



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

A Forma Normal de Gustavson e Aplicações no
Estudo da Estabilidade de Soluções de Equilíbrio
de Sistemas Hamiltonianos Degenerados

Jakeline Cleide Santos Almeida do Nascimento

SÃO CRISTÓVÃO – SE
AGOSTO DE 2022

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

A Forma Normal de Gustavson e Aplicações no
Estudo da Estabilidade de Soluções de Equilíbrio
de Sistemas Hamiltonianos Degenerados

por

Jakeline Cleide Santos Almeida do Nascimento

sob a orientação do

Prof. Dr. Fábio dos Santos

São Cristóvão – SE
Agosto de 2022

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

N244f Nascimento, Jakeline Cleide Santos Almeida do
A forma normal de Gustavson e aplicações no estudo da
estabilidade de soluções de equilíbrio de sistemas hamiltonianos
degenerados / Jakeline Cleide Santos Almeida do Nascimento ;
orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2022.
129 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2022.

1. Matemática. 2. Sistemas Hamiltonianos. I. Santos, Fábio
dos orient. II. Título.

CDU 517.9



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**A Forma Normal de Gustavson e Aplicações no Estudo da
Estabilidade de Soluções de Equilíbrio de Sistemas
Hamiltonianos Degenerados**

por

Jakeline Cleide Santos Almeida do Nascimento

Aprovada pela banca examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS
Orientador

Angelo Alberti

Prof. Dr. Angelo Alberti - UFS
Primeiro Examinador

ACFernandes

Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes - UNIFEI / UNI
Segundo Examinador

São Cristóvão
31 de Agosto de 2022

*Aos meus pais, Maria e
Paulo, in memoriam.*

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus, pela sua presença constante em minha vida e por ter guiado meus passos na concretização deste objetivo.
- Pelos meus irmãos Joice e Luiz Paulo, por cuidar do meu amigo de quatro patas, Ted, enquanto estava estudando a dissertação.
- Aos meus colegas de turmas que contribuíram, de forma direta e indireta, através de discussão sobre assuntos abordados durante o curso.
- Aos meus colegas professores e coordenadores do Colégio Estadual Garcia Filho, que me ajudaram na organização do horário escolar para que eu pudesse assistir as disciplinas curriculares.
- Em especial, agradeço ao Professor Fábio dos Santos, que aceitou ser meu orientador e pela paciência e dedicação durante todo este trabalho.
- Aos professores Fábio, Angelo, André, Samuel, Bruno, Maria Andrade que trabalharam as disciplinas que cursei durante o curso de pós-graduação.
- Gratidão aos professores Angelo Alberti, Antônio Carlos Fernandes, por terem aceitados o convite para participar da Banca Examinadora.
- Em especial, gratidão ao meu amigo cão (Ted), que me ajudava a esclarecer algumas ideias durante as nossas horas de passeio.
- Enfim, agradeço a todos que deram alguma contribuição no processo de minha formação.

Resumo

Nessa dissertação, temos como propósito estudar a forma normal de Gustavson de um sistema Hamiltoniano nos casos degenerado e não degenerado e aplicar os casos em que função Hamiltoniana possui um grau de liberdade e inicia com termos de terceira ou quarta ordem no estudo da estabilidade de soluções de equilíbrio. Para atingir nosso objetivo, incluímos um capítulo de preliminares onde fornecemos a teoria básica dos sistemas Hamiltonianos, transformações simpléticas e funções geradoras, além de alguns conceitos básicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Abordamos a teoria clássica da forma normal de Gustavson e de Birkhoff nos casos não degenerados em que a matriz do sistema linearizado é diagonalizável e os autovalores imaginários puros, além disso fornecemos alguns resultados recentes nos casos de sistemas com um grau de liberdade em que a função Hamiltoniana é representada como uma série de potências iniciando com termos cúbicos ou de quarta ordem. Em ambos os casos, a técnica principal consiste em obter uma transformação simplética dada por uma função geradora a fim de simplificar a estrutura dos termos de maior ordem da função Hamiltoniana. No final, usaremos as formas normais para obter algumas condições para a estabilidade de soluções de equilíbrio no caso de sistemas degenerados com um grau de liberdade.

Palavras Chaves: Sistema Hamiltoniano; Estabilidade; Forma Normal de Gustavson, Forma Normal de Birkhoff.

Abstract

In this dissertation, we aim to study the Gustavson normal form of a Hamiltonian system in the degenerate and non-degenerate cases and apply the cases in which a Hamiltonian function has one degree of freedom and starts with third or fourth order terms in the study of the stability of solutions of balance. To achieve our goal, we include a preliminary chapter where we provide the basic theory of Hamiltonian systems, transformations symplectics and generating functions, in addition to some basic concepts of the qualitative theory of ordinary differential equations. We approach the classical theory of the form Gustavson and Birkhoff normal in the non-degenerate cases where the matrix of the linearized system is diagonalizable and the pure imaginary eigenvalues, in addition. In addition, we provide some recent results in the case of systems with a degree of freedom in which the Hamiltonian function is represented as a series of powers starting with cubic or fourth-order terms. In both cases, the main technique is to obtain a symplectic transformation given by a generating function in order to simplify the structure of higher-order terms of the Hamiltonian function. In the end, we will use the normal forms to obtain some conditions for the stability of equilibrium solutions in the case of systems degenerates with one degree of freedom.

Keywords: Hamiltonian System; Stability; Normal form of Gustavson, Birkhoff Normal Form.

Introdução

O principal objetivo desta dissertação é desenvolver a teoria da Forma Normal de Gustavson, inclusive abordando os casos degenerados em que a parte quadrática é nula e a expansão da função Hamiltoniana em série de Taylor inicia com termos de terceira ou quarta ordem, além disso fornecer aplicações desses casos no estudo da estabilidade de soluções de equilíbrio.

Por meio de uma transformação simplética, dada por uma função geradora, pretendemos simplificar um sistema Hamiltoniano de modo que nas novas coordenadas ele assume uma forma particular e em geral mais simples, denominada Forma Normal de Gustavson. Usamos essas formas normais para fornecer condições necessárias e suficientes para a estabilidade de uma solução de equilíbrio no caso de sistemas com um grau de liberdade.

Nosso trabalho foi dividido em quatro capítulos. O primeiro é dedicado as preliminares fundamentais para a compreensão deste trabalho. Nele apresentamos alguns conceitos básicos sobre a teoria de sistemas Hamiltonianos tais como: sistemas Hamiltonianos lineares, transformação simpléticas, funções geradoras, além de apresentarmos o conceito de estabilidade de uma solução de equilíbrio e alguns Teorema importantes como o Critério da Estabilidade de Lyapunov, o Critério da Instabilidade de Chetaev e o Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer.

No capítulo dois, fornecemos um algoritmo para a normalização de sistemas Hamiltonianos no caso não degenerados em os autovalores são imaginários puros e a solução de equilíbrio nula é linearmente estável. Inicialmente mostramos

como obter, através de uma mudança de coordenadas simplética, a forma normal de Birkhoff da parte quadrática do Hamiltoniano sob a hipótese de que os autovalores da matriz associada são todos distintos e puramente imaginários. Em seguida exemplificamos como o processo funciona para os termos de ordem maior e baseado no livro [27] apresentamos um teorema para obtenção da forma normal de Gustavson no caso em que o termo de segunda ordem é sempre não nulo.

Com base nos artigos [18] e [28], o capítulo três é dedicado ao estudo das formas normais de Gustavson para sistemas Hamiltonianos degenerados com um grau de liberdade em que a parte quadrática é nula. Primeiramente, baseados no artigo [19] mostramos que se a função Hamiltoniana é um polinômio homogêneo de grau três ou quatro em duas variáveis então é possível simplificá-la por meio de uma mudança linear de coordenadas simplética. Em seguida apresentamos um algoritmo para obtenção da forma normal de Gustavson para sistemas degenerados, separando a análise em dois casos: quando a função Hamiltoniana inicia com termos de terceira ordem e quando inicia com termos de quarta ordem.

Por fim, no quarto capítulo apresentamos algumas aplicações dos resultados obtidos acerca da forma normal no estudo da estabilidade das soluções de equilíbrio de um sistemas Hamiltonianos degenerados. Apresentaremos os resultados obtidos em [17] (para o caso em que o Hamiltoniano inicia com termos de terceira ordem) e [28] (caso em que o Hamiltoniano inicia com termos de quarta ordem). Mais especificamente, obteremos algumas condições necessárias e suficientes para a estabilidade do ponto de equilíbrio a partir dos coeficientes da função Hamiltoniana. Para garantir os resultados são utilizados o Critério da Instabilidade de Chetaev e o Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer.

Sumário

Agradecimentos	2
Resumo	3
Abstract	4
Introdução	5
1 Preliminares	10
1.1 Sistemas Hamiltonianos	10
1.1.1 Sistemas Hamiltonianos lineares	13
1.2 Transformações simpléticas	15
1.3 Funções Geradoras	21
1.3.1 Um grau de liberdade	21
1.3.2 Número de graus de liberdade arbitrário	23
1.4 Definições básicas da teoria clássica das Equações Diferenciais Or-	
dinárias	25
1.5 Estabilidade de Soluções de Equilíbrio	28
1.5.1 Critério de estabilidade de Liapunov	29
1.5.2 Critério de instabilidade de Chetaev	31
1.5.3 O Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer	33
1.5.4 O Teorema de Bardin-Lanchares's	34

2 Forma Normal de Gustavson e de Birkhoff no caso não degenerado	35
2.1 A Forma normal de Birkhoff da parte quadrática	35
2.1.1 Ideia da normalização de Sistemas Hamiltonianos Lineares	35
2.1.2 A forma normal da parte quadrática: Forma normal de Birkhoff	37
2.2 A ideia geral do processo de normalização	39
2.3 Definições Básicas e notações	41
2.4 Obtenção da Forma Normal de Gustavson	48
2.4.1 Formas normais para Hamiltonianos periódicos com 1 grau de liberdade	53
3 A forma Normal de Gustavson no caso Degenerado para Sistemas Hamiltonianos com um Grau de Liberdade	57
3.1 Introdução	57
3.2 Normalização dos termos de terceira e quarta ordem por meio de uma transformação linear	59
3.3 Ideia da construção da transformação de Gustavson	74
3.4 O caso em que $H_2 = 0$ e $H_3 \neq 0$	75
3.5 O caso em que $H_2 = H_3 = 0$ e $H_4 \neq 0$	82
4 Aplicações da Forma Normal de Gustavson no caso Degenerado ao Estudo da estabilidade	90
4.1 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos que iniciam com termos de terceira ordem	90
4.1.1 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q(q^2 + p^2)$.	91
4.1.2 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q(q^2 - p^2)$.	92
4.1.3 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q^2 p$	93

INTRODUÇÃO	9
4.1.4 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q^3$	94
4.2 Estabilidade de Sistemas Hamiltonianos que iniciam com termos de quarta ordem	102
4.2.1 Análise da Estabilidade no caso em que $H_4 = q^4 + aq^2p^2 + p^4$ com $a > -2$	104
4.2.2 Análise da Estabilidade em alguns casos em que o Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer garante a instabilidade	104
4.2.3 Análise da Estabilidade no caso em que $H_4 = q^4$	105
4.2.4 Comentário sobre a Estabilidade nos casos em que $H_4 =$ $q^2(q^2 + p^2)$ ou q^2p^2	123
Bibliografia	128

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, fornecemos alguns conceitos e resultados importantes para um bom entendimento dos capítulos seguintes, com base em [8], [26] e [27]. Abordamos a teoria básica de sistemas Hamiltonianos, abordando os principais conceitos, sistemas Hamiltonianos lineares, transformações simpléticas e funções geradoras. Também apresentamos alguns conceitos e resultados da teoria qualitativa de equações diferenciais e um pouco da teoria da estabilidade de soluções de equilíbrio.

1.1 Sistemas Hamiltonianos

Um **Sistema Hamiltoniano** em $\mathbb{R}^{2n}$ é um sistema com $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.1)$$

onde $H = H(q, p, t)$, chamada de Hamiltoniano, é uma função diferenciável definida em um aberto $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, as variáveis $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $q = (q_1, \dots, q_n)$ são chamadas de posição e momento, respectivamente e o inteiro positivo n é dito **grau de liberdade** do sistema.

O conjunto onde as variáveis posição estão definidas é chamado de espaço das configurações, já o espaço que descreve a posição versus momento é chamado de espaço de fase. Fazendo

$$z = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

o sistema (1.1) torna-se

$$\dot{z} = J \nabla H(z, t) \quad \text{ou} \quad \dot{z} = J \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^T. \quad (1.2)$$

Observe que $J^{-1} = J^T = -J$, isto é, J é anti-simétrica, ortogonal e $\det J = 1$.

Pelo teorema de existência e unicidade, um dos resultados básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias, para cada (t_0, z_0) em $\mathcal{O}$, existe uma única solução $z = \varphi(t, t_0, z_0)$ de (1.2) definida em t numa vizinhança de t_0 que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0, t_0, z_0) = z_0$.

Quando a função H não depende explicitamente de t o sistema (1.1) é chamado autônomo e, em caso contrário, não autônomo. Daí, a equação (1.2) satisfaz

$$\varphi(t - t_0, 0, z_0) = \varphi(t, t_0, z_0).$$

É usual descartar a dependência de t_0 , uma vez que $\varphi(t, z_0)$ é uma solução de (1.2) tal que $\varphi(0, z_0) = z_0$.

Vamos estudar o conceito de um operador chamado colchete de Poisson. Considere F, G e H funções diferenciáveis no aberto $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Definição 1.1.1. O Colchete de Poisson de F e G é definido por

$$\{F, G\} = \nabla F^T J \nabla G = \frac{\partial F^T}{\partial Q} \frac{\partial G}{\partial P} - \frac{\partial F^T}{\partial P} \frac{\partial G}{\partial Q} \quad (1.3)$$

De modo claro, $\{\cdot, \cdot\}$ é uma forma bilinear, anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (1.4)$$

Se $\varphi_t(t_0, z_0)$ representa uma solução de (1.1) com a condição inicial (t_0, z_0) e incluindo a notação $F(t) = F(t, \varphi_t(t_0, z_0))$ então

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi_t(t_0, z_0)) + \{F, H\}(t, \varphi_t(t_0, z_0)). \quad (1.5)$$

Uma vez que o colchete de Poisson é anti-simétrico, ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano (1.1) vale que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Por isso, quando o sistema Hamiltoniano for autônomo a função H é constante ao longo de suas soluções, funções desta forma são chamadas de **Integrais Primeiras** do sistema (1.2).

Teorema 1.1.2. *Sejam F, G e H como enunciadas acima e independente de t . Então,*

1. H é uma integral primeira de (1.1).
2. F é uma integral primeira de (1.1) se, e somente se, $\{F, H\} = 0$.
3. Se F e G são integrais primeira de (1.1) então $\{F, G\}$ também é.

Demonstração:

1. Como (q, p) é solução do sistema hamiltoniano autonômico, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(q, p) &= \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} \\ &= 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial H}{\partial t}(q, p) = 0, \forall t \geq 0,$$

assim $(q, p) = C$, para todo $t \geq 0$. Ou seja, H é uma **integral primeira do sistema**, quer dizer constante ao longo das soluções.

2. Observe que, se F integral primeira do sistema, então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF}{dt}(q, p) = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial p}\right) \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \\ &= \nabla^T F(q, p) J \nabla H(q, p) \\ &= \{F, G\}(q, p). \end{aligned}$$

A recíproca é análoga.

3. Sejam F, G integrais primeiras do sistema. Pelo item 2, temos $\{F, H\} = \{G, H\} = 0$. Com base na identidade de Jacobi,

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0,$$

então $\{H, \{F, G\}\} = 0$, equivalentemente $\{\{F, G\}, H\} = 0$.

Portanto, pelo item 2, $\{F, G\}$ é uma integral primeira.

■

1.1.1 Sistemas Hamiltonianos lineares

Um caso particular de sistemas Hamiltonianos são os lineares, que são sistema Hamiltonianos que são lineares. Seja $S(t)$ uma matriz simétrica para cada t e suponha que o Hamiltoniano H seja uma forma quadrática em z , mais precisamente admita que H seja escrito da seguinte forma:

$$H = H(z, t) = \frac{1}{2} z^T S(t) z, \quad (1.6)$$

então, obtemos o sistema associado

$$\dot{z} = JS(t)z = A(t)z \quad (1.7)$$

onde $A(t) = JS(t)$. Quando isto ocorre, o sistema Hamiltoniano (1.2) é dito um sistema **Hamiltoniano Linear**.

Definição 1.1.3. Uma matriz $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é dita Hamiltoniana se satisfaz $A^T J + JA = 0$. Denotaremos por $sp(n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes Hamiltonianas de ordem $2n$.

É simples verificar que a matriz $A(t)$ do sistema (1.2) é Hamiltoniana para todo t . De fato,

$$JA(t) = J^2 S(t) = -S(t) = S(t) J^2 = S(t)^T J J = -(JS(t))^T J = -A(t)^T J.$$

Vejamos alguns resultados que caracterizam matrizes Hamiltonianas.

Teorema 1.1.4. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é Hamiltoniana;
2. $A = JA^T J$;
3. $A = JR$, com R simétrica;
4. JA é simétrica.

Demonstração:

(1. $\Rightarrow$ 2.) Basta notar que $J^{-1} = -J$. Então, pela definição 1.1.3 temos que $A^T J = J^{-1} A$ e temos o desejado.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Tome $R = A^T J$ e observe que

$$R^T = J^T A = -J(JA^T J) = -J^2(A^T J) = A^T J = R.$$

(3. $\Rightarrow$ 4.) Suponha $A = JR$, com R simétrica. Então, $JA = J^2 R = -R$. Logo, JA é simétrica.

(4. $\Rightarrow$ 1.) JA é simétrica $\Rightarrow JA = (JA)^T = A^T J^T = -A^T J$. Assim, $A^T J + JA = 0$ e pela definição 1.1.3. A é Hamiltoniana. ■

Além disso, se A e B são matrizes Hamiltonianas, então $A^T, \alpha A$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $A \pm B$ e $[A, B] = AB - BA$ são matrizes Hamiltonianas.

Ainda neste capítulo vamos estudar o conceito de estabilidade linear no sentido Lyapunov, ao mesmo tempo, fazer associações com o sinal da parte real dos autovalores do polinômio característico da matriz associada ao sistema linear. O próximo resultado é fundamental para o estudo de sistemas Hamiltonianos lineares.

Teorema 1.1.5. *Seja A Hamiltoniana. Se λ é autovalor da matriz A , então $-\lambda$ também vai ser autovalor desta matriz. Isto é, o polinômio característico $P_A(\lambda)$ é par.*

Demonstração: Vejamos,

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(JS - \lambda I) = \det(JS - \lambda I)^T \\
 &= \det(S^T J^T - \lambda I) = \det(-SJ - \lambda I) = \det(J^2 SJ - \lambda I J J) \\
 &= \det(J(JS + \lambda I)J) = \det J \det(J(JS + \lambda I)) \det J \\
 &= \det(JS + \lambda I) = \det(A + \lambda I) \\
 &= P_A(-\lambda)
 \end{aligned}$$

■

Observação 1.1.6. Vejamos uma condição necessária e suficiente para que uma matriz 2×2 com entradas reais seja Hamiltoniana.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T J + J A = \begin{bmatrix} 0 & a+d \\ -(a+d) & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, A é Hamiltoniana se, e somente se, o traço de A for nulo.

Exemplo 1.1.7. Se escrevermos uma equação diferencial de segunda ordem como

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad q, p \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

o sistema associado a esta equação é da forma $\dot{x} = y$ e $\dot{y} = -py - qx$, ou simplesmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Pelo observação 1.1.6, o sistema é Hamiltoniano linear se, e somente se, $p \equiv 0$. O mesmo ocorre quando $p = p(t)$ e $q = q(t)$.

1.2 Transformações simpléticas

O estudo das transformações simpléticas é importante na teoria dos sistemas Hamiltonianos pois, uma mudança de coordenadas induzida por uma matriz simplética leva sistemas Hamiltonianos em sistemas Hamiltonianos. Por isso, nesta seção, vamos fornecer definições e resultados importantes a seu respeito. Além disso, na próxima seção vamos ver um método para gerar transformações simpléticas que será utilizado nos capítulos sobre formas normais.

Definição 1.2.1. Uma matriz $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ satisfazendo a identidade

$$A^T J A = \mu J, \quad \mu \neq 0 \quad (1.9)$$

é dita uma matriz μ -simplética. Quando $\mu = 1$, dizemos que A é simplética. Vamos introduzir a notação $Sp(2n, \mathbb{R})$ para o conjunto das matrizes simpléticas.

Exemplo 1.2.2. Considere a matriz de rotação de um ângulo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A = A(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Provaremos que A é simplética para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja

$$A^T J A = J, \quad \text{com} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J. \end{aligned}$$

Esse exemplo será muito utilizado na Seção 3.2 para simplificar os termos de terceira e quarta ordem de um Hamiltoniano homogêneo.

Vejamos alguns resultados quando uma matriz satisfaz a definição 1.2.1.

Teorema 1.2.3. *Seja A uma matriz μ -simplética. Então,*

1. A é invertível, A^{-1} é μ^{-1} -simplética e $A^{-1} = -\mu J A^T A$.
2. A^T é μ -simplética.
3. Se S é ν -simplética, então AS é $\mu\nu$ -simplética.

Demonstração: Seja A μ -simplética, isto é,

$$A^T J A = \mu J \Rightarrow \det(A^T J A) = \mu \det J = \mu \Rightarrow (\det A)^2 = \mu \neq 0.$$

Então, A é invertível. Os demais itens seguem diretamente da definição 1.2.1. ■

O teorema acima nos diz que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é um grupo e ao mesmo tempo um subgrupo do conjunto das matrizes não-singulares $n \times n$ com entradas reais, denotada por $Gl(n, \mathbb{R})$.

Se $A(t)$ é uma matriz não-singular, de ordem $2n$, isto é, invertível para todo t , a mudança de variáveis $\varsigma = U(t)z$ transforma o Hamiltoniano (1.7) em

$$\dot{\varsigma} = (A^{-1}TA - A^{-1}\dot{A})\varsigma, \quad (1.10)$$

onde $U(t) = A^{-1}$. Vejamos quais condições sobre U para que (1.10) seja um sistema Hamiltoniano.

Teorema 1.2.4. *Se $U(t)$ é uma transformação μ -simplética, então (1.10) é um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Seja $U(t)$ uma transformação μ -simplética, isto é, $A(t)$ é μ^{-1} -simplética. Uma vez que $AJA^T = \mu^{-1}J$ para todo t , segue que $\dot{A}JA^T + AS(\dot{A})^T = 0$. Assim, $(A^{-1}\dot{A})^T J + J(A^{-1}\dot{A}) = 0$, ou seja, $A^{-1}\dot{A}$ é uma matriz Hamiltoniana. Por outro lado, o item 1 do Teorema 1.1.2 nos garante que $A^{-1}J = \mu JA^T$, com isso,

$$\begin{aligned} A^{-1}TA &= A^{-1}JSA \\ &= \mu JA^T SA \\ &= J(\mu A^T SA) \end{aligned}$$

Assim, $(A^{-1}TA)^T J + J(A^{-1}TA) = 0$. ■

O último resultado nos diz que uma das importâncias das transformações simpléticas radica no fato de preservar a estrutura Hamiltoniana das equações.

Se a matriz A do sistema linear (1.7) é constante da teoria de equações diferenciais ordinárias, temos que a única matriz fundamental para o sistema é

$$Z(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j(t-t_0)^j}{j!}, \quad (1.11)$$

com isso, vejamos os próximos resultados.

Teorema 1.2.5. *Uma matriz fundamental $Z(t, t_0)$ de um sistema linear Hamiltoniano é simplética, para todo $t, t_0 \in \mathbb{I}$. Reciprocamente, se $Z(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então Z é a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [23]. ■

Corolário 1.2.6. *A matriz constante A é Hamiltoniana se, e somente se, a matriz e^{At} é simplética, para todo t .*

Com base na definição de sistema Hamiltoniano linear, vamos estudar o caso mais geral de transformações simpléticas.

Definição 1.2.7. *Seja a transformação de coordenadas $E : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, com Ω um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Dizemos que E é uma transformação simplética se a matriz derivada $D_z(E(z, t))$ é simplética. Isto é, E é um difeomorfismo, para todo t , e*

$$(D_z(E(z, t)))^T J D_z(E(z, t)) = J. \quad (1.12)$$

Usaremos a notação $\zeta = (Q, P) = E(z, t) = E(Q, P, t)$, com $Z(\zeta, t)$ para inversa de E . Uma transformação simplética preserva a forma do sistema Hamiltoniano. Defina a função transformada por

$$H^*(\zeta) = H^*(P, Q) = H(Z(\zeta, t), t), \quad (1.13)$$

sendo $\mathcal{U} = E(\Omega \times I)$, então

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z}(z, t)\dot{z} \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z}(z, t)J \left(\frac{\partial H}{\partial z}(z, t) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z}(z, t)J \left(\frac{\partial H^*}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial z}(z, t) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + J \frac{\partial (H^*)^T}{\partial \zeta}(\zeta, t) \\ &= J \nabla_{\zeta} H^*(\zeta, t) + \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{z=Z(\zeta, t)}. \end{aligned}$$

Na segunda parcela da expressão acima, usamos essa notação para representar a primeira derivada com respeito a t e aplicada em $z = Z(\zeta, t)$. Daí, temos o próximo resultado.

Teorema 1.2.8. *A transformação de coordenadas simplética $\zeta = E(z)$, que independe de t , transforma o sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana $H = H(z)$ em um novo sistema, cuja função Hamiltoniana H^* é definida por*

$$H^*(\zeta) = H(E(z)). \quad (1.14)$$

Quando a equação (1.12) depende de t , sua análise é feita na hipótese do conjunto

$$\mathcal{U}_t = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} / (\zeta, t) \in \mathcal{U} \times I\} \quad (1.15)$$

ser uma bola de $\mathbb{R}^{2n}$ para cada t fixo. Nestas condições, é possível mostrar que existe uma função $R : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial t}(z, t) \Big|_{z=Z(\zeta, t)} = J \nabla_{\zeta} R(\zeta, t). \quad (1.16)$$

Teorema 1.2.9. *Suponha que a transformação de coordenadas $(\zeta, t) = E(z, t)$ é simplética e, além disso, o contra-domínio $\mathcal{U} = E(U \times I)$ satisfaz (1.15), então E transforma o sistema Hamiltoniano com a função Hamiltoniana $H = H(z)$ num novo sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana é definida por*

$$H^*(\zeta, t) + R(\zeta, t). \quad (1.17)$$

Demonstração: Vamos demonstrar que a função diferenciável R é o gradiente de uma função diferenciável.

Como $\mathcal{U}_t$ é simplesmente conexo, basta mostrar $\square$ que a função

$$\Gamma(\zeta, t) = J \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z}(z, t)|_{z=z(\zeta, t)} \frac{\partial z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \quad (1.18)$$

é simétrica, ou seja, $\Gamma = \Gamma^T$. Derive ambos os lados de (1.15)

$$\frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial z}(z, t) J \frac{\partial E}{\partial z}(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z}(z, t) \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z}(z, t) = 0 \quad (1.19)$$

donde

$$\frac{\partial E^{-T}}{\partial z}(z, t) \frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial z}(z, t) J + J \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z}(z, t) \frac{\partial E^{-1}}{\partial z}(z, t) = 0. \quad (1.20)$$

Substitua $z = Z(\zeta, t)$ em (1.20) e, além disso, $\frac{\partial E^{-1}}{\partial z}(Z(\zeta, t), t) = \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t)$. Assim, encontramos que $-\Gamma + \Gamma^T = 0$. $\blacksquare$

Quando $\mathcal{U}_t$ não for uma bola, não podemos garantir a existência de R definida globalmente como única função a valores reais sobre todo $\mathcal{U}$. Mas, em cada ponto ζ de $\mathcal{U}$ existe uma função R como no teorema anterior sobre uma vizinhança de ζ tal que o Teorema 1.2.9 é válido, isto é, se $\mathcal{U}_t$ não é uma bola, o teorema acima só é válido localmente.

Teorema 1.2.10. *Seja A uma matriz simplética. Se λ é autovalor de A , então λ^{-1} também é.*

¹Se $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $\mathcal{O}$ é simplesmente conexo, então $F = \nabla f$ se, e somente se, $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ é simétrica.

Demonstração: Seja A simplética, $A^T = -JA^{-1}J$ e $\det A = \pm 1$. Notemos que

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det(A^T - \lambda I) \\
&= \det(-JA^{-1}J + \lambda J) \\
&= \det(-A^{-1} + \lambda I) \\
&= \det(\lambda(\lambda^{-1}A^{-1} - I)) \\
&= \lambda^{2n} \det(A^{-1}) \det(A - \lambda^{-1}I) \\
&= \pm \lambda^{2n} P_A(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

Donde temos o desejado. ■

Sabemos, de Álgebra Linear, que o determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores, daí o determinante de uma matriz simplética é igual a 1. Por consequência, uma transformação simplética preserva volume. A seguir, faremos alguns exemplos, os quais nos ajudarão a entender algumas demonstrações de teoremas mais a diante.

Exemplo 1.2.11. Considere $z = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ e faça a mudança de coordenadas a qual não depende de t

$$E : (q, p) \mapsto (Q, P) \tag{1.21}$$

definida por

$$Q = \alpha q \quad \text{e} \quad P = \beta p, \tag{1.22}$$

onde α e β são constantes não nulas. Assim,

$$A := \frac{\partial E}{\partial z} = \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}, \tag{1.23}$$

com I a matriz identidade de ordem n . Desta forma,

$$A^T J A = \alpha \beta J, \tag{1.24}$$

donde segue que transformação de coordenadas E é $\alpha\beta$ -simplética.

Exemplo 1.2.12. Considere a mudança de coordenadas polares no plano dada por

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}.$$

Usando a notação $z = (r, \theta)$ e $\xi = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e definindo

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

É claro que Φ é um difeomorfismo e satisfaz

$$[D_z \Phi(z)]^T J [D_z \Phi(z)] = rJ,$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, a transformação Φ não é simplética.

No entanto uma pequena alteração permite-nos conseguir uma transformação simplética a partir das coordenadas polares no plano. De fato, considere a transformação

$$\Psi(z) = (\sqrt{2r} \cos \theta, \sqrt{2r} \sin \theta).$$

Verifica-se neste caso que

$$[D_z \Psi(z)]^T J [D_z \Psi(z)] = J,$$

e portanto Ψ neste caso é simplética.

1.3 Funções Geradoras

Nesta seção forneceremos um método para gerar transformações simpléticas a partir de certas funções denominadas funções geradoras. Abordaremos inicialmente o caso planar, e em seguida o caso geral, baseado em [27].

1.3.1 Um grau de liberdade

Neste momento, a fim de deixar mais clara as ideias, abordaremos o caso planar, e na próxima seção estenderemos os resultados ao caso de $2n$ variáveis para $n > 1$.

Teorema 1.3.1. *As seguintes relações implícitas definem mudanças de variáveis simpléticas $(q, p) \mapsto (Q, P)$ numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$.*

$$\begin{aligned} q &= \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P), \quad Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p, P) \quad \text{é não singular,} \\ q &= \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q), \quad P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q) \quad \text{é não singular,} \\ p &= \frac{\partial S_3}{\partial q}(q, Q), \quad P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(q, Q) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_3}{\partial q \partial Q}(q, Q) \quad \text{é não singular,} \\ p &= \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P), \quad Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P}(q, P) \quad \text{é não singular.} \end{aligned}$$

As funções S_1, S_2, S_3 e S_4 são denominadas *funções geradoras* ou *funções geratrizes*.

Demonstração: Definindo a 2-forma diferencial:

$$\omega = dq \wedge dp,$$

considere a mudança de coordenadas

$$E : (q, p) \mapsto (Q, P),$$

a qual é simplética se, e somente se,

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP.$$

Defina as formas: $\omega_1 = qdp - QdP$, $\omega_2 = qdp + QdP$, $\omega_3 = pdq - PdQ$ e $\omega_4 = pdq + QdP$.

Notemos que,

$$\omega_2 = \omega_1 + d(QP), \quad \omega_4 = \omega_3 + d(QP).$$

A mudança E será simplética se, e somente se, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e ω_4 forem fechadas, isto é,

$$d\omega_1 = d\omega_2 = d\omega_3 = d\omega_4 = 0.$$

Numa vizinhança simplesmente conexa da origem, pelo lema de Poincaré, podemos garantir a existência de funções

$$S_1(p, P), \quad S_2(p, Q), \quad S_3(q, Q) \quad \text{e} \quad S_4(q, P)$$

tais que

$$\omega_1 = dS_1, \quad \omega_2 = dS_2, \quad \omega_3 = dS_3 \quad \text{e} \quad \omega_4 = dS_4$$

dessa forma, E será simplética se, e só se, existem funções S_1, S_2, S_3 e S_4 que verificam as condições acima.

Vamos considerar o caso de $S_1 = S_1(p, P)$, visto que os demais casos são análogos. Sabemos que

$$dS_1 = \omega_1$$

então

$$\omega_1 = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P)dp + \frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)dP = qdp - QdP,$$

pela unicidade

$$\frac{\partial S_1}{\partial p} = q \quad \text{e} \quad -\frac{\partial S_1}{\partial p} = Q. \quad (1.25)$$

Sendo

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p, P)$$

não singular, pelo Teorema da Função Implícita, numa vizinhança da origem, as relações (1.25) definem uma mudança de variáveis $(q, p) \mapsto (Q, P)$, a qual é simplética. ■

1.3.2 Número de graus de liberdade arbitrário

Vamos discutir agora funções geradoras para $n \geq 1$, considerando $z = (q, p)$ com $q, p \in \mathbb{R}^n$. O objetivo nesta seção é estender o Teorema 1.3.1 a sistema com número de graus de liberdade arbitrário.

