



Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROMAT

**Estabilidade Normal de Sistemas Hamiltonianos
e Aplicações ao Problema Restrito
Circular dos Três Corpos**

por

Alessandro Hipólito dos Santos

Mestrado Acadêmico em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

Agosto de 2022

Alessandro Hipólito dos Santos

**Estabilidade Normal de Sistemas Hamiltonianos
e Aplicações ao Problema Restrito
Circular dos Três Corpos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Fábio dos Santos

**São Cristóvão - SE
2022**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237e Santos, Alessandro Hipólito dos
Estabilidade normal de sistemas hamiltonianos e aplicações ao problema restrito circular dos três corpos / Alessandro Hipólito dos Santos ; orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2022.
101 f.; il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2022.

1. Matemática. 2. Sistemas hamiltonianos. I. Santos, Fábio dos orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Estabilidade Normal de Sistemas Hamiltonianos e Aplicações ao Problema Restrito Circular dos Três Corpos.

por

Alessandro Hipólito dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS
Orientador

Angelo Alberti

Prof. Dr. Angelo Alberti - UFS
Primeiro Examinador

Marcelo Pedro dos Santos

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos - UFRPE
Segundo Examinador

São Cristóvão
29 de Agosto de 2022

Dedicatória

A minha mãe.

Agradecimentos

- Agradeço, primeiramente a Deus, pela sua presença constante em minha vida, por ter me dado forças para seguir em frente e por ter guiado meus passos na concretização deste objetivo.
- Ao professor Fábio dos Santos por sua orientação, dedicação e disponibilidade.
- Aos professores Ângelo Alberti e Marcelo Pedro por participarem da banca examinadora.
- Aos meus professores de graduação Davy Christian e Natanael Oliveira pelos ensinamentos, conselhos e incentivo.
- A todos os professores da PROMAT/UFS.
- Agradeço a todos que deram alguma contribuição no processo de minha formação.
- A CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Esta dissertação tem como principal objetivo fornecer condições necessárias e suficientes para estabilidade normal de um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade e aplicá-las no estudo da estabilidade dos pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito espacial circular dos três corpos. Para atingir nosso objetivo, incluímos um capítulo de preliminares, onde fornecemos a teoria básica de sistemas Hamiltonianos autônomos com n graus de liberdade, noções de transformações simpléticas, fornecendo definições e resultados relevantes, os conceitos de pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais ordinárias, apresentando a noção de estabilidade no sentido de Lyapunov, como também os sistemas lineares com coeficientes constantes, o método direto de Lyapunov para o estudo da estabilidade e a teoria da forma normal de Lie. No capítulo 2 abordamos um novo conceito de estabilidade chamado de estabilidade normal de sistemas Hamiltonianos lineares, onde provamos várias condições necessárias e suficientes, dentre elas uma nova condição sobre parte quadrática da função Hamiltoniana denominada de condição de Moser-Weinstein. Apresentamos no último capítulo o problema restrito espacial circular dos três corpos, onde estudamos a estabilidade linear dos pontos de libração L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 , e no caso de L_4 e L_5 fornecemos condições para a estabilidade normal do sistema linearizado, que implica numa estabilidade formal do sistema não linear.

Palavras Chaves: Sistemas Hamiltonianos, Condição de Moser-Weinstein, Estabilidade Normal, Pontos de Libração, Problema Restrito Espacial Circular dos Três Corpos.

Abstract

The main objective of this dissertation is to provide necessary and sufficient conditions for normal stability of a Hamiltonian system with n degrees of freedom and to apply them in the study of the stability of pound points L_4 and L_5 of the restricted circular spatial problem of the three bodies. To achieve our goal, we have included a chapter of foreplay, where we provide the basic theory of autonomous Hamiltonian systems with n degrees of freedom, understandings of simpleton transformations, providing definitions and relevant results, the concepts of equilibrium points of a system of ordinary differential equations, presenting the notion of stability in the sense of Lyapunov, as well as linear systems with constant coefficients, Lyapunov's direct method for the study of stability and Lie normal form theory. In chapter 2 we discuss a new concept of stability called normal stability of linear Hamiltonian systems, where we have proved several necessary and sufficient conditions, among them a new condition on the quadratic part of the Hamiltonian function called the Moser-Weinstein condition. We present in the last chapter the restricted spatial circular problem of the three bodies, where we studied the linear stability of the pounding points L_1, L_2, L_3, L_4 and L_5 , and in the case of L_4 and L_5 we provide conditions for the normal stability of the linearized system, which implies a formal stability of the nonlinear system.

Key words: Hamiltonian Systems, Moser-Weinstein Condition, Normal Stability, Libration Points, Restricted Spatial Circular Problem of the Three Bodies.

Introdução

O objetivo principal desta dissertação é estudar um novo conceito de estabilidade chamada da estabilidade normal e fornecer aplicações no estudo da estabilidade não linear dos pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito circular espacial dos três corpos.

