto armado na região tracionada, através de um encamisamento feito também com concreto armado. Como parâmetro Santos (2006) ensaiou vigas de referência como mostrado na Figura 45.

As deformações das barras longitudinais do reforço foram medidas utilizando extensômetros elétricos com base de medição de 5 mm. As seções analisadas, a quantidade de extensômetros utilizados foram os mesmos das barras longitudinais de tração das vigas.

Os deslocamentos verticais das vigas ensaiadas foram medidos com dois deflectômetros elétricos com curso de 100 mm, nas seções a 150 mm do meio do vão (Figura 45).

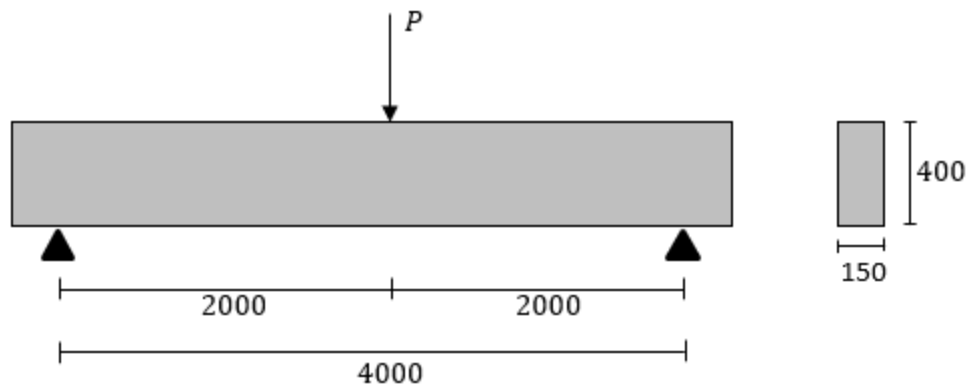
Figura 45: Ensaio da viga de referência de Santos (2006).



Fonte: Santos (2006)

O experimento foi feito através de um ensaio monotônico até a ruptura, conforme esquema apresentado na Figura 46. As propriedades das vigas são apresentadas na Tabela 22.

Figura 46: Esquema experimental de Santos (2006).



Fonte: Adaptado de Santos (2006)

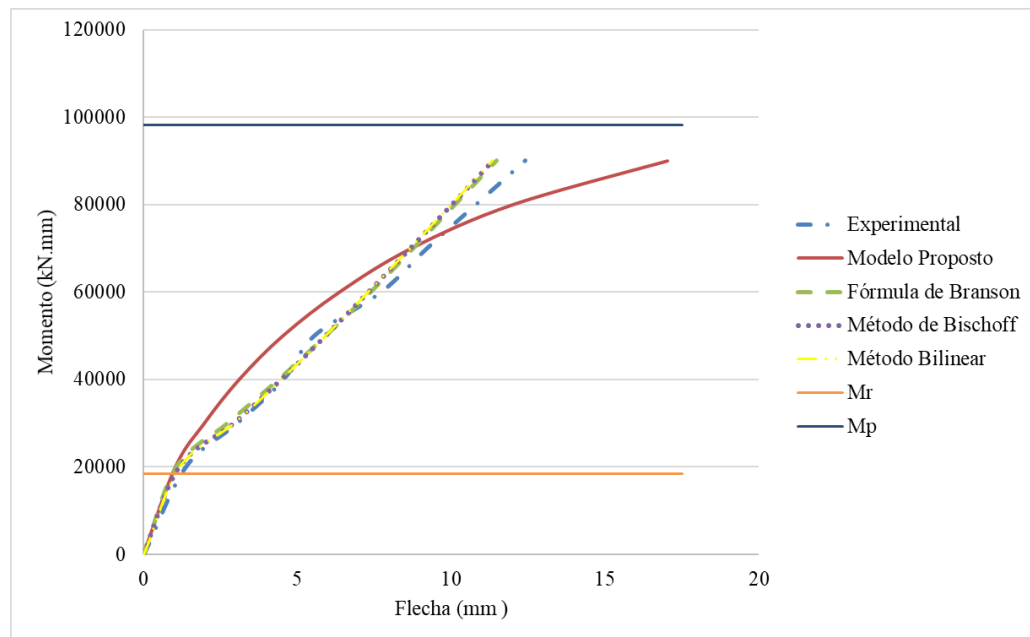
Tabela 22: Propriedades da viga V13.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V13	150 X 400	100	600	1,167	369	209,23
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)	M_u ($\text{kN}\cdot\text{mm}$)
108,45	2000	200	33,6	0,036	18384,35	129500