A forma simplética padrão é dada por

$$\Omega := dq \wedge dp = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

e vamos aplicar uma mudança de coordenadas

$$(q, p) \mapsto (Q, P).$$

Desse modo, assim como no caso $n = 1$, tal mudança de coordenadas é simplética se, e somente se

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP$$

sendo equivalente a 1-forma diferencial

$$\omega_1 := qdp - QdP$$

ser fechada, isto é $d\omega_1 = 0$.

Observe também que $\omega_1 = 0$ é fechada se, e somente se

$$\begin{aligned} \omega_2 &:= \omega_1 + d(QP) \\ &= \omega_1 + QdP + PdQ \\ &= qdp - QdP + QdP + Pdq \\ &= qdp + PdQ \end{aligned}$$

é uma 1-forma fechada. Seguindo de maneira análoga, temos que tal mudança de coordenadas $(q, p) \mapsto (Q, P)$ é simplética se cada uma das seguintes formas

$$\begin{aligned}\omega_1 &= qdp - QdP \\ \omega_2 &= qdp + QdP \\ \omega_3 &= qdp - QdP \\ \omega_4 &= qdp + QdP\end{aligned}$$

são fechadas. Desse modo, devemos ter pelo lema de Poincaré, que deve existir funções $S_1 = S_1(p, P)$, $S_2 = S_2(p, Q)$, $S_3 = S_3(q, Q)$ e $S_4 = S_4(q, P)$ que satisfazem

$$\begin{aligned}dS_1 &= \omega_1, & dS_2 &= \omega_2 \\ dS_3 &= \omega_3, & dS_4 &= \omega_4.\end{aligned}$$

Tais informações acima são suficientes para construir novas coordenadas simpléticas. De fato, para exemplificar, suponhamos que exista uma função $S_1 = S_1(p, P)$ tal que

$$dS_1 = \omega_1 = qdp - QdP. \quad (1.26)$$

Porém, como

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial p} dp + \frac{\partial S_1}{\partial P} dP, \quad (1.27)$$

igualando as expressões [1.26](#) e [1.27](#) obtemos

$$\frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) = q \quad \text{e} \quad -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) = Q. \quad (1.28)$$

Logo, por toda a construção que fizemos, se [1.28](#) define uma mudança de coordenadas, então está é de fato simplética. Assumimos que o Hessiano de S_1 é não singular, isto é

$$\det[D^2 S_1(p, P)]_{2n} \neq 0$$

para todo (p, P) numa vizinhança da origem. Segue do Teorema da Função Implícita que podemos escrever P como função q e p , também p como função de q e P .

Vamos também supor que exista uma função $S_2 = S_2(p, Q)$ tal que

$$dS_2 = \omega_2 = qdp + PdQ \quad (1.29)$$

como

$$dS_2 = \frac{\partial S_2}{\partial p} dp + \frac{\partial S_2}{\partial Q} dQ \quad (1.30)$$

igualando as expressões [1.29](#) e [1.30](#), obtemos

$$\frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q) = q \quad \text{e} \quad \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q) = P \quad (1.31)$$

Novamente, se [1.31](#) nos define uma mudança de coordenadas de (q, p) para (Q, P) , então por construção, está é simplética. De novo, supondo

$$\det[D^2 S_1(p, Q)]_{2n} \neq 0,$$

pelo teorema da função implícita, podemos escrever Q em função de p e Q , ainda p em função de Q e P .

Seguindo de maneira análoga para as funções $S_3 = S_3(q, Q)$ e $S_4 = S_4(q, P)$ obtemos o seguinte teorema, o qual é uma generalização do Teorema [1.3.1](#) para sistemas com n graus de liberdade com n arbitrário.

Teorema 1.3.2. *As seguintes relações implícitas definem mudanças de variáveis simpléticas $(q, p) \mapsto (Q, P)$ numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{2n}$.*

1. $q = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P); Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)$, se $\det[D^2 S_1(p, P)]_{2n} \neq 0$
2. $q = \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q); P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q)$, se $\det[D^2 S_2(p, Q)]_{2n} \neq 0$
3. $p = \frac{\partial S_3}{\partial q}(q, Q); P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(q, Q)$, se $\det[D^2 S_3(q, Q)]_{2n} \neq 0$
4. $p = \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P); Q = -\frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P)$, se $\det[D^2 S_4(q, P)]_{2n} \neq 0$

Assim, as funções S_1, S_2, S_3 e S_4 são chamadas de funções geradoras.

1.4 Definições básicas da teoria clássica das Equações Diferenciais Ordinárias

Vamos revisar alguns conceitos da teoria das equações diferenciais ordinárias abstratas, afim de compreender a noção de estabilidade.

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto de $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 em U . Queremos estudar as funções $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ tais que

$$x' = F(x) \quad (1.32)$$

com $x(0) = x_0 \in U$. Essas funções são denominadas soluções de (1.32).

Se existe $x_0 \in U$ tal que

$$F(x_0) = 0 \quad (1.33)$$

então a função constante $x : \mathbb{R} \rightarrow U$, definida por

$$x(t) = x_0$$

satisfaz

$$x'(t) = (x'_0) = 0 = F(x_0) = F(x(t))$$

assim

$$x'(t) = F(x(t)).$$

Dizemos que $x_0 \in U$ que satisfaz (1.33) é dito ser um ponto de equilíbrio de (1.32) ou uma solução de equilíbrio.

Se $x : I \rightarrow U$ é tal que

$$x'(t) = F(x(t)) \neq 0, \quad \forall t \in I$$

dizemos que x é uma solução regular de (1.32).

Como F é de classe C^1 em U , sabemos pelo teorema da existência e unicidade de solução que dado $x_0 \in U$, existe uma única $x : I \rightarrow U$ tal que

$$x'(t) = F(x(t)) \quad e \quad x(0) = x_0.$$

No caso particular em que $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear, isto é

$$F(\alpha x + y) = \alpha F(x) + F(y)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in U$, diremos que a equação (1.32) é linear. Da álgebra linear, sabemos que fixada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ sabemos que F pode ser identificada como uma matriz, isto é, existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A = [F]_\beta$$

tal que

$$F(x) = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Desse modo, o sistema (1.32) pode ser visto da forma

$$x' = F(x) = Ax.$$

e assim uma solução satisfaz $x'(t) = Ax(t)$, $\forall t \in I$.

Outro caso particular é dado da seguinte maneira: suponhamos $n = 2k$; $k \in \mathbb{Z}$ ou seja n é par e que existe uma função $\mathcal{H} : U \subseteq \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$ a priori infinitamente diferenciável, tal que

$$F(x) = J\nabla H(x)$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{bmatrix} \in M_{2k}(\mathbb{R})$$

e

$$\nabla H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial q_k}(x), \frac{\partial H}{\partial p_1}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial p_k}(x) \right).$$

Desse modo, o sistema (1.32) é da forma

$$x' = F(x) = J\nabla(H(x))$$

assim uma solução $x(t)$ satisfaz $x'(t) = J\nabla H(x(t))$ para todo t .

Nesse caso (1.32) é um **sistema Hamiltoniano** e $\mathcal{H} : U \subseteq \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função Hamiltoniana associada. Deste modo, os sistemas Hamiltonianos podem ser vistos como sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias particulares, mas muito importantes.

Vamos supor agora que $x : I \rightarrow U$ é uma solução de (1.32) tal que $x(0) = x_0 \in U$. definamos $\phi : I \times U \rightarrow U$ dada por

$$\phi(t, x_0) = \phi_{t_0}(x_0) = x(t)$$

A aplicação ϕ é chamada de fluxo da equação (1.32) ou fluxo de F .

Caso $I = \mathbb{R}$, diremos que o fluxo é completo. Observemos por definição que o fluxo deve satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial F}(t, x) = F(\phi(t, x)),$$

ou seja, o fluxo $\phi(t, x)$ de um campo F nos dá uma informação global do comportamento de todas as soluções de (1.32). Se $x_0 \in U$ é um ponto de equilíbrio de (1.32) então

$$\phi(t, x_0) = x(t) = x_0$$

assim

$$\phi(t, x_0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$$

ou seja, $x_0 \in U$ é um ponto fixo de ϕ .

O estudo dos pontos de equilíbrio de uma equação diferencial é extremamente importante para nos ajudar a compreender o comportamento global das soluções da equação. Além disso, as informações do comportamento das soluções numa vizinhança do equilíbrio são importantes para entender alguns aspectos da dinâmica do sistema. Um problema muito importante, que abordaremos nessa dissertação é a natureza da estabilidade das soluções de equilíbrio de um sistema Hamiltoniano.

1.5 Estabilidade de Soluções de Equilíbrio

Vamos considerar nesta seção uma equação diferencial ordinária

$$x' = F(x) \quad (1.34)$$

onde $F : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1 num aberto U de $\mathbb{R}^n$. Assumimos também que o fluxo $\phi(t, x)$ de (1.34) é definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in U$, isto é, ϕ é completo.

Definição 1.5.1. *Seja $x_0 \in U$ um ponto de equilíbrio de F . Diremos que x_0 é um equilíbrio estável de F se dada qualquer vizinhança $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma outra vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que*

$$1) \ W \subseteq U \cap V$$

$$2) \ \phi(t, x) \in V, \forall x \in W \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Analicamente, x_0 é estável se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo x satisfazendo $|x - x_0| < \delta$ temos que $|\phi_t(x) - x_0| \leq \epsilon$ para todo $t > 0$. Caso x_0 não seja estável, diremos que x_0 é um equilíbrio instável.

Além disso, diremos que um equilíbrio x_0 é isolado se existe um vizinhança W de x_0 tal que x_0 é o único equilíbrio de (1.34) em $U \cap W$.

Pontos de equilíbrio estáveis estão totalmente associados a sistemas que tendem a conservar energia e esses mudam o comportamento quando é introduzido uma força externa, forçando as trajetórias a "caírem" em direção ao equilíbrio.

Definição 1.5.2. *Seja $x_0 \in U$ um equilíbrio de F . Dizemos que x_0 é assintoticamente estável se dada uma vizinhança V de x_0 , existe uma vizinhança W de x_0 , tal que*

$$1) \ W \subseteq U \cap V$$

$$2) \ \phi(t, x) \in U, \forall x \in W \text{ e } t \in \mathbb{R}$$

$$3) \ \lim_{t \rightarrow \infty} (\phi(t, x)) = x_0, \ x \in W$$

Pela definição todo equilíbrio assintoticamente estável é estável.

Se a equação diferencial ordinária (1.34) admite uma solução de equilíbrio $x_0 \in U$, isto é, $F(x_0) = 0$ em quais condições x_0 é estável ou instável? Vamos expor algumas condições suficientes, mas não necessárias que nos possibilitam responder essa questão em casos particulares.

1.5.1 Critério de estabilidade de Liapunov

Consideremos uma equação diferencial ordinária

$$x' = F(x) \tag{1.35}$$

onde $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1 sobre o aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dada uma função $V : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável para cada $x_0 \in U$, denotemos

$$\dot{V}(x_0) := d_{x_0} V(F(x)) = \frac{dV}{dt} \Big|_{t=0} (\phi(t, x_0))$$

onde $\phi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ é fluxo de (1.35).

Definição 1.5.3. *Seja $x_0 \in U$ um ponto de equilíbrio da equação (1.35), ou seja, $F(x_0) = 0$. Dizemos que uma função $V : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov para x_0 se satisfaz as condições:*

$$1) \ V(x_0) = 0$$

$$2) \ V(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in U \setminus \{x_0\}$$

$$3) \ \dot{V} \leq 0, \text{ para todo } x \in U.$$

Se na condição 3) vale com

$$\dot{V} < 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$

diremos que a função de Liapunov é estrita. Com isso em mente podemos anunciar o famoso critério de Liapunov, como segue.

Teorema 1.5.4. (*Cr terio de Liapunov*): Consideremos a equação aut noma

$$x'(t) = F(x(t))$$

com $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e seja $x_0 \in U$ um equilíbrio de F , isto é,

$$F(x_0) = 0$$

Se existe uma função de Liapunov $V : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para x_0 então x_0   um equilíbrio estável. Além disso, se V   uma função de Liapunov estrita para x_0 , então x_0   um equilíbrio assitoticamente estável.

Tomemos como exemplo $n = 2$ e consideremos o sistema

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2x_1(x_1 + x_2)^2 \\ x'_2 = -x_2^3 + 2x_2^3(x_1 + x_2)^2 \end{cases} \quad (1.36)$$

notemos que escolhendo

$$x = (x_1, x_2), \quad U = \mathbb{R}^2$$

e

$$\begin{aligned} F : U \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto F(x_1, x_2) = (-x_1 + 2x_1(x_1 + x_2)^2, -x_2^3 + 2x_2^3(x_1 + x_2)^3) \end{aligned}$$

Temos que (1.36), toma a forma

$$x' = F(x)$$

Observemos que $x_0 = (0, 0)$   um ponto de equilíbrio de F . De fato,

$$F(x_0) = F(0, 0) = (0, 0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$$

Consideremos $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

Vamos mostrar que V   uma função de Liapunov para $x_0 = (0, 0)$. De fato,

$$1) \quad V(x_0) = V(0, 0) = \frac{0^2 + 0^2}{2} = 0$$

$$2) \quad \text{Dado } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), \text{ temos } V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > 0$$

3) Sejam $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ a solução da equação (1.36) com $x_0 = (x_1(0), x_2(0)) = (x_1, x_2)$. Desse modo, o fluxo é dado por

$$\phi(t, (x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$$

daí

$$\begin{aligned} V(\phi(t, (x_1, x_2))) &= V(x_1(t), x_2(t)) \\ &= \frac{(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2}{2} \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &:= \frac{dV}{dt}(\phi(t, (x_1, x_2)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2}{2} \right) |_{t=0} \\ &= \frac{2x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t)}{2} |_{t=0} \\ &= x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t) |_{t=0} \\ &= x_1(t)(-x_1(t) + 2(x_1(t)(x_1(t) \\ &\quad + x_2(t))^2) + (x_2(t)(-x_2^3(t) + 2x_2^3(t)(x_1(t) + x_2(t))^2) |_{t=0} \\ &= -x_1^2(t) + 2x_1^2(t)(x_1(t) + x_2(t))^2 - x_2^4(t) \\ &\quad + 2x_2^4(t)(x_1(t) + x_2(t))^2 |_{t=0} \\ &= (x_1^2(t) + x_2^4(t))(2(x_1(t) + x_2(t))^2 - 1) |_{t=0} \\ &= (x_1^2(0) + x_2^4(0))(2(x_1(0) + x_2(0))^2 - 1) \\ &\quad + (x_1^2 + x_2^4)(2(x_1 + x_2)^2 - 1) \end{aligned}$$

Considere $U = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Notemos que, U é aberto, $(0, 0) \in U$ e além disso, se $(x_1, x_2) \in U$, temos $x_1 + x_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo equivalente a $2(x_1 + x_2)^2 - 1 > 0$. Portanto,

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^4)(2(x_1 + x_2)^2 - 1) < 0$$

logo, $V : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função de Liapunov estrita para o equilíbrio $(0, 0)$. Contudo, pelo critério de Liapunov, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema (1.36).

1.5.2 Critério de instabilidade de Chetaev

Vamos agora ver condições para garantir a estabilidade de um ponto de equilíbrio. Podemos obter algo semelhante ao critério de Liapunov, mas que diz respeito a

instabilidade de um ponto? A resposta é sim, e é conhecido como teorema de Chetaev e será muito utilizado para garantir vários resultados do Capítulo 4.

Teorema 1.5.5 (Critério de instabilidade de Chetaev). *Consideremos a equação*

$$x' = F(x)$$

onde $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $x_0 \in U$ um equilíbrio de F . Seja $D \subseteq U$ um domínio (aberto e conexo) tal que $x_0 \in \partial D$. Suponha que existe uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

1. $V(x) > 0, \quad \forall x \in D$
2. $\dot{V} > 0, \quad \forall x \in D$
3. $V \equiv 0$ em $\partial D \ni x_0$

então x_0 é um equilíbrio instável.

Para exemplificar, vamos considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ x'_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \end{cases} \quad (1.37)$$

Vamos reescrever o sistema acima como $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e definimos $F(x) = F(x_1, x_2) = (x_1 + (x_1 + x_2)^2, (x_1 + x_2)^2)$ com isso, reformulamos o sistema (1.37) como sendo

$$x' = F(x) \quad (1.38)$$

1. Observemos que $F(\vec{0}) = F(0, 0) = (0^2 + (0, 0)^2, (0 + 0)^2) = (0, 0) = \vec{0}$. Logo, $\vec{0}$ é um ponto de equilíbrio para F .
2. Consideremos, $U = \mathbb{R}^2$ e $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x_2| < x_1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < x_1 \text{ ou } -x_2 < x_1\}$. Primeiramente, notemos que $(0, 0) \in \partial D$. Além disso, D é aberto e conexo, logo, é um domínio. Agora, definimos $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, vamos provar que V satisfaz as hipóteses do teorema de Chetaev. De fato, note que se $(x_1, x_2) \in D$ $x_2 \leq |x_2| < x_1$ então $x_2^2 < x_1^2$ se, e somente se $x_1^2 - x_2^2 > 0$ sendo equivalente a $V(x_1, x_2) > 0$ para $(x_1, x_2) \in D$.
Sejam $\phi(t, (x_1, x_2)) = (x_1(t), x_2(t))$ o fluxo de (1.38). Daí,

$$V(\phi(t, (x_1, x_2))) = V(x_1(t), x_2(t)) = x_1^2 - x_2^2$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt} \big|_{t=0} V(\phi(t, (x_1, x_2))) \\
&= \frac{d}{dV} \big|_{t=0} (x_1^2(t) - x_2^2(t)) \\
&= 2x_1x'_1 - 2x_2x'_2 \\
&= 2(x_1(x_1 + (x_1 + x_2)^2) - x_2((x_1 + x_2)^2)) \\
&= 2(x_1^2 + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2) > 0
\end{aligned}$$

Pois $(x_1, x_2) \in D$, logo $x_2 \leq |x_2| < x_1$, obtendo assim

$$\dot{V}(x_1, x_2) > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in D$$

3. Notemos que $\partial D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| = x_1\}$. Desse modo, dado $(x_1, x_2) \in \partial D$, temos $|x_2| = x_1$. Daí, $|x_2|^2 = x_1^2$ se, e somente se, $|x_2| \cdot |x_2| = x_1^2$ se, e só se, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ equivalendo a $V(x_1, x_2) = 0$, $\forall (x_1, x_2) \in \partial D$.
Portanto, $V \equiv 0$ em ∂D .

Concluindo assim que V é uma função de Chetaev em D e, pelo Teorema de Chetaev, temos que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio instável.

1.5.3 O Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer

Nesta subseção, vamos enunciar um teorema que muitas vezes é utilizado para estudar a estabilidade de sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade. Sua demonstração pode ser encontrada no artigo [5]. Para a estabilidade os autores utilizam o Teorema da Curva Invariante e para demonstrar a instabilidade é utilizado o Critério da Instabilidade de Chetaev (Teorema 1.5.5).

Teorema 1.5.6 (Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer). *Considere uma função Hamiltoniana da forma*

$$K(r, \varphi) = \psi(\varphi)r^n + O(r^{\frac{n+1}{2}})$$

com $n = \frac{m}{2}$, $m \geq 3$. Então temos as seguintes possibilidades.

- 1) Se $\psi(\varphi) \neq 0$ para todo $\varphi \in \mathbb{R}$, então o equilíbrio $r = 0$ é estável no sentido de Lyapunov.
- 2) Se ψ tem um zero simples, isto é, existe um $\phi \in \mathbb{R}$, tal que

$$\psi(\phi) = 0 \quad e \quad \psi'(\phi) \neq 0$$

então o equilíbrio $r = 0$ é instável no sentido de Lyapunov

1.5.4 O Teorema de Bardin-Lanchares's

Nesta subseção, vamos expor um teorema, o qual é utilizado para analisar a estabilidade de sistemas Hamiltonianos periódico com um grau de liberdade no caso degenerado. A demonstração desse teorema pode ser encontrada no artigo [2].

Teorema 1.5.7 (Teorema de Bardin-Lanchares's). *Considere H uma função Hamiltoniana da forma*

$$H(r, \varphi) = [r^\alpha \psi_0(\varphi) + r^{\alpha+\gamma} \psi_p(\varphi)] + O(r^{\alpha+\gamma+\frac{1}{2}})$$

com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\gamma = \frac{p}{2}$ sendo $l \geq 2$ e $p \geq 1$ inteiros. Suponha H dependa periodicamente de φ e t com períodos 2π e T respectivamente. Suponhamos que todas as raízes reais de ψ_0 são múltiplas. Se $H_0 = r^\alpha \psi_0(\varphi) + r^{\alpha+\gamma} \psi_p(\varphi)$ tem sinal definido, então a origem $r = 0$ é um equilíbrio estável para o sistema.

Capítulo 2

Forma Normal de Gustavson e de Birkhoff no caso não degenerado

Neste capítulo, apresentaremos a forma normal de Gustavson no caso não degenerado em que a parte quadrática é não nula, mais precisamente quando o sistema linearizado é estável e não nulo. Fazemos um apanhado dos conceitos e resultados básicos que são empregados no processo de obtenção da forma normal. Na ausência de ressonâncias, mostraremos o processo de obtenção da forma normal de Birkhoff, que é um caso particular da forma normal de Gustavson.

2.1 A Forma normal de Birkhoff da parte quadrática

2.1.1 Ideia da normalização de Sistemas Hamiltonianos Lineares

Para ter uma boa compreensão da ideia principal da forma normal, vamos considerar inicialmente um sistema Hamiltoniano linear

$$\dot{z} = Az, \quad A \in M(2n, \mathbb{R}) \quad (2.1)$$

Neste caso, a matriz A é uma matriz Hamiltoniana, ou seja, uma matriz que satisfaz

$$A^T J + AJ = 0. \quad (2.2)$$

Denotaremos por $sp(2n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes Hamiltonianas e ordem $2n$ e por $Sp(2n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes simpléticas. Dada $P \in Sp(2n, \mathbb{R})$ considere a seguinte transformação linear associada

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ z &\longmapsto E(z) = P^{-1}z, \end{aligned}$$

ou seja, $z = Pw$ para $w \in \mathbb{R}^{2n}$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} \dot{w} = (P^{-1}z)' &= P^{-1}\dot{z} \\ &= P^{-1}(Az) \\ &= P^{-1}(APw) \\ &= (P^{-1}AP)w \\ &= Bw, \end{aligned}$$

onde $B = P^{-1}AP$, com $A \in sp(n, R)$ e $P \in Sp(n, R)$. Note que $B \in sp(n, R)$, denotando

$$\begin{aligned} B^T J + JB &= (P^{-1}AP)^T J + J(P^{-1}AP) \\ &= P^T A^T (P^{-1})^T J + JP^{-1}AP \end{aligned}$$

como P é simplética, $P^{-1}JP = J$, então

$$\begin{aligned} B^T J + JB &= P^T A^T (P^{-1})^T J + JP^{-1}AP \\ &= P^T A^T P^{-T} (P^T JP) + (P^T JP) P^{-1}AP \\ &= P^T A^T JP + P^T JAP \\ &= P^T (A^T JP + JAP) \\ &= P^T (A^T J + JA)P \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desse modo $B^T J + JB = 0$ e portanto B é Hamiltoniana e o sistema linear

$$\dot{w} = Bw \tag{2.3}$$

é um sistema Hamiltoniano. A ideia principal do processo de normalização neste caso é encontrar uma matriz P tal que o sistema (2.3) tenha uma forma mais simples possível, podemos dizer uma forma normal. Vamos considerar $A, B \in sp(n, R)$, dizemos que A é equivalente a B se existe $P \in Sp(n, R)$ simplética tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Vamos lembrar que $X \neq 0$, $\sim$ é uma relação de equivalência se:

i) $a \sim a, \forall a \in X$ (reflexiva).

ii) $a \sim b$ então $b \sim a$ (simétrica).

iii) $a \sim b, b \sim c$ por isso $a \sim c$ (transitiva).

De fato, sejam $A, B, C \in sp(n, R)$ sendo que $A \simeq B$ se, e somente se, existe $P \in Sp(n, R)$, tal que

$$B = P^{-1}AP$$

i) $A \simeq A$ basta tomar $P = I$, assim $A = I^{-1}AI$, tal que $I \in Sp(n, R)$.

ii) $A \simeq B$, então existe $P \in Sp(n, R)$, logo $B = P^{-1}AP$. Note que, $PB = AP$, e mais $PBP^{-1} = A$ chamando, $Q = P^{-1}$ temos, $A = Q^{-1}BQ$ tal que $Q \in Sp(n, R)$, ou seja, $B \simeq A$.

iii) Se $A \simeq B$ e $B \simeq C$, existe $P, Q \in Sp(n, R)$, desse modo $B = P^{-1}AP$ e $C = Q^{-1}BQ$ então

$$\begin{aligned} C &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}APQ \\ &= (PQ)^{-1}A(PQ) \end{aligned}$$

Como $P, Q \in Sp(n, R)$, $PQ \in Sp(n, R)$, então, $A \simeq C$. Portanto, $\simeq$ é de equivalência $sp(n, R)$.

Nessa linguagem, dado um sistema Hamiltoniano linear

$$\dot{z} = Az \quad \text{com} \quad A \in sp(n, R).$$

Dessa forma, mostramos que $B \simeq A$ assim $\dot{w} = Bz$ é Hamiltoniana. Contudo, nossa meta é encontrar uma matriz $B \in sp(n, R)$ tal que $B \simeq A$ e B seja o mais simples possível.

2.1.2 A forma normal da parte quadrática: Forma normal de Birkhoff

Veremos agora o processo de obtenção da forma normal de Birkhoff de uma função Hamiltoniana quadrática. Consideraremos inicialmente um sistema Hamiltoniano linear com n graus de liberdade

$$\dot{z} = Az, \tag{2.4}$$

onde $A = JS$ com S simétrica e cuja forma quadrática correspondente é H_2 .

Teorema 2.1.1. *Suponha que os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da matriz A são distintos. Então, existe uma transformação linear simplética $E : z = (q, p) \mapsto w = (u, v)$ que leva o Hamiltoniano H_2 associado ao sistema (2.4) no Hamiltoniano $\mathcal{H}_2$ dado por:*

$$\mathcal{H}_2(w) = \mathcal{H}_2(u, v) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k v_k. \quad (2.5)$$

Demonstração: Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são distintos, a matriz A é diagonalizável e, portanto, existe uma matriz invertível C tal que

$$C^{-1}JSC = L, \quad (2.6)$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & -L_0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

sendo a matriz $L_0 = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Da igualdade acima e usando os fatos $S^T = S$, $J^T = -J$ e $J^2 = -I$ chegamos a $PJSP^{-1} = L$, onde $P = (J^{-1}C^T J)^{-1}$. Assim, a matriz P também diagonaliza JS . Como os autovalores de JS são distintos, os subespaços próprios são unidimensionais, de modo que existe uma matriz diagonal,

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & -B_2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

tal que $C = PB$. Como $JB = C^T J C$ é anti-simétrica, $B_1 = B_2$. Considere a matriz diagonal

$$Q = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

e seja $E = CQ$. Então E também diagonaliza JS , isto é, $E^{-1}JSE = L$. Além disso, E é simplética, pois

$$E^T J E = Q^T C^T J C Q = Q J B Q = J. \quad (2.10)$$

Assim, a transformação linear $z = Ew$ é simplética e leva o sistema Hamiltoniano (2.4) no sistema $\dot{w} = E^{-1}JSEw = Lw$, que pode ser escrito na forma $\dot{w} = J\mathcal{H}_2 w$, onde

$$\mathcal{H}_2(w) = \mathcal{H}_2(u, v) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k v_k. \quad (2.11)$$

■

Suponha que $\lambda_j = \omega_j i \neq 0$. Fazendo a mudança simplética linear de coordenadas $(u, v) \mapsto (Q, P)$ dada por

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(Q_j - iP_j), \\ v_j &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(Q_j + iP_j) \end{aligned} \tag{2.12}$$

o Hamiltoniano nas coordenadas Q_j, P_j assume a forma:

$$\Gamma_2(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (Q_j^2 + P_j^2). \tag{2.13}$$

Com isso, temos o seguinte corolário do teorema acima:

Corolário 2.1.2. *Suponha que os autovalores da matriz $A = JS$ são distintos, imaginários puros e não nulos, digamos $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$. Então, existe uma matriz simplética $E : z \mapsto Z$ que leva o Hamiltoniano H_2 associado ao sistema (2.4) no Hamiltoniano (2.13).*

Quando o Hamiltoniano quadrático H_2 está na forma (2.13), dizemos que H_2 está na forma normal de Birkhoff.

Mesmo em alguns casos em que os autovalores $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$ não são distintos, é possível obter a forma normal (2.13), basta que $\omega_1, \dots, \omega_n$ sejam linearmente independentes sobre os racionais.

2.2 A ideia geral do processo de normalização

Considere um sistema Hamiltoniano da forma

$$\dot{z} = J\nabla H(z, t), \tag{2.14}$$

onde H é uma função analítica na vizinhança $z = 0$ e 2π -periódica na variável t . Suponha que $z = 0$ seja um equilíbrio de (2.14), de modo que o desenvolvimento de H em torno da origem começa com termos quadráticos

$$H(z, t) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(z, t),$$

onde $H_k(z, t)$ são polinômios homogêneos de grau $k \in \mathbb{N}$ na variável z e 2π -periódica, então $\sum a_i z^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Queremos obter uma mudança de coordenadas simplética $E : z \mapsto Z$ de modo que o novo Hamiltoniano tem a forma

$$H(E^{-1}(Z), t) = \Gamma(Z, t) = \Gamma_2(Z, t) + \Gamma_3(Z, t) + \dots,$$

onde $\Gamma_k(Z, t)$ é um polinômio homogêneo de grau k e 2π -periódica em t .

Pretendemos obter uma transformação E de forma que Γ seja o mais simples possível. Por exemplo, consideremos o caso autônomo. Imagine que conseguíssemos uma mudança de coordenadas simplética de forma que o novo hamiltoniano $\Gamma(Z)$ depende apenas de termos produto $R_k = Q_k P_k$. Então teríamos que o novo sistema Hamiltoniano

$$\dot{Z} = J\nabla\Gamma(Z) \tag{2.15}$$

seria escrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = \frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} Q_k \\ \dot{P}_k = \frac{-\partial\Gamma}{\partial R_k} P_k \end{cases}$$

com $k = 1, \dots, n$. Note que ao longo das soluções

$$\begin{aligned} \dot{R}_k = (Q_k P_k)' &= \dot{Q}_k P_k + Q_k \dot{P}_k \\ &= \frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} Q_k P_k + Q_k \left(\frac{-\partial\Gamma}{\partial R_k} P_k \right) \\ &= \frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} Q_k P_k - \frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} Q_k P_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, R_k é constante ao longo das soluções. Como estamos supondo que $\Gamma(Z)$ depende somente de produtos R_k , segue que Γ é constante ao longo das soluções, ou seja, nosso sistema é integrável, então temos que

$$\begin{aligned} \dot{Q}_k &= \frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} Q_k \rightarrow Q_k(t) = Q_k(0) e^{\frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} t}, \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} P_k \rightarrow P_k(t) = P_k(0) e^{-\frac{\partial\Gamma}{\partial R_k} t} \end{aligned}$$

expressando $R_1, \dots, R_n$ em termos de Z , assim teríamos n integrais primeiras para o sistema. Portanto, poderíamos ter diversas outras propriedades. O ponto principal é se existisse tal mudança de coordenadas simpléticas, teríamos o hamiltoniano simplificado de tal forma que conseguiríamos todas as informações necessárias sobre o sistema dinâmico, próximo do equilíbrio.

Em geral, tal transformação simplética E não existe, no entanto essa transformação existiria no caso autônomo, quando a matriz A do sistema linearizado for diagonalizável e os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A forem lineamente independentes sobre os racionais. Isto foi demonstrado por G.D.Birkhoff [3] na década de vinte e o novo hamiltoniano é chamado a Forma Normal de Birkhoff. Todavia, o processo de obtenção deste novo hamiltoniano é formal, resultante da comparação de coeficientes para resolver a equação. Assim, é desanimador tomar conhecimento que este processo geralmente é divergente, como foi provado por C. L. Siegel, em 1971, de modo que as importantes conclusões descritas acima não valem, a não ser em casos raríssimos que, mesmo assim, ainda apresentam grande dificuldade na verificação da convergência da forma normal. Depois disto, é natural que não se tenha grandes motivações para o estudo desta forma normal, mas é bom saber que informações importantes podem ser obtidas utilizando-se a forma normal somente até certo grau, dependendo do problema estudado. Dessa forma, um importante resultado devido a V. I. Arnold sobre a estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, que em alguns casos, requer o conhecimento da forma normal de Birkhoff somente até grau quatro.