O estudo de Equações Diferenciais Ordinárias é instrumento de intensa atividade de busca, pois apresenta aspectos matemáticos e muitas aplicações. A segunda lei de Newton juntamente com o fato da derivada segunda da posição ser a aceleração, dá origem ao estudo das equações diferenciais de segunda ordem em $\mathbb{R}^n$, os quais podem ser escritos como sistemas de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, onde um tipo específico desses sistemas são chamados de Sistemas Hamiltonianos.

Os sistemas Hamiltonianos variam de acordo com as transformações de coordenadas, no entanto existem transformações que preservam as características Hamiltonianas. As transformações simpléticas tem um papel importante na teoria de sistemas Hamiltonianos, pois são um tipo de mudança de coordenadas que preservam a estrutura Hamiltoniana.

Sabe-se da teoria básica de Equação Diferencial Ordinária que cada solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de uma equação $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ depende continuamente de f e de suas condições iniciais $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Em particular, pequenas mudanças ou perturbações em $\mathbf{x}_0$ produzem pequenas mudanças em $\mathbf{x}(t)$ num intervalo ao redor de t_0 . Ao tentar responder a pergunta se essas pequenas mudanças nas condições iniciais produzem pequenas mudanças nas soluções para todo o tempo, somos levados

ao desenvolvimento do conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov de uma solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, que possui diversas aplicações em várias áreas da Matemática e da Física. Na Mecânica Celeste, por exemplo, é de grande importância saber sobre a estabilidade das soluções particulares dos problemas do n -corpos.

O Método Direto de Lyapunov foi enunciada por Aleksandr Lyapunov no final do século XIX, em 1788, o qual não apresentou uma demonstração (exceto quando a função potencial é quadrática). Uma das primeiras provas conhecidas foi exibida por Dirichlet em 1848. A demonstração é via uma função auxiliar, denominada de Função de Lyapunov. Os Teoremas de Lyapunov sobre estabilidade fornecem um método muito útil para determinar a estabilidade de uma solução de equilíbrio, mas em geral é bem difícil encontrar uma função de Lyapunov. Com a introdução do conceito de estabilidade normal de sistemas lineares, uma simples condição algébrica sobre os autovalores da matriz pode determinar a estabilidade do sistema Hamiltoniano na forma normal em qualquer ordem finita. Esse conceito de estabilidade formal pode ser suficiente para a maioria das aplicações físicas.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. O primeiro contém resultados preliminares. Nesse contexto, é importante que o leitor possua conhecimentos básicos de Álgebra Linear, Análise no $\mathbb{R}^n$ e Equações Diferenciais Ordinárias. Nele, além de definições, teoremas básicos de sistemas Hamiltonianos e Transformações Simpléticas, também é enunciado a Estabilidade segundo Lyapunov, Sistemas lineares com coeficientes constantes e o Método direto de Lyapunov e o Teorema de Dirichlet-Lagrange, como também desenvolvemos a teoria na forma normal de Lie para sistemas Hamiltonianos, mostrando o processo para obtenção da transformada de Lie, a forma normal num equilíbrio no caso onde a matriz da parte linear é simples e a forma normal de Birkhoff de uma função Hamiltoniana quadrática.

No segundo capítulo, fornecemos um novo conceito de estabilidade chamada de estabilidade normal de sistemas Hamiltonianos, a qual depende da existência de uma integral formal cuja parte quadrática é positiva definida. Desse modo, vamos nos concentrar sobre sistemas formais, ou seja, sistemas onde o Hamiltoniano é uma série de potência formal. Baseado no artigo [20], mostraremos que um sistema Hamiltoniano autônomo linear $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ é normalmente estável se, e somente se, a condição de Moser-Weinstein for satisfeita. Utilizando como base o artigo [7], forneceremos outras condições necessárias e suficientes para

estabilidade normal, as quais se estendem ao caso periódico também.

Finalmente, no capítulo três, fornecemos a formulação do problema restrito dos três corpos que consiste em estudar a dinâmica de três partículas que se movem no espaço sob a ação unicamente das forças de atração mútua, no qual fazemos a suposição que a massa m_3 é infinitesimal de tal forma que ela não influência no movimento dos corpos de m_1 e m_2 , chamados de binários, no entanto sua órbita é afetada por eles de forma usual. Se o corpo de massa infinitesimal m_3 permanece para todo tempo, no plano do movimento de m_1 e m_2 , dizemos que o problema restrito correspondente é planar; se o corpo m_3 , em seu movimento, sai do plano de m_1 e m_2 falamos de problema restrito espacial. Também abordamos o problema restrito circular espacial dos três corpos, onde os corpos binários m_1 e m_2 executam órbitas circulares em torno de seu centro de massa.

Ainda no último capítulo, falamos dos pontos de libração que correspondem aqueles movimentos particulares no problema dos três corpos onde os binários e o corpo de massa infinitesimal descrevem órbitas keplerianas semelhantes, relativamente ao seu centro de massa. Além disso, abordamos a estabilidade linear dos cinco pontos de libração e o estudo da estabilidade normal dos pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito circular espacial dos três corpos.