Fonte: Santos (2006)

O modelo proposto se manteve próximo da resposta experimental da viga V13, mas os demais métodos tiveram uma maior aproximação como mostrado no gráfico da Figura 47 e na Tabela 23. O modelo proposto teve menores valores de flecha do que a resposta experimental para momentos menores e maiores valores de flecha para momentos atuantes maiores.

Figura 47: Gráfico Momento versus Flecha da viga V13.



Fonte: Autor

Tabela 23: Resultados da viga V13.

Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V13 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
		A	B	A	B	A	B	A	B
20000	1,36	1,04	1,31	1,05	1,30	1,16	1,17	1,16	1,17
30000	3,03	1,98	1,53	2,71	1,12	2,93	1,03	2,93	1,03
40000	4,54	3,11	1,46	4,38	1,04	4,47	1,02	4,47	1,02
50000	5,54	4,53	1,22	5,92	0,94	5,91	0,94	5,91	0,94
60000	7,72	6,37	1,21	7,38	1,05	7,3	1,06	7,3	1,06
70000	9,21	8,70	1,06	8,77	1,05	8,66	1,06	8,66	1,06
80000	10,8	12,00	0,90	10,13	1,07	10,01	1,08	10,01	1,08
90000	12,4	17,02	0,73	11,48	1,08	11,34	1,09	11,34	1,09
Desvio Médio Simples		-0,02		0,35		0,35		0,35	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo.									
Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.									
Estádio II									

Fonte: Autor

5.1.7 SIMÕES (2007)

Simões (2007) em seu trabalho, propôs um reforço de viga com encamisamento parcial. Para atingir o seu objetivo, Simões (2007) aplicou um carregamento até a carga de serviço das vigas, em seguida descarregou completamente e em seguida reiniciou o carregamento até a ruptura da viga, estes ciclos são mostrados no gráfico da Figura 50 e na Tabela 24.

As deformações específicas do concreto foram medidas, em quatro diferentes níveis, com um extensômetro mecânico, com base de medição de 100 mm e menor divisão de 0,001mm. Para a medição dos deslocamentos verticais das vigas, foram utilizados dois transdutores de deslocamento à base de extensômetros elétricos de resistência. O ensaio realizado é mostrado na Figura 48.

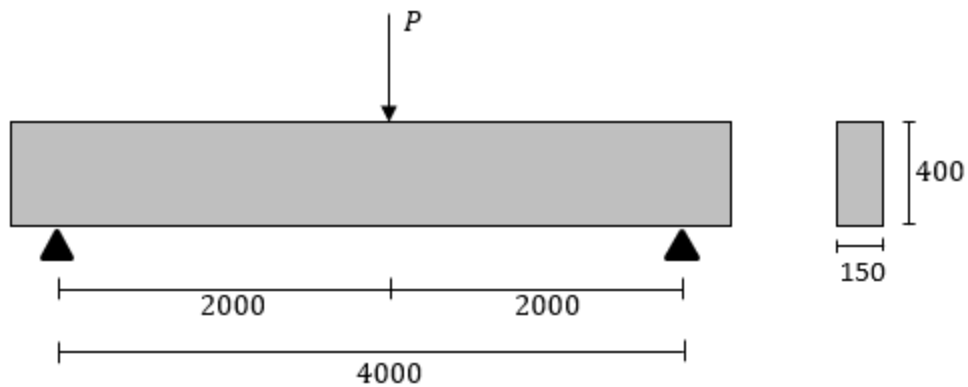
Figura 48: Ensaio de flexão em três pontos.