2.3 Definições Básicas e notações

Vamos considerar um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade da forma

$$\dot{z} = J\nabla H(z, t), \quad (2.16)$$

onde H é uma função analítica nas variáveis $z = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e 2π -periódica em t , isto é,

$$H(z, t + 2\pi) = H(z, t)$$

para todo t . Vamos supor que a origem $z = 0$ é uma posição de equilíbrio do sistema (2.16), ou seja

$$\nabla H(0, t) = 0$$

para todo $t \geq 0$. Desenvolvendo H em série de Taylor numa vizinhança da origem, obtemos:

$$H(z, t) = H_2(z, t) + H_3(z, t) + H_4(z, t) + H_5(z, t) + \dots$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k na variável z e 2π -periódica na variável t . Queremos uma mudança de coordenadas

$$z = (q, p) \longmapsto Z = (Q, P)$$

de modo que o novo Hamiltoniano

$$\Gamma(Z, t) = \Gamma_2(Z, t) + \Gamma_3(Z, t) + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(Z, t)$$

onde Γ_k é um polinômio homogêneo de grau k na variável Z e 2π -periódica em t , seja mais "simples". Sendo

$$Q = (Q_1, \dots, Q_n) \quad e \quad P = (P_1, \dots, P_n),$$

fazendo

$$x_1 = Q_1 + iP_1, x_2 = Q_2 + iP_2, \dots, x_n = Q_n + iP_n$$

onde $i^2 = -1$, e

$$\overline{x_1} = Q_1 - iP_1, \dots, \overline{x_n} = Q_n - iP_n.$$

Observe que

$$x_1 + \overline{x_1} = (Q_1 + iP_1) + (Q_1 - iP_1) = 2Q_1$$

temos que

$$\frac{x_1 + \overline{x_1}}{2} = Q_1 \quad \dots \quad \frac{x_n + \overline{x_n}}{2} = Q_n$$

e também

$$x_1 - \overline{x_1} = (Q_1 + iP_1) - (Q_1 - iP_1) = 2iP_1$$

então

$$\frac{x_1 - \overline{x_1}}{2i} = P_1 \quad \dots \quad \frac{x_n - \overline{x_n}}{2i} = P_n$$

Com isso, obtemos que

$$\begin{aligned} Z &= (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) \\ &= \left(\frac{x_1 + \overline{x_1}}{2}, \dots, \frac{x_n + \overline{x_n}}{2}, \frac{x_1 - \overline{x_1}}{2i}, \dots, \frac{x_n - \overline{x_n}}{2i} \right) \\ &= \left(\frac{(x_1, \dots, x_n) + (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}{2}, \frac{(x_1, \dots, x_n) - (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}{2i} \right). \end{aligned}$$

Denotando $X = (x_1, \dots, x_n)$ obtemos

$$Z = \left(\frac{X + \bar{X}}{2}, \frac{X - \bar{X}}{2i} \right)$$

e sendo $\mathcal{H}$ o Hamiltoniano obtido a partir de $\Gamma(Z, t)$, por meio da mudança de variáveis $2i$ -simplética $Z \mapsto (X, \bar{X})$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X, \bar{X}, t) = 2i\Gamma(z, t) &= \Gamma\left(\frac{X + \bar{X}}{2}, \frac{X - \bar{X}}{2i}, t\right) \\ &= \mathcal{H}_2(X, \bar{X}, t) + \mathcal{H}_3(X, \bar{X}, t) + \dots \end{aligned}$$

Temos três funções Hamiltonianas:

$$\begin{aligned} H(z, t) &= \sum_{k=2}^{\infty} H_k(z, t) \\ \Gamma(Z, t) &= \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(Z, t) \\ \mathcal{H}(X, \bar{X}, t) &= \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{H}_k(X, \bar{X}, t) \end{aligned}$$

onde, usando as notações multi-índices

$$k = (k_1, \dots, k_n), l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N},$$

ou seja, $k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sendo

$$h_{kl} = h_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n}, \quad \gamma_{kl} = \gamma_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n} \quad \text{e} \quad g_{kl} = g_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n},$$

funções 2π -periódica e

$$\begin{aligned} x^k &= x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad q^k = q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n}, \quad p^l = p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}, \quad Q^k = Q_1^{k_1} \dots Q_n^{k_n}, \\ P^l &= P_1^{l_1} \dots P_n^{l_n}, \quad |k| = k_1 + \dots + k_n \quad \text{e} \quad |l| = l_1 + \dots + l_n. \end{aligned}$$

Dessa maneira, obtemos as seguintes expressões para as funções hamiltonianas

$$H = H(z, t) = H(q, p, t) = \sum_{j=2}^{\infty} H_j(q, p, t)$$

onde

$$\begin{aligned} H_j(q, p, t) &= \sum_{|k|+|l|=j} h_{kl}(t) \cdot q^k p^l \\ &= \sum_{k_1+\dots+k_n+l_1+\dots+l_n=j} h_{k_1 \dots k_n, l_1 \dots l_n} \cdot q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} \cdot p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n} \end{aligned}$$

assim,

$$H(q, p, t) = \sum_{j \geq 2} \sum_{k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n = j} h_{k_1 \dots k_n . l_1 \dots l_n} . q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} . p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n},$$

$$\Gamma(Z, t) = \Gamma(Q, P, t) = \sum_{j=2}^{\infty} \Gamma_j(Q, P, t)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_j(Q, P, t) &= \sum_{|k|+|l|=j} \gamma_{kl}(t) . Q^k . P^l \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n = j} \gamma_{k_1 \dots k_n . l_1 \dots l_n} . Q_1^{k_1} \dots Q_n^{k_n} . P_1^{l_1} \dots P_n^{l_n} \end{aligned}$$

então

$$\Gamma(Q, P, t) = \sum_{j \geq 2} \sum_{k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n = j} \gamma_{k_1 \dots k_n . l_1 \dots l_n} . Q_1^{k_1} \dots Q_n^{k_n} . P_1^{l_1} \dots P_n^{l_n}.$$

Da mesma forma

$$\mathcal{H}(X, \overline{X}, t) = \sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{H}_j(X, \overline{X}, t),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X, \overline{X}, t) &= \sum_{|k|+|l|=j} g_{kl}(t) . X^k . \overline{X}^l \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n = j} g_{k_1 \dots k_n . l_1 \dots l_n} . x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} . \overline{x}_1^{l_1} \dots \overline{x}_n^{l_n} \end{aligned}$$

e assim

$$\mathcal{H}(X, \overline{X}, t) = \sum_{j \geq 2} \sum_{k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n = j} g_{k_1 \dots k_n . l_1 \dots l_n} . X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} . \overline{X}_1^{l_1} \dots \overline{X}_n^{l_n}.$$

Note que $\mathcal{H}(X, \overline{X}, t)$ é imaginário puro de modo que

$$\overline{\mathcal{H}} = -\mathcal{H} \text{ ou } \mathcal{H} = -\overline{\mathcal{H}},$$

Logo $g_{kl} = -\overline{g_{lk}}$. Desse modo

$$\Gamma(Q, P, t) = \frac{1}{2i} \mathcal{H}(Q + iP, Q - iP, t).$$

e assim $Z = 0$ é uma solução de equilíbrio. Vamos supor que os expoentes característicos da matriz do sistema linearizado associado a Γ_2 são $\pm iw_1, \dots, \pm iw_n$ e o sistema (2.16) é linearmente estável, de modo que podemos assumir sem perda de generalidade que

$$H_2 = \frac{w_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \dots + \frac{w_n}{2}(q_n^2 + p_n^2) \quad (2.17)$$

e que a mudança de coordenadas $z \mapsto Z$ não altera a parte quadrática, ou seja,

$$\Gamma_2 = \frac{w_1}{2}(Q_1^2 + P_1^2) + \dots + \frac{w_n}{2}(Q_n^2 + P_n^2).$$

Consideramos $w = (w_1, \dots, w_n)$ e seja o $\mathbb{Z}$ - módulo.

$$\begin{aligned} M_w &= \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : k_1 w_1 + \dots + k_n w_n = 0 \bmod 1\} \\ &= \{k \in \mathbb{Z}^n : \langle w, k \rangle \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

sendo $\langle w, k \rangle = w_1 k_1 + \dots + w_n k_n = \sum_{k=1}^n w_n k_n$. Se $M_w = \{0\}$ dizemos que um sistema que possui parte quadrática como em (2.17) não possui relações de ressonância. Em caso contrário, dizemos que o sistema possui relações de ressonância.

Definição 2.3.1. Dizemos que o Hamiltoniano $\Gamma(Q, P, t)$ está na **forma normal de Gustavson** se a série de potências de $\mathcal{H}(X, \overline{X}, t)$ só contém termos da forma $X^k \overline{X}^l$ com $k - l \in M_w$. Em outras palavras,

$$g_{kl}(t) \neq 0$$

se, e somente se,

$$k - l \in M_w,$$

ou seja,

$$k - l \notin M_w$$

se, e somente se,

$$g_{kl}(t) = 0$$

para todo t .

Note que $M_w = \{0\}$ se e somente se $w_1, \dots, w_n$ e 1, são linearmente independente sobre os racionais, assim o sistema Hamiltoniano cuja parte quadrática tem a forma (2.17) não possui relações de ressonâncias. Se se e somente se $w_1, \dots, w_n$ e

1, são linearmente independente sobre os racionais $\mathcal{H}(X, \overline{X}, t)$ só contém termos da forma

$$X^k \cdot \overline{X}^k = (Q_1^2 + Q_1^2)^{k_1} + \dots + (Q_n^2 + Q_n^2)^{k_n}.$$

Nesse caso, dizemos que $\Gamma(Q, P, t)$ está na forma normal de Birkhoff. Note que a forma normal de Birkhoff é um caso particular de Gustavson. De fato, a forma normal de Birkhoff é a forma normal de Gustavson no caso em que o sistema correspondente não possui relações de ressonâncias.

Vejamos agora um exemplo no caso $n = 2$, onde

$$Q = (Q_1, Q_2) \quad \text{e} \quad P = (P_1, P_2)$$

e o Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned} \Gamma(Q, P) &= \frac{\pi}{2}(Q_1^2 + P_1^2) + \frac{3}{2}(Q_2^2 + P_2^2) + (Q_1^2 + P_1^2)^2 - (Q_2^2 + P_2^2)^3 \\ &= \Gamma_2(Q, P) + \Gamma_4(Q, P) - \Gamma_6(Q, P) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_2(Q, P) &= \frac{\pi}{2}(Q_1^2 + P_1^2) + \frac{3}{2}(Q_2^2 + P_2^2), \\ \Gamma_4(Q, P) &= (Q_1^2 + P_1^2)^2, \\ \Gamma_6(Q, P) &= (Q_2^2 + P_2^2)^3. \end{aligned}$$

Agora consideremos a transformação 2i-simplética

$$\begin{aligned} (Q_1, Q_2, P_1, P_2) &\mapsto (x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2) \\ x_1 &= Q_1 + iP_1 \quad \overline{x}_1 = Q_1 - iP_1 \\ x_2 &= Q_2 + iP_2 \quad \overline{x}_2 = Q_2 - iP_2. \end{aligned}$$

Observe que temos as relações

$$\begin{aligned} x_1 \overline{x}_1 &= |x_1|^2 = (Q_1^2 + P_1^2), \quad Q_j = \frac{x_j + \overline{x}_j}{2} \\ x_2 \overline{x}_2 &= |x_2|^2 = (Q_2^2 + P_2^2), \quad P_j = \frac{x_j - \overline{x}_j}{2i}. \end{aligned}$$

Denotando por $\mathcal{H}$ o novo Hamiltoniano nas novas coordenadas $(x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2)$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2) &= 2i\Gamma(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \\ &= 2i\left(\frac{\pi}{2}x_1\overline{x}_1 + \frac{3}{2}x_2\overline{x}_2 + (x_1\overline{x}_1)^2 - (x_2\overline{x}_2)^3\right) \\ &= \pi i x_1 \overline{x}_1 + 3i x_2 \overline{x}_2 + i x_1^2 \overline{x}_1^2 - i x_2^3 \overline{x}_2^3, \end{aligned}$$

mostrando que Γ está na forma normal de Gustavson. De fato, os valores característicos do sistema linearizado são $\{\pm\pi i, \pm 3i\}$, que são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Da observação anterior temos que $M_w = \{0\}$ e portanto $\mathcal{H}$ está de fato na forma normal de Birkhoff.

Vamos considerar agora o Hamiltoniano $\Gamma = \Gamma(Q, P)$ da forma

$$\Gamma(Q, P) = \frac{\pi}{2}(Q^2 + P^2) + Q^2P = \Gamma_2 + \Gamma_3.$$

Notemos que o valor característico é $\omega = \pi$ e vamos considerar a mudança 2i-simplética

$$x = Q + iP \quad \text{e} \quad \bar{x} = Q - iP.$$

Sabendo que $x\bar{x} = |x|^2 = Q^2 + P^2$ sendo

$$Q = \frac{x + \bar{x}}{2} \quad \text{e} \quad P = \frac{x - \bar{x}}{2i},$$

temos que o novo Hamiltoniano $\mathcal{H}$ é da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, \bar{x}) &= 2i\Gamma\left(\frac{x + \bar{x}}{2}, \frac{x - \bar{x}}{2i}\right) \\ &= 2i\left[\frac{\pi}{2}x\bar{x} + \left(\frac{x + \bar{x}}{2}\right)^2\left(\frac{x - \bar{x}}{2i}\right)\right] \\ &= i\pi x\bar{x} + \frac{(x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2)(x - \bar{x})}{4} \\ &= i\pi x\bar{x} + \frac{1}{4}(x^3 - x^2\bar{x} + 2x^2\bar{x} - 2x\bar{x}^2 + \bar{x}^2x - \bar{x}^3) \\ &= (i\pi)x\bar{x} + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2\bar{x} - \frac{1}{4}x\bar{x}^2 - \frac{1}{4}\bar{x}^3 \\ &= (i\pi)x\bar{x} + \frac{1}{4}x^3\bar{x}^0 + \frac{1}{4}x^2\bar{x} - \frac{1}{4}x\bar{x}^2 - \frac{1}{4}x^0\bar{x}^3 \\ &= \left(\sum_{k+l=2} g_{kl}x^k\bar{x}^l\right) + \left(\sum_{k+l=3} g_{kl}x^k\bar{x}^l\right) = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 \end{aligned}$$

sendo

$$g_{20} = g_{02} = 0, \quad g_{11} = i\pi, \quad g_{30} = g_{21} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad g_{12} = g_{03} = -\frac{1}{4}.$$

Observe que

$$g_{21} = \frac{1}{4} \neq 0$$

daí

$$(2-1)\pi = \pi \notin \mathbb{Z}$$

Logo, Γ não está na forma normal de Gustavson.

2.4 Obtenção da Forma Normal de Gustavson

Estamos interessados em "simplificar" um sistema Hamiltoniano periódico do tipo:

$$\dot{z} = J\nabla H(z, t)$$

onde H é analítico nas variáveis $z = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e 2π -periódico em t . Dessa forma, queremos encontrar uma transformação de coordenadas simpléticas da forma,

$$E : z = (q, p) \mapsto Z = (Q, P)$$

onde o novo Hamiltoniano $\Gamma(Q, P, t)$ esteja na forma normal de Gustavson, ou seja, quando fazermos a mudança de variáveis:

$$(Q, P) \mapsto (X, \bar{X}) = (Q + iP, Q - iP)$$

o novo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(X, \bar{X}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j(X, \bar{X}, t)$$

com

$$\mathcal{H}_j = \sum_{|k|+|l|=j} g_{kl}(t) \cdot X^k \cdot \bar{X}^l$$

satisfaz a condição $g_{kl} \neq 0$ sempre que $k - l \in M_w$ com $M_w = \{k \in \mathbb{Z}^n : \langle k, w \rangle \in \mathbb{Z}\}$. Aqui $\pm iw_1, \dots, \pm w_n$ são os expoentes característicos do sistema linearizado associado ao sistema original.

Nesta seção mostraremos que, sob certas condições sobre a parte quadrática da função Hamiltoniana, sempre existe uma transformação E tal que Γ estar na forma normal de Gustavson. De fato, mostraremos no Teorema [2.4.1](#) esse fato, onde forneceremos uma transformação simplética dada por uma função geradora do tipo $S(q, P)$.

$$E : H \mapsto \Gamma$$

tal que Γ esteja na forma normal de Gustavson.

Teorema 2.4.1. *Se numa vizinhança da origem H é da forma*

$$H(q, p, t) = \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k (q_k^2 + p_k^2) \right) + H_3 + H_4 + \dots$$

com H_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, sendo 2π -periódico em t , então existe uma transformação simplética

$$E : (q, p) \mapsto (Q, P)$$

tal que o novo Hamiltoniano $\Gamma(Q, P)$ está na sua forma normal de Gustavson.

Demonstração: Mostraremos a existência de uma função geradora analítica $S(q, P, t)$, dada por relações implícitas

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}$$

que gera uma transformação simplética $(q, p) \mapsto (Q, P)$ onde o Hamiltoniano Γ nas novas variáveis está na forma normal de Gustavson.

Suponha que a expansão de S em série de Taylor numa vizinhança da origem é da forma

$$S(q, P, t) = qP + S_3(q, P, t) + S_4(q, P, t) + \dots$$

onde cada S_j um polinômio homogêneo de grau j em q, P e 2π - periódico em t da forma

$$S_j(q, P, t) = \sum_{|k|+|l|=j} s_{kl}(t) q^k P^l$$

sendo $s_{kl}(t + 2\pi) = s_{kl}(t)$, para todo $k, l \in \mathbb{Z}^n$ e para todo t . Desse modo, temos a seguinte relação

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \Gamma\left(\frac{\partial S}{\partial P}, P, t\right)$$

Abrindo os respectivos somatórios, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n \frac{w_k}{2} \left\{ q_k^2 + \left(P_k + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} + \dots \right)^2 \right\} \right) + H_3\left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \dots, t\right) + \dots + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{w_k}{2} \left\{ \left(q_k + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \dots \right)^2 + P_k^2 \right\} \right) + \Gamma_3\left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \dots, P, t\right) + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Seja G_k a função que aplicada a um polinômio nos fornece o termo de grau k , assim, vamos agora estudar a relação para termos algumas ordens. Por exemplo, os termos de ordem três são dados por

$$\sum_{k=1}^n w_k P_k \frac{\partial S_3}{\partial q_k} + H_3(q, P, t) + \frac{\partial S_3}{\partial t} = \sum_{k=1}^n w_k q_k \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \Gamma_3(q, P, t). \quad (2.19)$$

Denotemos por

$$D := \sum_{j=1}^n w_j \left(P_j \frac{\partial}{\partial q_j} - q_j \frac{\partial}{\partial P_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Aplicando D em (2.19), obtemos a seguinte relação:

$$H_3(q, P, t) = \Gamma_3(q, P, t) - DS_3(q, P, t). \quad (2.21)$$

Para enxergar um padrão nessa relação, vamos analisar também os termos de ordens quatro e cinco, e depois seguiremos de maneira indutiva.

De fato, aplicando G_4 em obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{w_k}{2} \left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_k} \right)^2 + 2P_k \frac{\partial S_4}{\partial q_k} \right] + G_4 \left(H_3 \left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q}, t \right) \right) + H_4(q, P, t) + \frac{\partial S_4}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{w_k}{2} \left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial P_k} \right)^2 + 2q_k \frac{\partial S_4}{\partial P_k} \right] + G_4 \left(\Gamma_3 \left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P}, P, t \right) \right) + \Gamma_4(q, P, t). \end{aligned}$$

Aplicando o operador D , dado em (2.20), reordenando

$$\begin{aligned} \Gamma_4(q, P, t) - DS_4(q, P, t) &= H_4(q, P, t) + \sum_{k=1}^n \frac{w_k}{2} \left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_k} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_k} \right)^2 \right] \\ &\quad + G_4 \left(H_3 \left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q}, t \right) - \Gamma_3 \left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P}, P, t \right) \right), \end{aligned}$$

em outras palavras,

$$\sum_{k=1}^n w_k P_k \frac{\partial S_4}{\partial q_k} + C_2(H_3, S_3) + H_4 + \frac{\partial S_4}{\partial t} = \sum_{k=1}^n w_k q_k \frac{\partial S_4}{\partial P_k} + C_2(\Gamma_3, S_3) + \Gamma_4$$

ou então,

$$\Gamma_4 - DS_4 = H_4 + C(H_3, \Gamma_3, S_3, t).$$

De forma análoga, aplicando G_5 em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n w_k \left[P_k \frac{\partial S_5}{\partial q_k} + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} \frac{\partial S_4}{\partial q_k} \right] + H_5(q, P, t) + G_5 \left[H_3 \left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \frac{\partial S_4}{\partial q} \right) \right. \\ & \quad \left. + H_4 \left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \frac{\partial S_4}{\partial q}, t \right) \right] + \frac{\partial S_5}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^n w_k \left[q_k \frac{\partial S_5}{\partial P_k} + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} \frac{\partial S_4}{\partial P_k} \right] + \Gamma_5(q, P, t) - G_5 \left[\Gamma_3 \left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \frac{\partial S_4}{\partial P}, P, t \right) \right. \\ & \quad \left. - \Gamma_4 \left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \frac{\partial S_4}{\partial P}, P, t \right) \right] \quad (2.22) \end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n w_k P_k \frac{\partial S_5}{\partial q_k} + C_1(H_3, H_4, S_3, S_4) + H_5 + \frac{\partial S_5}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^n w_k P_k \frac{\partial S_5}{\partial P_k} + C_2(\Gamma_3, \Gamma_4, S_3, S_4) + \Gamma_5 \end{aligned}$$

Aplicando o operador D em (2.22), obtemos

$$\begin{aligned} & \Gamma_5(q, P, t) - DS_5(q, P, t) \\ &= H_5(q, P, t) + \sum_{k=1}^n w_k \left[\frac{\partial S_3}{\partial q_k} \frac{\partial S_4}{\partial q_k} - \frac{\partial S_3}{\partial P_k} \frac{\partial S_4}{\partial P_k} \right] \\ & \quad + G_5 \left(H_3 \left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \frac{\partial S_4}{\partial q}, t \right) + H_4 \left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \frac{\partial S_4}{\partial q}, t \right) \right) \\ & \quad + G_5 \left(\Gamma_3 \left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \frac{\partial S_4}{\partial P}, P, t \right) - \Gamma_4 \left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \frac{\partial S_4}{\partial P}, P, t \right) \right) \end{aligned}$$

sendo também,

$$\Gamma_5 - DS_5 = H_5 + C(H_3, H_4, \Gamma_3, \Gamma_4, S_3, S_4, t).$$

De maneira geral, dado $m \geq 5$, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n w_k P_k \frac{\partial S_m}{\partial q_k} + C_1(H_3, H_4, \dots, H_{m-1}, S_3, S_4, \dots, S_{m-1}) + H_m + \frac{\partial S_m}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^n w_k P_k \frac{\partial S_m}{\partial P_k} + C_2(\Gamma_3, \Gamma_4, \dots, \Gamma_{m-1}, S_3, S_4, \dots, S_{m-1}) + H_m + \Gamma_m \end{aligned}$$

Aplicando D (ver (2.20)), temos

$$\Gamma_m - DS_m = H_m + C(H_3, \dots, H_{m-1}, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{m-1}, S_3, \dots, S_{m-1}, t). \quad (2.23)$$

Ou seja, tais relações nos dizem que conhecendo os termos $S_3, S_4, \dots, S_{m-1}, \Gamma_3, \Gamma_4, \dots, \Gamma_{m-1}$ e $H_3, H_4, \dots, H_{m-1}$ obtemos a relação entre o termo Γ_m do Hamiltoniano e termos S_m geradora.

Vamos usar a indução em (2.23) para concluir o resultado. De fato, considere as coordenadas complexas

$$x_j = q_j + iP_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Obtemos assim,

$$D = i \sum_{k=1}^n w_j \left(\bar{x}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Como discutido nos contextos anteriores podemos escrever:

$$H_m = H_m \left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t \right) = \sum_{|k|+|l|=m} g_{kl} x^k \bar{x}^l,$$

$$S_m = S_m \left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t \right) = \sum_{|k|+|l|=m} f_{kl} x^k \bar{x}^l,$$

$$K_m = K_m \left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t \right) = \sum_{|k|+|l|=m} a_{kl} x^k \bar{x}^l$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Desse modo

$$\Gamma_m(x, \bar{x}, t) - DS_m(x, \bar{x}, t) = K_m(x, \bar{x}, t)$$

que nos fornece a seguinte relação para os coeficientes

$$\frac{d}{dt} f_{kl} + i\langle w, l - k \rangle f_{kl} - g_{kl} = -a_{kl} \quad (2.24)$$

a qual admite solução suave e periódica para qualquer dado inicial, obtendo assim a função geradora procurada. ■

Portanto, considerando o sistema Hamiltoniano

$$\dot{z} = J \nabla H(z(t), t),$$

onde H é da forma

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k (q_k^2 + p_k^2) + H_3(q, p, t) + \dots$$

numa vizinhança da origem existe uma transformação simplética $(q, p) \mapsto (Q, P)$, tal que $\Gamma(Q, P, t)$ está em sua forma normal de Gustavson.

Notemos que no Teorema [2.4.1](#) assumimos que

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k (q_k^2 + p_k^2)$$

isso é, os autovalores da matriz do sistema linearizado são imaginários puros e isso está fortemente relacionado com o estudo do problema da estabilidade de equilíbrio. Pois, quando os autovalores da matriz do sistema linearizado possui parte real não nula, perdemos a estabilidade do equilíbrio e esse fenômeno raramente aparece em problemas práticos da mecânica celeste.

Quando obtemos a forma normal da função Hamiltoniana até um número finito de termos, a transformação simplética que leva $H \mapsto \Gamma$ é analítica, enquanto para uma quantidade infinita de termos nada pode se dizer sobre a convergência da série.

Com base no Teorema (ver [2.4.1](#)), veremos a seguir como obter a forma normal do Hamiltoniano para alguns casos particulares de funções Hamiltonianas com um grau de liberdade.

2.4.1 Formas normais para Hamiltonianos periódicos com 1 grau de liberdade

Seja $H = H(z, t)$ uma função analítica na variável $z = (q, p) \in \mathbb{R}^2$ em uma vizinhança da origem e 2π -periódica em t . Suponhamos que a origem é um equilíbrio do sistema, de modo que expandido H em sua série de Taylor numa vizinhança da origem

$$H(z, t) = H_2(z, t) + H_3(z, t) + \dots$$

onde H_k é um polinômio homogêneo na variável $z = (q, p)$ e 2π -periódica na variável t . Suponhamos também que H tem um grau de liberdade e é linearmente estável, com $\lambda = \pm wi \neq 0$ seu expoente característico. Vamos supor sem perda de generalidade que

$$H_2(q, p, t) = \frac{w}{2}(q^2 + p^2)$$

Daqui em diante vamos normalizar H_3 e H_4 , isto é, obter as formas normais de Gustavson de H_3 e H_4 .

Para normalizar H_3 vamos assumir inicialmente que o sistema correspondente não possui ressonância de ordem 3, ou seja, que

$$3w \notin \mathbb{Z}.$$

Desse modo, sendo $b_{kl} = w(l - k)$, temos que

$$b_{30} = -3w, \quad b_{03} = 3w, \quad b_{21} = -w \quad e \quad b_{12} = w$$

Para obtermos os coeficientes da função geradora vamos analisar a equação [2.24](#), cuja solução via Método de variação de parâmetros fornece:

$$f_{kl}(t) = f_{kl}(0)e^{-b_{kl}t} - e^{ib_{kl}t} + \int_0^t e^{ib_{kl}x}(a_{kl} - g_{kl})dx,$$

com

$$f_{kl}(0) = \int_0^{2\pi} e^{-ib_{kl}x} (b_{kl}^* - g_{kl}).$$

Denotando por

$$\begin{aligned} f_{kl} &= u'_{kl} + iv'_{kl}, \\ g_{kl} &= u_{kl} + iv_{kl}, \\ a_{kl} &= u_{kl}^* + iv_{kl}^*, \\ j_1(t) + ij_2(t) &= \int_0^t e^{ib_{kl}x} (a_{kl} - g_{kl}) dx, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} s_{30} &= 2(u'_{30} + u'_{21}), \\ s_{03} &= 2(v'_{30} - u'_{21}), \\ s_{21} &= 2(u'_{21} - 3u'_{30}), \\ s_{12} &= -2(v'_{30} + 3v'_{21}) \\ u'_{kl} &= F_{kl} \operatorname{sen}(b_{kl}t) + G_{kl}(t) \cos(b_{kl}x), \\ v'_{kl} &= F_{kl} \cos(b_{kl}t) - G_{kl}(t) \operatorname{sen}(b_{kl}x), \\ F_{kl}(t) &= \frac{1}{2} [\cot g(\pi b_{kl}) J_2(2\pi) + J_1(2\pi)] - J_1(t), \\ G_{kl}(t) &= \frac{1}{2} [\cot g(\pi b_{kl}) J_2(2\pi) + J_1(2\pi)] - J_1(t), \\ J_1(t) &= \int_0^t (u_{kl}^* \cos(b_{kl}x) + v_{kl}^* \operatorname{sen}(b_{kl}x)) dx, \\ J_2(t) &= \int_0^t (u_{kl}^* \operatorname{sen}(b_{kl}x) - v_{kl}^* \cos(b_{kl}x)) dx, \\ u_{30}^* &= \frac{1}{8} (b_{30} - b_{12}), \\ v_{30}^* &= \frac{1}{8} (b_{03} - b_{21}), \\ u_{21}^* &= \frac{1}{8} (3b_{30} + b_{12}), \\ v_{21}^* &= \frac{1}{8} (3b_{03} + b_{21}). \end{aligned}$$

Como o sistema possui ressonância de ordem três, a eliminação completa dos termos de terceira ordem não é possível. De fato, eliminando assim os termos g_{21}

e g_{12} , como $g_{03} = \overline{g_{30}}$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_3(x, \bar{x}, t) &= g_{30}x^3 + g_{03}\bar{x}^3 \\
&= g_{30}x^3 + \overline{x_{30}x^3} \\
&= g_{30}x^3 + \overline{g_{30}x^3} \\
&= 2\text{Re}(g_{30}x^3) \\
&= 2u_{30}(Q^3 - 3QP^2) + 2v_{30}(P^3 - 3Q^2P)
\end{aligned}$$

onde

$$g_{30} = \frac{e^{imt}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} a_{30} dt.$$

Note que

$$\begin{aligned}
u_{30} &= x_{30}\cos(mt) - y_{30}\sin(mt) \\
v_{30} &= x_{30}\sin(mt) + y_{30}\cos(mt)
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
x_{30} &= \text{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} h_{30}^* dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_{30}^* \cos(mt) + v_{30}^* \sin(mt)) dt \\
y_{30} &= \text{Im} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} h_{30} dt \right) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} v_{30}^* \cos(mt) - u_{30}^* \sin(mt) dt.
\end{aligned}$$

No caso $3w \notin \mathbb{Z}$, ou seja, quando o sistema correspondente não possui relações de ressonância de terceira ordem, podemos eliminar os termos de ordem três do Hamiltoniano, ou seja $\Gamma_3 = 0$.

Vamos agora normalizar os termos de quarta ordem. Primeiramente, se o sistema correspondente não possui ressonância de terceira ordem, ou seja, $3w \notin \mathbb{Z}$ então, podemos assumir que

$$H(q, p, t) = \frac{w}{2} (q^2 + p^2) + H_4(q, p, t) + \dots$$

Se existe ressonância de ordem quatro, temos o termo de quarta ordem em coordenadas complexas é dada por

$$\mathcal{H}(x, \bar{x}, t) = \sum_{k+l=4} g_{kl} x^k \bar{x}^l = g_{40} x^4 + g_{22} x^2 \bar{x}^2 + g_{04} \bar{x}^4.$$

Usando que $g_{04} = \overline{g_{40}}$, $g_{22} = \overline{g_{22}} \in \mathbb{R}$ e que $g_{kl} = u_{kl} + iv_{kl}$ então

$$\begin{aligned}
\Gamma(Q, P, t) &= \frac{w}{2} (Q^2 + P^2) + \frac{u_{22}}{4} (Q^2 + P^2)^2 \\
&\quad + u_{40} (Q^4 - 6Q^2 P^2 + P^4) - 4v_{40} QP (Q^2 - P^2) + H_5 + \dots
\end{aligned}$$

Pelos passos do Teorema [2.4.1](#), mais precisamente analisando a equação [2.24](#), obtemos

$$\begin{aligned}
u_{40} &= x_{40} \cos(mt) - y_{40} \sin(mt), \\
v_{40} &= x_{40} \cos(mt) + y_{40} \sin(mt), \\
x_{40} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v_{40}^* \cos(mt) - u_{40}^* \sin(mt)) dt, \\
u_{40}^* &= \frac{1}{8} (h_{40} - h_{22} + h_{04}), \\
v_{40}^* &= \frac{1}{8} (h_{13} - h_{31}), \\
u_{22} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (3h_{40} + h_{22} + 3h_{04}) dt.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

A forma Normal de Gustavson no caso Degenerado para Sistemas Hamiltonianos com um Grau de Liberdade

Neste capítulo, seguindo as referências de Markeev [18] e de Gutierrez-Vidal [10], apresentaremos o processo de obtenção da forma normal de um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade no caso em que a parte quadrática nula. Abordaremos o caso em que a função Hamiltoniana inicia com termos de terceira ou quarta ordem.

3.1 Introdução

Vamos considerar um sistema Hamiltoniano da forma

$$\dot{z} = J\nabla H(z, t) \quad (3.1)$$

onde $z = (q, p) \in \mathbb{R}^2$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e H é uma função que pode ser representada da forma:

$$H(z, t) = \sum_{j=m}^s H_j(z) + \hat{H}(z, t), \quad (3.2)$$

sendo $m \geq 3$ (o caso $m = 2$ foi tratado no capítulo anterior) e

$$H_j = \sum_{|k|+|l|=j} h_{kl} q^k p^l$$

e $\hat{H}$ representa os termos de grau maior ou igual a s cujos os coeficientes são de classe C^0 e 2π -periódicas no tempo.

Note que a função Hamiltoniana H dada em (3.2) é autônoma até ordem s , mas os termos de ordem maior que s são periódicas em t . No capítulo anterior, assumimos que apenas H_2 não dependia de t , mas os demais termos eram periódicos.

Os coeficientes h_{kl} dos termos H_j , $j = m, \dots, s$, são dependentes periodicamente do tempo. Sistemas que admitem Hamiltonianos da forma de (3.2) admitem o ponto $z = (0, 0)$ como ponto de equilíbrio, de modo que $\nabla H(0, 0, t) \equiv 0$ para t . Uma mudança simplética de coordenadas

$$z = (q, p) \mapsto Z = (Q, P)$$

que simplifica a estrutura do Hamiltoniano é comumente utilizado na literatura para estudar a dinâmica do sistema próximo de um ponto de equilíbrio. Essa mudança, normalmente é feita usando a transformação simplética dada por uma função geradora, conforme Teorema 1.3.1.

Na prova do Teorema 2.4.1, onde apresentamos o processo clássico, a transformação de simplética é obtida no caso em o Hamiltoniano inicia com termos quadráticos, isto é, $m = 2$. Porém, em problemas específicos de dinâmica, existem casos onde não há termos de segunda ordem na expansão, caracterizando um processo degenerado. Por exemplo, tais situações ocorrem no problema de estabilidade e de oscilações não lineares para sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade que é 2π periódicos no tempo. Nesse problema a função Hamiltoniana tem período 2π ou 4π no tempo, e o número s da expressão pode ser tão grande quanto se queira.