Sumário

Dedicatória	3
Agradecimentos	4
Resumo	5
Abstract	6
Introdução	7
1 Preliminares	12
1.1 Sistemas Hamiltonianos	12
1.1.1 Sistema Hamiltoniano Linear	16
1.2 Transformações Simpléticas	20
1.3 Estabilidade no Sentido de Lyapunov	29
1.3.1 Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes	31
1.3.2 O Método Direto de Lyapunov	34
1.4 A Forma Normal de Lie	41
1.4.1 O Processo de Obtenção da Transformada de Lie	41
1.4.2 Forma Normal num Equilíbrio no Caso Onde a Matriz da Parte Linear é Simples	46
1.5 A Forma Normal da Parte Quadrática	47

<i>INTRODUÇÃO</i>	11
2 Estabilidade Normal	49
2.1 A Definição da Estabilidade Normal no Caso Autônomo	49
2.2 A Condição de Moser-Weinstein	50
2.3 Condições Necessárias e Suficientes para Estabilidade Normal . .	52
2.4 Relação Entre a Estabilidade Normal e a Estabilidade de Lie . . .	60
2.5 Estabilidade Normal no Caso Periódico	62
3 Estabilidade Normal dos Pontos de Libração L_4 e L_5 do Problema Restrito Circular dos Três Corpos	67
3.1 O Problema dos Três Corpos	67
3.2 O Problema Restrito dos Três Corpos	69
3.3 O Problema Restrito Circular dos Três Corpos	79
3.4 Os Pontos de Libração	82
3.5 Estabilidade Linear dos Pontos de Libração	90
3.5.1 O Caso Planar Circular	90
3.5.2 O Caso Espacial Circular	95
3.6 Estabilidade Normal de L_4 e L_5	96
Bibliografia	102

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, fornecemos os principais resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Abordamos a teoria básica dos sistemas Hamiltonianos, transformações simpléticas, estabilidade no sentido de Liapounov, e algumas noções envolvendo a Forma Normal de Lie.

1.1 Sistemas Hamiltonianos

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias é objeto de intensa atividade de pesquisa, pois, apresenta aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações. Após a segunda lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ e das equações de Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$, onde se inicia o estudo das n equações diferenciais de segunda ordem em $\mathbb{R}^n$, desperta-se um particular interesse pelos sistemas de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem em $\mathbb{R}^{2n}$, em particular os chamados Sistemas Hamiltonianos.

Um **Sistema Hamiltoniano** em $\mathbb{R}^{2n}$ é um sistema com $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, chamada de função Hamiltoniana. É uma função diferenciável definida num aberto $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, as variáveis $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ são chamadas de coordenadas generalizadas conjugadas (posição) e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$

momentos generalizados conjugados e t , geralmente, o tempo. O inteiro positivo n é chamado **grau de liberdade** (coordenadas livres) do sistema. Quando H não depende explicitamente de t dizemos que o sistema é autônomo, e em caso contrário, não autônomo.

O espaço de n dimensões onde as coordenadas generalizadas estão definidas é chamado de espaço de configuração e o espaço $2n$ dimensões onde as posições e momentos generalizados estão inseridos é chamado de espaço de fase. Se

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla_{\mathbf{z}} H = \nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade $n \times n$ e 0 a matriz nula $n \times n$, o sistema (1.1) torna-se

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{z}, t) \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \right)^T. \quad (1.2)$$

Temos que $\mathbf{J}$ é anti-simétrica $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ e ortogonal $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T$. Além disso, $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$ e $\det \mathbf{J} = 1$.

Pelo Teorema de existência e unicidade, um dos resultados básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias, para cada $(t_0, \mathbf{z}_0)$ em Ω , existe uma única solução $\mathbf{z} = \varphi(t, t_0, \mathbf{z}_0)$ de (1.2) definida em t numa vizinhança de t_0 que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0, t_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$.

No caso autônomo, ou seja, quando a função Hamiltoniana H não depende de t , temos que a função Hamiltoniana H é constante ao longo das soluções. Neste caso o Sistema Hamiltoniano (1.2) é dito conservativo. Daí, a equação (1.2) satisfaz

$$\varphi(t - t_0, 0, \mathbf{z}_0) = \varphi(t, t_0, \mathbf{z}_0).$$

Podemos, portanto, pensar nas soluções independentes do t_0 , e escrevê-lo simplesmente como $\varphi(t, \mathbf{z}_0)$ uma vez que é uma solução de (1.2) tal que $\varphi(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$. Assim, podemos dizer que são curvas parametrizadas em $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ e o Ω é chamado espaço de fase.

Muitas propriedades dos sistemas Hamiltonianos são formulados em termos de um operador chamando *colchete de Poisson*. O *colchete de Poisson* é uma operação entre funções diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}^{2n}$. Ele é preservado por transformações simpléticas.