Fonte: Simões (2007)

O esquema do carregamento é mostrado na Figura 49 e as propriedades da viga ensaiada são mostradas na Tabela 23.

Figura 49: Esquema experimental de Simões (2007).



Fonte: Adaptado de Simões (2007)

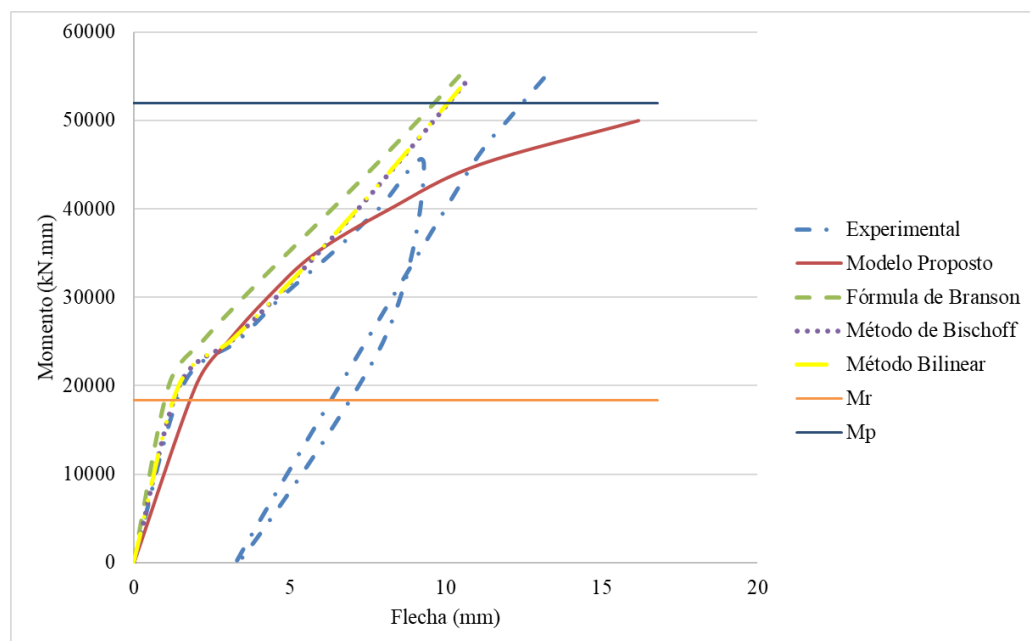
Tabela 24: Propriedades da viga V14.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V14	150 X 400	100	285	0,642	386	205,71
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($kN \cdot mm$)	M_u ($kN \cdot mm$)
80,44	2000	200	33,69	0,0362	18384,35	72000

Fonte: Simões (2007)

No primeiro ciclo da viga V14, o modelo proposto teve um resultado melhor do que a Fórmula de Branson, como mostrado na Figura 50. No segundo ciclo, o Modelo Proposto apresentou maiores valores de flecha que a resposta experimental. Os resultados também podem ser analisados através da Tabela 25.

Figura 50: Gráfico Momento versus Flecha da viga V14.



Fonte: Autor

Tabela 25: Resultados da viga V14.

Ciclos	Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V14 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
			A	B	A	B	A	B	A	B
1	20000	1,58	1,98	0,81	1,13	1,40	1,45	1,09	1,45	1,09
	25000	3,32	3,02	1,16	2,21	1,50	3,1	1,07	3,1	1,07
	30000	4,73	4,29	1,23	3,53	1,34	4,55	1,04	4,55	1,04
	35000	6,36	5,82	1,24	4,94	1,29	5,9	1,08	5,9	1,08
	40000	7,85	8,20	1,21	6,37	1,23	7,18	1,09	7,18	1,09
	45000	9,30	11,07	1,14	7,77	1,20	8,41	1,11	8,41	1,11
2	0	3,28	-	-	-	-	-	-	-	-
	45000	10,86	-	-	-	-	-	-	-	-
	50000	11,98	16,19	1,17	9,12	1,31	9,61	1,25	9,61	1,25
Desvio Médio Simples			-0,78		1,44		0,70		0,70	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo. Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.										
Estádio II										