Nesse capítulo, baseado no trabalho de Markeev [18], vamos obter a transformação de Birkhoff para (3.2) onde a expansão em H_k começa com $m \geq 3$, ou seja, há degenerescência para a parte quadrática; e assim realizar uma mudança canônica de coordenadas a fim de simplificar o Hamiltoniano.

Sistemas com estrutura dada por (3.2) pertencem a uma classe de sistemas dinâmicos não lineares para a qual a topologia do retrato de fase próximo de

um ponto singular não é determinada somente pelos termos lineares. Para tais sistemas, o procedimento para representação analítica das soluções em forma de uma série infinita é usado de maneira similar no primeiro método de Lyapunov. Porém, nesse capítulo não consideramos o problema da representação analítica das soluções dos sistemas com Hamiltoniano da forma (3.2). A ideia é usar uma transformação simplética dada por uma função geradora, similar ao procedimento utilizado na demonstração do Teorema 2.4.1

3.2 Normalização dos termos de terceira e quarta ordem por meio de uma transformação linear

Nesta seção, usando as ideias do artigo de Markeev [19], mostraremos que dada uma função Hamiltoniana homogênea de terceira ou quarta ordem, é possível simplificá-la por meio de uma mudança linear de variáveis. Inicialmente vamos estudar o caso em que a função Hamiltoniana é homogênea de grau 3.

Teorema 3.2.1 (Markeev, 2014). *Considere uma função Hamiltoniana do tipo*

$$H_3(x, y) = h_{30}x^3 + h_{21}x^2y + h_{12}xy^2 + h_{03}y^3$$

onde $h_{ij} \in \mathbb{R}$ com $0 \leq i, j \leq 3$. Então existe uma mudança de coordenadas linear simplética da forma

$$(x, y) \mapsto (q, p)$$

tal que a função Hamiltoniana nas coordenadas (q, p) assume uma das seguintes formas:

- i) $q(q^2 + p^2)$;
- ii) $q(q^2 - p^2)$;
- iii) q^2p ;
- iv) q^3 .

Demonstração: Vamos considerar a mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

dados por

$$\begin{cases} x = \cos\alpha u + \sin\alpha v \\ y = -\sin\alpha u + \cos\alpha v \end{cases}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ a se determinar. Isto é,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Conforme vimos no exemplo [1.2.2](#), a matriz A é simplética para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Aplicando a mudança de variáveis (u, v) induzida pela matriz A , sendo R_3 o Hamiltoniano nas novas variáveis temos

$$\begin{aligned} R_3(u, v) &= h_{30}(\cos\alpha u + \sin\alpha v)^3 \\ &\quad + h_{21}(\cos\alpha u + \sin\alpha v)^2(-\sin\alpha u + \cos\alpha v) \\ &\quad + h_{12}(\cos\alpha u + \sin\alpha v)(-\sin\alpha u + \cos\alpha v)^2 \\ &\quad + h_{03}(-\sin\alpha u + \cos\alpha v)^3 \\ &= h_{30}(\cos^3\alpha u^3 + 3\cos^2\alpha u^2\sin\alpha v + \sin^3\alpha v^3) \\ &\quad + h_{21}(\cos^2\alpha u^2 + 2\cos\alpha\sin\alpha v)(-\sin\alpha u + \cos\alpha v) \\ &\quad + h_{12}(\cos\alpha u + \sin\alpha v)(\sin^2\alpha u^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha v + \cos^2\alpha v^2) \\ &\quad + h_{03}(-\sin^3\alpha u^3 + 3\sin^2\alpha u^2\cos\alpha v - 3\sin\alpha\cos^2\alpha v^2 + \cos^3\alpha v^3) \\ &= (h_{30}\cos^3\alpha - h_{03}\sin^3\alpha)u^3 \\ &\quad + (3h_{30}\cos^2\alpha\sin\alpha + h_{21}\cos^3\alpha - 2h_{21}\cos\alpha\sin^2\alpha \\ &\quad - 2h_{12}\cos^2\alpha\sin\alpha + h_{12}\sin^3\alpha + 3h_{03}\sin^2\alpha\cos\alpha)u^2v \\ &\quad + (3h_{30}\cos\alpha\sin^2\alpha - h_{21}\sin^3\alpha + 2h_{21}\cos^2\alpha\sin^2\alpha \\ &\quad + h_{12}\cos^3\alpha - 2h_{12}\sin^2\alpha\cos\alpha - 3h_{03}\sin\alpha\cos^2\alpha)uv^2 \\ &\quad + (h_{30}\sin^3\alpha + h_{21}\sin^2\alpha\cos\alpha + h_{12}\sin\alpha\cos^2\alpha + h_{03}\cos^3\alpha)v^3 \\ &= r_{30}u^3 + r_{21}u^2v + r_{12}uv^2 + r_{03}v^3 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
r_{30} &= h_{30} \cos^3 \alpha - h_{03} \sin^3 \alpha \\
r_{21} &= 3h_{30} \cos^2 \alpha \sin \alpha + h_{21} \cos^3 \alpha - 2h_{21} \cos \alpha \sin^2 \alpha \\
&\quad - 2h_{12} \cos^2 \alpha \sin \alpha + h_{12} \sin^3 \alpha + 3h_{03} \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
r_{12} &= 3h_{30} \cos \alpha \sin^2 \alpha - h_{21} \sin^3 \alpha + 2h_{21} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\
&\quad + h_{12} \cos^3 \alpha - 2h_{12} \sin^2 \alpha \cos \alpha - 3h_{03} \sin \alpha \cos^2 \alpha \\
r_{03} &= h_{30} \sin^3 \alpha + h_{21} \sin^2 \alpha \cos \alpha + h_{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha + h_{03} \cos^3 \alpha.
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
r_{03} &= h_{30} \sin^3 \alpha + h_{21} \sin^2 \alpha \cos \alpha + h_{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha + h_{03} \cos^3 \alpha \\
&= H_3(\sin \alpha, \cos \alpha) := F_3(\alpha)
\end{aligned}$$

com isso obtemos as relações

$$\begin{aligned}
r_{03} &= F_3(\alpha), \quad r_{30} = \frac{1}{6} F_3'''(\alpha) + \frac{7}{6} F_3'(\alpha), \\
r_{21} &= \frac{1}{2} F_3''(\alpha) + \frac{3}{2} F_3(\alpha) \quad \text{e} \quad r_{12} = F_3'(\alpha)
\end{aligned}$$

Mostraremos que existe $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_3(\alpha^*) = 0.$$

De fato, como H_3 é um polinômio de grau 3, isto é, de grau ímpar, sabemos que existe $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ tais que

$$H_3(x^*, y^*) = 0.$$

Além disso, como H_3 é homogêneo sabemos que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos que,

$$\begin{aligned}
H_3(\tau x, \tau y) &= h_{30}(\tau x)^3 + h_{21}(\tau x)^2(\tau y) + h_{12}(\tau x)(\tau y)^2 + h_{03}(\tau y)^3 \\
&= h_{30}\tau^3 x^3 + h_{21}\tau^2 x^2 \tau y + h_{12}\tau x \tau^2 y^2 + h_{03}\tau^3 y^3 \\
&= \tau^3 h_{30} x^3 + \tau^3 h_{21} x^2 y + \tau^3 h_{12} x y^2 + \tau^3 h_{03} y^3 \\
&= \tau^3 (h_{30} x^3 + h_{21} x^2 y + h_{12} x y^2 + h_{03} y^3) \\
&= \tau^3 H_3(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

em particular $H_3(\tau x^*, \tau y^*) = \tau^3 H_3(x^*, y^*) = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Com isso, escolhemos $\tau^* \in \mathbb{R}$ tal que $(\tau^* x^*)^2 + (\tau^* y^*)^2 = 1$, mais explicitamente $\tau^* = \frac{1}{\sqrt{x^{*2} + y^{*2}}} \in \mathbb{R}$. Desse modo obtemos que o vetor

$$(\tau^* x^*, \tau^* y^*) \in S^1$$

isto é, $|(\tau x^*, \tau y^*)| = 1$. Logo, existe um ângulo $\alpha^* \in [0, 2\pi]$, tal que

$$\cos \alpha^* = \tau^* x^* \quad \text{e} \quad \sin \alpha^* = \tau^* y^*$$

portanto,

$$F_3(\alpha^*) = H_3(\cos \alpha^*, \sin \alpha^*) = H_3(\tau^* x^*, \tau^* y^*) = (\tau^*)^3 H_3(x^*, y^*) = 0,$$

com queríamos.

Com garantia de tal existência, separamos nossa análise em 3 casos.

1. $F_3(\alpha^*) = 0$ e $F'_3(\alpha^*) \neq 0$
2. $F'_3(\alpha^*) = 0$ e $F''_3(\alpha^*) \neq 0$
3. $F'_3(\alpha^*) = F''_3(\alpha^*) = 0$ e $F'''_3(\alpha^*) \neq 0$.

Isto é, α^* é uma raiz simples, tem ordem 1 ou tem ordem 2.

Caso 1. Temos que, $F_3(\alpha^*) = 0$ e $F'_3(\alpha^*) \neq 0$, assim obtemos as relações:

$$\begin{aligned} r_{03} = F_3(\alpha^*) &= 0, \quad r_{30} = \frac{1}{6} F'''_3(\alpha^*) + \frac{7}{6} F'_3(\alpha^*) \neq 0, \\ r_{21} &= \frac{1}{2} F''_3(\alpha^*) + \frac{3}{2} F_3(\alpha^*) = \frac{1}{2} F''_3(\alpha^*) \neq 0 \quad \text{e} \quad r_{12} = F'_3(\alpha^*) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} R_3(u, v) &= r_{30}u^3 + r_{21}u^2v + r_{12}uv^2 + r_{03}v^3 \\ &= r_{30}u^3 + r_{21}u^2v + r_{12}uv^2 \\ &= u(r_{30}u^2 + r_{21}uv + r_{12}v^2) = uP_v(u) \end{aligned}$$

onde $P_v(u) = r_{30}u^2 + r_{21}vu + r_{12}v^2$. Observe que o discriminante de P_v é dado por

$$\Delta := (r_{21}v)^2 - 4r_{30}r_{12}v^2 = v^2(r_{21}^2 - 4r_{30}r_{12}).$$

Vamos definir, $\delta = 4r_{30}r_{12} - r_{21}^2$, e assim, dependendo do valor de δ temos 3 possibilidades.

1.1) $\delta > 0$,

Neste caso vamos considerar a transformação simplética

$$(u, v) \mapsto (q, p).$$

Dada por

$$u = \frac{2}{\sqrt{\delta}}q \quad \text{e} \quad v = \frac{-r_{21}}{r_{21}\sqrt{\delta}}q + \frac{1}{r_{12}}p$$

em outras palavras

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{\delta}} & 0 \\ \frac{-r_{21}}{r_{21}\sqrt{\delta}} & \frac{1}{r_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}.$$

Denotando $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{\delta}} & 0 \\ \frac{-r_{21}}{r_{21}\sqrt{\delta}} & \frac{1}{r_{12}} \end{bmatrix}$ observe que,

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{\delta}} & \frac{-r_{21}}{r_{21}\sqrt{\delta}} \\ 0 & \frac{1}{r_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{\delta}} & 0 \\ \frac{-r_{21}}{r_{21}\sqrt{\delta}} & \frac{1}{r_{12}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{\delta}} & \frac{-r_{21}}{r_{21}\sqrt{\delta}} \\ 0 & \frac{1}{r_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}} & \frac{1}{r_{12}} \\ \frac{-2}{\sqrt{\delta}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-2r_{21}}{r_{12}\delta} + \frac{2r_{21}}{r_{12}\delta} & \frac{2}{r_{12}\sqrt{\delta}} \\ \frac{-2}{r_{12}\sqrt{\delta}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{r_{12}\sqrt{\delta}} \\ \frac{-2}{r_{12}\sqrt{\delta}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{r_{12}\sqrt{\delta}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = c^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = c^{-1} J \end{aligned}$$

onde $c = \frac{r_{12}\sqrt{\delta}}{2}$. Logo, a matriz A é c^{-1} -simplética.

Portanto, se Γ denota o novo Hamiltoniano nas coordenadas (q, p)

temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(q, p) &= cR(u, v) \\
&= cR(u(q, p), v(q, p)) \\
&= cR\left(\frac{2}{\sqrt{\delta}}q, \frac{-r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}q + \frac{1}{r_{12}}p\right) \\
&= c\left(\frac{2}{\sqrt{\delta}}q\right)\left[r_{30}\left(\frac{2}{\sqrt{\delta}}q\right)^2 + r_{21}\left(\frac{2}{\sqrt{\delta}}q\right)\left(\frac{-r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}q + \frac{1}{r_{12}}p\right)\right. \\
&\quad \left.+ r_{12}\left(\frac{-r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}q + \frac{1}{r_{12}}p\right)\right] \\
&= c\frac{2}{\sqrt{\delta}}q\left[\frac{r_{30}4}{\delta}q^2 - \frac{2r_{21}^2}{r_{12}\delta}q^2 + \frac{2r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}qp + \frac{r_{21}^2}{r_{12}\delta}q^2 - \frac{2r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}qp + \frac{1}{r_{12}}p^2\right] \\
&= \frac{r_{12}\sqrt{\delta}}{2}\frac{2}{\sqrt{\delta}}q\left[\frac{4r_{30}}{\delta}q^2 - \frac{2r_{21}^2}{r_{12}\delta}q^2 + \frac{2r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}qp + \frac{r_{21}^2}{r_{12}\delta}q^2\right. \\
&\quad \left.- \frac{2r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}qp + \frac{1}{r_{12}}p^2\right] \\
&= q\left[\left(\frac{4r_{12}r_{30} - 2r_{12}^2 + r_{21}^2}{\delta}\right)q^2 + p^2\right] \\
&= q\left[\left(\frac{4r_{12}r_{30} - r_{21}^2}{\delta}\right)q^2 + p^2\right] \\
&= q\left[\frac{\delta}{\delta}q^2 + p^2\right] = q(q^2 + p^2).
\end{aligned}$$

1.2) $\delta < 0$.

Segue de maneira análoga, basta considerarmos a transformação simplética

$$(u, v) \mapsto (q, p)$$

dada por

$$u = \frac{-2}{\sqrt{|\delta|}}q \quad \text{e} \quad v = \frac{r_{21}}{r_{12}\sqrt{|\delta|}} - \frac{1}{r_{12}}p$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{\delta}} & 0 \\ \frac{r_{21}}{r_{12}\sqrt{|\delta|}} & \frac{-1}{r_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}.$$

Com isso obtemos

$$\Gamma(q, p) = q(q^2 - p^2)$$

onde Γ é o novo Hamiltoniano nas coordenadas (q, p) .

1.3) $\delta = 0$.

Nesse caso, consideremos a transformação simplética

$$(u, v) \mapsto (q, p),$$

dada por

$$u = p \quad \text{e} \quad v = \frac{-1}{r_{12}}q - \frac{r_{21}}{2r_{12}}p$$

ou

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{r_{12}} & \frac{-r_{21}}{2r_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}.$$

Note que a transformação é μ -simplética. De fato, denotando $A =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{r_{12}} & \frac{-r_{21}}{2r_{12}} \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{r_{12}} \\ 1 & \frac{-r_{21}}{2r_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{r_{12}} & \frac{-r_{21}}{2r_{12}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{r_{12}} \\ 1 & \frac{-r_{21}}{2r_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{r_{12}} & \frac{-r_{21}}{2r_{12}} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_{12}} \\ \frac{-1}{r_{12}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{12}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = c^{-1} J \end{aligned}$$

onde $c = r_{12}$. Com isso, se Γ é o novo Hamiltoniano em coordenadas (q, p) temos

$$\begin{aligned} \Gamma(q, p) &= cR(u, v) \\ &= cR(u(q, p), v(q, p)) \\ &= cR\left(p, \frac{-1}{r_{12}}q - \frac{r_{21}}{2r_{12}}p\right) \\ &= cp\left[r_{30}p^2 - r_{21}p\left(\frac{1}{r_{12}}q + \frac{r_{21}}{2r_{12}}p\right) + r_{12}\left(\frac{1}{r_{12}}q + \frac{r_{21}}{2r_{12}}p\right)^2\right] \\ &= cp\left[r_{30}p^2 - \frac{r_{21}}{r_{12}}pq - \frac{r_{21}^2}{2r_{12}}p^2 + r_{12}\left(\frac{1}{r_{12}^2}q^2 + 2\frac{r_{21}}{2r_{12}^2}qp + \frac{r_{21}^2}{4r_{12}^2}p^2\right)\right] \\ &= r_{12}p\left[r_{30}p^2 - \frac{r_{21}}{r_{12}}qp - \frac{r_{21}^2}{2r_{12}}p^2 + \frac{1}{r_{12}}q^2 + \frac{r_{21}}{r_{12}}qp + \frac{r_{21}^2}{4r_{12}}p^2\right] \\ &= p\left[r_{12}r_{30}p^2 - \frac{r_{21}^2}{2}p^2 + q^2 + \frac{r_{21}^2}{4}p^2\right] \\ &= p\left[q^2 + \left(r_{12}r_{30} + \frac{r_{21}^2}{4} - \frac{r_{21}^2}{2}\right)p^2\right] \\ &= p\left[q^2 + \left(\frac{4r_{12}r_{30} + r_{21}^2 - 2r_{21}^2}{4}\right)p^2\right] \\ &= p\left[q^2 + \left(\frac{4r_{12}r_{30} - r_{21}^2}{4}\right)p^2\right] = p\left[q^2 + \frac{\delta}{4}p^2\right] = pq^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Gamma(q, p) = pq^2.$$

Caso 2. Vamos considerar as condições

$$F_3(\alpha^*) = F'_3(\alpha^*) = 0 \quad \text{e} \quad F''_3(\alpha^*) \neq 0.$$

Nesse caso temos as relações

$$\begin{aligned} r_{03} = F_3(\alpha^*) = 0, \quad r_{30} &= \frac{1}{6}F'''_3(\alpha^*) + \frac{7}{6}F'(\alpha^*) = \frac{1}{6}F'''_3(\alpha^*), \\ r_{21} &= \frac{1}{2}F''_3(\alpha^*) + \frac{3}{2}F_3(\alpha^*) = \frac{1}{2}F''_3(\alpha^*) \neq 0 \quad \text{e} \quad r_{12} = F'_3(\alpha^*) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, R toma a forma

$$R(u, v) = r_{30}u^3 + r_{21}u^2v + r_{12}uv^2 + r_{03}v^3 = u^2(r_{30}u + r_{21}v)$$

com $r_{21} \neq 0$, assim consideremos a transformação simplética

$$(u, v) \mapsto (q, p)$$

dada por

$$u = \frac{1}{r_{21}}q \quad \text{e} \quad v = \frac{-r_{30}}{r_{21}^2}q + p.$$

Em outras palavras,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{21}} & 0 \\ \frac{-r_{30}}{r_{21}^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}.$$

Denotando $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{21}} & 0 \\ \frac{-r_{30}}{r_{21}^2} & 1 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{21}} & \frac{-r_{30}}{r_{21}^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{21}} & 0 \\ \frac{-r_{30}}{r_{21}^2} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{21}} & \frac{-r_{30}}{r_{21}^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-r_{30}}{r_{21}^2} & 1 \\ \frac{1}{r_{21}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_{21}} \\ \frac{-1}{r_{21}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{r_{21}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = c^{-1}J \end{aligned}$$

com $c = r_{21}$, logo A é c^{-1} -simplética. Novamente, se Γ denota o novo

Hamiltoniano nas coordenadas (q, p) temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(q, p) &= cR(u, v) \\
&= cR(u(q, p), v(q, p)) \\
&= cR\left(\frac{1}{r_{21}}q, \frac{-r_{30}}{r_{21}^2}q + p\right) \\
&= c\left(\frac{1}{r_{21}}q\right)^2 \left(r_{30}\frac{1}{r_{21}}q + r_{21}\left(\frac{-r_{30}}{r_{21}^2}q + p\right)\right) \\
&= c\frac{1}{r_{21}^2}q^2 \left(\frac{r_{30}}{r_{21}}q - \frac{r_{30}}{r_{21}}q + r_{21}p\right) \\
&= r_{21}\frac{1}{r_{21}^2}q^2 \left(r_{21}p\right) = q^2p.
\end{aligned}$$

E para finalizar tal demonstração temos a seguinte situação.

Caso 3. Por fim, temos a situação,

$$F_3(\alpha^*) = F_3'(\alpha^*) = F_3''(\alpha^*) = 0.$$

Nesse caso, obtemos

$$\begin{aligned}
r_{03} = F_3(\alpha^*) &= 0, \quad r_{12} = F_3'(\alpha^*) = 0, \\
r_{21} &= \frac{1}{2}F_3''(\alpha^*) + \frac{3}{2}F_3(\alpha^*) = 0 \quad \text{e} \\
r_{30} &= \frac{1}{6}F_3'''(\alpha^*) + \frac{7}{6}F_3'(\alpha^*) = \frac{1}{6}F_3'''(\alpha^*) \neq 0.
\end{aligned}$$

Logo, R_3 assume a forma

$$R_3(u, v) = r_{30}u^3.$$

Como $r_{30} \neq 0$, considere a transformação simplética

$$(u, v) \mapsto (q, p)$$

onde

$$u = r_{30}^{-\frac{1}{3}}q \quad \text{e} \quad v = r_{30}^{\frac{1}{3}}p$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{30}^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & r_{30}^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}.$$

Note que A_1 é simplética. De fato,

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{bmatrix} r_{30}^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & r_{30}^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{30}^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & r_{30}^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{30}^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & r_{30}^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r_{30}^{\frac{1}{3}} \\ -r_{30}^{-\frac{1}{3}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J. \end{aligned}$$

Contudo, se Γ é o Hamiltoniano nas coordenadas (q, p) , temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(q, p) &= R(u(q, p), v(q, p)) \\ R_{30} u^3 &= r_{30} (r_{30}^{-\frac{1}{3}} q)^3 = r_{30} r_{30}^{-1} q^3 = q^3. \end{aligned}$$

Logo, $\Gamma(q, p) = q^3$, finalizando assim o teorema que mostrar a caracterização Hamiltoniana das 4 formas elementares com $H_3 \neq 0$ citadas por (Markeev, 2014). Deste modo, a demonstração está concluída. $\blacksquare$

Para um sistema Hamiltoniano homogêneo de quarta ordem, temos o seguinte teorema, o qual foi demonstrado por Markeev [19] em 2014.

Teorema 3.2.2 (Markeev, 2014). *Considere uma função Hamiltoniana da forma*

$$H_4(x, y) = h_{40}x^4 + h_{31}x^3y + h_{22}x^2y^2 + h_{13}xy^3 + h_{04}y^4$$

com $h_{ij} \in \mathbb{R}$ para todos $0 \leq i, j \leq 4$. Então existe uma mudança de coordenadas simpléticas

$$(x, y) \mapsto (q, p)$$

tal que os termos de H_4 nas coordenadas (q, p) assume uma das seguintes formas:

- i) $q^4 + aq^2p^2 + p^4, \quad a > -2;$
- ii) $q^4 + aq^2p^2 + p^4, \quad a < -2;$
- iii) $q^4 + aq^2p^2 - p^4, \quad a \in \mathbb{R};$
- iv) $q^2(q^2 + p^2);$
- v) $q^2(q^2 - p^2);$
- vi) $q^2p^2;$

$$vii) \quad q^3 p$$

$$viii) \quad -q^3 p;$$

$$ix) \quad q^4.$$

Demonstração: Começemos considerando uma mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

dada por

$$\begin{cases} x = \cos\alpha u + \sin\alpha v \\ y = -\sin\alpha u + \cos\alpha v, \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ será escolhido de maneira conveniente em breve. Em notação matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Vimos anteriormente que a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

é simplética, logo essa mudança de coordenadas é simplética. Com isso, consideremos $R = R(u, v)$ o Hamiltoniano nas novas coordenadas (u, v) , assim denotando

$$\cos\alpha = c \quad \text{e} \quad \sin\alpha = s$$

temos que

$$\begin{aligned}
R_4(u, v) &= h_{04}(cu + sv)^4 + h_{31}(cu + sv)^3(-sv + cv) + h_{22}(cu + sv)^2(-sv + cv)^2 \\
&= h_{13}(cu + sv)(-sv + cv)^3 + h_{04}(-sv + cv)^4 \\
&= h_{40}(c^4u^4 + 4c^3u^3sv + 6c^2u^2s^2v^2 + 4cus^3v^3 + s^4v^4) \\
&\quad + h_{31}(c^3u^3 + 3c^2u^2sv + 3cus^2v^2 + s^3v^3)(-su + cv) \\
&\quad + h_{22}(c^2u^2 + 2cusv + s^2v^2)(s^2u^2 - 2sucv + c^2v^2) \\
&\quad + h_{13}(cu + sv)(-s^3u^3 + 3s^2u^2cv - 3suc^2v^2 + c^3v^3) \\
&\quad + h_{04}(s^4u^4 + 4c^3u^3sv + 6c^2u^2s^2v^2 + 4cus^3v^3 + s^4v^4) \\
&= h_{40}(c^4u^4 + 4c^3u^3sv + 6c^2u^2s^2v^2 + 4cus^3v^3 + s^4v^4) \\
&\quad + h_{31}(-c^3su^4 + c^4u^3v - 3c^2s^2u^3v + 3c^3su^2v^2 - 3cs^3u^2v^2 \\
&\quad + 3c^2s^2uv^3 - s^4uv^3 + s^3cv^4) \\
&\quad + h_{22}(c^2s^2u^4 - 2c^3su^3v + c^4u^2v^2 + 2cs^3u^3v - 4c^2s^2u^2v^2 + 2c^3suv^3 \\
&\quad + s^4u^2v^2 - 2s^3cuv^3 + c^2s^2v^4) \\
&\quad + h_{13}(-cs^3u^4 + 3s^2c^2u^3v - 3c^3su^2v^2 + c^4uv^3 \\
&\quad - s^4u^3v + 3s^3cu^2v^2 - 3s^2c^2uv^3 + c^3sv^4) \\
&\quad + h_{04}(s^4u^4 - 4s^3u^3cv + 6s^2u^2c^2v^2 - 4suc^3v^3 + c^4v^4) \\
&= u^4(h_{04}c^4 - h_{31}c^3s + h_{22}c^2s^2 - h_{13}cs^3 + h_{04}s^4) \\
&\quad + u^3v(4h_{40}cs + h_{31}c^2s^2 - 2h_{22}c^3s - 2h_{22}cs^3 + 3h_{13}c^2s^2 \\
&\quad - h_{13}s^4 - 4h_{04}s^3c) \\
&\quad + u^2v^2(6h_{40}c^2s^2 + 3h_{31}c^3s + h_{22}c^4 - 4h_{22}c^2s^2 + h_{22}s^4 \\
&\quad - 3h_{13}c^3s + 3h_{13}cs^3 + 6h_{04}c^2s^2) \\
&\quad + uv^3(4h_{40}cs^3 + 3h_{31}c^2s^2 - h_{31}s^4 + 2h_{22}c^3s - 2h_{22}cs^3 \\
&\quad - 3h_{13}c^2s^2 + h_{13}c^4 - 4h_{04}c^3s) \\
&\quad + v^4(h_{40}s^4 + h_{31}cs^3 + h_{22}c^2s^2 + h_{13}c^3s + h_{04}c^4) \\
&= r_{40}u^4 + r_{31}u^3v + r_{22}u^2v^2 + r_{13}uv^3 + r_{04}v^4,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
r_{40} &= h_{04}c^4 - h_{31}c^3s + h_{22}c^2s^2 - h_{13}cs^3 + h_{04}s^4 \\
r_{31} &= 4h_{40}cs + h_{31}c^2s^2 - 2h_{22}c^3s - 2h_{22}cs^3 + 3h_{13}c^2s^2 - h_{13}s^4 - 4h_{04}s^3c \\
r_{22} &= 6h_{40}c^2s^2 + 3h_{31}c^3s + h_{22}c^4 - 4h_{22}c^2s^2 + h_{22}s^4 - 3h_{13}c^3s + 3h_{13}cs^3 + 6h_{04}c^2s^2 \\
r_{13} &= 4h_{40}cs^3 + 3h_{31}c^2s^2 - h_{31}s^4 + 2h_{22}c^3s - 2h_{22}cs^3 - 3h_{13}c^2s^2 + h_{13}c^4 - 4h_{04}c^3s \\
r_{04} &= h_{40}s^4 + h_{31}cs^3 + h_{22}c^2s^2 + h_{13}c^3s + h_{04}c^4.
\end{aligned}$$

Sendo $r_{04} = H_{04}(\text{sen}\alpha, \text{cos}\alpha) = F_4(\alpha)$, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned} r_{40} &= \frac{1}{24}F_4^{(4)}(\alpha) + \frac{2}{3}F_4''(\alpha) + F_4(\alpha) \\ r_{31} &= \frac{1}{6}F_4'''(\alpha) + \frac{5}{3}F_4'(\alpha) \\ r_{22} &= \frac{1}{2}F_4''(\alpha) + 2F_4(\alpha) \\ r_{13} &= F_4'(\alpha) \quad \text{e} \quad r_{04} = F_4(\alpha), \end{aligned}$$

onde as derivadas são tomadas em relação a variável α .

A partir desse ponto, a análise será feita por meio das propriedades dos zeros da função F_4 . Como forma de ilustração, vamos supor que F_4 admite um zero de ordem 3, isto é, existe $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_4(\alpha^*) = F_4'(\alpha^*) = F_4''(\alpha^*) = F_4'''(\alpha^*) = 0 \quad \text{e} \quad F_4^{(4)}(\alpha^*) \neq 0.$$

Desse modo, os coeficientes de R_4 tomam a forma

$$\begin{aligned} r_{40} &= \frac{1}{24}F_4^{(4)}(\alpha^*) + \frac{2}{3}F_4''(\alpha^*) + F_4(\alpha^*) = \frac{1}{24}F_4^{(4)}(\alpha^*) \neq 0 \\ r_{31} &= \frac{1}{6}F_4'''(\alpha^*) + \frac{5}{3}F_4'(\alpha^*) = 0 \\ r_{22} &= \frac{1}{2}F_4''(\alpha^*) + 2F_4(\alpha^*) = 0 \\ r_{13} &= F_4'(\alpha^*) = 0 \quad \text{e} \quad r_{04} = F_4(\alpha^*) = 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} R_4(u, v) &= r_{40}u^4 + r_{31}u^3v + r_{22}u^2v^2 + r_{13}uv^3 + r_{04}v^4 \\ &= r_{40}u^4. \end{aligned}$$

Considere a mudança de variável

$$(u, v) \mapsto (q, p)$$

dada por

$$u = q \quad \text{e} \quad v = r_{40}p \tag{3.3}$$

ou então

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
A^T J A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_{40} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r_{40} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r_{40} \\ -r_{40} & 0 \end{bmatrix} \\
&= r_{40} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = c^{-1} J,
\end{aligned}$$

com $c = \frac{1}{r_{40}}$. Logo, (3.3) é uma mudança de coordenadas c^{-1} -simplética. Portanto, se $\Gamma = \Gamma(q, p)$ é o Hamiltoniano nas novas coordenadas (q, p) , temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_4(q, p) &= c R_4(u, v) \\
&= c R_4(u(q, p), v(q, p)) \\
&= c R_4(q, r_{40} p) \\
&= c r_{40} q^4 = \frac{1}{r_{40}} r_{40} q^4 = q^4.
\end{aligned}$$

Logo $\Gamma_4(q, p) = q^4$.

Para melhor compreensão do método, vamos fazer mais um caso, agora supondo que F_4 admite um zero de ordem 2, isto é, existe um $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_4(\alpha_0) = F_4'(\alpha_0) = F_4''(\alpha_0) = 0 \quad \text{e} \quad F_4'''(\alpha_0) \neq 0.$$

Desse modo, os coeficientes de R_4 assumem a forma

$$\begin{aligned}
\Gamma_{40} &= \frac{1}{24} F_4^{(4)}(\alpha_0) + \frac{2}{3} F_4''(\alpha_0) + F_4(\alpha_0) = \frac{1}{24} F_4^{(4)}(\alpha_0) \\
r_{31} &= \frac{1}{6} F_4'''(\alpha_0) + \frac{5}{3} F_4'(\alpha_0) = \frac{1}{6} F_4'''(\alpha_0) \neq 0 \\
r_{22} &= \frac{1}{2} F_4''(\alpha_0) + 2 F_4(\alpha_0) = 0 \\
r_{13} &= F_4'(\alpha_0) = 0 \quad \text{e} \quad r_{04} = F_4(\alpha_0) = 0.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
R_4(u, v) &= r_{40} u^4 + r_{31} u^3 v + r_{22} u^2 v^2 + r_{13} u v^3 + r_{04} v^4 \\
&= r_{40} u^4 + r_{31} u^3 v \\
&= u^3 (r_{40} u + r_{31} v),
\end{aligned}$$

com $r_{31} \neq 0$. Agora, considere a mudança de coordenadas

$$(u, v) \mapsto (p, q)$$

dada por

$$u = \frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}}q \quad \text{e} \quad v = -\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}}q + \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}}p \quad (3.4)$$

ou matricialmente

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}} & 0 \\ -\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}} & \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}} & -\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}} \\ 0 & \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}} & 0 \\ -\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}} & \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}} & -\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}} \\ 0 & \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{|r_{40}|}} & \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}} \\ -\frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_{31}} \\ -\frac{1}{r_{31}} & 0 \end{bmatrix} = r_{31}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = c^{-1} J, \end{aligned}$$

com $c = r_{31}$. Logo, a mudança de coordenadas dada em [3.4](#) é c^{-1} -simplética. Portanto, se $\Gamma = \Gamma(q, p)$ é o Hamiltoniano nas novas coordenadas (q, p) , temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_4(q, p) &= cR_4(u, v) \\ &= cR_4(u(p, q), v(p, q)) \\ &= cR_4\left(u = \frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}}q, v = -\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}}q + \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}}p\right) \\ &= c\left(\frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}}q\right)^3 \left(r_{40}\frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}}q + \Gamma_{31}\left(-\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}}q + \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}}p\right)\right) \\ &= r_{31}\frac{q^3}{|r_{31}|^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{r_{40}}{|r_{31}|^{\frac{1}{2}}}q - \frac{r_{40}}{|r_{31}|^{\frac{1}{2}}}q + |r_{31}|^{\frac{1}{2}}p\right) \\ &= r_{31}q^3\left(\frac{1}{|r_{31}|}p\right) = \frac{r_{31}}{|r_{31}|}q^3p. \end{aligned}$$

Daí, se $r_{31} > 0$ temos $\Gamma_4(q, p) = q^3p$ e $r_{31} < 0$ obtém $\Gamma_4(q, p) = -q^3p$.