Definição 1.1.1. *Sejam F , G e H funções de classe C^∞ definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, definimos o colchete de Poisson de F e G por $\{F, G\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\{F, G\}$ leva o ponto (q, p, t) em*

$$\{F, G\} = (\nabla F)^T \mathbf{J} \nabla G = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.3)$$

Observação 1.1.2. 1. $\{F, G\}$ é uma função C^∞ de Ω em $\mathbb{R}$, pois é formada por derivadas parciais de funções C^∞ .

2. Temos também que, $\{F, G\} = \langle F_q, G_p \rangle - \langle F_p, G_q \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto canônico sobre o espaço vetorial estudado.

Verifica-se que $\{, \}$, o colchete de Poisson, é uma forma bilinear, anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (1.4)$$

Se $\varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0)$ representa uma solução de (1.1) com a condição inicial $(t_0, \mathbf{z}_0)$ e incluindo a notação $F(t) = F(t, \varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0))$ então

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0)) + \{F, H\}(t, \varphi_t(t_0, \mathbf{z}_0)). \quad (1.5)$$

Uma vez que o colchete de Poisson é anti-simétrico, ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano (1.1) vale a igualdade:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Quando o Sistema Hamiltoniano for autônomo, a função Hamiltoniana H é constante ao longo de suas soluções. Uma função que é constante ao longo das soluções em um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias é chamada de **Integral Primeira** do sistema (1.1).

Definição 1.1.3. *Uma integral primeira para (1.1) é uma função não constante $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ que é constante ao longo das soluções de (1.1), ou seja,*

$$\frac{d}{dt} H(\varphi(t, z_0)) = 0, \forall t \in I,$$

onde $\varphi(t, z)$ é solução (1.1) com condição inicial

$$\varphi(0, z_0) = z_0.$$

Consideremos a função Hamiltoniana $H = H(q, p)$ e seja $\varphi(t) = (q(t), p(t))$ solução de (1.1). Definamos H ao longo de φ por

$$H(\varphi(t)) = H(q(t), p(t)).$$

Assim, para todo t temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\varphi(t)) &= \frac{d}{dt}H(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \\ &= H_{q_1} \cdot \dot{q}_1 + \dots + H_{q_n} \cdot \dot{q}_n + H_{p_1} \cdot \dot{p}_1 + \dots + H_{p_n} \cdot \dot{p}_n \\ &= \langle H_{q \cdot} \dot{q}, H_{p \cdot} \dot{p} \rangle \\ &= \langle -\dot{p} \cdot \dot{q}, \dot{p} \cdot \dot{q} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $H(\varphi(t)) = H(q(t), p(t))$ é uma quantidade preservada ou uma constante de movimento, ou seja, $H(q(t), p(t)) = h$, para qualquer t no intervalo da solução, onde h é uma constante em $\mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que o Sistema Hamiltoniano (1.1) é conservativo, e dizemos simplesmente que H representa a energia do sistema. Além disso, o conjunto definido por $\sum_h = \{(q, p), \in \Omega / H(q, p) = h, \text{ para um valor arbitrário de } h \in \mathbb{R} \text{ é chamado de } \textit{superfície (ou variedade) de energia}.$

Notemos que, o fato de H ser uma integral primeira implica que as soluções estão contidas em alguma superfície de energia h , ou seja, se $(q(t), p(t))$ denota uma solução de (1.1) então $H(q(t), p(t)) = h$, onde h pode ser negativo, nulo ou positivo dependendo da solução. Portanto, $\sum_h$ é um conjunto invariante, isto é, se uma solução com condição inicial está sobre $\sum_h$ então ela permanecerá em $\sum_h$ para todo t .

Vejamos um Teorema que relaciona o *colchete de Poisson* com a integral primeira do sistema Hamiltoniano (1.1).

Teorema 1.1.4. *Sejam F, G e H como enunciadas na definição (1.1.1) e independente de t . Então,*

1. H é uma integral primeira de (1.1).
2. F é uma integral primeira de (1.1) se, e somente se, $\{F, H\} = 0$.
3. Se F e G são integrais primeira de (1.1) então $\{F, G\}$ também é.

Demonstração:

O item 1) foi visto na demonstração anterior da definição (1.1.3). Para o item 2), considere $\varphi(t) = (q(t), p(t))$ solução de (1.2) e defina F ao longo da solução como

$$F(t) = F(q(t), p(t)).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{\partial F^T}{\partial q}\dot{q}(t) + \frac{\partial F^T}{\partial p}\dot{p}(t) = \frac{\partial F^T}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F^T}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = \{F, H\}.$$

Portanto, F é integral primeira se, e só se, $\{F, H\} = 0$.