Fonte: Autor

5.1.8 ROMERO (2007)

O trabalho experimental de Romero (2007) tinha o objetivo de estudar o reforço de vigas de concreto armado por meio de protensão externa, e assim como os demais autores, Romero (2007) também ensaiou vigas de referência como mostrado na Figura 51. Neste trabalho o carregamento foi aplicado até o limite de serviço, logo após foi descarregado e no ciclo seguinte o carregamento foi até a ruptura.

Para medir deformações do concreto, foi utilizado extensômetro mecânico com base de medição de 100 mm e precisão de 0,001 mm. Os deslocamentos verticais foram obtidos com o auxílio de dois transdutores com curso de 100 mm, sendo que ambos estavam ligados a sistema de aquisição automática de dados.

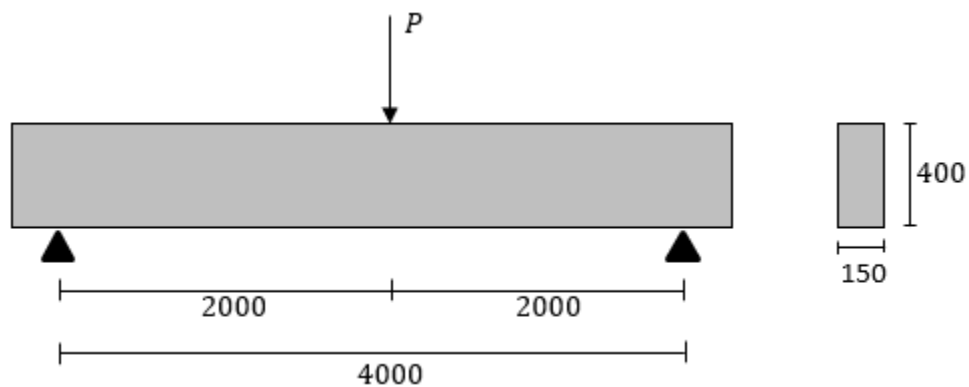
Figura 51: Ensaio de três pontos de Romero (2007).



Fonte: Romero (2007)

O esquema experimental utilizado é mostrado na Figura 52, e as propriedades da viga ensaiada são apresentadas na Tabela 25.

Figura 52: Esquema experimental de Romero (2007).



Fonte: Adaptado de Romero (2007)

Tabela 26: Propriedades da viga V15.

Viga	Dimensões ($b \times h$)	A'_s (mm^2)	A_s (mm^2)	ρ_s (%)	d (mm)	x_1 (mm)
V15	150 X 400	100	285	0,642	386	205,71
x_2 (mm)	ℓ (mm)	E_s (kN/mm^2)	E_c (kN/mm^2)	f_{ck} (kN/mm^2)	M_r ($\text{kN}.\text{mm}$)	M_u ($\text{kN}.\text{mm}$)
81,05	2000	200	33,08	0,0349	18384,35	72000

Fonte: Romero 2007

O Método de Bischoff e o Método Bilinear tiveram uma melhor aproximação da resposta experimental no primeiro ciclo da viga V15, e nesse ciclo, todos os métodos de cálculo subestimaram a flecha. No segundo ciclo, o Modelo Proposto teve uma melhor aproximação antes do momento de plastificação. Estes resultados são mostrados no gráfico da Figura 53 e na Tabela 27.

Figura 53: Gráfico Momento versus Flecha da viga V15.