Os outros casos seguem de maneira similar, isto é, verificando os zeros de F_4 e escolhendo a mudança de variável adequada. ■

3.3 Ideia da construção da transformação de Gustavson

Seja $H(q, p, t)$ o Hamiltoniano dado por (2.4.1). Consideremos agora $\Gamma(Q, P, t)$ o novo Hamiltoniano obtido por uma mudança de coordenadas simplética $(q, p) \mapsto (Q, P)$. Afim de simplificar a função $\Gamma(Q, P, t)$, inclusive em termos de grau s , introduziremos as variáveis Q e P que será obtida por meio de uma mudança de variável simplética, dada por uma função geradora $S = S(q, P)$, conforme relações dadas no Teorema 1.3.1, da forma

$$S(q, P) = qP + \sum_{j=3}^s S_j(q, P) \quad (3.5)$$

com

$$S_j = \sum_{|k|+|l|=j} s_{kl} q^k P^l$$

onde $s_{kl} \in \mathbb{R}$. Aplicando relações entre as variáveis

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

dadas no Teorema 1.3.1, obtemos as expressões para as variáveis p, q em função de P, Q , isto é

$$\begin{cases} q = q(Q, P) = Q + \frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P) + \dots \\ p = p(Q, P) = P + \frac{\partial S_3}{\partial Q}(Q, P) + \dots \end{cases} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.2) obtemos uma expressão para $\Gamma(Q, P, t)$ dada por

$$\Gamma(Q, P, t) = \sum_{j=m}^s \Gamma_j(Q, P) + \hat{\Gamma}(Q, P, t)$$

onde

$$\Gamma_j(Q, P) = \sum_{|k|+|l|=j} \gamma_{kl} Q^k P^l$$

e $\hat{\Gamma}(Q, P, t)$ é uma função periódica na variável t que representa os termos de ordem maiores do que s com respeito as novas variáveis Q e P . Tais funções $\Gamma_j(Q, P)$ são dadas em função das seguintes expressões

$$\begin{cases} \Gamma_j(Q, P) = j_m(Q, P) \\ \Gamma_{j+1}(Q, P) = \{S_3, H_j\}'(Q, P) + H_{j+1}(Q, P) \\ \Gamma_n(Q, P) = \{S_{n-j+2}, H_j\}'(Q, P) + H_n(Q, P) + F_n(Q, P) \end{cases} \quad (3.7)$$

com $n = j + 2, \dots, l$. Onde $\{, \}'$ representa o colchete de Poisson

$$\{, \}' = \frac{\partial}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial P} - \frac{\partial}{\partial P} \frac{\partial}{\partial Q}$$

e as funções F_n ; $n = m + 2, \dots, s$ depende dos termos $H_m, \dots, H_{n-1}$, e das formas $S_3, S_4, \dots, S_{n-m+1}$. Tal estruturas dos termos de grande ordem (a partir de m) pode ser mais conveniente para análise da dinâmica do sistema escolhendo coeficientes (ainda indeterminados) das expressões $S_3, S_4, \dots, S_{s-m+2}$. Na situação mais simples possível, pode-se procurar coeficientes para $S_3, S_4, \dots, S_{l-m+2}$ com propósito de eliminar tantos monômios $\gamma_{kl} Q^k P^l$ quantos sejam possíveis nas expressões de $\Gamma_{m+1}, \dots, \Gamma_s$. Essa será a ideia usada neste capítulo de obtenção da forma normal de Gustavson. Na verdade o processo de obtenção da forma normal, é similar ao processo de obtenção da forma normal de Gustavson no caso não degenerado, no entanto não há uma definição precisa sobre o que significa estar na forma normal de Gustavson do caso degenerado, de modo que nosso objetivo será o de simplificar a função Hamiltoniana.

3.4 O caso em que $H_2 = 0$ e $H_3 \neq 0$

Vamos considerar $m = 3$, ou seja, vamos supor o Hamiltoniano se inicia com os termos de terceira ordem $H_3(q, p)$. Conforme Teorema [3.2.1](#), os termos de terceira ordem são reduzidos por meio de uma transformação simplética linear de modo que podemos assumir que H_3 admite uma das quatro formas elementares:

- i) $q(q^2 + p^2)$;
- ii) $q(q^2 - p^2)$;
- iii) $q^2 p$;
- iv) q^3 .

Nesta seção vamos obter a forma normal de Gustavson dos termos de quarta e quinta ordem no caso

$$H_3(q, p) = q^3.$$

Com isso, como foi feito anteriormente vamos fazer uma mudança de coordenadas simplética $(q, p) \mapsto (Q, P)$, dada por uma relação do tipo

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial S}{\partial P}(q, P), \\ p &= \frac{\partial S}{\partial q}(q, P) \end{aligned}$$

onde $S(q, P)$ é dada pela expressão

$$S(q, P) = qP + S_3(q, P) + S_4(q, P) + \dots$$

Essa transformação simplética que simplifica o Hamiltoniano levando em sua forma normal de Gustavson é comumente chamada na literatura de Transformação de Birkhoff.

Substituindo as coordenadas (Q, P) dadas em (3.6) na expressão de H , com $H_3(q, p) = q^3$, obtemos

$$\Gamma_3(Q, P) = H_3(Q, P) = Q^3,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4(Q, P) &= \{S_3, H_3\}(Q, P) + H_4(Q, P) \\ &= \left(\frac{\partial S_3}{\partial Q} \frac{\partial H_3}{\partial P} - \frac{\partial S_3}{\partial P} \frac{\partial H_3}{\partial Q} \right) + H_4(Q, P) \\ &= \left(\frac{\partial S_3}{\partial Q} \frac{\partial (Q)^3}{\partial P} - \frac{\partial S_3}{\partial P} \frac{\partial (Q)^3}{\partial Q} \right) + H_4(Q, P) \\ &= -3Q^2 \frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P) + H_4(Q, P). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_5(Q, P) &= \{S_{5-3+2}, H_3\}(Q, P) + H_5(Q, P) + F_5(Q, P) \\ &= \{S_4, H_3\}(Q, P) + H_5(Q, P) + F_5(Q, P) \\ &= \frac{\partial S_4}{\partial Q} \frac{\partial H_3}{\partial P} - \frac{\partial S_4}{\partial P} \frac{\partial H_3}{\partial Q} + H_5(Q, P) + F_5(Q, P) \\ &= \frac{\partial S_4}{\partial Q} \frac{\partial Q^3}{\partial P} - \frac{\partial S_4}{\partial P} \frac{\partial Q^3}{\partial Q} + H_5(Q, P) + F_5(Q, P) \\ &= -3Q^2 \frac{\partial S_4}{\partial P}(Q, P) + H_5(Q, P) + F_5(Q, P). \end{aligned}$$

De maneira geral,

$$\begin{aligned} \Gamma_n(Q, P) &= \{S_{n-3+2}, H_3\}(Q, P) + H_n(Q, P) + F_n(Q, P) \\ &= \{S_{n-1}, H_3\}(Q, P) + H_n(Q, P) + F_n(Q, P) \\ &= -3(Q)^2 \cdot \frac{\partial S_{n-1}}{\partial P}(Q, P) + H_n(Q, P) + F_n(Q, P). \end{aligned}$$

Para o termo F_5 , escrevemos

$$F_5(Q, P) = \sum_{k+l} f_{kl} Q^k P^l$$

onde temos as seguintes expressões de S_3, S_4 e H_3, H_4 , ou seja, devem depender

$$\begin{aligned} f_{50} &= 9s_{21}^2 + 3s_{30}h_{31} - 4s_{21}h_{40}, \\ f_{41} &= 30s_{21}s_{12} + 6s_{30}h_{22} - s_{21}h_{31} - 8s_{12}h_{40}, \\ f_{32} &= 36s_{21}s_{03} + 24s_{12}^2 + 9s_{30}h_{13} + 2s_{21}h_{22} - 5s_{12}h_{31} - 12s_{03}h_{40}, \\ f_{23} &= 54s_{12}s_{03} + 12s_{30}h_{04} + 5s_{21}h_{13} - 9s_{03}h_{31}, \\ f_{14} &= 27s_{03}^2 + 8s_{21}h_{04} + s_{12}h_{13} - 6s_{03}h_{22}, \\ f_{05} &= 4s_{12}h_{04} - 3s_{03}h_{13}. \end{aligned}$$

Com isso, comparando os coeficientes dos monômios de mesmo grau das expressões obtidas para $\Gamma_n(Q, P), n = 4, 5, \dots$, obtemos expressões específicas para os coeficientes das funções $\Gamma_k(Q, P)$ na expressão do novo Hamiltoniano em termos Q e P . Em particular, para os termos de ordem 4, note que

$$\begin{aligned} S'_3(Q, P) &= \sum_{k+l=3} s_{kl} Q^k P^l \\ &= s_{30} Q^3 P^0 + s_{21} Q^2 P + s_{12} Q P^2 + s_{03} Q^0 P^3 \\ &= s_{30} Q^3 P^0 + s_{21} Q^2 P + s_{12} Q P^2 + s_{03} P^3 \end{aligned}$$

então,

$$\frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P) = s_{21} Q^2 + 2s_{12} Q P + 3s_{03} P^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma_4(Q, P) &= \sum_{k+l=4} s_{kl} Q^k P^l \\ &= h_{40} Q^4 P^0 + h_{31} Q^3 P + h_{22} Q^2 P^2 + h_{13} Q P^3 + h_{04} Q^0 P^4 \\ &= h_{40} Q^4 + h_{31} Q^3 P + h_{22} Q^2 P^2 + h_{13} Q P^3 + h_{04} P^4. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -3Q^2 \frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P) &= -3Q^2 (s_{21} Q^2 + 2s_{12} Q P + 3s_{03} P^2) \\ &= -3s_{21} Q^4 - 6s_{12} Q^3 P - 9s_{03} Q^2 P^2. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
-3Q^2 \frac{\partial S_3}{\partial P} + H_4(Q, P) &= -3s_{21}Q^4 - 6s_{12}Q^3P - 9s_{03}Q^2P^2 + h_{40}Q^4 \\
&\quad + h_{31}Q^3P + h_{22}Q^2P^2h_{13}QP^3 + h_{04}P^4 \\
&= (h_{40} - 3s_{21}Q^4 + (h_{31} - 6s_{12})Q^3P) \\
&\quad + (h_{22} - 9s_{03})Q^2P^2h_{13}QP^3 + h_{04}P^4. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
\Gamma_4(Q, P) &= \sum_{k+l=4} s_{kl}Q^kP^l \\
&= \gamma_{40}Q^4 + \gamma_{31}Q^3P + \gamma_{22}Q^2P^2 \\
&\quad + \gamma_{13}QP^3 + \gamma_{04}P^4, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

e temos

$$\Gamma_4(Q, P) = -3Q^2 \frac{\partial S_3}{\partial P} + H_4(Q, P).$$

Igualando (3.8) com (3.9) obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma_{40} &= h_{40} - 3s_{21}, \\
\gamma_{31} &= h_{31} - 6s_{12}, \\
\gamma_{22} &= h_{22} - 9s_{03}, \\
\gamma_{13} &= h_{13}, \\
\gamma_{04} &= h_{04}.
\end{aligned}$$

Para fixar as ideias, vamos fazer o caso $n = 5$. Lembremos que

$$\Gamma_5(Q, P) = -3Q^2 \frac{\partial S_4}{\partial P}(Q, P) + H_5(Q, P) + F_5(Q, P).$$

Note que

$$\begin{aligned}
S_4(Q, P) &= \sum_{k+l=4} s_{kl}Q^kP^l \\
&= s_{40}Q^4P^0 + s_{31}Q^3P^1 + s_{22}Q^2P^2 \\
&\quad + s_{13}Q^1P^3 + s_{04}Q^0P^4 \\
&= s_{40}Q^4 + s_{31}Q^3P + s_{22}Q^2P^2 + s_{13}QP^3 + s_{04}P^4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_4}{\partial P}(Q, P) &= \frac{\partial}{\partial P}(s_{40}Q^4 + s_{31}Q^3P + s_{22}Q^2P^2 + s_{13}QP^3 + s_{04}P^4) \\
&= s_{31}Q^3 + 2s_{22}Q^2P + 3s_{13}QP^2 + 4s_{04}P^3.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
-3(Q)^2 \frac{\partial S_4}{\partial P}(Q, P) &= -3Q^2 [s_{31}Q^3 + 2s_{22}Q^2P + 3s_{13}QP^2 + 4s_{04}P^3] \\
&= -3s_{31}Q^5 + 6s_{22}Q^4P \\
&\quad -9s_{13}Q^3P^2 - 12s_{04}Q^2P^3.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
H_5(Q, P) &= \sum_{k+l=5} h_{kl}Q^kP^l \\
&= h_{50}Q^5P^0 + h_{41}Q^4P^1 + h_{32}Q^3P^2 \\
&\quad + h_{23}Q^2P^3 + h_{14}Q^1P^4 + h_{05}Q^0P^5 \\
&= h_{50}Q^5 + h_{41}Q^4P + h_{32}Q^3P^2 + h_{23}Q^2P^3 \\
&\quad + h_{14}QP^4 + h_{05}P^5.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
F_5(Q, P) &= \sum_{k+l=5} f_{kl}Q^kP^l \\
&= f_{50}Q^5P^0 + f_{41}Q^4P^1 + f_{32}Q^3P^2 \\
&\quad + f_{23}Q^2P^3 + f_{14}Q^1P^4 + f_{05}Q^0P^5 \\
&= f_{50}Q^5 + f_{41}Q^4P + f_{32}Q^3P^2 + f_{23}Q^2P^3 \\
&\quad + f_{14}QP^4 + f_{05}P^5.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como sabemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_5(Q, P) &= \sum_{k+l=5} \gamma_{kl}Q^kP^l \\
&= \gamma_{50}Q^5P^0 + \gamma_{41}Q^4P^1 + \gamma_{32}Q^3P^2 \\
&\quad + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}Q^1P^4 + \gamma_{05}Q^0P^5 \\
&= \gamma_{50}Q^5 + \gamma_{41}Q^4P + \gamma_{32}Q^3P^2 + \gamma_{23}Q^2P^3 \\
&\quad + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

temos que $(3.13) = (3.10) + (3.11) + (3.12)$, assim

$$\begin{aligned}
& \gamma_{50}Q^5 + \gamma_{41}Q^4P + \gamma_{32}Q^3P^2 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 \\
&= -3s_{31}Q^5 + 6s_{22}Q^4P - 9s_{13}Q^3P^2 - 12s_{04}Q^2P^3 \\
&= h_{50}Q^5 + h_{41}Q^4P + h_{32}Q^3P^2 + h_{23}Q^2P^3 + h_{14}QP^4 + h_{05}P^5 \\
&= f_{50}Q^5 + f_{41}Q^4P + f_{32}Q^3P^2 + f_{23}Q^2P^3 + f_{14}QP^4 + f_{05}P^5 \\
&= (-3s_{31} + h_{50} + f_{50})Q^5 + (-3s_{22} + h_{41} + f_{41})Q^4P \\
&\quad + (-9s_{13} + h_{32} + f_{32})Q^3P^2 \\
&\quad + (-12s_{04} + h_{23} + f_{23})Q^2P^3 \\
&\quad + (h_{14} + f_{14})QP^4 + (h_{05} + f_{05})P^5.
\end{aligned}$$

Concluindo assim que,

$$\begin{aligned}
\gamma_{50} &= -3s_{31} + h_{50} + f_{50}, \\
\gamma_{41} &= -6s_{22} + h_{41} + f_{41}, \\
\gamma_{32} &= -9s_{13} + h_{32} + f_{32}, \\
\gamma_{23} &= -12s_{04} + h_{23} + f_{23}, \\
\gamma_{14} &= h_{14} + f_{14}, \\
\gamma_{05} &= h_{05} + f_{05}.
\end{aligned}$$

Retornando ao termo de quarto grau de Hamiltoniano $\Gamma(Q, P)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\Gamma_4(Q, P) &= \sum_{k+l=4} s_{kl}Q^kP^l \\
&= \gamma_{40}Q^4 + \gamma_{31}Q^3P + \gamma_{22}Q^2P^2 + \gamma_{13}QP^3 + \gamma_{04}P^4.
\end{aligned}$$

Agora, supondo que tivéssemos as condições:

$$s_{21} = \frac{1}{3}h_{40}, \quad s_{12} = \frac{1}{6}h_{31} \quad \text{e} \quad s_{03} = \frac{1}{9}h_{22}. \quad (3.14)$$

Pelas contas anteriores vejamos que

$$\begin{aligned}
\gamma_{40} &= h_{40} - 3s_{21} = h_{40} - 3\left(\frac{1}{3}h_{40}\right) = h_{40} - h_{40} = 0 \\
\gamma_{31} &= h_{31} - 6s_{12} = h_{31} - 6\left(\frac{1}{6}h_{31}\right) = h_{31} - h_{31} = 0 \\
\gamma_{22} &= h_{22} - 9s_{03} = h_{22} - 9\left(\frac{1}{9}h_{22}\right) = h_{22} - h_{22} = 0
\end{aligned}$$

Desse modo, os coeficientes s_{21}, s_{12} e s_{03} da parte cúbica S_3 da função geradora serão dados pelas expressões (3.14). Daí obtemos que,

$$\begin{aligned}\Gamma_4(Q, P) &= 40Q^4 + \gamma_{31}Q^3P + \gamma_{22}Q^2P^2 + \gamma_{13}QP^3 + \gamma_{04}P^4 \\ &= \gamma_{13}QP^3 + \gamma_{04}P^4 \\ &= h_{13}QP^3 + h_{04}P^4,\end{aligned}$$

simplificando assim os termos de grau 4 do Hamiltoniano.

Vamos considerar agora os termos de grau cinco do novo Hamiltoniano $\Gamma(Q, P)$. Prosseguindo de maneira análoga feita para a ordem 4, isto é, escolhendo

$$\begin{aligned}s_{31} &= \frac{1}{3}h_{50} - \frac{1}{9}h_{40}^2 + h_{31}s_{30}, \\ s_{22} &= \frac{1}{6}h_{41} + h_{22}s_{30}, \\ s_{13} &= \frac{1}{9}h_{32} - \frac{1}{54}h_{31}^2 + \frac{2}{27}h_{40}h_{22} + h_{04}s_{30}\end{aligned}$$

obtemos, substituindo nos valores de γ_{kl}

$$\gamma_{50} = \gamma_{41} = \gamma_{32} = \gamma_{23} = 0$$

assim,

$$\begin{aligned}\Gamma_5(Q, P) &= \sum_{k+l=5} s_{kl}Q^kP^l \\ &= \gamma_{50}Q^5 + \gamma_{41}Q^4P + \gamma_{32}Q^3P^2 + \gamma_{23}Q^2P^3 \\ &\quad + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 \\ &= \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5\end{aligned}$$

onde γ_{14} e γ_{05} são expressados em termos dos coeficientes de H_4 e H_5 .

Acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1 (Markeev, 2015). *Se numa vizinhança da origem H é da forma*

$$H(q, p, t) = q^3 + H_4 + H_5 \dots$$

com H_j , $j = 4, 5, \dots$, sendo 2π -periódico em t , então existe uma transformação simplética

$$E : (q, p) \mapsto (Q, P)$$

tal que o novo Hamiltoniano $\Gamma(Q, P)$ está na forma normal:

$$\Gamma(Q, P, t) = Q^3 + \gamma_{13}QP^3 + \gamma_{04}P^4 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \dots,$$

onde $\gamma_{kl} \in \mathbb{R}$.

O cálculo da forma normal dos termos de ordem maior ou igual a 6 no caso em que $H_3 = q^3$ é feito de forma similar. Da mesma forma, o cálculo da forma normal nos casos em que H_3 tem uma das três formas $q(q^2 + p^2)$, $q(q^2 - p^2)$ ou $q^2 p$ segue pelo mesmo algoritmo.

No capítulo seguinte iremos estudar a estabilidade da solução de equilíbrio nula nos casos degenerados, onde ficará evidente que apenas no caso em que $H_3 = q^3$ o Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer não fornece informações analisando apenas os termos de terceira ordem, pois de fato, nos outros três casos a origem é um equilíbrio instável devido a existência de um zero simples para a função ângulo e neste caso a função ângulo possui um zero duplo. Isso justifica o fato de abordarmos apenas esse caso nesta seção.

3.5 O caso em que $H_2 = H_3 = 0$ e $H_4 \neq 0$

Vamos iniciar como anteriormente, considerando um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade da forma

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \end{cases} \quad (3.15)$$

onde a origem $0 = (0, 0)$ é uma solução de equilíbrio e $H = H(q, p, t)$ é uma função analítica em uma vizinhança de 0 e 2π periódica em t . Assumiremos que a expansão em série de Taylor de H em uma vizinhança de 0 é da forma

$$H = H_4 + H_5 + \dots + H_j + \dots$$

onde H_j é um polinômio homogêneo de grau j em (q, p) , isto é

$$H_j = H_j(q, p, t) = \sum_{k+l=j} h_{kl} q^k p^l$$

com $k, l \in \mathbb{N}$ e $h_{kl} \in \mathbb{R}$. Note que neste caso estamos supondo que H não possui termos quadráticos nem cúbicos, ou seja, $H_2 = H_3 \equiv 0$ e $H_j(q, p, t) = H_j(q, p)$, para todo $j \geq 4$ até certa ordem. Isto é, os polinômios H_j independem do tempo $t \geq 0$ até certa ordem finita.

Com base no artigo [10], iremos complementar os estudos feitos por Markeev, analisando o caso em que

$$H_4(q, p) = q^4.$$

O primeiro resultado nesse sentido nos mostra como construir uma forma normal para o Hamiltoniano associado.

Teorema 3.5.1 (Gutierrez-Vidal, 2017). *Se numa vizinhança da origem do Hamiltoniano H é da forma*

$$H(q, p) = q^4 + H_5(q, p) + H_6(q, p) + \tilde{H}(q, p) \quad (3.16)$$

com H_j , $j = 5, 6, \dots$, sendo 2π -periódico em t , então existe uma transformação simplética

$$E : (q, p) \mapsto (Q, P)$$

tal que o novo Hamiltoniano $\Gamma(Q, P)$ está na forma normal:

$$\Gamma = Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \dots$$

onde $\gamma_{kl} \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Assim como foi feito anteriormente, nossa meta é construir a transformação simplética

$$(q, p) \mapsto (Q, P)$$

que transforme $H(q, p)$ em $\Gamma(Q, P)$. Como antes, iremos obter uma função geradora $S = S(q, P)$ que tem a forma

$$S(q, P) = qP + \sum_{k=3}^{s-4+2} S_k(q, P) = qP + \sum_{k=3}^{s-2} S_k(q, P)$$

onde $s \geq 5$ e $S_k(q, P) = \sum_{k+l=s} s_{kl}q^kP^l$ com $s_{kl} \in \mathbb{R}$. Sabemos que como S é função geradora, temos as relações

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

obtendo assim as expressões

$$\begin{cases} q = Q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \dots \\ p = P + \frac{\partial S}{\partial Q} + \dots \end{cases} \quad (3.17)$$

substituindo (3.17) em (3.15) obtemos uma expressão para Γ dada por

$$\Gamma(Q, P) = \sum_{k=4}^s \Gamma_k(Q, P) + \tilde{\Gamma}(Q, P)$$

com

$$\Gamma_k(Q, P) = \sum_{k+l=s} \gamma_{kl} Q^k P^l$$

satisfazendo as expressões

$$\begin{aligned}\Gamma_4(Q, P) &= H_4(Q, P) = Q^4 \\ \Gamma_5(Q, P) &= \{S_3, H_4\}(Q, P) + H_5(Q, P) \\ \Gamma_n(Q, P) &= \{S_{n-2}, H_4\}(Q, P) + H_n(Q, P) + F_n(Q, P)\end{aligned}\quad (3.18)$$

com $n = 6, 7, \dots, s$, onde

$$\{\varphi, \psi\}(Q, P) = \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \frac{\partial \psi}{\partial P} - \frac{\partial \varphi}{\partial P} \frac{\partial \psi}{\partial Q}$$

é o colchete de Poisson e as funções F_n depende dos termos $H_4, H_5, \dots, H_{n-1}$ e $S_3, S_4, \dots, S_{n-3}$. Observe que por (3.18), obtemos

$$\Gamma_5(Q, P) = \{S_3, H_4\}(Q, P) + H_5(Q, P).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\{S_3, H_4\}(Q, P) &= \frac{\partial S_3}{\partial Q} \frac{\partial H_4}{\partial P} - \frac{\partial S_3}{\partial P} \frac{\partial H_4}{\partial Q} \\ &= \frac{\partial S_3}{\partial Q} \frac{\partial (Q^4)}{\partial P} - \frac{\partial S_3}{\partial P} \frac{\partial (Q^4)}{\partial Q} \\ &= -4Q^3 \frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P)\end{aligned}$$

e como

$$S_3(Q, P) = \sum_{k+l=3} s_{kl} Q^k P^l,$$

conseguimos

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_3}{\partial P} &= \frac{\partial}{\partial P} \left(\sum_{k+l=3} s_{kl} Q^k P^l \right) \\ &= \sum_{k+l=3} s_{kl} Q^k \frac{\partial P^l}{\partial P} \\ &= \sum_{k+l=3} s_{kl} l Q^k P^{l-1} \\ &= s_{03} 3P^2 + s_{12} 2QP + s_{21} Q^2 + s_{30} 0Q^3 \\ &= 3S_{03} P^2 + 2s_{12} QP + s_{21} Q^2,\end{aligned}$$

assim,

$$-4Q^3 \frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P) = -12s_{03}Q^3P^2 - 8s_{12}Q^4P - 4s_{21}Q^5.$$

Como

$$\begin{aligned} H_5(Q, P) &= \sum_{k+l=5} h_{kl}Q^kP^l \\ &= h_{05}P^5 + h_{14}QP^4 + h_{23}Q^2P^3 + h_{32}Q^3P^2 + h_{41}Q^4P + h_{50}Q^5 \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned} -4Q^3 \frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P) + H_5(Q, P) &= h_{05}P^5 + h_{14}QP^4 + h_{23}Q^2P^3 \\ &\quad + (h_{32} - 12s_{03})Q^3P^2 + (h_{41} + 8s_{12})Q^4P \\ &\quad + (h_{50} - 4s_{21})Q^5. \end{aligned}$$

Realizando a igualdade

$$\Gamma_5(Q, P) = -Q^3 \frac{\partial S_3}{\partial P}(Q, P) + H_5(Q, P)$$

obtemos a relação

$$\begin{aligned} \Gamma_5(Q, P) &= \sum_{k+l=5} \gamma_{kl}Q^kP^l + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 \\ &\quad + \gamma_{32}Q^3P^2 + \gamma_{41}Q^4P + \gamma_{50}Q^5 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \gamma_{05} &= h_{05}, \gamma_{14} = h_{14}, \gamma_{23} = h_{23}, \\ \gamma_{32} &= h_{32} - 12s_{03}, \gamma_{41} = h_{41} - 8s_{12} \quad \text{e} \quad \gamma_{50} = h_{50} - 4s_{21}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Escolhendo os coeficientes de S_3 como sendo

$$s_{30} = 0, \quad s_{21} = \frac{1}{4}h_{50}, \quad s_{12} = \frac{1}{8}h_{41} \quad \text{e} \quad s_{03} = \frac{1}{12}h_{32} \quad (3.20)$$

obtemos que

$$\gamma_{32} = \gamma_{41} = \gamma_{50} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Gamma_5(Q, P) &= \gamma_{05}P^5 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{32}Q^3P^2 + \gamma_{41}Q^4P + \gamma_{50}Q^5 \\ &= \gamma_{05}P^5 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 \\ &= h_{05}P^5 + h_{14}QP^4 + h_{23}Q^2P^3. \end{aligned}$$

Agora vamos normalizar os termos de ordem 6. Fazendo $n = 6$ em (3.18) obtemos

$$\Gamma_6(Q, P) = \{S_4, H_4\}(Q, P) + H_6(Q, P) + F_6(Q, P)$$

onde

$$F_6(Q, P) = \sum_{k+l=6} f_{kl} Q^k P^l$$

com

$$\begin{aligned} f_{60} &= -6s_{12}^2 - 5s_{21}\gamma_{50}, \\ f_{51} &= 2s_{21}h_{41} - 24s_{12}s_{21} - 4s_{21}\gamma_{41} - 10s_{12}\gamma_{50}, \\ f_{42} &= 4s_{21}h_{32} + s_{12}h_{41} - 36s_{21}s_{03} - 24s_{12}^2 - 3s_{21}\gamma_{32} - 8s_{12}\gamma_{41}, \\ f_{33} &= 6s_{21}h_{23} + s_{12}h_{32} - 72s_{12}s_{03} - 2s_{21}\gamma_{23} - 6s_{12}\gamma_{32}, \\ f_{24} &= 8s_{21}h_{14} + 3s_{12}h_{23} - 54s_{03}^2 - s_{21}\gamma_{14} - 4s_{12}\gamma_{23}, \\ f_{15} &= 10s_{21}h_{05} + 2s_{12}h_{14}, \\ f_{06} &= 5s_{12}h_{05}, \end{aligned}$$

que substituindo os valores de (3.19) e (3.20) obtemos

$$f_{60} = -6s_{21}^2 - s_{21}\gamma_{50} = -6\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}h_{50}\right) \cdot 0 = -\frac{3}{8}h_{50}^2,$$

$$\begin{aligned} f_{51} &= 2s_{21}h_{41} - 24s_{12}s_{21} - 4s_{21}s_{41} - 10s_{12}\gamma_{50} \\ &= 2\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)h_{41} - 24\left(\frac{1}{8}h_{41}\right)\left(\frac{1}{4}h_{50}\right) \\ &= \frac{1}{2}h_{50}h_{41} - \frac{3}{4}h_{41}h_{50} = -\frac{1}{4}h_{50}h_{41}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{42} &= 4s_{21}h_{32} + s_{12}h_{41} - 36s_{21}s_{03} - 24s_{12}^2 - 3s_{21}\gamma_{32} - 8s_{12}\gamma_{41} \\ &= 4\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)h_{32} + \left(\frac{1}{8}h_{41}\right)h_{41} - 36\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)\left(\frac{1}{12}h_{32}\right) - 24\left(\frac{1}{8}h_{41}\right)^2 \\ &= h_{50}h_{32} + \frac{1}{8}h_{41}^2 - \frac{3}{4}h_{50}h_{32} - \frac{3}{8}h_{41}^2 = \frac{1}{4}h_{50}h_{32} - \frac{1}{4}h_{41}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{33} &= 6s_{21}h_{23} + s_{12}h_{32} - 72s_{12}s_{03} - 2s_{21}\gamma_{23} - 6s_{12}\gamma_{32} \\ &= 6\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)h_{23} + \left(\frac{1}{8}h_{41}\right)h_{32} - 72\left(\frac{1}{8}h_{41}\right)\left(\frac{1}{12}h_{32}\right) - 2\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)h_{23} \\ &= \frac{3}{2}h_{50}h_{23} + \frac{1}{8}h_{41}h_{32} - \frac{1}{2}h_{50}h_{23} = h_{50}h_{23} - \frac{5}{8}h_{41}h_{32}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{24} &= 8s_{21}h_{14} + 3s_{12}h_{23} - 54s_{03}^2 - s_{21}\gamma_{14} - 4s_{12}\gamma_{23} \\
&= 8\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)h_{14} + 3\left(\frac{1}{8}h_{41}\right)h_{23} - 54\left(\frac{1}{12}h_{32}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}h_{50}\right)h_{14} \\
&\quad - 4\left(\frac{1}{8}h_{41}\right)h_{23} = 2h_{50}h_{14} + \frac{3}{8}h_{41}h_{23} - \frac{3}{8}h_{32}^2 - \frac{1}{4}h_{50}h_{14} - \frac{1}{2}h_{41}h_{23} \\
&= \frac{7}{4}h_{50}h_{14} - \frac{1}{8}h_{41}h_{23} - \frac{3}{8}h_{32}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{15} &= 10s_{21}h_{05} + 2s_{12}h_{14} = 10\left(\frac{1}{4}h_{50}\right)h_{05} + 2\left(\frac{1}{8}h_{41}\right)h_{14} \\
&= \frac{5}{2}h_{50}h_{05} + \frac{1}{4}h_{41}h_{14}
\end{aligned}$$

e

$$f_{06} = 5s_{12}h_{05} = 5\left(\frac{1}{8}h_{41}\right)h_{05} = \frac{5}{8}h_{41}h_{05}.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\{S_4, H_4\}(Q, P) &= \frac{\partial S_4}{\partial Q} \frac{\partial H_4}{\partial P} - \frac{\partial S_4}{\partial P} \frac{\partial H_4}{\partial Q} \\
&= \frac{\partial S_4}{\partial Q} \frac{\partial(Q^4)}{\partial P} - \frac{\partial S_4}{\partial P} \frac{\partial(Q^4)}{\partial Q} \\
&= -4Q^3 \frac{\partial S_4}{\partial P}
\end{aligned}$$

e como

$$S_4(Q, P) = \sum_{\nu+\mu=4} s_{\nu\mu} Q^\nu P^\mu = s_{40}Q^4 + s_{31}Q^3P + s_{22}Q^2P^2 + s_{13}QP^3 + s_{04}P^4,$$

temos

$$\frac{\partial S_4}{\partial P}(Q, P) = s_{31}Q^3 + 2s_{22}Q^2P + 3s_{13}QP^2 + 4s_{04}P^3$$

A partir daí,

$$\begin{aligned}
\{S_4, H_4\}(Q, P) &= -4Q^3 \frac{\partial S_4}{\partial P} \\
&= -4s_{31}Q^6 - 8s_{22}Q^5P - 12s_{13}Q^4P^2 - 16s_{04}Q^3P^3. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
H_6(Q, P) &= \sum_{k+l=6} h_{kl} Q^k P^l \\
&= h_{60}Q^6 + h_{51}Q^5P + h_{42}Q^4P^2 + h_{33}Q^3P^3 \\
&\quad + h_{24}Q^2P^4 + h_{15}QP^5 + h_{06}P^6 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_6(Q, P) &= \sum_{k+l=6} f_{kl} Q^k P^l \\
&= f_{60} Q^6 + f_{51} Q^5 P + f_{42} Q^4 P^2 + f_{33} Q^3 P^3 \\
&\quad + f_{24} Q^2 P^4 + f_{15} Q P^5 + f_{06} P^6,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

somando (3.21), (3.22) e (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\{S_4, H_4\}(Q, P) + H_6(Q, P) + F_6(Q, P) &= (-4s_{31} + h_{60} + f_{60})Q^6 \\
&\quad + (-8s_{22} + h_{51} + f_{51})Q^5 P \\
&\quad + (-12s_{13} + h_{42} + f_{42})Q^4 P^2 \\
&\quad + (-16s_{04} + h_{33} + f_{33})Q^3 P^3 \\
&\quad + (h_{24} + f_{24})Q^2 P^4 + (h_{15} + f_{15})Q P^5 \\
&\quad + (h_{06} + f_{06})P^6.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Agora sabendo que

$$\Gamma_6(Q, P) = \{S_4, H_4\}(Q, P) + H_6(Q, P) + F_6(Q, P)$$

e que

$$\Gamma_6(Q, P) = \gamma_{60} Q^6 + \gamma_{51} Q^5 P + \gamma_{42} Q^4 P^2 + \gamma_{33} Q^3 P^3 + \gamma_{24} Q^2 P^4 + \gamma_{15} Q P^5 + \gamma_{06} P^6,$$

por (3.24) temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_{60} &= -4s_{31} + h_{60} + f_{60}, & \gamma_{51} &= -8s_{22} + h_{51} + f_{51}, & \gamma_{42} &= -12s_{13} + h_{42} + f_{42}, \\
\gamma_{33} &= -16s_{04} + h_{33} + f_{33}, & \gamma_{24} &= h_{24} + f_{24}, & \gamma_{15} &= h_{15} + f_{15}, & \gamma_{06} &= h_{06} + f_{06}.
\end{aligned}$$

Com isso, escolhendo

$$s_{31} = \frac{h_{06}}{4} + \frac{f_{60}}{4} = \frac{h_{60}}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{8} h_{50}^2 \right) = \frac{1}{4} h_{60} - \frac{3}{32} h_{50}^2,$$

$$s_{22} = \frac{1}{8} h_{51} + \frac{1}{8} f_{51} = \frac{1}{8} h_{51} + \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} h_{50} h_{41} \right) = \frac{1}{8} h_{51} - \frac{1}{32} h_{50} h_{41},$$

$$s_{13} = \frac{1}{12} h_{42} + \frac{1}{2} f_{42} = \frac{1}{12} h_{42} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} h_{50} h_{32} - \frac{1}{4} h_{41}^2 \right) = \frac{1}{12} h_{42} + \frac{1}{8} h_{05} h_{32} - \frac{1}{8} h_{41}^2,$$

$$\begin{aligned}
s_{04} &= \frac{1}{16} h_{33} + \frac{1}{16} f_{33} = \frac{1}{16} h_{33} + \frac{1}{16} \left(h_{50} h_{23} - \frac{5}{8} h_{41} h_{32} \right) \\
&= \frac{1}{16} h_{33} + \frac{1}{16} h_{50} h_{23} - \frac{5}{128} h_{41} h_{32},
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\gamma_{60} = \gamma_{51} = \gamma_{42} = \gamma_{33} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Gamma_6(Q, P) &= \gamma_{60}Q^6 + \gamma_{51}Q^5P + \gamma_{42}Q^4P^2 + \gamma_{33}Q^3P^3 \\ &\quad + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 \\ &= \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6\end{aligned}$$

onde, γ_{04} , γ_{15} e γ_{06} foram definidas anteriormente.