Para o item 3), vamos mostrar que a definição da derivada $\{F, H\}$ aplicada na solução do sistema (1.2) é nula para todo t . Com isso, vamos escrever inicialmente

$$F(t) = F(q(t), p(t)) \quad \text{e} \quad G(t) = G(q(t), p(t)).$$

Assim, usando a definição da derivada do colchete de Poisson vista em (1.1.1) aliado com o fato de F e G serem integrais primeira de (1.2) e do item 1) deste Teorema, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{F(t), G(t)\} &= \left\{ \frac{\partial F(t)}{\partial t}, G(t) \right\} + \left\{ F(t), \frac{\partial G(t)}{\partial t} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial F^T(t)}{\partial q}\dot{q}(t) + \frac{\partial F^T(t)}{\partial p}\dot{p}(t), G(t) \right\} \\ &+ \left\{ F(t), \frac{\partial G^T(t)}{\partial q}\dot{q}(t) + \frac{\partial G^T(t)}{\partial p}\dot{p}(t) \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial F^T(t)}{\partial q}\frac{\partial H(t)}{\partial p} - \frac{\partial F^T(t)}{\partial p}\frac{\partial H(t)}{\partial q}, G(t) \right\} \\ &+ \left\{ F(t), \frac{\partial G^T(t)}{\partial q}\frac{\partial H(t)}{\partial p} - \frac{\partial G^T(t)}{\partial p}\frac{\partial H(t)}{\partial q} \right\} \\ &= \{\{F(t), H(t)\}, G(t)\} + \{F(t), \{G(t), H(t)\}\} = 0 \end{aligned}$$

■

1.1.1 Sistema Hamiltoniano Linear

Um caso particular de sistemas Hamiltonianos são os lineares. Seja $\mathbf{S}(t)$ uma matriz simétrica para cada t e suponha que o Hamiltoniano H seja uma forma

quadrática em $\mathbf{z}$, mais precisamente admita que H seja escrito da seguinte forma:

$$H = H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{S}(t) \mathbf{z}, \quad (1.6)$$

então, obtemos o sistema associado

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{JS}(t)\mathbf{z} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z} \quad (1.7)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{JS}(t)$. Quando isto ocorre, o sistema Hamiltoniano (1.7) é dito um sistema **Hamiltoniano Linear**.

Definição 1.1.5. *Uma matriz $\mathbf{A} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é dita Hamiltoniana se satisfaz $\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{JA} = \mathbf{0}$. Denotaremos por $sp(n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes Hamiltonianas de ordem $2n$.*

É simples verificar que a matriz $\mathbf{A}(t)$ do Sistema (1.7) é Hamiltoniana. De fato,

$$\mathbf{JA}(t) = \mathbf{J}^2 \mathbf{S}(t) = -\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t) \mathbf{J}^2 = \mathbf{S}(t)^T \mathbf{JJ} = -(\mathbf{JS}(t))^T \mathbf{J} = -\mathbf{A}(t)^T \mathbf{J}.$$

Na terceira igualdade foi usado $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$.

Vejamos alguns resultados que caracterizam matrizes Hamiltonianas.

Teorema 1.1.6. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana;
2. $\mathbf{A} = \mathbf{JA}^T \mathbf{J}$;
3. $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$, com $\mathbf{S}$ simétrica;
4. $\mathbf{JA}$ é simétrica.

Demonstração:

(1. $\Rightarrow$ 2.) Inicialmente, suponhamos que a matriz $\mathbf{A}$ seja Hamiltoniana e lembrando que $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Então, pela definição (1.1.5) da Hamiltoniana temos que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{JA} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{JA} = -\mathbf{A}^T \mathbf{J}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1}(-\mathbf{A}^T \mathbf{J})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}$$

e temos o desejado.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Consideremos $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}$ e tome $\mathbf{S} = \mathbf{A}^T\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$. Observe que

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{J}^T\mathbf{A} = -\mathbf{J}(\mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}) = -\mathbf{J}^2(\mathbf{A}^T\mathbf{J}) = \mathbf{A}^T\mathbf{J} = \mathbf{S}.$$

(3. $\Rightarrow$ 4.) Suponha $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{S}$, com $\mathbf{S}$ simétrica. Então, $\mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{J}^2\mathbf{S} = -\mathbf{S}$. Logo, como $-\mathbf{S}$ é simétrico segue que $\mathbf{J}\mathbf{A}$ é simétrica.

(4. $\Rightarrow$ 1.) Se $\mathbf{J}\mathbf{A}$ é simétrica então $\mathbf{J}\mathbf{A} = (\mathbf{J}\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{J}^T = -\mathbf{A}^T\mathbf{J}$. Assim, $\mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ e pela definição (1.1.5) $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana. ■

Teorema 1.1.7. *Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes Hamiltonianas de mesma ordem. Então $\mathbf{A}^T, \alpha\mathbf{A}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ e $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$ também são matrizes Hamiltonianas.*

Demonstração: Observe que, pelo fato de $\mathbf{A}$ ser Hamiltoniana (1.1.5), usando o Teorema (1.1.6) podemos afirmar que $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}$ e pelo fato de $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$, temos

$$\mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A}^T = (\mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J})\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A}^T = -\mathbf{J}\mathbf{A}^T + \mathbf{J}\mathbf{A}^T = \mathbf{0}.$$

Assim, $\mathbf{A}^T$ é Hamiltoniana.