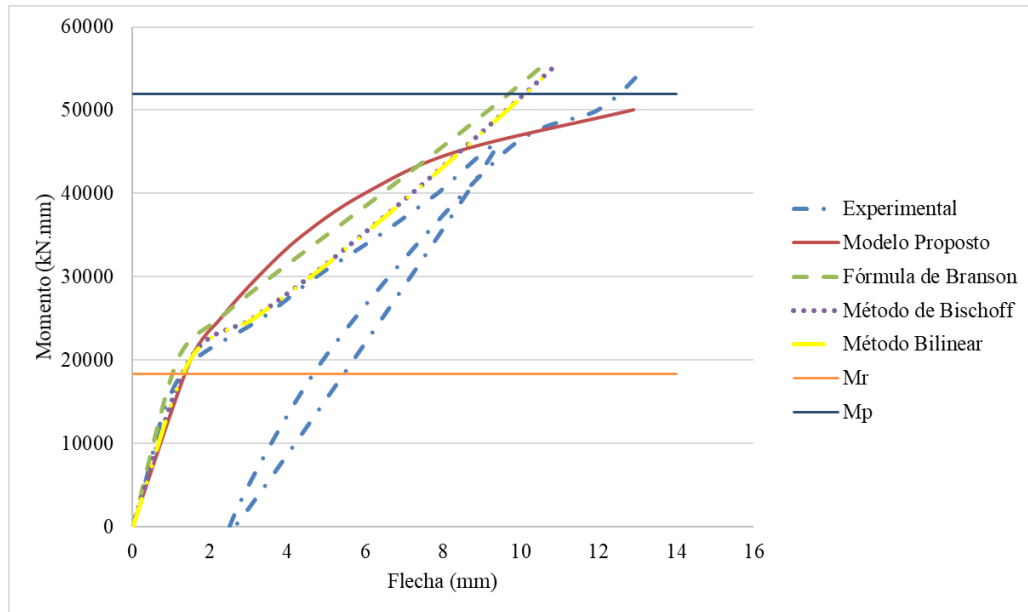


Tabela 27: Resultados da viga V15.

Ciclos	Momento Atuante (kN.mm)	Flecha Exp. V15 (mm)	Modelo Proposto (mm)		Fórmula de Branson (mm)		Método de Bischoff (mm)		Método de Bilinear (mm)	
			A	B	A	B	A	B	A	B
Ciclo 1	20000	1,58	1,50	1,05	1,15	1,37	1,47	1,07	1,47	1,07
	25000	3,32	2,28	1,46	2,23	1,49	3,11	1,07	3,11	1,07
	30000	4,73	3,24	1,46	3,56	1,33	4,58	1,03	4,58	1,03
	35000	6,36	4,40	1,45	4,99	1,27	5,92	1,07	5,92	1,07
	40000	7,85	6,00	1,31	6,42	1,22	7,21	1,09	7,21	1,09
	45000	9,3	8,37	1,11	7,81	1,19	8,44	1,10	8,44	1,10
Ciclo 2	0	2,6	-	-	-	-	-	-	-	-
	45000	10,86	-	-	-	-	-	-	-	-
	50000	11,98	12,91	0,93	10,48	1,14	10,83	1,11	10,83	1,11
Desvio Médio Simples			0,92		1,40		0,68		0,68	
Coluna A: Resultado da flecha calculada com o respectivo método de cálculo. Coluna B: Razão entre a flecha experimental e a resultado da flecha calculada.										
Estádio II										

Fonte: Autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo central, propor um momento de inércia equivalente para o cálculo de flechas em vigas de concreto armado utilizando como base as formulações da Teoria do Dano Concentrado, e avaliar o modelo de cálculo proposto, comparando com resultados experimentais e com outros métodos de cálculo de flecha imediata.

Para uma melhor aproximação dos valores numéricos, foi adicionado a Teoria do Dano Concentrado, a proposta de Alva (2004), que vem sendo usada também por outros autores como Araújo (2007) e Oliveira Filho et al. (2011), a qual precisa de um valor γ encontrado através de um processo de calibração, onde foi usado $\gamma = 4$ para ensaio de flexão por quatro pontos e $\gamma = 5$ para ensaios de flexão por três pontos.

Dentre as quinze vigas analisadas, o modelo proposto teve o desvio médio simples mais próximo de zero em quatro vigas que os demais métodos de cálculo. A Fórmula de Branson, O Método de Bischoff e o Método Bilinear tiveram resultados muito próximos entre si em todas as vigas analisadas.