Por fim, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma(Q, P) &= \Gamma_4(Q, P) + \Gamma_5(Q, P) + \Gamma_6(Q, P) + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 \\ &\quad + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 \\ &\quad + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}.\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Aplicações da Forma Normal de Gustavson no caso Degenerado ao Estudo da estabilidade

Neste capítulo, forneceremos condições para estabilidade de uma solução de equilíbrio de um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade nos casos em que a função Hamiltoniana inicia com termos de terceira ou quarta ordem. Usamos como principais referências o artigo [18] para o caso $H_3 \neq 0$ e [10] para o caso $H_3 = 0$ e $H_4 \neq 0$.

4.1 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos que iniciam com termos de terceira ordem

Consideremos um sistema Hamiltoniano da forma

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \end{cases}$$

onde o Hamiltoniano $H = H(q, p, t)$ é representado pela série convergente da forma

$$H(q, p, t) = \sum_{k=3}^s H_k(q, p) + \tilde{H}(q, p, t) \quad (4.1)$$

onde

$$H_k(q, p) = \sum_{k+l=j} h_{kl} q^k p^l$$

com h_{kl} independente do tempo e $\tilde{H}(q, p, t)$ sendo 2π -periódica no tempo.

Observemos que o Hamiltoniano da forma (4.1) admite $0 = (0, 0)$ como ponto de equilíbrio. Neste caso

$$H_3(q, p) = h_{30}q^3 + h_{21}q^2p + h_{12}qp^2 + h_{03}p^3$$

com $h_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $0 \leq i, j \leq 3$. Vimos no Teorema 3.2.1 que existe uma mudança de coordenadas simpléticas tal que o termo H_3 assume, sem perda de generalidade, uma das seguintes formas

$$q(q^2 + p^2), \quad q(q^2 - p^2), \quad q^2p \quad \text{e} \quad q^3$$

Vamos analisar agora a estabilidade do equilíbrio $(0, 0)$ em cada um dos casos desses casos.

4.1.1 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q(q^2 + p^2)$

Suponhamos que $H_3 = q(q^2 + p^2)$. Consideremos a mudança de coordenadas simplética (veja exemplo 1.2.12) ação-ângulo

$$q = \sqrt{2r}\cos(\varphi) \quad \text{e} \quad p = \sqrt{2r}\sin(\varphi)$$

com $\varphi, r \in \mathbb{R}$.

Seja $K = K(r, \varphi)$ o Hamiltoniano em coordenadas (r, φ) , temos então que

$$\begin{aligned} K_3(\varphi, r) &= H_3(q, p) \\ &= H_3(q(r, \varphi), p(r, \varphi)) \\ &= H_3(\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\ &= \sqrt{2r}\cos\varphi((\sqrt{2r}\cos\varphi)^2 + (\sqrt{2r}\sin\varphi)^2) \\ &= \sqrt{2r}\cos\varphi(2r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)) \\ &= \sqrt{2r}\cos\varphi 2r = 2\sqrt{2r}\cos\varphi r = 2\sqrt{2}\cos\varphi r^{\frac{1}{2}}r \\ &= 2\sqrt{2}\cos\varphi r^{\frac{3}{2}} = (2\sqrt{2}\cos\varphi)r^{\frac{n}{2}} = \psi(\varphi)r^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

onde $\psi(\varphi) = 2\sqrt{2}\cos\varphi$. Observe que escolhendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\psi(\varphi) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2} \cdot 0 = 0$$

porém, como

$$\psi'(\varphi) = (2\sqrt{2}\cos(\varphi))' = -2\sqrt{2}\sin\varphi$$

temos

$$\psi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2} \neq 0.$$

Logo, $\frac{\pi}{2}$ é um zero simples de ψ e como $K(r, \varphi) = K_3(r, \varphi) + O(r^{\frac{n+1}{2}}) = \psi(\varphi)r^n + O(r^{\frac{n+1}{2}})$, segue do Teorema 1.5.6 que a origem é um equilíbrio instável.

4.1.2 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q(q^2 - p^2)$

Suponhamos agora que $H_3 = q(q^2 - p^2)$. Novamente considere a mesma mudança de coordenadas ação-ângulo

$$q = \sqrt{2r}\cos(\varphi) \quad \text{e} \quad p = \sqrt{2r}\sin(\varphi)$$

e seja $K = K(r, \varphi)$ o Hamiltoniano em coordenadas (r, φ) . Assim,

$$\begin{aligned} K(r, \varphi) &= H(q, P) \\ &= H_3(q(r, \varphi), p(r, \varphi)) \\ &= H_3(\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\ &= (\sqrt{2r}\cos\varphi)((\sqrt{2r}\cos\varphi)^2 - (\sqrt{2r}\sin\varphi)^2) \\ &= \sqrt{2r}\cos\varphi(2r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)r^{\frac{1}{2}}r \\ &= 2\sqrt{2}\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)r^{\frac{3}{2}} = \psi(\varphi)r^n \end{aligned}$$

onde $n = \frac{3}{2}$ e $\psi(\varphi) = 2\sqrt{2}\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$.

Observemos que para $\varphi = \pi/2$ temos

$$\psi(\varphi) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0.$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \psi'(\varphi) &= -2\sqrt{2}\sin(\varphi)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ &\quad + 2\sqrt{2}\cos\varphi(-2\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi) \\ &= -2\sqrt{2}(\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi + 4\cos^2\varphi\sin\varphi) \\ &= -2\sqrt{2}(5\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) \end{aligned}$$

temos que

$$\psi' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -2\sqrt{2} \left(5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - \operatorname{sen}^3 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2\sqrt{2} \neq 0.$$

Portanto, $\frac{\pi}{2}$ é zero simples de ψ e dessa forma pelo Teorema [1.5.6](#), a origem é um equilíbrio instável.

4.1.3 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q^2 p$

Agora trataremos o caso em que $H_3 = q^2 p$. De forma análoga ao que foi feito nas duas seções anteriores, vamos considerar a mudança de coordenadas ação-ângulo

$$q = \sqrt{2r} \cos(\varphi) \quad \text{e} \quad p = \sqrt{2r} \operatorname{sen}(\varphi) \quad (4.2)$$

e sendo $K = K(r, \varphi)$ o Hamiltoniano nas novas coordenadas (r, φ) temos

$$\begin{aligned} K_3(\varphi, r) &= H_3(q, p) \\ &= H_3(q(r, \varphi), p(r, \varphi)) \\ &= H_3(\sqrt{2r} \cos \varphi, \sqrt{2r} \operatorname{sen} \varphi) \\ &= (\sqrt{2r} \cos \varphi)^2 (\sqrt{2r} \operatorname{sen} \varphi) \\ &= 2r \cos^2 \varphi \sqrt{2r} \operatorname{sen} \varphi \\ &= 2\sqrt{2} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi r^{\frac{3}{2}} \\ &= (2\sqrt{2} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi) r^{\frac{3}{2}} = \psi(\varphi) r^n \end{aligned}$$

com $n = \frac{3}{2}$ e $\psi(\varphi) = 2\sqrt{2} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi$. Note que

$$\psi(0) = 2\sqrt{2} \cos^2(0) \operatorname{sen}(0) = 0,$$

porém

$$\begin{aligned} \psi'(\varphi) &= (2\sqrt{2} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi)' \\ &= 4\sqrt{2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi + (2\sqrt{2} \cos^2 \varphi \cos \varphi) \\ &= 4\sqrt{2} \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + 2\sqrt{2} \cos^3 \varphi \end{aligned}$$

e portanto

$$\psi'(0) = 4\sqrt{2} \cos(0) \operatorname{sen}^2(0) + 2\sqrt{2} \cos^3(0) = 2\sqrt{2} \neq 0.$$

Logo, $\varphi = 0$ é um zero simples de ψ . Pelo Teorema [1.5.6](#), segue que a origem é um equilíbrio instável.

4.1.4 Análise da Estabilidade no Caso em que $H_3 = q^3$

Daqui em diante, nesta seção, vamos analisar a estabilidade da solução de equilíbrio nula no caso particular $H_3(q, p) = q^3$.

Inicialmente, vamos fazer a mesma análise dos três casos anteriores. Considerando a mudança de coordenadas ação-ângulo

$$q = \sqrt{2r}\cos(\varphi) \quad \text{e} \quad p = \sqrt{2r}\sin(\varphi) \quad (4.3)$$

e sendo $K = K(r, \varphi)$ o Hamiltoniano nas novas coordenadas (r, φ) temos o novo Hamiltoniano

$$\begin{aligned} K_3(r, \varphi) &= H_3(q, p) \\ &= H_3(q(r, \varphi), p(r, \varphi)) \\ &= H_3 = (\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\ &= (\sqrt{2r}\cos\varphi)^3 \\ &= 2^{\frac{3}{2}}\cos^3\varphi r^{\frac{3}{2}} = \psi(\varphi)r^n, \end{aligned}$$

com $n = \frac{3}{2}$. Note que $\psi(\varphi) = 0$ se, e somente se $\cos\varphi = 0$, isto é, $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Porém, notemos que

$$\psi'(\varphi) = -2^{\frac{3}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi,$$

assim, se $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ temos que

$$\psi'(\varphi) = 0.$$

Logo, ψ possui zeros, mas nenhum é simples, portanto o Teorema 1.5.6 não se aplica.

Neste caso, se $\psi(\varphi) = 0$ temos que $\psi'(\varphi) = 0$, de modo que ψ não possui zero simples, apesar de possuir zeros. Com isso não conseguimos concluir a natureza da estabilidade da solução nula usando o Teorema 1.5.6. Para estudar a estabilidade iremos obter a forma normal dos termos quarta e quinta ordem na expansão em série do Hamiltoniano, utilizando a teoria da Seção 3.4. Em seguida, iremos obter uma função de Chetaev para concluir a instabilidade do Teorema de Chetaev 1.5.5.

Por meio de uma transformação de Birkhoff $(q, p) \mapsto (Q, P)$, conforme vimos no Teorema 3.4.1, podemos obter a forma normal

$$\Gamma(Q, P, t) = Q^3 + \Gamma_4(Q, P) + \Gamma_5(Q, P) + \dots + \Gamma_l(Q, P) + \tilde{\Gamma}(Q, P, t)$$

onde

$$\begin{aligned}\Gamma_4(Q, P) &= \gamma_{13}QP^3 + \gamma_{04}P^4 \\ \Gamma_5(Q, P) &= \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5.\end{aligned}$$

Desse modo, podemos obter o seguinte teorema que diz respeito a estabilidade do equilíbrio $(0, 0)$.

Teorema 4.1.1 (Markeev, 2015). *Suponha que pelo menos um dos coeficientes das formas $\Gamma_4(Q, P)$ ou $\Gamma_5(Q, P)$ são diferentes de zero, ou seja, $\gamma_{13} \neq 0$, $\gamma_{04} \neq 0$, $\gamma_{14} \neq 0$ ou $\gamma_{05} \neq 0$. Então o equilíbrio $(0, 0)$ é instável.*

Demonstração: A idéia da prova é construir uma função de Chetaev para cada caso, o Teorema de Chetaev garante a instabilidade da solução de equilíbrio nula.

Caso 1: Inicialmente suponhamos que $\gamma_{13} \neq 0$. Nesse caso, vamos separar o estudo em três situações distintas:

Caso 1.1: Suponha que $\gamma_{04} \neq 0$ e γ_{05} arbitrário. Nessa situação faremos uma mudança de coordenadas simpléticas

$$(Q, P) \mapsto ((\gamma_{04})^{\frac{1}{5}}Q, (\gamma_{04})^{\frac{2}{5}}P) := (\zeta, \eta)$$

que satisfaz as relações

$$Q = (\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}}\zeta \quad \text{e} \quad P = (\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta.$$

Denotemos por Γ o Hamiltoniano descrito nas novas coordenadas (ζ, η) e obtemos a relação $\Gamma = CH$, onde $C = (\gamma_{04})^{\frac{3}{5}}$, obtendo assim

$$\begin{aligned}\Gamma(\zeta, \eta) &= CH(Q, P) \\ &= CH((\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}}\zeta, (\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta) \\ &= C \left(\left[(\gamma_{04})^{\frac{1}{5}}\zeta \right]^3 + \Gamma_{04} \left((\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}}\zeta, (\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta \right) + \Gamma_5 \left((\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}}\zeta, (\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta \right) + O_6 \right) \\ &= C \left((\gamma_{04})^{-\frac{3}{5}}\zeta^3 + \left[\gamma_{13}((\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}}\zeta)((\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta)^3 + \gamma_{04}((\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta)^4 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\gamma_{14}((\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}}\zeta)((\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta)^4 + \gamma_{05}((\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}}\eta)^5 \right] \right) + O_6 \\ &= C \left[(\gamma_{04})^{-\frac{3}{5}}\zeta^3 + \gamma_{13}(\gamma_{04})^{-\frac{7}{5}}\zeta\eta^3 + (\gamma_{04})^{-\frac{3}{5}}\eta^4 + \gamma_{14}(\gamma_{04})^{-\frac{9}{5}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}(\gamma_{04})^{-\frac{16}{5}}\eta^5 \right] + O_6 \\ &= C(\gamma_{04})^{-\frac{3}{5}} \left[\zeta^3 + \gamma_{13}(\gamma_{04})^{-\frac{4}{5}}\zeta\eta^3 + \eta^4 + \gamma_{14}(\gamma_{04})^{-\frac{6}{5}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}(\gamma_{04})^{-\frac{7}{5}}\eta^5 \right] + O_6 \\ &= \zeta^3 + \eta^4 + \zeta \left(\gamma_{13}(\gamma_{04})^{-\frac{4}{5}}\eta^3 + \gamma_{14}(\gamma_{04})^{-\frac{6}{5}}\eta^4 \right) + \gamma_{05}(\gamma_{04})^{-\frac{7}{5}}\eta^5 + O_6.\end{aligned}$$

Denotando

$$\gamma_{13} = \gamma_{13}(\gamma_{04})^{-\frac{4}{5}}; \quad \gamma_{14} = \gamma_{14}(\gamma_{04})^{-\frac{6}{5}}; \quad \gamma_{05} = \gamma_{05}(\gamma_{04})^{-\frac{7}{5}},$$

obtemos

$$\Gamma(\zeta, \eta) = \zeta^3 + \eta^4 + \zeta(\gamma_{13}\eta^3 + \gamma_{14}\eta^4) + \gamma_{05}\eta^5 + O_6,$$

onde O_6 denota os termos de ordem maior ou igual a 6. Agora definamos a função

$$V_\epsilon(\zeta, \eta) = \epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}} - (\zeta + \eta^{\frac{4}{3}})^2$$

com $0 < \epsilon < 1$ e definimos D como sendo

$$D = \left\{ (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta < 0 \quad \zeta = (-1 + \epsilon\beta)\eta^{\frac{4}{3}} \quad \forall \beta \in (-1, 1) \right\}.$$

Vamos mostrar condições para que o par (V, D) satisfaz as condições do Teorema de Chetaev. De fato, primeiramente notemos que dados $(\zeta, \eta) \in D$ temos

$$\begin{aligned} V_\epsilon(\zeta, \eta) &= \epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}} - (\zeta + \eta^{\frac{4}{3}})^2 \\ &= \epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}} - ((-1 + \epsilon\beta)\eta^{\frac{4}{3}} + \eta^{\frac{4}{3}})^2 \\ &= \epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}} - (\eta^{\frac{4}{3}}(-1 + \epsilon\beta + 1))^2 \\ &= \epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}} - \eta^{\frac{8}{3}} \epsilon^2 \beta^2 \\ &= \epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}} (1 - \beta^2) > 0. \end{aligned}$$

Nessa ocasião, $\phi(t, (\zeta, \eta)) = (\zeta(t), \eta(t))$ é o fluxo do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \zeta' = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \\ \eta' = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} \end{cases}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(\zeta, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta^3 + \eta^4 \zeta(\gamma_{13}\eta^3 + \gamma_{14}\eta^4) + \gamma_{05}\eta^5 + O_6) \\ &= 4\eta^3 + \zeta(3\gamma_{13}\eta^2 + 4\gamma_{14}\eta^3) + 5\gamma_{05}\eta^4 + O_5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta}(\zeta, \eta) &= -\frac{\partial}{\partial \zeta}(\zeta^3 + \eta^4 \zeta(\gamma_{13}\eta^3 + \gamma_{14}\eta^4) + \gamma_{05}\eta^5 + O_6) \\ &= -(3\zeta^2 + \gamma_{13}\eta^3 + \gamma_{14}\eta^4) + O_5, \end{aligned}$$

resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \zeta'(t) = 4\eta^3 + 3\gamma_{13}\zeta\eta^2 + 4\gamma_{14}\zeta\eta^3 + \gamma_{05}\eta^5 + O_5 \\ \eta'(t) = -3\zeta^2\gamma_{13}\eta^3 - \gamma_{13}\eta^4 + O_5. \end{cases} \quad (4.4)$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\epsilon(\zeta, \eta) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V_\epsilon(\phi(t(\zeta, \eta))) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V_\epsilon(\zeta(t), \eta(t)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}}(t) - (\zeta(t) + \eta(t)^{\frac{4}{3}})_2) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\epsilon^2 \eta^{\frac{8}{3}}(t) - (\zeta^2(t) + 2\zeta(t)\eta^{\frac{4}{3}}(t) + \eta^{\frac{8}{3}}(t))) \\
&= \epsilon^2 \frac{8}{3} \eta^{\frac{5}{3}}(t) \eta'(t) - (2\zeta(t)\zeta'(t) + 2(\zeta'(t)\eta^{\frac{4}{3}}(t) \\
&\quad + \frac{4}{3}\zeta(t)\eta^{\frac{1}{3}}(t)\eta'(t)) + \frac{8}{3}\eta^{\frac{5}{3}}(t)\eta'(t))
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Fazendo a substituição das expressões (4.4) em (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\epsilon(\zeta, \eta) &= 8\epsilon \eta^{\frac{13}{3}} (\epsilon[1 + 2\beta^2 - \epsilon\beta(2 + \beta^2 - \epsilon\beta)] + O(\eta^{\frac{1}{3}})) \\
&= 8\epsilon |\eta|^{\frac{1}{3}} (\epsilon[1 + 2\beta^2 - \epsilon\beta(2 + \beta^2 - \epsilon\beta)] + O(|\eta|^{\frac{1}{3}}))
\end{aligned}$$

para $0 < \epsilon \ll 1$ e $|\beta| < 1$. Escolhendo $\epsilon > 0$ e $\eta \in D$ suficientemente pequenos obtemos que

$$\dot{V}(\zeta, \eta) > 0$$

e como claramente $(0, 0) \in \partial D$, segue pelo teorema de Chetaev que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável.

Caso 1.2: Suponhamos agora que γ_{04} e $\gamma_{05} \neq 0$. Para este caso consideremos a transformação simplética

$$(Q, P) \mapsto (|\gamma_{13}|^{\frac{1}{4}}Q, |\gamma_{13}|^{\frac{1}{2}}P) = (\zeta, \eta).$$

Obtemos assim a relação

$$Q = |\gamma_{13}|^{-\frac{1}{4}}\zeta \quad \text{e} \quad P = |\gamma_{13}|^{-\frac{1}{2}}\eta.$$

Assim como no primeiro caso, seja Γ o novo Hamiltoniano descrito em coordenadas (ζ, η) . Novamente através da relação

$$\Gamma(\zeta, \eta) = C\Gamma(Q, P)$$

onde $C = |\gamma_{13}|^{\frac{3}{4}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(\zeta, \eta) &= C\Gamma(Q, P) \\
&= C(Q^3 + \Gamma_{04}(Q, P) + \Gamma_{05}(Q, P) + O_6) \\
&= C(Q^3 + (\gamma_{13}QP^3 + \gamma_{04}P^4) + (\gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5) + O_6) \\
&= C((|\gamma_{13}|^{-\frac{1}{4}}\zeta)^3 + [\gamma_{13}(|\gamma_{13}|^{-\frac{1}{4}}\zeta)(|\gamma_{13}|^{-\frac{1}{2}}\eta)^3 + \gamma_{04}(|\gamma_{13}|^{-\frac{1}{2}}\eta)^4] \\
&\quad + [\gamma_{14}|\gamma_{13}|^{-\frac{1}{4}}\zeta(|\gamma_{13}|^{-\frac{1}{2}}\eta)^4 + \gamma_{05}(|\gamma_{13}|^{-\frac{1}{2}}\eta)^5] + O_6) \\
&= C(|\gamma_{13}|^{-\frac{3}{4}}\zeta^3 + [\gamma_{13}|\gamma_{13}|^{-\frac{7}{4}}\zeta\eta^3 + \gamma_{04}|\gamma_{13}|^{-2}\eta^4] \\
&\quad + [\gamma_{14}|\gamma_{13}|^{-\frac{9}{4}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}|\gamma_{13}|^{-\frac{5}{2}}\eta^5] + O_6) \\
&= C|\gamma_{13}|^{-\frac{3}{4}}(\zeta^3 + \gamma_{13}|\gamma_{13}|^{-1}\zeta\eta^3 + \gamma_{04}|\gamma_{13}|^{-\frac{5}{4}}\eta^4 \\
&\quad + \gamma_{14}|\gamma_{13}|^{-\frac{3}{2}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}|\gamma_{13}|^{-\frac{7}{4}}\eta^5) + O_6 \\
&= \zeta^3 + \gamma_{13}|\gamma_{13}|^{-1}\zeta\eta^3 + \gamma_{04}|\gamma_{13}|^{-\frac{5}{4}}\eta^4 + \gamma_{14}|\gamma_{13}|^{-\frac{3}{2}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}|\gamma_{13}|^{-\frac{7}{4}}\eta^5 + O_6 \\
&= \zeta^3 + \gamma_{13}|\gamma_{13}|^{-1}\zeta\eta^3 + \gamma_{14}|\gamma_{13}|^{-\frac{3}{2}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}|\gamma_{13}|^{-\frac{7}{4}}\eta^5 + O_6.
\end{aligned}$$

Denotando

$$\sigma = \frac{\gamma_{13}}{|\gamma_{13}|} = \text{sgn}(\gamma_{13}); \quad \gamma_{14} = \gamma_{14}|\gamma_{13}|^{-\frac{3}{2}}; \quad \gamma_{05} = \gamma_{05}|\gamma_{13}|^{-\frac{7}{4}},$$

obtemos

$$\Gamma(\zeta, \eta) = \zeta^3 + \sigma\zeta\eta^3 + \gamma_{14}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}\eta^5 + O_6.$$

Para o caso $\sigma = 1$, definimos a função

$$V_\epsilon(\zeta, \eta) = \epsilon^2|\eta|^3 - (\zeta - |\eta|^{\frac{3}{2}})^2$$

onde $0 < \epsilon \ll 1$ e

$$D = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta < 0 \quad e \quad \zeta = (1 + \epsilon\beta)|\eta|^{\frac{3}{2}}, \quad \forall \beta \in (-1, 1).$$

Notemos que, dado $(\zeta, \eta) \in D$ temos

$$\begin{aligned}
V_\epsilon(\zeta, \eta) &= \epsilon^2|\eta|^3 - (\zeta - |\eta|^{\frac{3}{2}})^2 \\
&= \epsilon^2|\eta|^3 - ((1 + \epsilon\beta)|\eta|^{\frac{3}{2}} - |\eta|^{\frac{3}{2}})^2 \\
&= \epsilon^2|\eta|^3 - (|\eta|^{\frac{3}{2}}(1 + \epsilon\beta - 1))^2 \\
&= \epsilon^2|\eta|^3 - |\eta|^3\epsilon^2\beta^2 \\
&= \epsilon^2|\eta|^3(1 - \beta^2).
\end{aligned}$$

Logo $V > 0$ em D . Novamente vamos considere $\phi(t(\zeta, \eta)) = (\zeta(t), \eta(t))$ o fluxo do sistema

$$\begin{cases} \zeta' = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \\ \eta' = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} (\zeta^3 + \sigma \zeta \eta^3 + \gamma_{14} \zeta \eta^4 + \gamma_{05} \eta^5 + O_6) \\ &= 3\sigma \zeta \eta^2 + 4\gamma_{14} \zeta \eta^3 + 5\gamma_{05} \eta^4 + O_5\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^3 + \sigma \zeta \eta^3 + \gamma_{14} \zeta \eta^4 + \gamma_{05} \eta^5 + O_6) \\ &= 3\zeta^2 + \sigma \eta^3 + \gamma_{14} \eta^4 + O_5.\end{aligned}$$

Contudo, podemos escrever o sistema como sendo

$$\begin{cases} \zeta'(t) = 3\sigma \zeta \eta^2 + 4\gamma_{14} \zeta \eta^3 + 5\gamma_{05} \eta^4 + O_5 \\ \eta'(t) = 3\zeta^2 + \sigma \eta^3 + \gamma_{14} \eta^4 + O_5. \end{cases} \quad (4.6)$$

Desse modo, vemos que

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta, \eta) &= \frac{dV}{dt} \big|_{t=0}(\phi(t, (\zeta, \eta))) \\ &= \frac{dV}{dt} \big|_{t=0}(\zeta(t), \eta(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (\epsilon^2 |\eta(t)|^3 - (\zeta(t) - |\eta(t)|^{\frac{3}{2}})^2) \\ &= \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (\epsilon^2 |\eta(t)|^3 - (\zeta^2(t) - 2\zeta(t)|\eta(t)|^{\frac{3}{2}} + |\eta(t)|^3)) \\ &= \epsilon^2 3|\eta|^2 \frac{\eta}{|\eta|} \eta' - (2\zeta \zeta' - 2(\zeta |\eta|^{\frac{3}{2}} + \zeta \frac{3}{2} |\eta|^{\frac{1}{2}} \frac{\eta}{|\eta|} \eta') + 3|\eta|^2 \frac{\eta}{|\eta|} \eta') \\ &= 3\epsilon^2 |\eta| \eta \eta' - (2\zeta \zeta' - 2\zeta' |\eta|^{\frac{3}{2}} - 3\zeta \frac{\eta \eta'}{|\eta|} + 3|\eta| \eta \eta').\end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.6) em (4.7), obtemos

$$\dot{V}(\zeta, \eta) = 3\epsilon |\eta|^5 (\epsilon [2 + 4\beta^2 + 3\epsilon \beta (2 + \beta^2 + \epsilon \beta)] + O(|\eta|^{\frac{1}{2}})).$$

Assim como feito anteriormente para $\epsilon > 0$ e $|\eta| > 0$ suficientemente pequenos, resultamos

$$\dot{V} > 0$$

em D e pelo Teorema de Chetaev segue $(0, 0)$ é instável.

Para o caso $\sigma = 1$ prosseguimos de maneira análoga ao caso $\sigma = -1$, porém escolhemos a função

$$V_\epsilon(\zeta, \eta) = \epsilon^2 \eta^3 - \zeta^2$$

$$\text{e } D = \left\{ (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta > 0 \quad \text{e} \quad \zeta = \epsilon \beta \eta^{\frac{3}{2}} \quad \text{com} \quad \beta \in (-1, 1) \right\}.$$

Dessa maneira obteremos que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio instável.

Caso 1.3: Suponha agora que $\gamma_{04} = \gamma_{05} = 0$. Neste caso a prova é análoga ao Caso 1.2, a única diferença é que o novo Hamiltoniano toma a forma

$$\Gamma(\zeta, \eta) = \zeta^3 + \sigma \zeta \eta^3 + \gamma_{14} \zeta \eta^4 + O_6$$

com $\gamma_{14} = \gamma_{14} |\gamma_{14}|^{-\frac{3}{2}}$ e $\sigma = \text{sgn}(\gamma_{14})$. E seguindo exatamente como no caso anterior obtemos que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável.

Caso 2: Suponha que $\gamma_{13} = 0$ e $\gamma_{14} \neq 0$. Nesse caso, como foi feito para $\gamma_{13} \neq 0$ temos três situações possíveis, a depender dos valores de γ_{04} e γ_{05} .

Caso 2.1: $\gamma_{04} \neq 0$ e γ_{05} arbitrário. Nesse caso, como $\gamma_{04} \neq 0$, faremos a mesma mudança de coordenadas do caso 1.1, ou seja,

$$(Q, P) \mapsto \left((\gamma_{04})^{\frac{1}{5}} Q, (\gamma_{04})^{\frac{2}{5}} P \right) := (\zeta, \eta),$$

obtendo assim a relação

$$Q = (\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}} \zeta \quad \text{e} \quad P = (\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}} \eta.$$

Prosseguindo de maneira análoga ao Caso 1.1 obtemos a expressão para o novo Hamiltoniano

$$\Gamma(\zeta, \eta) = \zeta^3 + \eta^4 + \gamma_{14} \zeta \eta^4 + \gamma_{05} \eta^5 + O_6,$$

com $\gamma_{14} = \gamma_{14} (\gamma_{14})^{-\frac{6}{5}}$ e $\gamma_{05} = \gamma_{05} (\gamma_{04})^{-\frac{7}{5}}$. Desse modo, seguindo exatamente os mesmos passos de do caso 1.1 obtemos que $(0, 0)$ é instável.