Para $\alpha\mathbf{A}$, temos

$$\mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$(\alpha\mathbf{A})^T\mathbf{J} + \mathbf{J}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{A}^T\mathbf{J}) + \mathbf{J}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Note que $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T\mathbf{J} + \mathbf{J}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{B}^T\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{B} = \mathbf{0}$, logo $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é Hamiltoniana e, de maneira análoga, mostra-se que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é Hamiltoniana.

Por fim, consideremos o caso de $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Como $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é Hamiltoniana, temos que $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{S}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{J}\mathbf{R}$ com $\mathbf{S}$ e $\mathbf{R}$ simétricas. Então,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{R} - \mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{S} = \mathbf{J}(\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{S}).$$

Escrevendo $\mathbf{P} = (\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{S})$ temos que $\mathbf{P}$ é simétrico. De fato,

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{J}^T\mathbf{S}^T - \mathbf{S}^T\mathbf{J}^T\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{R} = \mathbf{P}.$$

■

Com isso, pelo Teorema (1.1.6) concluímos que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ é Hamiltoniana.

Como consequência deste Teorema e da definição de Sistemas Hamiltonianos Lineares é que a matriz $bfA(t)$ dos coeficientes de um Sistema Hamiltoniano Linear é uma matriz Hamiltoniana.

Ainda neste capítulo vamos estudar o conceito de estabilidade linear no sentido Lyapunov, ao mesmo tempo, fazer associações com o sinal da parte real dos autovalores do polinômio característico da matriz associada ao sistema linear. O próximo resultado é fundamental para o estudo de sistemas Hamiltonianos lineares.

Teorema 1.1.8. *Seja $\mathbf{A}$ Hamiltoniana. Se λ é autovalor da matriz $\mathbf{A}$, então $-\lambda$ também vai ser autovalor desta matriz. Isto é, o polinômio característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ é par, isto é, $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = P_{\mathbf{A}}(-\lambda)$.*

Demonstração: Vejamos,

$$\begin{aligned}
 P_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{JS} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{JS} - \lambda \mathbf{I})^T \\
 &= \det(\mathbf{S}^T \mathbf{J}^T - \lambda \mathbf{I}) = \det(-\mathbf{SJ} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{J}^2 \mathbf{SJ} + \lambda \mathbf{IJJ}) \\
 &= \det(\mathbf{J}(\mathbf{JS} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{J}) = \det \mathbf{J} \det(\mathbf{J}(\mathbf{JS} + \lambda \mathbf{I})) \det \mathbf{J} \\
 &= \det(\mathbf{JS} + \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \\
 &= P_{\mathbf{A}}(-\lambda)
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.1.9. *Vejamos uma condição necessária e suficiente para que uma matriz 2×2 com entradas reais seja Hamiltoniana.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{JA} = \begin{bmatrix} 0 & a+d \\ -(a+d) & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, o traço de $\mathbf{A}$ for nulo.

Se escrevermos uma equação diferencial de segunda ordem como

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad q, p \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

o sistema associado a esta equação é da forma $\dot{x} = y$ e $\dot{y} = -py - qx$, ou simplesmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Pelo exemplo 1.1.9, o sistema é Hamiltoniano linear se, e somente se, $p \equiv 0$. O mesmo ocorre quando $p = p(t)$ e $q = q(t)$.

1.2 Transformações Simpléticas

As transformações simpléticas tem um papel importante na teoria de sistemas Hamiltonianos, pois são um tipo de mudança de coordenadas que preservam a estrutura Hamiltoniana.

De maneira mais geral os sistemas Hamiltonianos variam de acordo com as transformações de coordenadas. Entretanto, existem transformações de coordenadas que preservam estrutura Hamiltoniana do problema, e estamos interessados neste tipo de transformações. Desse modo, nesta seção, vamos fornecer definições e resultados relevantes a seu respeito.

Definição 1.2.1. *Uma matriz $\mathbf{T} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ satisfazendo a identidade*

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J}, \quad \mu \neq 0 \quad (1.9)$$

é dita uma matriz simplética ou μ -simplética. Quando $\mu = 1$, dizemos que $\mathbf{T}$ é simplesmente simplética. O conjunto de todas as matrizes simpléticas em $M_{2n \times 2n}$ é denotado por $Sp(2n, \mathbb{R})$.

Vejamos alguns resultados das matrizes μ -simpléticas quando uma matriz satisfaz a definição 1.2.1.

Teorema 1.2.2. *Seja $\mathbf{T}$ uma matriz μ -simplética. Então,*

1. $\mathbf{T}$ é invertível e $\mathbf{T}^{-1} = -\mu^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}$.
2. $\mathbf{T}^T$ é μ -simplética e $\mathbf{T}^{-1}$ é μ^{-1} -simplética.
3. Se $\mathbf{S}$ é ν -simplética, então $\mathbf{TS}$ é $\mu\nu$ -simplética.