Foi constatado que o Modelo Proposto tinha menores valores de flecha para momentos atuantes mais baixos em pelo menos algum instante nas vigas ensaiadas, sendo que em alguns casos se aproximou mais da resposta real do que os demais métodos analisados. Para momentos atuantes mais altos, o Modelo Proposto obteve uma maior aproximação, uma vez que este promove uma maior perda de rigidez à medida que a solicitação aumenta, diferente dos demais métodos que tem o comportamento linear.

Os demais métodos de cálculo subestimaram a flecha para momentos atuantes mais próximos do momento de plastificação em treze das quinze vigas ensaiadas, diferente do Modelo Proposto que superestimou a flecha em quatorze das quinze vigas ensaiadas, sendo essa segunda condição, mais segura, porém menos econômica quando há uma grande diferença de valores numéricos.

O Modelo Proposto se mostrou preciso para alguns experimentos, mas também obteve resultados insatisfatórios em outros experimentos. A resposta do modelo proposto após o momento de fissuração não está condizente com o comportamento mecânico do concreto armado para vários dos exemplos analisados. Isto se deve ao fato de que o modelo de Alva (2004) foi idealizado para o estudo de ligação viga-pilar. Logo, é necessário fazer adaptações no modelo de Alva (2004) a fim de melhorar a precisão do modelo proposto.

REFERÊNCIAS

- ALVA, G. M. S.; DEBS, A. L. H. C. E. **Application of lumped dissipation model in nonlinear analysis of reinforced concrete structures**. Journal of Structural Engineering, v. 121, n. 12, p. 974-981, 2010.
- ALVA, G. M. S. **Estudo teórico-experimental do comportamento de pórtico de concreto armado submetidos a ações cíclicas**. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. 1993. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- ARAÚJO, F. A. **Formulação de um modelo de dissipação concentrada para a análise não-linear de estruturas reticuladas planas em concreto**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14) and Commentary (ACI 318R-05)**. Detroit, 2015.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Committee 435 – Deflection of Concrete Flexural Members**. ACI Journal, Proceedings, V. 63, Nº 6, June 1966, pag. 637-674.
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50 (n. 24), p. 4070-4079, 2013.
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modeling of cracking in concrete: application in tunnel linings. **Engineering Structures**, v. 70, p. 23-35, 2014.
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Lumped damage mechanics as an alternative to analyse masonry arches. In: International Workshop by Young Researchers

for ‘Application of Structural Engineering and Structural Health Monitoring to Historic Buildings’, 2014, Quioto. **Proceedings...** Quioto: Kyoto University, p. 19-25, 2014.

AMORIM, D. L. N. F. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analyses: new developments and applications.** 2016. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

ARAÚJO, F.; PROENÇA, S. P. B. Application of a lumped dissipation model to reinforced concrete structures with the consideration of residual strains and cycles of hysteresis. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 03, p. 1011-1031, 2008.

ARAÚJO, J. M. **Projeto Estrutural de Edifícios de Concreto Armado.** 3.ed. Rio Grande: Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:** projeto de estruturas de concreto-procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BISCHOFF, P.H., (2005). **Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and fiber reinforced polymer bars.** Journal of Structural Engineering ASCE 131(5): 752-762.

BISCHOFF, P.H., (2007). **Rational model for calculating deflection of reinforced concrete beams and slabs.** Canadian Journal of Civil Engineering 34(8): 992-1002.

BRANSON, D. E. **Design procedures for computing deflections.** ACI Journal, September, 1968.

BRANSON, D. E. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams.** HPR Report, N° 7, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, 1963.

BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics.** Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht. 1984.

CANAVAL, J. H. **Estudo experimental do comportamento de vigas de concreto armado reforçadas à flexão por meio de graute, armaduras e conectores.** 2016. Dissertação

(Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118:2014**. São Carlos, SP: 2015.

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1113-1126, 1995.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Design manual on cracking and deformations, Bulletin d'Informtion No. 185-E. Paris, France, 1985.