Caso 2.2: Suponha que $\gamma_{04} = 0$ e $\gamma_{05} \neq 0$. Vamos aplicar a transformação simplética

$$(Q, P) \mapsto \left((\gamma_{05})^{\frac{1}{7}} Q, (\gamma_{05})^{\frac{2}{7}} P \right) := (\zeta, \eta),$$

obtemos as relações

$$Q = (\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta \quad \text{e} \quad P = (\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta.$$

Daí, se $\Gamma = \Gamma(\zeta, \eta)$ é o novo Hamiltoniano nas variáveis (ζ, η) e como $\Gamma = CH$

com $C = \gamma_{05}^{\frac{3}{7}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Gamma(\zeta, \eta) = CH(Q, P) \\
&= CH \left((\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta, (\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta \right) \\
&= C \left(\left[(\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta \right]^3 + \Gamma_{04} \left((\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta, (\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta \right) \right) \\
&\quad + \Gamma_{05} \left(\left((\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta, (\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta \right) \right) + O_6 \\
&= \left((\gamma_{05})^{-\frac{3}{7}} \zeta^3 + \left[\gamma_{13} \left((\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta \right) \left((\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta \right)^3 + \gamma_{04} \left((\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta \right)^4 \right] \right) \\
&\quad + \left[\gamma_{14} \left((\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta \right) \left((\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta \right)^4 + \gamma_{05} \left((\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta \right)^5 \right] + O_6 \\
&= C \left((\gamma_{05})^{-\frac{3}{7}} \zeta^3 + \gamma_{14} (\gamma_{05})^{-\frac{9}{7}} \zeta \eta^4 + (\gamma_{05})^{-\frac{3}{7}} \eta^5 \right) + O_6 \\
&= C (\gamma_{05})^{-\frac{3}{7}} (\zeta^3 + \gamma_{14} (\gamma_{05})^{-\frac{6}{7}} \zeta \eta^4 + \eta^5) + O_6.
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(\zeta, \eta) &= \zeta^3 + \gamma_{14} (\gamma_{05})^{-\frac{6}{7}} \zeta \eta^4 + \eta^5 + O_6 \\
&= \zeta^3 + \eta^5 + \gamma_{14} \zeta \eta^4 + O_6,
\end{aligned}$$

onde $\gamma_{14} = \gamma_{14} (\gamma_{05})^{-\frac{6}{7}}$. Com isso definimos

$$V(\zeta, \eta) = \epsilon^2 \eta^{\frac{10}{3}} - (\zeta + \eta^{\frac{5}{3}})^2$$

e $D = \left\{ (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta < 0 \text{ e } \zeta = (-1 + \epsilon\beta) \eta^{\frac{5}{3}} \text{ com } \beta \in (-1, 1) \right\}$. Seguindo de maneira análoga aos casos anteriores mostra-se que V é uma função de Chetaev sobre D , provando assim, pelo Teorema de Chetaev, que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável.

Caso 2.3: Suponha que $\gamma_{04} = \gamma_{05} = 0$. Segue de forma semelhante aos casos 1.3 e 2.2.

Caso 3: Neste caso suponhamos que $\gamma_{13} = 0$ e $\gamma_{14} = 0$. Assim como feito anteriormente temos os subcasos:

Caso 3.1: Suponha que $\gamma_{04} \neq 0$ e γ_{05} arbitrário. Fazendo a mesma mudança de variáveis do caso 1.1, isto é,

$$(Q, P) \mapsto \left((\gamma_{04})^{\frac{1}{5}} Q, (\gamma_{04})^{\frac{2}{5}} P \right) := (\zeta, \eta),$$

obtemos as relações

$$Q = (\gamma_{04})^{-\frac{1}{5}} \zeta \text{ e } P = (\gamma_{04})^{-\frac{2}{5}} \eta$$

e o Hamiltoniano Γ será da forma

$$\Gamma(\zeta, \eta) = \zeta^3 + \eta^3 + \gamma_{05}\eta^5 + O_6,$$

onde $\gamma_{05} = \gamma_{05}(\gamma_{04})^{-\frac{7}{5}}$. Daí, seguimos os mesmos passos feitos no caso 1.1, mostra-se que $(0, 0)$ é instável.

Caso 3.2: Considere $\gamma_{04} = 0$ e $\gamma_{05} \neq 0$. Fazendo a mesma mudança de variáveis feita no caso 2.2, isto é,

$$(Q, P') \mapsto \left((\gamma_{05})^{\frac{1}{7}} Q, (\gamma_{05})^{\frac{2}{7}} P' \right) = (\zeta, \eta),$$

obtemos as relações

$$Q = (\gamma_{05})^{-\frac{1}{7}} \zeta \quad e \quad P = (\gamma_{05})^{-\frac{2}{7}} \eta$$

e o novo Hamiltoniano terá a forma

$$\Gamma(\zeta, \eta) = \zeta^3 + \eta^5 + O_6,$$

Daí, de maneira análoga ao que foi realizado no caso 2.2 prova-se que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável.

Deste modo, considerando a análise dos caso 1, 2 e 3 e seus subcasos, concluímos que de fato $(0, 0)$ é um equilíbrio instável. ■

4.2 Estabilidade de Sistemas Hamiltonianos que iniciam com termos de quarta ordem

Vamos estudar agora o tipo de estabilidade da origem para um sistema Hamiltoniano cuja expansão em série de Taylor inicia com termos de quarta ordem.

Vamos iniciar como anteriormente, considerando um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade da forma

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \end{cases} \quad (4.8)$$

onde a origem $(0, 0)$ é uma solução de equilíbrio e $H = H(q, p, t)$ é uma função analítica em uma vizinhança da origem e 2π periódica em t . Assumiremos que a expansão em série de Taylor de H em uma vizinhança da origem é da forma

$$H = H_4 + H_5 + \dots + H_j + \dots$$

onde H_j é um polinômio homogêneo de grau j em (q, p) , isto é

$$H_j = H_j(q, p, t) = \sum_{k+l=j} h_{kl} q^k p^l$$

com $k, l \in \mathbb{N}$ e $h_{kl} \in \mathbb{R}$. Note que neste caso estamos supondo que H não possui termos quadráticos nem cúbicos, ou seja, $H_2 = H_3 \equiv 0$ e $H_j(q, p, t) = H_j(q, p)$, para todo $j \geq 4$ até certa ordem. Isto é, os polinômios H_j independem do tempo $t \geq 0$ até certa ordem finita.

Inicialmente, H_4 pode ter a forma:

$$H_4 = h_{40}q^4 + h_{31}q^3p + h_{22}q^2p^2 + h_{13}qp^3 + h_{04}p^4.$$

No entanto, pelo Teorema [3.2.2](#), basta considerar os casos em que H_4 possui uma das 9 formas:

- i) $q^4 + aq^2p^2 + p^4, \quad a > -2;$
- ii) $q^4 + aq^2p^2 + p^4, \quad a < -2;$
- iii) $q^4 + aq^2p^2 - p^4, \quad a \in \mathbb{R};$
- iv) $q^2(q^2 + p^2);$
- v) $q^2(q^2 - p^2);$
- vi) $q^2p^2;$
- vii) q^3p
- viii) $-q^3p;$
- ix) $q^4.$

4.2.1 Análise da Estabilidade no caso em que $H_4 = q^4 + aq^2p^2 + p^4$ com $a > -2$

Consideremos a mudança de coordenadas ação-ângulo

$$q = \sqrt{2r}\cos\varphi \quad \text{e} \quad p = \sqrt{2r}\sin\varphi,$$

e se $K = K(r, \varphi)$ é o Hamiltoniano nas coordenadas (r, φ) , temos que

$$\begin{aligned} K_4 &= K_4(r, \varphi) \\ &= H_4(q, p) \\ &= H_4(q(\sqrt{2r}\cos\varphi), (\sqrt{2r}\sin\varphi)) \\ &= (\sqrt{2r}\cos\varphi)^4 + a(\sqrt{2r}\cos\varphi)^2(\sqrt{2r}\sin\varphi)^2 + (\sqrt{2r}\sin\varphi)^4 \\ &= 4r^2\cos^4\varphi + a4r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4r^2\sin^4\varphi \\ &= 4(\cos^4\varphi + a\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi)r^2 = \psi(\varphi)r^2, \end{aligned}$$

onde $n = \frac{4}{2}$ e realizando os cálculos temos

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= 4(\cos^4\varphi + a\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi) \\ &= (2\cos^2\varphi)^2 + (2\sin^2\varphi)^2 + 4a\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 8\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 8\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\ &= (2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)^2 + (4a - 8)\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\ &= 4 + (4a - 8)\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\ &= 4 + (a - 2)4\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\ &= 4 + (a - 2)\sin(2\varphi). \end{aligned}$$

Como $a > -2$, temos que $(a - 2) > -4$ e além disso $-1 \leq \sin(2\varphi) \leq 1$ obtemos

$$\psi(\varphi) \neq 0,$$

para todo $\varphi \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema [1.5.6](#), a origem é um equilíbrio estável no sentido de Lyapunov.

4.2.2 Análise da Estabilidade em alguns casos em que o Teorema de Markeev-Sokolskii-Cabral-Meyer garante a instabilidade

Inicialmente com base no Teorema [1.5.6](#) analisaremos a estabilidade da origem da no caso em que $H_4 = q^3p$. Vamos considerar a mudança de coordenadas ação-ângulo

$$(p, q) \mapsto (r, \varphi)$$

com $q = \sqrt{2r}\cos\varphi$ e $p = \sqrt{2r}\sin\varphi$, para $\varphi, r \in \mathbb{R}$. Considere o $K = K(r, \varphi)$ o Hamiltoniano em coordenadas (r, φ) . Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
K_3 &= K_3(r, \varphi) \\
&= H_3(q, p) \\
&= H_3(q(r, \varphi), p(\varphi, r)) \\
&= H_3(\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\
&= (\sqrt{2r}\cos\varphi)^3 (\sqrt{2r}\sin\varphi) \\
&= 2^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{2}} \cos^3\varphi 2^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \sin\varphi \\
&= 4\cos^3\varphi \sin\varphi r^2 \\
&= (4\cos^3\sin\varphi) r^2 \\
&= \psi(\varphi) r^n
\end{aligned}$$

onde $n = 2 = \frac{4}{2}$ e $\psi(\varphi) = 4\cos^3\varphi \sin\varphi$. Considere $\varphi = 0$ e observe que

$$\psi(0) = 4\cos^3(0)\sin(0) = 0.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\psi'(\varphi) &= 12\cos^2\varphi \sin^2\varphi + 4\cos^4\varphi \\
&= 4\cos^2\varphi (\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi).
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\psi'(0) = 4\cos^2(0)(\cos^2(0) + 3\sin^2(0)) = 4 \neq 0.$$

Logo $\varphi = 0$ é um zero simples de ψ . Daí, pelo Teorema [1.5.6](#) segue que $r = 0$ ou equivalentemente $q = p = 0$ é um equilíbrio instável, no sentido de Lyapunov.

O caso em que $H_4 = -q^3p$ é análogo e concluímos o mesmo resultado. Na verdade utilizando o mesmo procedimento, também concluímos a instabilidade nos casos $H_4 = q^4 + aq^2p^2 + p^4$, com $a < -2$, $H_4 = q^4 + aq^2p^2 - p^4$, com $a \in \mathbb{R}$ e $H_4 = q^2(q^2 + p^2)$.

4.2.3 Análise da Estabilidade no caso em que $H_4 = q^4$

Assim como nos casos anteriores, vamos considerar a ação-ângulo

$$q = \sqrt{2r}\cos\varphi \quad \text{e} \quad p = \sqrt{2r}\sin\varphi.$$

Se $K = K(r, \varphi)$ é o Hamiltoniano nas novas coordenadas (r, φ) , temos

$$\begin{aligned}
K_4 &= K_4(r, \varphi) \\
&= H_4(q, p) \\
&= H_4(q(r, \varphi), p(r, \varphi)) \\
&= H_4(\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\
&= (\sqrt{2r}\cos\varphi)^4 \\
&= 4\cos^4\varphi r^2 = \psi(\varphi)r^n,
\end{aligned}$$

onde $n = \frac{4}{2}$ e $\psi(\varphi) = 4\cos^4\varphi$. Observemos que dizer $\psi(\varphi) = 0$ é o mesmo que $\sin\varphi = 0$, ou seja, $\varphi = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Porém, com

$$\psi'(\varphi) = (4\cos^4\varphi)' = 16\cos^3\sin\varphi.$$

Logo, se $\varphi = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ temos $\psi'(\varphi) = 0$.

Contudo, a função possui zeros que não são simples, assim, por Cabral-Meyer não funciona a estabilidade.

Dessa forma, nossa meta nesta seção é, baseada no artigo [10], para dar uma resposta sobre a estabilidade para o caso *ix*) em que $H_4 = q^4$ a partir das condições propostas no seguinte Teorema.

Teorema 4.2.1 (Gutierrez-Vidal, 2017). *Nas condições trabalhadas até então temos as seguintes caracterizações sobre a estabilidade (no sentido de Liapunov) do equilíbrio 0.*

- i) Se $\gamma_{05} \neq 0$ então a origem é instável.*
- ii) Se $\gamma_{14} \neq 0$ e $\gamma_{05} = 0$ então a origem é instável.*
- iii) Se $\gamma_{23} \neq 0$ e $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{06} = 0$ então a origem é instável.*
- iv) Se $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = 0$ e $\gamma_{06} < 0$ então a origem é instável.*
- v) Se $\gamma_{23} = \gamma_{14}\gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{15} = 0$ e $\gamma_{06} > 0$ então a origem é instável.*
- vi) Se $\gamma_{23} \neq 0$, $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{15} = 0$ e $-96\gamma_{06} > \gamma_{23}^2$ então a origem é instável.*
- vii) Se $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{15} = 0$ e $4\gamma_{06} > \gamma_{23}^2$ então a origem é estável (caso autônomo).*

- viii) Se $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = 0$, $\gamma_{24} > 0$ e $\gamma_{15}^2 < 4\gamma_{24}\gamma_{06}$ então a origem é estável.
- ix) Se $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{15} = 0$, $\gamma_{24} > 0$ e $4\gamma_{06} \geq \gamma_{23}^2$ então a origem é estável (caso autônomo).
- x) Se $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{15} = \gamma_{06} = 0$ e $\gamma_{24} < 0$ então a origem é instável.
- xi) Se $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{06} = 0$ e $\gamma_{15} \neq 0$ então a origem é instável.

Demonstração:

i) Caso $\gamma_{05} \neq 0$.

Consideremos a transformação simplética

$$(Q, P) \mapsto (\gamma_{05}^{-\frac{1}{11}} Q, \gamma_{03}^{\frac{3}{11}} P) = (\zeta, \eta)$$

que satisfaz as relações

$$Q = \gamma^{-\frac{1}{11}} \zeta \quad \text{e} \quad P = \gamma^{-\frac{3}{11}} \eta$$

Denotemos por $K(\zeta, \eta)$ o novo Hamiltoniano descrito nas coordenadas (ζ, η) .

Assim obtemos a relação

$$K(\zeta, \eta) = C\Gamma(Q, P)$$

onde $C = \gamma^{\frac{4}{11}}$ com isso obtemos que

$$\begin{aligned} K(\zeta, \eta) &= C\Gamma(Q, P) \\ &= C(Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}) \\ &= C[(\gamma_{05}^{-\frac{1}{11}}\zeta)^4 + \gamma_{23}(\gamma_{05}^{-\frac{1}{11}}\zeta)^2(\gamma_{05}^{-\frac{3}{11}}\eta)^3 + \gamma_{14}(\gamma_{05}^{-\frac{1}{11}}\zeta)(\gamma_{05}^{-\frac{3}{11}}\eta)^4 + \gamma_{05}^{\frac{11}{11}}(\gamma_{05}^{-\frac{3}{11}}\eta)^5 \\ &\quad + \gamma_{24}(\gamma_{05}^{-\frac{1}{11}}\zeta)^2(\gamma_{05}^{-\frac{3}{11}}\eta)^4 + \gamma_{15}(\gamma_{05}^{-\frac{1}{11}}\zeta)(\gamma_{05}^{-\frac{3}{11}}\eta)^5 + \gamma_{06}(\gamma_{05}^{-\frac{3}{11}}\eta)^6 + \tilde{\Gamma}] \\ &= C[\gamma_{05}^{-\frac{4}{11}}\zeta^4 + \gamma_{23}\gamma_{05}^{-1}\zeta^2\eta^3 + \gamma_{14}\gamma_{05}^{-\frac{13}{11}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}^{-\frac{4}{11}}\eta^5 + \gamma_{24}\gamma_{05}^{-\frac{14}{11}}\zeta^2\eta^4 \\ &\quad + \gamma_{15}\gamma_{05}^{-\frac{16}{11}}\zeta\eta^5 + \gamma_{06}\gamma_{05}^{-\frac{18}{11}}\eta^6 + \tilde{\Gamma}] \\ &= C\gamma_{05}^{-\frac{4}{11}}[\zeta^4 + \gamma_{23}\gamma_{05}^{-\frac{7}{11}}\zeta^2\eta^3 + \gamma_{14}\gamma_{05}^{-\frac{9}{11}}\zeta\eta^4 + \eta^5 + \gamma_{24}\gamma_{05}^{-\frac{10}{11}}\zeta^2\eta^4 \\ &\quad + \gamma_{15}\gamma_{05}^{-\frac{12}{11}}\zeta\eta^5 + \gamma_{06}\gamma_{05}^{-\frac{14}{11}}\eta^6 + \tilde{\Gamma}] \\ &= \zeta^4 + \eta^5 + \zeta(\gamma_{14}\gamma_{05}^{-\frac{9}{11}}\eta^4 + \gamma_{15}\gamma_{05}^{-\frac{12}{11}}\eta^5) + \zeta^2(\gamma_{23}\gamma_{05}^{-\frac{7}{11}}\eta^3 + \gamma_{24}\gamma_{05}^{-\frac{10}{11}}\eta^4) \\ &\quad + \gamma_{06}\gamma_{05}^{-\frac{14}{11}}\eta^6 + \tilde{\Gamma}. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$K(\zeta, \eta) = \zeta^4 + \eta^5 + \zeta(k_{14}\eta^4 + k_{15}\eta^5) + \zeta^2(k_{23}\eta^3 + k_{24}\eta^4) + k_{06}\eta^6 + \tilde{\Gamma} \quad (4.9)$$

onde

$$k_{14} = \gamma_{14}\gamma_{05}^{-\frac{9}{11}}, k_{15} = \gamma_{15}\gamma_{05}^{-\frac{12}{11}}, k_{23} = \gamma_{23}\gamma_{05}^{-\frac{7}{11}}, k_{24} = \gamma_{24}\gamma_{05}^{-\frac{10}{11}}, k = \gamma_{06}\gamma_{05}^{-\frac{14}{11}}$$

Considerando a região

$$D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta < 0 \text{ e } V(\zeta, \eta) > 0\}$$

onde

$$V(\zeta, \eta) := \epsilon^2 |\eta|^{\frac{5}{2}} - (\zeta - |\eta|^{\frac{5}{4}})^2$$

observe que em D é válida a relação

$$\zeta = (1 + \epsilon\beta(\zeta, \eta))|\eta|^{\frac{5}{4}}$$

sendo $\beta(\zeta, \eta) = \epsilon^{-1}|\eta|^{-\frac{5}{4}}(\zeta - |\eta|^{\frac{5}{4}})$ diferenciável. Notemos que, como $V(\zeta, \eta) > 0$ para $(\zeta, \eta) \in D$ temos

$$|\beta(\zeta, \eta)| < 1$$

e conseqüentemente $\zeta > 0$. Observemos que as equações do movimento associado ao Hamiltoniano K em (4.9) são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \frac{\partial K}{\partial \eta}(\zeta, \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta^4 + \eta^5 + \zeta(k_{14}\eta^4 + k_{15}\eta^5) + \zeta^2(k_{23}\eta^3 + k_{24}\eta^4) + k_{06}\eta^6 + \tilde{\Gamma}) \\ &= 5\eta^4 + \zeta(4k_{14}\eta^3 + 5k_{15}\eta^4) + \zeta^2(3k_{23}\eta^2 + 4k_{23}\eta^3) + 6k_{06}\eta^5 + \tilde{\Gamma} \\ &= 5\eta^4 + 4k_{14}\zeta\eta^3 + 5k_{15}\zeta\eta^4 + 3k_{23}\zeta^2\eta^2 + 4k_{23}\zeta^2\eta^3 + 6k_{06}\eta^5 + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -\frac{\partial K}{\partial \zeta}(\zeta, \eta) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \zeta}(\zeta^4 + \eta^5 + \zeta(k_{14}\eta^4 + k_{15}\eta^5) + \zeta^2(k_{23}\eta^3 + k_{24}\eta^4) + k_{06}\eta^6 + \tilde{\Gamma}) \\ &= -4\zeta^3 - k_{14}\eta^4 - k_{15}\eta^5 - 2k_{23}\zeta\eta^3 - 2k_{24}\zeta\eta^4 + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = 5\eta^4 + 4k_{14}\zeta\eta^3 + 5k_{15}\zeta\eta^4 + 3k_{23}\zeta^2\eta^2 + 4k_{23}\zeta^2\eta^3 + 6k_{06}\eta^5 + \tilde{\Gamma}. \\ \dot{\eta}(t) = -4\zeta^3 - k_{14}\eta^4 - k_{15}\eta^5 - 2k_{23}\zeta\eta^3 - 2k_{24}\zeta\eta^4 + \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

Desse modo se $\phi(t, (\zeta, \eta)) = (\zeta(t), \eta(t))$ é fluxo do novo sistema, obtemos que para $(\zeta, \eta) \in D$ vale

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta, \eta) &:= \frac{d}{dt}|_{t=0} V(\phi(t, (\zeta, \eta))) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} V(\zeta(t), \eta(t)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta} \\ &= 10\epsilon|\eta|^{\frac{21}{4}} (\epsilon(1 + 3\beta^2 + \epsilon\beta(3 + 3\epsilon\beta + \epsilon\beta^3 + \epsilon^2\beta^2 + 3\beta^2)) + O(|\eta|^{\frac{1}{4}}))\end{aligned}$$

Com isso, fixando $\epsilon > 0$ e escolhendo $|\eta|$ suficientemente pequeno, obtemos que

$$\dot{V}(\zeta, \eta) > 0$$

em D . Logo, pelo teorema de Chetaev $(0, 0)$ é instável.

ii) Caso em que $\gamma_{14} \neq 0$ e $\gamma_{05} = 0$

Nesse caso, consideremos a transformação simplética

$$(Q, P) \mapsto (\gamma_{14}^{\frac{1}{9}} Q, \gamma_{14}^{\frac{1}{3}} P) := (\zeta, \eta)$$

Observe que essa transformação satisfaz as relações

$$Q = \gamma_{14}^{-\frac{1}{9}} \zeta \quad \text{e} \quad P = \gamma_{14}^{-\frac{1}{3}} \eta$$

Novamente denotemos por $K = K(\zeta, \eta)$ o novo Hamiltoniano em cordenas (ζ, η) . Com isso obtemos a relação

$$K(\zeta, \eta) = C\Gamma(Q, P)$$

onde $C = \gamma_{14}^{\frac{4}{9}}$ observe que

$$\begin{aligned}K(\zeta, \eta) &= C\Gamma(Q, P) \\ &= C(Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}) \\ &= C[(\gamma_{14}^{-\frac{1}{9}}\zeta)^4 + \gamma_{23}(\gamma_{14}^{-\frac{1}{9}}\zeta)^2(\gamma_{14}^{-\frac{1}{3}}\eta)^3 + \gamma_{14}(\gamma_{14}^{-\frac{1}{9}}\zeta)(\gamma_{14}^{-\frac{1}{3}}\eta)^4 + \gamma_{05}(\gamma_{14}^{-\frac{1}{3}}\eta)^5 \\ &\quad + \gamma_{24}(\gamma_{14}^{-\frac{1}{9}}\zeta)^2(\gamma_{14}^{-\frac{1}{3}}\eta)^4 + \gamma_{15}(\gamma_{14}^{-\frac{1}{9}}\zeta)(\gamma_{14}^{-\frac{1}{3}}\eta)^5 + \gamma_{06}(\gamma_{14}^{-\frac{1}{3}}\eta)^6 + \tilde{\Gamma}] \\ &= C[\gamma_{14}^{-\frac{4}{9}}\zeta^4 + \gamma_{23}\gamma_{14}^{-\frac{11}{9}}\zeta^2\eta^3 + \gamma_{14}^{-\frac{4}{9}}\zeta\eta^4 + \gamma_{05}\gamma_{14}^{-\frac{5}{3}}\eta^5 + \gamma_{24}\gamma_{14}^{-\frac{14}{9}}\zeta^2\eta^4 \\ &\quad + \gamma_{15}\gamma_{14}^{-\frac{16}{9}}\zeta\eta^5 + \gamma_{06}\gamma_{14}^{-2}\eta^6 + \tilde{\Gamma}] \\ &= C\gamma_{14}^{-\frac{4}{9}}[\zeta^4 + \gamma_{23}\gamma_{14}^{-\frac{7}{9}}\zeta^2\eta^3 + \zeta\eta^4 + \gamma_{05}\gamma_{14}^{-\frac{11}{9}}\eta^5 + \gamma_{24}\gamma_{14}^{-\frac{10}{9}}\zeta^2\eta^4 \\ &\quad + \gamma_{15}\gamma_{14}^{-\frac{12}{9}}\eta^6 + \tilde{\Gamma}] \\ &= \zeta^4 + \zeta\eta^4 + (\gamma_{23}\gamma_{14}^{-\frac{7}{9}})\zeta^2\eta^3 + (\gamma_{15}\gamma_{14}^{-\frac{12}{9}})\zeta\eta^5 + \gamma_{24}\gamma_{14}^{-\frac{10}{9}}\zeta^2\eta^4 \\ &\quad + (\gamma_{06}\gamma_{14}^{-\frac{14}{9}})\eta^6 + \tilde{\Gamma}.\end{aligned}$$

Denotando

$$k_{23} = \gamma_{23}\gamma_{14}^{-\frac{7}{9}}, k_{15} = \gamma_{15}\gamma_{14}^{-\frac{12}{9}}, k_{24} = \gamma_{24}\gamma_{14}^{-\frac{10}{9}}, k_{06} = \gamma_{06}\gamma_{14}^{-\frac{14}{9}}$$

Obtemos

$$K(\zeta, \eta) = \zeta(\zeta^3 + \eta^4) + k_{23}\zeta^2\eta^3 + k_{15}\zeta\eta^5 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{06}\eta^6 + \tilde{\Gamma}.$$

Dessa forma, considerando

$$D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : V(\zeta, \eta) > 0 \quad \text{e} \quad \eta > 0\}$$

sendo

$$V(\zeta, \eta) = \epsilon^2\eta^{\frac{8}{3}} - (\zeta + \eta^{\frac{4}{3}})^2$$

com $0 < \epsilon \ll 1$. Observemos que assim como anteriormente é válida a relação

$$\zeta = (-1 + \epsilon\beta(\zeta, \eta))\eta^{\frac{4}{3}}$$

onde $\beta(\zeta, \eta) = \epsilon^{-1}\eta^{-\frac{4}{3}}(\zeta + \eta^{\frac{4}{3}})$ é diferenciável e satisfaz $|\beta(\zeta, \eta)| < 1$ e com isso temos que

$$\zeta < 0$$

Assim as equações do movimento associadas ao Hamiltoniano $K(\zeta, \eta)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \frac{\partial K}{\partial \eta}(\zeta, \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta^4 + \zeta\eta^4 + k_{23}\zeta^2\eta^3 + k_{15}\zeta\eta^5 + k_{24}\zeta^2\eta^4) + k_{06}\eta^6 + \tilde{\Gamma}) \\ &= 4\zeta\eta^3 + 3k_{23}\zeta^2\eta^2 + 3k_{15}\zeta\eta^4 + 4k_{24}\zeta^2\eta^3 + 6k_{06}\eta^5 + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -\frac{\partial K}{\partial \zeta}(\zeta, \eta) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \zeta}(\zeta^4 + \zeta\eta^4 + k_{23}\zeta^2\eta^3 + k_{15}\zeta\eta^5 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{06}\eta^6 + \tilde{\Gamma}) \\ &= -4\zeta^3 - \eta^4 - 2k_{23}\zeta\eta^3 - k_{15}\eta^5 - 2k_{24}\zeta\eta^4 + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = 4\zeta\eta^3 + 3k_{23}\zeta^2\eta^2 + 5k_{15}\zeta\eta^4 + 4k_{24}\zeta^2\eta^3 + 4k_{23} + 6k_{06}\eta^5 + \tilde{\Gamma}. \\ \dot{\eta}(t) = -4\zeta^3 - \eta^4 - 2k_{23}\zeta\eta^3 - k_{15}\eta^5 - 2k_{24}\zeta\eta^4 + \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

Dessa maneira se $\phi(t, (\zeta, \eta)) = (\zeta(t), \eta(t))$ é o fluxo do sistema, obtemos que se $(\zeta, \eta) \in D$ vale

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta, \eta) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} V(\phi(t, (\zeta, \eta))) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} V(\zeta(t), \eta(t)) \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial \zeta}(\zeta(t), \eta(t)) \cdot \dot{\zeta} + \frac{\partial V}{\partial \eta}(\zeta(t), \eta(t)) \cdot \dot{\eta} \right]_{t=0} \\ &= 8\epsilon\eta^{\frac{17}{3}} \left(\epsilon \left[1 + 3\beta^2 - 4\epsilon\beta \left(1 + \beta - \epsilon\beta - \frac{2}{3}\epsilon\beta^3 + \frac{2}{3}\epsilon^2\beta^2 \right) \right] + O(\eta^{\frac{1}{3}}) \right)\end{aligned}$$

Logo, fixando $\epsilon > 0$ pequeno e tomando $|\eta|$ suficientemente pequeno, isto é, $|\eta| < \epsilon^2$ temos que

$$\dot{V}(\zeta, \eta) > 0$$

em D e como $V(\zeta, \eta) > 0$ em D , pela definição do conjunto, segue pelo teorema de Chetaev que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável no sentido de Lyapunov.

iii) Caso $\gamma_{23} \neq 0$ e $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{06} = 0$

Nesse caso, a função Γ toma a forma

$$\begin{aligned}\Gamma(Q, P) &= Q^2 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 \\ &\quad + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

Nessa situação vamos considerar a transformação canônica

$$(Q, P) \mapsto (\gamma_{23}^{\frac{1}{7}}Q, \gamma_{23}^{\frac{3}{7}}P) := (\zeta, \eta)$$

Notemos que variáveis satisfazem as relações

$$Q = \gamma_{23}^{-\frac{1}{7}}\zeta \quad \text{e} \quad P = \gamma_{23}^{-\frac{3}{7}}\eta$$

Outra vez denotando por $K(\zeta, \eta)$ o novo Hamiltoniano descrito em coordenadas (ζ, η) obtemos que

$$K(\zeta, \eta) = C\Gamma(Q, P)$$

com $C = \gamma_{23}^{\frac{4}{7}}$. Desse modo

$$\begin{aligned}
K(\zeta, \eta) &= C\Gamma(Q, P) \\
&= C(Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \tilde{\Gamma}) \\
&= C[(\gamma_{23}^{-\frac{1}{7}}\zeta)^4 + \gamma_{23}(\gamma_{23}^{-\frac{1}{7}}\zeta)^2(\gamma_{23}^{-\frac{3}{7}}\eta)^3 + \gamma_{24}(\gamma_{23}^{-\frac{1}{7}}\zeta)^2(\gamma_{23}^{-\frac{3}{7}}\eta)^4 \\
&\quad + \gamma_{15}(\gamma_{23}^{-\frac{1}{7}}\zeta)(\gamma_{23}^{-\frac{3}{7}}\eta)^5 + \tilde{\Gamma}] \\
&= C[\gamma_{23}^{-\frac{4}{7}}\zeta^4 + \gamma_{23}^{-\frac{4}{7}}\zeta^2\eta^3 + \gamma_{24}\gamma_{23}^{-\frac{14}{7}}\zeta^2\eta^4 + \gamma_{15}\gamma_{23}^{-\frac{16}{7}}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}] \\
&= C\gamma_{23}^{-\frac{4}{7}}[\zeta^4 + \zeta^2\eta^3 + \gamma_{24}\gamma_{23}^{-\frac{10}{7}}\zeta^2\eta^4 + \gamma_{15}\gamma_{23}^{-\frac{12}{7}}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}] \\
&= \zeta^4 + \zeta^2\eta^3 + \gamma_{24}\gamma_{23}^{-\frac{10}{7}}\zeta^2\eta^4 + \gamma_{15}\gamma_{23}^{-\frac{12}{7}}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

denominando

$$k_{24} = \gamma_{24}\gamma_{23}^{-\frac{10}{7}} \quad \text{e} \quad k_{15} = \gamma_{15}\gamma_{23}^{-\frac{12}{7}}$$

obtemos

$$K(\zeta, \eta) = \zeta^4 + \zeta^2\eta^3 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{15}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}$$

Considerando a região

$$D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : V(\zeta, \eta) > 0 \quad \text{e} \quad \eta < 0\}$$

como

$$V(\zeta, \eta) = \epsilon^2|\eta|^3 - (\zeta - |\eta|^{\frac{3}{2}})^2$$

com $0 < \epsilon \ll 1$. Novamente em D é válida a relação funcional

$$\zeta = (1 + \epsilon\beta(\zeta, \eta))|\eta|^{\frac{3}{2}}$$

onde $|\beta(\zeta, \eta)| < 1$ e por consequência $\zeta > 0$. Além disso, as equações do movimento associadas ao Hamiltoniano K são dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}(t) &= \frac{\partial K}{\partial \eta}(\zeta, \eta) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta^4 + \zeta^2\eta^3 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{15}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}) \\
&= 3\zeta^2\eta^2 + 4k_{24}\zeta^2\eta^3 + 4k_{15}\zeta\eta^3 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}(t) &= -\frac{\partial K}{\partial \zeta}(\zeta, \eta) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \zeta}(\zeta^4 + \zeta^2\eta^3 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{15}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}) \\
&= -4\zeta^3 - 2\zeta\eta^3 - 2k_{24}\zeta\eta^4 - k_{15}\eta^5 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = 3\zeta^2\eta^2 + 5k_{15}\zeta\eta^4 + 4k_{24}\zeta^2\eta^3 + \tilde{\Gamma}. \\ \dot{\eta}(t) = -4\zeta^3 - 2\zeta\eta^3 - k_{15}\eta^5 - 2k_{24}\zeta\eta^4 + \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