Antes da demonstração do Teorema (1.2.2), vamos mostrar uma propriedade de matrizes simpléticas que será importante para a demonstração.

Lema 1.2.3. Se $\mathbf{T}$ é uma matriz simplética, então $(\det \mathbf{T})^2 = 1$.

Demonstração: Com efeito, usaremos que $\det \mathbf{T}^T = \det \mathbf{T}$ e $\det \mathbf{J} = 1$, suponha-mos que T é simplética, então por (1.2.1) temos que $\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J}$, donde segue que

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J} \Rightarrow \det(\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T}) = \det \mu \mathbf{J} \Rightarrow \det \mathbf{T}^T \det \mathbf{J} \det \mathbf{T} = \mu^n \det \mathbf{J} \Rightarrow (\det \mathbf{T})^2 = \mu^n \neq 0,$$

portanto $(\det \mathbf{T})^2 = 1$. ■

Obtemos assim que $\det \mathbf{T} = \pm 1$.

Agora, mostramos o Teorema (1.2.2):

Demonstração:

1. Seja $\mathbf{T}$ uma aplicação μ -simplética, onde $\det c.\mathbf{A} = c^2 \cdot \det \mathbf{A}$ e $\det \mathbf{J} = 1$, então:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J} \Rightarrow \det(\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T}) = \det \mu \mathbf{J} \Rightarrow \det \mathbf{T}^T \det \mathbf{J} \det \mathbf{T} = \mu^{2n} \det \mathbf{J} \Rightarrow (\det \mathbf{T})^2 = \mu^{2n} \neq 0.$$

Então, $\mathbf{T}$ é invertível.

Sabendo que $\mathbf{T}$ é invertível, para mostrar que $\mathbf{T}^{-1} = -\mu^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{T}$, partimos da igualdade em (1.2.1). Observe que:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{T}^T \mathbf{J} = \mu \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J} = \mu \mathbf{J}^2 \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J} = -\mu \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = -\mu^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}.$$

Na terceira igualdade foi usado $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$.

Observe que ao isolarmos $\mathbf{T}^T$ da expressão $\mathbf{T}^{-1} = -\mu^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}$, temos que

$$\mathbf{T}^T = -\mu \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}^{-1} = -\mu \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}.$$

2. Para mostrar que $\mathbf{T}^T$ é μ -simplética façamos

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^T)^T \mathbf{J} \mathbf{T}^T &= \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \\ &= \mathbf{T} \mathbf{J} (-\mu \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}) \\ &= -\mu \mathbf{T} \mathbf{J}^2 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \\ &= \mu \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Por sua vez, para mostrar que $\mathbf{T}^{-1}$ é μ^{-1} -simplética temos,

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} &= (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{J} (-\mu^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}) \\ &= (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{J} (-\mu^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}) \\ &= \mu^{-1} \mathbf{J}. \end{aligned}$$

3. Seja $\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J}$ e $\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S} = \nu \mathbf{J}$, então:

$$(\mathbf{T} \mathbf{S})^T \mathbf{J} (\mathbf{T} \mathbf{S}) = \mathbf{S}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T}) \mathbf{S} = \mathbf{S}^T (\mu \mathbf{J}) \mathbf{S} = \mu \mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S} = \mu \nu \mathbf{J}$$

■

O Teorema (1.2.2) nos diz que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é um grupo e ao mesmo tempo um subgrupo do conjunto das matrizes não-singulares $2n \times 2n$ com entradas reais, denotada por $Gl(2n, \mathbb{R})$.

Se $\mathbf{T}(t)$ é uma matriz não-singular, de ordem $2n$, isto é, invertível para todo t , a mudança de variáveis $\zeta = \mathbf{U}(t)\mathbf{z}$ transforma o Sistema Hamiltoniano Linear (1.7) em

$$\dot{\zeta} = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}}) \zeta, \quad (1.10)$$

onde $\mathbf{U}(t) = \mathbf{T}^{-1}$.

Em geral, este sistema não é Hamiltoniano. Entretanto, vejamos quais condições sobre $\mathbf{U}(t)$ para que (1.10) seja um sistema Hamiltoniano.

Teorema 1.2.4. *Se $\mathbf{U}(t)$ é uma transformação μ -simplética, então (1.10) é um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Seja $\mathbf{U}(t)$ uma transformação μ -simplética, então $\mathbf{T}(t)$ é μ^{-1} -simplética. Uma vez que $\mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^T = \mu^{-1} \mathbf{J}$ para todo t , derivando segue que $\dot{\mathbf{T}} \mathbf{J} \mathbf{T}^T + \mathbf{T} \mathbf{J} (\dot{\mathbf{T}})^T = \mathbf{0}$. Assim, $(\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}})^T \mathbf{J} + \mathbf{J} (\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}}) = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}}$ é uma matriz Hamiltoniana. Por outro lado, o item 1 do Teorema (1.2.2) nos garante que $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} = \mu \mathbf{J} \mathbf{T}^T$, donde segue pelo Teorema (1.1.6) que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{T} \\ &= \mu \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{S} \mathbf{T} \\ &= \mathbf{J} (\mu \mathbf{T}^T \mathbf{S} \mathbf{T}) \end{aligned}$$

também é Hamiltoniana. Assim, $(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^T \mathbf{J} + \mathbf{J} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) = \mathbf{0}$. ■

Este resultado anterior, nos diz que uma das importâncias das transformações simpléticas vem do fato delas preservarem a estrutura Hamiltoniana linear dos sistemas de equações. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, pois fazendo a mudança de (q, p) para $(q, 2p)$ preserva a forma Hamiltoniana, mas não é simplética.