FALEIRO, J.; OLLER, S.; BARBAT, A.H. Plastic-damage analysis of reinforced concrete frames. **Engineering Computations**, v. 27, p. 57-83, 2010.

FEBRES, R.; INGLESSIS, P.; FLÓREZ-LÓPEZ J. Modeling of local buckling in tubular steel frames subjected to cyclic loading. **Computers & Structures**, v. 81, p.2237–2247, 2003.

FERNANDES, S. A. **Análise das deformações do concreto e do comportamento de vigas submetidas à flexão simples**. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

FERNANDES, M. C.; VARGAS, A. **Análise experimental de vigas de concreto armado sujeitas à flexão reforçadas com fibra de carbono**. Universidade do Extremo Sul Catarinense. 2015.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modelos de daño concentrado para la simulación numérica del colapso de pórticos planos. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 09, n. 02, p. 123-139, 1993.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. **Simplified Model of Unilateral Damage for RC Frames**. Journal of Structural Engineering, v. 121, n. 12, p. 1765-1772, 1995.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E; PICÓN, R. A. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Applications**. IGI Global, Hershey. 2015.

GILBERT, R. I. **Calculation of long-term deflection**. Centro for infrastructure Engineering and Safety. The Univesity of New South Wales. 2008.

GRIFFITH, A. A. **The phenomena of rupture and flow in solids**. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, v. 221, p. 163-198, 1921.

GRIFFITH, A. A. **The theory of rupture**. In: First International Congress of Applied Mechanics, Delft, p. 55-63, 1924.

IGNJATOVIĆ, I. S. et al. **Flexural behavior of reinforced recycled aggregate concrete beams under short-term loading**. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2013.

JONES, P. A. **Predicting the flexural load-deflection response of steel fibre reinforced concrete from strain, crack-width, fibre pull-out and distribution data**. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2008.

JUNGES, E. **Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2011.

JUNGES, E.; ROVERE H. L. LA. **Comparação entre modelos simplificados e de elementos finitos para flecha imediata em vigas contínuas de concreto armado**. Ibracon Structures and materials journal. 2017.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. **Mécaniques des matériaux solides**. Duod, Paris. 1985.

MACHADO, M. G. **Estudo experimental da ductilidade de vigas em concreto armado reforçadas à flexão utilizando compósitos com tecido de fibras de carbono**. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

MARIGO, J J. **Modeling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids**. Engineering Fracture Mechanics, v.21, n.4, p. 861-874, 1985.

MIER, J. G. M. **Concrete Fracture. A Multiscale Approach**. CRC Press, Boca Raton. 2013.

OLIVEIRA FILHO, J. ALVA, G. M. S.; CANHA, R. M. F. and EL DEBS, A. L. H. C.; et al. **Análise numérica e experimental da evolução de flechas de vigas de concreto armado sob ações cíclicas repetidas**. Ibracon Structures and materials journal. 2011.

PERDOMO, M. E.; RAMÍREZ, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simulation of damage in RC frames with variable axial force. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 28, p. 311-328, 1999.

PITUBA, J. J. C.; DELALIBERA, R. G. **Avaliação de deflexões em estruturas de concreto armado utilizando mecânica do dano**. Ibracon Structures and materials journal. 2014.

POWELL, H.G. Theory for nonlinear elastic structures. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 95, ST12, p. 2687-2701, 1969.

ROMERO, D. V. S. **Reforço à flexão de vigas de concreto armado por meio de protensão externa**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SABNIS, G. M.; et al. **Deflections of continuous concrete beams**. ACI Journal. December, 1973.

SANTORO, M.; KUNNATH, S. Damage-based RC beam element for nonlinear structural analysis. **Engineering Structures**, v. 49, p. 733-742, 2013.

SANTOS, E. W. F. **Reforço de vigas de concreto armado à flexão por encamisamento parcial**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

SIMÕES, M. L. F. **Reforço à flexão de vigas de concreto armado por encamisamento parcial**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.