Mais uma vez, se $\phi(t, (\zeta, \eta)) = (\zeta(t), \eta(t))$ é o fluxo do novo Hamiltoniano, devemos ter para $(\zeta, \eta) \in D$ que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta, \eta) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} V(\phi(t, (\zeta, \eta))) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} V(\zeta(t), \eta(t)) \\ &= \left[\frac{dV}{d\zeta}(\zeta(t), \eta(t)) \cdot \dot{\zeta}(t) + \frac{dV}{d\eta}(\zeta(t), \eta(t)) \cdot \dot{\eta}(t) \right]_{|t=0} \\ &= 6\epsilon|\eta|^{\frac{13}{2}} (\epsilon[1 + 3\beta^2 + \epsilon\beta(5 + 5\beta^2 + 6\epsilon\beta - 2\epsilon\beta^3 + 2\epsilon^2\beta^2)] + O|\eta|^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Outra vez, fixando $0 < \epsilon \ll 1$ pequeno e $|\eta|$ suficientemente pequeno temos que

$$\dot{V}(\zeta, \eta) > 0$$

em D . Desse modo, segue pelo teorema de Chetaev que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável no sentido de Lyapunov.

iv) Caso $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = 0$ e $\gamma_{06} < 0$

Lembrando que o Hamiltoniano é da forma

$$\begin{aligned} \Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

como $\gamma_{06} < 0$; $|\gamma_{06}| = -\gamma_{06}$, então $\gamma_{06} = -|\gamma_{06}|$, obtendo assim

$$\Gamma(Q, P) = Q^4 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 - |\gamma_{06}|P^6 + \tilde{\Gamma}$$

Com essas condições apliquemos a transformação simplética

$$(Q, P) \mapsto (|\gamma_{06}|^{\frac{1}{14}}Q, |\gamma_{06}|^{\frac{3}{14}}P) := (\zeta, \eta)$$

que satisfaz a relação

$$Q = |\gamma_{06}|^{-\frac{1}{14}}\zeta \quad \text{e} \quad P = |\gamma_{06}|^{-\frac{3}{14}}\eta$$

Uma vez mais, se $K = K(\zeta, \eta)$ é o Hamiltoniano com coordenadas (ζ, η) , temos a relação

$$K(\zeta, \eta) = C\Gamma(\zeta, \eta); \quad C = |\gamma_{06}|^{\frac{4}{14}} = |\gamma_{06}|^{\frac{2}{7}}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
K(\zeta, \eta) &= C\Gamma(Q, P) \\
&= C(Q^4 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 - |\gamma_{06}|P^6 + \tilde{\Gamma}) \\
&= C[(|\gamma_{06}|^{-\frac{1}{4}}\zeta)^4 + \gamma_{24}(|\gamma_{06}|^{-\frac{1}{14}}\zeta)^2(|\gamma_{06}|^{-\frac{3}{14}}\eta)^4 \\
&\quad + \gamma_{15}(|\gamma_{06}|^{-\frac{1}{14}}\zeta)(|\gamma_{06}|^{-\frac{3}{14}}\eta)^5 - |\gamma_{06}|(|\gamma_{06}|^{-\frac{3}{14}}\eta)^6 + \tilde{\Gamma}] \\
&= C[|\gamma_{06}|^{-\frac{4}{14}}\zeta^4 + \gamma_{24}|\gamma_{06}|^{-\frac{14}{14}}\zeta^2\eta^4 + \gamma_{15}|\gamma_{06}|^{-\frac{16}{14}}\zeta\eta^5 - |\gamma_{06}|^{-\frac{4}{14}}\eta^6 + \tilde{\Gamma}] \\
&= C|\gamma_{06}|^{-\frac{4}{14}}(\zeta^4 + \gamma_{24}|\gamma_{06}|^{-\frac{10}{14}}\zeta^2\eta^4 + \gamma_{15}|\gamma_{06}|^{-\frac{12}{14}}\zeta\eta^5 - \eta^6 + \tilde{\Gamma}) \\
&= \zeta^4 - \eta^6 + (\gamma_{24}|\gamma_{06}|^{-\frac{10}{14}})\zeta^2\eta^4 + (\gamma_{15}|\gamma_{06}|^{-\frac{12}{14}})\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

denotando por

$$k_{24} = \gamma_{24}|\gamma_{06}|^{-\frac{10}{14}} = \gamma_{24}|\gamma_{06}|^{-\frac{5}{7}} \quad \text{e} \quad k_{15} = \gamma_{15}|\gamma_{06}|^{-\frac{6}{7}}$$

resultando em

$$k(\zeta, \eta) = \zeta^4 - \eta^6 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{15}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}$$

Agora, consideremos a região

$$D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : V(\zeta, \eta) > 0 \quad \text{e} \quad \eta > 0\}$$

onde

$$V(\zeta, \eta) = \epsilon^2\eta^3 - (\zeta + \eta^{\frac{3}{2}})^2$$

Assim como anteriormente, nessa situação devemos ter que $\zeta = (-1 + \epsilon\beta(\zeta, \eta))\eta^{\frac{3}{2}}$ onde $|\beta(\zeta, \eta)| < 1$ e conseqüentemente $\zeta < 0$. Nesse caso, as equações do movimento são dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}(t) &= \frac{\partial K}{\partial \eta}(\zeta, \eta) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta}[\zeta^4 - \eta^6 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{15}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}] \\
&= -6\eta^5 + 4k_{24}\zeta^2\eta^3 + 5k_{15}\zeta\eta^4 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

e de maneira similar

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}(t) &= -\frac{\partial K}{\partial \zeta}(\zeta, \eta) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \zeta}[\zeta^4 - \eta^6 + k_{24}\zeta^2\eta^4 + k_{15}\zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}] \\
&= -4\zeta^3 - 2k_{24}\zeta\eta^4 - k_{15}\eta^5 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

Desse modo

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = -6\eta^5 + k_{24}\zeta^2\eta^3 + 5k_{15}\zeta\eta^4 + \tilde{\Gamma} \\ \dot{\eta}(t) = -4\zeta^3 - 2k_{24}\zeta\eta^4 - k_{15}\eta^5 + \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

Assim se $\phi(t, (\zeta, \eta)) := (\zeta(t), \eta(t))$ é o fluxo do novo hamiltoniano, temos que para $(\zeta, \eta) \in D$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta, \eta) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} V(\phi(t, (\zeta, \eta))) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} V(\zeta(t), \eta(t)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial \zeta} \cdot \dot{\zeta} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \dot{\eta} \\ &= 12\epsilon\eta^{\frac{13}{2}} (\epsilon[1 + 3\beta^2 - 3\beta\epsilon - 3\beta^2\epsilon^2 + \beta^4\epsilon^2 - \beta^3\epsilon^2] + O(\eta^{\frac{1}{2}})) \end{aligned}$$

Assim como argumentado anteriormente, fixando $\epsilon > 0$ pequeno e $|\eta|$ suficientemente pequeno, obtemos que

$$\dot{V}(\zeta, \eta) > 0$$

para $(\zeta, \eta) \in D$. Portanto, pelo teorema de Chetaev, $(0, 0)$ é um equilíbrio instável no sentido de Lyapunov.

v) caso $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{15} = 0$ e $\gamma_{06} > 0$ Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 \\ &\quad + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\Gamma(Q, P) = Q^4 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}$$

é uma função positiva em uma vizinhança da origem, isto é,

$$\Gamma(Q, P) \geq 0$$

Agora seja $\varphi(t, (Q, P)) := (Q(t), P(t))$ o fluxo do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial P}(Q, P) \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q}(Q, P) \end{cases}$$

observemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}(Q, P) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Gamma(\varphi(t, (Q, P))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Gamma(Q(t), P(t)) \\
&= \frac{\partial \Gamma}{\partial Q} \dot{Q}(t) + \frac{\partial \Gamma}{\partial P} \dot{P}(t) \\
&= \frac{\partial \Gamma}{\partial Q} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial P} \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial P} \left(-\frac{\partial \Gamma}{\partial Q} \right) \\
&= \frac{\partial \Gamma}{\partial Q} \frac{\partial \Gamma}{\partial P} - \frac{\partial \Gamma}{\partial P} \frac{\partial \Gamma}{\partial Q} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim

$$\dot{\Gamma}(Q, P) = 0$$

Contudo, Γ é uma função de Lyapunov para o equilíbrio $(0, 0)$ e pelo o teorema de Lyapunov $(0, 0)$ é um equilíbrio estável.

vi) Caso $\gamma_{23} \neq 0$, $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{15} = 0$ e $-96\gamma_{06} > \gamma_{23}^2$ Nessa condição

$$\begin{aligned}
\Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\
&= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

A partir daí, as equações são dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(t) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial P}(Q, P) \\
&= \frac{\partial}{\partial P}[Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}] \\
&= 3\gamma_{23}Q^2P^2 + 6\gamma_{06}P^5 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q}(Q, P) \\
&= -\frac{\partial}{\partial Q}[Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}] \\
&= -4Q^3 - 2\gamma_{23}QP^3 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = 3\gamma_{23}Q^2P^2 + 6\gamma_{06}P^5 + \tilde{\Gamma} \\ \dot{P}(t) = -4Q^3 - 2\gamma_{23}QP^3 + \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

Com isso, consideramos a função

$$V(Q, P) = QP$$

nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}\dot{V}(Q, P) &= \frac{\partial V}{\partial Q} \dot{Q}(t) + \frac{\partial V}{\partial P} \dot{P}(t) \\ &= P \dot{Q}(t) + Q \dot{P}(t) \\ &= P[3\gamma_{23}Q^2P^2 + 6\gamma_{06}P^5 + \tilde{\Gamma}] + [-4Q^3 - 2\gamma_{23}QP^3 + \tilde{\Gamma}] \\ &= 3\gamma_{23}Q^2P^3 + 6\gamma_{06}P^6 - 4Q^4 - 2\gamma_{23}Q^2P^3 + \tilde{\Gamma} \\ &= -4Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + 6\gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= -[4Q^4 - \gamma_{23}Q^2P^3 - 6\gamma_{06}P^6] + \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}0 \leq \left(2Q^2 - \frac{\gamma_{23}}{4}P^3\right)^2 &= 4Q^4 - 2(2Q^2) \left(\frac{\gamma_{23}}{4}\right) P^3 + \frac{\gamma_{23}^2}{16}P^6 \\ &= 4Q^4 - \gamma_{23}Q^2P^3 + \frac{\gamma_{23}^2}{16}P^6\end{aligned}$$

Notemos que $-96\gamma_{06} > \gamma_{23}^2$ se, e somente se, $6\gamma_{06} < -\frac{\gamma_{23}^2}{16}$ temos que

$$\begin{aligned}\dot{V}(Q, P) &= -4Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + (6\gamma_{06})P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &\leq -4Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 - \frac{\gamma_{23}^2}{16}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= -\left(4Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \frac{\gamma_{23}^2}{16}P^6\right) + \tilde{\Gamma} \\ &= -\left(2Q^2 + \frac{\gamma_{23}}{4}P^3\right)^2 + \tilde{\Gamma} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

logo,

$$\dot{V}(Q, P) \leq 0$$

Portanto, temos que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável no sentido de Lyapunov.

vii) Caso $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{15} = 0$ e $4\gamma_{06} > \gamma_{23}^2$

Observemos que como $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{15} = 0$ o Hamiltoniano Γ tem a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

Observe agora que as expressões

$$\tilde{Q} = Q^2 \quad e \quad \tilde{P} = P^3$$

temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= (Q^2)^2 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{06}(P^3)^2 + \tilde{\Gamma} \\ &= \tilde{Q}^2 + \gamma_{23}\tilde{Q}\tilde{P} + \gamma_{06}\tilde{P}^2 + \tilde{\Gamma} \\ &= (\tilde{Q}, \tilde{P}) \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{23}}{2} & \gamma_{06} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{P} \end{bmatrix} + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

logo,

$$\Gamma(\tilde{Q}, \tilde{P}) = (\tilde{Q}, \tilde{P}) \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{23}}{2} & \gamma_{06} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{P} \end{bmatrix} + \tilde{\Gamma}$$

Notemos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{23}}{2} & \gamma_{06} \end{bmatrix} = \gamma_{06} - \frac{\gamma_{23}^2}{4}$$

como, por hipótese $4\gamma_{06} > \gamma_{23}^2$ se, e somente se $\gamma_{06} - \frac{\gamma_{23}^2}{4} > 0$ segue que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{23}}{2} & \gamma_{06} \end{bmatrix} > 0.$$

Desse modo, Γ é uma função positiva definida em uma vizinhança de $(0, 0)$.

Assim pelo teorema de Dirichlet, $(0, 0)$ é um equilíbrio estável.

viii) Caso $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = 0$, $\gamma_{24} > 0$ e $\gamma_{15}^2 < 4\gamma_{24}\gamma_{06}$

Como $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = 0$, temos que o Hamiltoniano Γ toma a forma

$$\begin{aligned} \Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 \\ &\quad + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + P^4(\gamma_{24}Q^2 + \gamma_{15}QP + \gamma_{06}P^2) + \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

como $\gamma_{24} > 0$ e $\gamma_{15}^2 < 4\gamma_{24}\gamma_{06}$ temos que

$$\gamma_{06} > \frac{\gamma_{15}^2}{4\gamma_{24}} = \left(\frac{\gamma_{15}}{2\sqrt{\gamma_{24}}} \right)^2$$

com isso

$$\Gamma(Q, P) = Q^4 + P^4(\gamma_{24}Q^2 + \gamma_{15}QP + \gamma_{06}P^2) + \tilde{\Gamma}$$

Fazendo a transformação simplética de ação-ângulo

$$Q = \sqrt{2r}\cos\varphi \quad \text{e} \quad P = \sqrt{2r}\sin\varphi$$

Se $H = H(r, \varphi)$ é o Hamiltoniano nas novas coordenadas, temos

$$\begin{aligned} H &= H(r, \varphi) = \Gamma(Q, P) \\ &= \Gamma(Q(r, \varphi), P(r, \varphi)) \\ &= \Gamma(\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\ &= (\sqrt{2r}\cos\varphi)^4 + (\sqrt{2r}\sin\varphi)^4 (\gamma_{24}(\sqrt{2r}\cos\varphi)^2 \\ &\quad + \gamma_{15}(\sqrt{2r}\cos\varphi)(\sqrt{2r}\sin\varphi) + \gamma_{06}(\sqrt{2r}\sin\varphi)^2) + O(r) \\ &= 4r^2\cos^4\varphi + 4r^2\sin^4\varphi(\gamma_{24}2r\cos^2\varphi + \gamma_{15}2r\cos\varphi\sin\varphi \\ &\quad + \gamma_{06}2r\sin^2\varphi) + O(r) \\ &= 4r^2\cos^4\varphi + 8r^3\sin^4\varphi(\gamma_{24}\cos^2\varphi + \gamma_{15}\cos\varphi\sin\varphi \\ &\quad + \gamma_{06}\sin^2\varphi) + O(r) \\ &= r^2\psi_0(\varphi) + r^3\psi_p(\varphi) + O(r) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_0(\varphi) &= 4\cos^4\varphi \\ \psi_p(\varphi) &= 8\sin^4\varphi(\gamma_{24}\cos^2\varphi + \gamma_{15}\cos\varphi\sin\varphi + \gamma_{06}\sin^2\varphi) \end{aligned}$$

Primeiramente, note que

$$\psi_0(\varphi) = 4\cos^4(\varphi) = 0$$

se, e somente se $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Logo, toda raiz é múltipla de π .

Observe que

$$H_0(r, \varphi) = r^2\psi_0(\varphi) + r^3\psi_p(\varphi).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \psi_p(\varphi) &= 8\sin^4\varphi(\gamma_{24}\cos^2\varphi + \gamma_{15}\cos\varphi\sin\varphi + \gamma_{06}\sin^2\varphi) \\ &= 8\sin^4\varphi(\gamma_{24}\cos^2\varphi + 2\sqrt{\gamma_{24}}\sqrt{\gamma_{06}}\cos\varphi\sin\varphi \\ &\quad + \gamma_{06}\sin^2\varphi + \gamma_{15}\cos\varphi\sin\varphi \\ &\quad - 2\sqrt{\gamma_{24}}\sqrt{\gamma_{06}}\cos\varphi\sin\varphi) \\ &= 8\sin^4\varphi[(\sqrt{\gamma_{24}}\cos\varphi + \sqrt{\gamma_{06}}\sin\varphi)^2 + (\gamma_{15} - 2\sqrt{\gamma_{24}\gamma_{06}})\cos\varphi\sin\varphi] \\ &= 8\sin^4\varphi\left[(\sqrt{\gamma_{24}}\cos\varphi + \sqrt{\gamma_{06}}\sin\varphi)^2 + \left[\frac{\gamma_{15}-2\sqrt{\gamma_{24}\gamma_{06}}}{2}\right]\sin(2\varphi)\right], \end{aligned}$$

como por hipótese

$$\gamma_{15}^2 < 4\gamma_{24}\gamma_{06}$$

se, e somente se $\gamma_{15} < 2\sqrt{\gamma_{24}\gamma_{06}}$, se, e só se $\gamma_{15} - 2\sqrt{\gamma_{24}\gamma_{06}} < 0$.

Então em uma vizinhança da origem temos que

$$\psi_p(\varphi) > 0,$$

como

$$H_0(r, \varphi) = r^2\psi_0(\varphi) + r^3\psi_p(\varphi) > 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Bardin-Lanchares's, a origem é estável.

ix) Caso $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{15} = 0$, $\gamma_{24} > 0$ e $4\gamma_{06} \geq \gamma_{23}^2$

Como $\gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{15} = 0$, o Hamiltoniano Γ tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 \\ &\quad + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

Denotando $\tilde{Q} = Q^2$ e $\tilde{P} = P^3$, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma(\tilde{Q}, \tilde{P}) = (\tilde{Q}^2 + \gamma_{23}\tilde{Q}\tilde{P} + \gamma_{06}\tilde{P}^2) + \gamma_{24}\tilde{Q}\tilde{P}P + \tilde{\Gamma} \\ &= (\tilde{Q}, \tilde{P}) \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{23}}{2} & \gamma_{06} \end{bmatrix} (\tilde{Q}, \tilde{P}) + \gamma_{24}\tilde{Q}\tilde{P}P + \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

vimos anteriormente que se $4\gamma_{06} > \gamma_{23}^2$ então

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{23}}{2} & \gamma_{06} \end{bmatrix} = \gamma_{06} - \frac{\gamma_{23}^2}{4} > 0$$

Logo teríamos que $\Gamma(\tilde{Q}, \tilde{P}) > 0$ em uma vizinhança de zero. Agora caso $4\gamma_{06} = \gamma_{23}^2$, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{Q}, \tilde{P}) &= (\tilde{Q}^2 + \gamma_{23}\tilde{Q}\tilde{P} + \gamma_{06}\tilde{P}^2) + \gamma_{24}\tilde{Q}\tilde{P}P + \tilde{\Gamma} \\ &= \left(\tilde{Q}^2 + \gamma_{23}\tilde{Q}\tilde{P} + \left(\frac{\gamma_{23}\tilde{P}}{2} \right)^2 \right) + \gamma_{24}\tilde{Q}\tilde{P}P + \tilde{\Gamma} \\ &= \left(\tilde{Q}^2 + \frac{\gamma_{23}}{2}\tilde{P} \right)^2 + \gamma_{24}\tilde{Q}\tilde{P}P + \tilde{\Gamma} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Contudo, em ambos os casos Γ é uma função positiva definida em uma vizinhança da origem. Logo, pelo teorema de Dirichlet, $(0, 0)$ é um equilíbrio estável.

x) Caso $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{15} = \gamma_{06} = 0$ e $\gamma_{24} < 0$.

Como temos que $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{15} = \gamma_{06} = 0$, então

$$\begin{aligned}\Gamma(Q, P) &= Q^4 + \gamma_{23}Q^2P^3 + \gamma_{14}QP^4 + \gamma_{05}P^5 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \gamma_{15}QP^5 + \gamma_{06}P^6 + \tilde{\Gamma} \\ &= Q^4 + \gamma_{24}Q^2P^4 + \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

como $\gamma_{24} < 0$, temos que $|\gamma_{24}| = -\gamma_{24}$ então

$$\Gamma(Q, P) = Q^4 - |\gamma_{24}|Q^2P^4 + \tilde{\Gamma}$$

Com isso, definamos a transformação simplética

$$(Q, P) \mapsto (|\gamma_{24}|^{\frac{1}{10}}Q, |\gamma_{24}|^{\frac{3}{10}}P) := (\zeta, \eta)$$

obtendo-se que

$$Q = |\gamma_{24}|^{-\frac{1}{10}}\zeta \quad \text{e} \quad P = |\gamma_{24}|^{-\frac{3}{10}}\eta$$

e ainda, se $K = K(\zeta, \eta)$ é o novo Hamiltoniano em coordenadas (ζ, η) , sabemos que

$$K(\zeta, \eta) = C\Gamma(Q, P)$$

onde $C = |\gamma_{24}|^{\frac{4}{10}}$. Desse modo,

$$\begin{aligned}K(\zeta, \eta) &= C\Gamma(Q, P) \\ &= C(Q^4 - |\gamma_{24}|Q^2P^4 + \tilde{\Gamma}) \\ &= C((|\gamma_{24}|^{-\frac{1}{10}}\zeta)^4 - |\gamma_{24}|(|\gamma_{24}|^{-\frac{1}{10}}\zeta)^2(|\gamma_{24}|^{-\frac{3}{10}}\eta)^4 + \tilde{\Gamma}) \\ &= C(|\gamma_{24}|^{-\frac{4}{10}}\zeta^4 - |\gamma_{24}|^{-\frac{4}{10}}\zeta^2\eta^4 + \tilde{\Gamma}) \\ &= C|\gamma_{24}|^{-\frac{4}{10}}(\zeta^4 - \zeta^2\eta^4 + \tilde{\Gamma}).\end{aligned}$$

Logo

$$K(\zeta, \eta) = \zeta^4 - \zeta^2\eta^4 + \tilde{\Gamma}$$

Com isso, para $\epsilon > 0$ definimos

$$V(\zeta, \eta) = \epsilon^2|\eta|^4 - (\zeta - |\eta|^2)^2$$

e $D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : V(\zeta, \eta) > 0 \text{ e } \eta < 0\}$. Assim como feito anteriormente, temos que $\zeta = (1 + \epsilon\beta)|\eta|^2$ com $|\beta| < 1$ e $\zeta > 0$. Além disso, as equações do movimento associados ao novo sistema são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \frac{\partial K}{\partial \eta}(\zeta, \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta^4 - \zeta^2\eta^4 + \tilde{\Gamma}) \\ &= -4\zeta^2\eta^4 + \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}(t) &= -\frac{\partial K}{\partial \zeta}(\zeta, \eta) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \zeta}(\zeta^4 - \zeta^2 \eta^4 + \tilde{\Gamma}) \\
&= -4\zeta^3 + 2\zeta \eta^4 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = -4\zeta^2 \eta^3 + \tilde{\Gamma} \\ \dot{\eta}(t) = 2\zeta \eta^4 - 4\zeta^3 + \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

Desse modo, assim como feito em casos anteriores, obtemos que para $(\zeta, \eta) \in D$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\zeta, \eta) &= \frac{\partial V}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta}(t) \\
&= 8|\eta|^9 \epsilon^2 (1 + \beta \epsilon) (1 + 3\beta^2 + 4\beta \epsilon + 2\beta^3 \epsilon + 2\beta^2 \epsilon^2) + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

Novamente, tomando $\epsilon > 0$ e $|\eta|$ suficientemente pequenos temos que

$$\dot{V}(\zeta, \eta) > 0 \quad \text{em } D$$

Logo, pelo teorema de Chetaev, $(0, 0)$ é um equilíbrio instável.

xi) Caso $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{06} = 0$ e $\gamma_{15} \neq 0$

Como nessa situação temos $\gamma_{23} = \gamma_{14} = \gamma_{05} = \gamma_{24} = \gamma_{06} = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(Q, P) &= Q^2 + \gamma_{23} Q^2 P^3 + \gamma_{14} Q P^4 + \gamma_{05} P^5 \\
&\quad + \gamma_{24} Q^2 P^4 + \gamma_{15} Q P^5 + \gamma_{06} P^6 + \tilde{\Gamma} \\
&= Q^4 + \gamma_{15} Q P^5 + \tilde{\Gamma}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma(Q, P) = Q^4 + \gamma_{15} Q P^5 + \tilde{\Gamma}.$$

Com isso, precisamos dividir a análise em duas situações

1. $\gamma_{15} > 0$. Nessa situação, vamos considerar a mudança simplética

$$(Q, P) \mapsto (\gamma_{15}^{\frac{1}{12}} Q, \gamma_{15}^{\frac{3}{12}} P) := (\zeta, \eta).$$

Considerando $K(\zeta, \eta)$ o Hamiltoniano em coordenadas (ζ, η) , vale

$$K(\zeta, \eta) = C\Gamma(Q, P) \tag{4.10}$$

tal que $C = \gamma_{15}^{\frac{1}{3}}$ e como $\zeta = \gamma_{15}^{-\frac{1}{12}}Q$ e $\eta = \gamma_{15}^{-\frac{3}{12}}P$ segue por (4.10) que

$$K(\zeta, \eta) = \zeta^4 + \zeta\eta^5 + \tilde{\Gamma}. \quad (4.11)$$

Nesse caso, a função de Chetaev é dada por

$$V(\zeta, \eta) = \epsilon^2 \eta^{\frac{10}{3}} - (\zeta + \eta^{\frac{5}{3}})^2$$

com $\epsilon > 0$ e definimos a região $D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : V(\zeta, \eta) > 0 \text{ e } \eta > 0\}$

Seguindo de maneira análoga aos casos anteriores obtemos, pelo teorema de Chetaev que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável.

2. $\gamma_{15} < 0$

Como $\gamma_{15} < 0$, temos $|\gamma_{15}| = -\gamma_{15}$. Nesse caso fazemos a mudança de coordenadas simpléticas

$$(Q, P) \mapsto (|\gamma_{15}|^{\frac{1}{12}}Q, |\gamma_{15}|^{\frac{3}{12}}P).$$

Nessa situação (4.11) temos a seguinte expressão

$$K(\zeta, \eta) = \zeta^4 - \zeta\eta^5.$$

Assim, consideremos a função de Chetaev

$$V(\zeta, \eta) = \epsilon^2 \eta^5 - \zeta^2$$

sendo $\epsilon > 0$ com a região $D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : V(\zeta, \eta) > 0 \text{ e } \eta > 0\}$.

Novamente, reproduzindo cálculos anteriores podemos concluir que $(0, 0)$ é um equilíbrio instável no sentido de Lyapunov. ■

Observação 4.2.2. *Os casos abordados no Teorema 4.2.1, demonstrado anteriormente não estão completos. Por exemplo o caso (viii) com $\gamma_{15}^2 \geq 4\gamma_{24}\gamma_{06}$ no lugar de $\gamma_{15}^2 < 4\gamma_{24}\gamma_{06}$ ainda é um problema em aberto.*

4.2.4 Comentário sobre a Estabilidade nos casos em que

$$H_4 = q^2(q^2 + p^2) \text{ ou } q^2p^2$$

Vamos inicialmente considerar o caso

$$H_4 = (q, p) = q^2(q^2 + p^2)$$

sendo $K = K(r, \varphi)$ o Hamiltoniano obtido nas coordenadas ação-ângulo, vemos que

$$\begin{aligned}
K_4 &= K_4(r, \varphi) \\
&= H_4(q, p) \\
&= H_4(q(r, \varphi), p(r, \varphi)) \\
&= H_4(\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\
&= (\sqrt{2r}\cos\varphi)^2((\sqrt{2r}\cos\varphi)^2 + (\sqrt{2r}\sin\varphi)^2) \\
&= 2r\cos^2\varphi r^2 = \psi(\varphi)r^n,
\end{aligned}$$

onde $n = \frac{4}{2}$ e $\psi(\varphi) = 4\cos^2\varphi$.

Novamente, note que $\psi(\varphi) = 0$ se, e somente se, $\cos\varphi = 0$, ou seja, $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Porém, como $\psi'(\varphi) = -8\cos\varphi\sin\varphi$, se $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ temos que

$$\psi(\varphi) = \psi'(\varphi) = 0.$$

Logo, todos os zeros de ψ são não simples. Portanto, o Teorema [1.5.6](#) não se aplica. Para mais detalhes acerca da estabilidade neste caso veja Markeev [\[20\]](#).

Agora, vamos considerar o caso

$$H_4(q, p) = q^2p^2.$$

Novamente, se $K = K(r, \varphi)$ é o novo Hamiltoniano sobre a aplicação ação-ângulo, temos que

$$\begin{aligned}
K_4 &= K_4(r, \varphi) \\
&= H_4(q, p) \\
&= H_4(q(r, \varphi), p(r, \varphi)) \\
&= H_4(\sqrt{2r}\cos\varphi, \sqrt{2r}\sin\varphi) \\
&= (\sqrt{2r}\cos\varphi)^2(\sqrt{2r}\sin\varphi)^2 \\
&= 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi r^2 \\
&= \sin^2(2\varphi)r^2 = \psi(\varphi)r^n,
\end{aligned}$$

com $n = \frac{4}{2}$ e $\psi(\varphi) = \sin^2(2\varphi)$. Novamente, $\psi(\varphi) = 0$ se, e somente se, $\sin(2\varphi) = 0$, ou seja, $\varphi = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. No entanto, como $\psi'(\varphi) = 4\sin(2\varphi)\cos(2\varphi)$, se $\varphi = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ obtemos que

$$\psi(\varphi) = \psi'(\varphi) = 0.$$

Portanto, todos os zeros de ψ não são simples. Logo, o Teorema 1.5.6 não é concluído nada acerca da natureza da estabilidade da solução de equilíbrio.

Para mais detalhes sobre a estabilidade nesse caso veja Markeev [21].

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] BARDIN, B., LANCHARES, V. *On the Stability of Periodic Hamiltonian Systems with One Degree of Freedom in the Case of Degeneracy* Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol.20, no. 6, pp. 627-648.
- [3] BIRKHOFF, G. D. *Dynamical systems*. Providence, 1927. (Amer. Math. Soc. Colloq.; 9).
- [4] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle - Theorie et Applications*, Paris, 1987.
- [5] CABRAL, H. E., MEYER, K. R. *Stability of Equilibria and Fixed Points of Conservative Systems*, p. 1351 - 1362, 1999.
- [6] CHETAEV, N.G. *Stability of motion*. English translation. Pergamon Press, Book No. 090505.1961.
- [7] DEPRIT, A. *Canonical Transformations Depending on a Small Parameter*. Celestial Mechanics, [Netherlands], v. 72, p. 173-179, 1969.
- [8] DOS SANTOS, F. *Formas Normais e Estabilidade de Equilíbrios para Sistemas Hamiltonianos*. 211f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2004.
- [9] GARCIA, M.V.P., BARROS, I.Q. *Mecânica Analítica Clássica*. Edgard Blucher. São Paulo, 1995.
- [10] VIDAL, C., GUTIERREZ, R. *Stability of Equilibrium Points for a Hamiltonian Systems with One Degree of Freedom in One Degenerate Case*. Regular and Chaotic Dynamics., vol.22, no.7, 2017.
- [11] HALE, J.K., *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Wiley - interscience, 1969.

- [12] HENRARD, J. *Concerning The Genealogy Of Long Period Families At L_4* . Astronom. Astrophys., [S.1.], v.5, p. 45-52, 1970.
- [13] HENRARD, J. *On Perturbation Theory Using Lie Transforms*. Celestial Mechanics., [S.1.], v. 3, p. 107-120, 1970.
- [14] HENRARD, J. *Periodic Orbits Emanating From a Resonant Equilibrium*. Celestial Mechanics., [S.1.], v. 1, p. 437-466, 1970.
- [15] KAMEL, A. *Perturbation Method in the Theory or Nonlinear Oscillations*. Celestial Mechanics, [S.1.], v. 3, p. 90-99, 1970.
- [16] LYAPUNOV. A. M. *General Problem of Stability of Motion*. Gostekhizdat: Obshchaya Zadacha ob Ustoichivosti Dvizheniya. 1950.
- [17] MARKEEV, A. P. *Linear Hamiltonian Systems and some applications to the problem of stability of motion of satellites relative to the center of mass*. Moscow-Izhe, 2009.
- [18] MARKEEV, Anatoly P. *On the Birkhoff transformation in the case of complete degeneracy of the quadratic part of the Hamiltonian*. Regul. Chaotic Dyn. 20 (2015), no. 3, 309-316.
- [19] MARKEEV, Anatoly P. *Simplifyng the structure of the third and fourth degree forms in the expansion of the Hamiltonian with a linear transformation*. Nelin. Dinam., 10 (2014), no. 4, 447-464.
- [20] MARKEEV, A. P. *On the Problem of the Stability of a Hamiltonian System with One Degree of Freedom on the Boundaries of Regions of Parametric Resonance* J. Appl. Math. Mech., 2016, vol.80, no. 1, pp. 1-6; see also: Prikl. Mat. Mekh., 2016, vol.80, no. 1, pp. 3-10.
- [21] MARKEEV, A. P. *On the Fixed Points Stability for the Area-Preserving Maps* Nelin. Dinam., 2015, vol.11, no. 3, pp. 503-545 (Russian).
- [22] MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Second Edition. Springer, 1999.
- [23] MEYER, Kenneth R., Glen R. Hall, Daniel Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer, 2009.
- [24] MOSER, J. K. *On invariant curves of area-preserving mappaing of an annulus*. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys., [S.1.], 1962.

- [25] SIEGEL, G.L., MOSER, J.K. *Lectures on Celestial Mechanics*. Now York: Springer-Verlog, 1971.
- [26] SOTOMAYOR, Jorge. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [27] VIDAL, C. *Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos*. Recife, 2003. (Notas de curso).
- [28] VIDAL, C.; GUTIERREZ,R. *Stability of Equilibrium Points for a Hamiltonian Systems with One Degree of Freedom in One Degenerate Case*. Regular and Chaotic Dynamics., 20 (2017), no. 7, 880-892.