Se a matriz $\mathbf{A}$ do sistema linear (1.7) é constante, com $t_0 = 0$, da teoria de equações diferenciais ordinárias, temos que a única solução para o sistema é

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!}, \quad (1.11)$$

com isso, vejamos os próximos resultados.

Teorema 1.2.5. *Uma matriz fundamental $\mathbf{Z}(t, t_0)$ de um sistema Hamiltoniano linear (1.7) é simplética, para todo $t, t_0 \in I$. Reciprocamente, se $\mathbf{Z}(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então $\mathbf{Z}$ é a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Seja $\mathbf{Z}(t, t_0)$ matriz fundamental do sistema (1.7), tal que $\mathbf{Z}(z_0, t_0) = \mathbf{I}$. Fazendo $\mathbf{U}(t) = \mathbf{Z}(t, t_0)^T \mathbf{J} \mathbf{Z}(t, t_0)$, então $\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{J}$. Como $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana então $\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{A} = 0$ e derivando $\mathbf{U}(t)$ temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(t) &= \dot{\mathbf{Z}}^T \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} \\ &= (\mathbf{A}(t) \mathbf{Z})^T \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{J} \mathbf{A}(t) \mathbf{Z} \\ &= \mathbf{Z}^T \mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{J} \mathbf{A} \mathbf{Z} \\ &= \mathbf{Z}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{A}) \mathbf{Z} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Logo, $\mathbf{U}(t)$ é constante, e como $\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{J}$, segue que $\mathbf{U}(t) = \mathbf{J}, \forall t, t_0 \in I$, ou seja, $\mathbf{Z}(t, t_0)^T \mathbf{J} \mathbf{Z}(t, t_0) = \mathbf{J}$, assim $\mathbf{Z}(t, t_0)$ é simplética $\forall t, T_0 \in I$.

Reciprocamente, suponha que $\mathbf{Z}(t, t_0)$ é tal que $\mathbf{Z}^T \mathbf{J} \mathbf{Z} = \mathbf{J}$ para todo $t \in I$. Então,

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \dot{\mathbf{Z}}^T \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} = 0.$$

Assim,

$$(\mathbf{Z}^{-1})^T \dot{\mathbf{Z}}^T \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} = 0,$$

Daí,

$$(\dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1})^T \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} = 0,$$

donde,

$$(\dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1})^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1} = 0.$$

Com isso, temos que $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1}$ é Hamiltoniana. Além disso, $\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Z}$, ou seja, $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A} \mathbf{Z}$.

Corolário 1.2.6. *A matriz constante $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, a matriz $e^{\mathbf{A}t}$ é simplética, para todo t .*

Demonstração: Suponha que $\varphi(t, z) = e^{\mathbf{A}t}z$ é o fluxo do sistema linear $\dot{z} = \mathbf{A}z$. Como $\varphi(t, e_j)$ é a j -ésima coluna de $e^{\mathbf{A}t}$, $e^{\mathbf{A}t} = \text{col}[\varphi(t, e_1), \dots, \varphi(t, e_n)]$ é uma matriz fundamental do sistema $\dot{z} = \mathbf{A}z$, logo ela é simplética se, e somente se, $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana. ■

Como $\mathbf{A}$ é constante, a solução fundamental é da forma $Z(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

Com base na definição de sistema Hamiltoniano linear, vamos ampliar o conceito de transformações simpléticas.

Definição 1.2.7. *Seja a transformação de coordenadas $E : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, com Ω um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Dizemos que E é uma transformação simplética se a matriz derivada $D_{\mathbf{z}}(E(\mathbf{z}, t))$ é simplética. Isto é, E é um difeomorfismo, para todo t , e satisfaz*

$$(D_{\mathbf{z}}(E(\mathbf{z}, t)))^T \mathbf{J} D_{\mathbf{z}}(E(\mathbf{z}, t)) = \mathbf{J}. \quad (1.12)$$

Usaremos a notação

$$\zeta = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = E(\mathbf{z}, t) = E(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t),$$

com $Z(\zeta, t)$ para inversa de E . Uma transformação simplética linear preserva a forma da função Hamiltoniana dos sistemas Hamiltonianos lineares. Defina a função transformada por

$$H^*(\zeta) = H^*(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H(Z(\zeta, t), t), \quad (1.13)$$

sendo $\mathcal{U} = E(\Omega \times I)$, então

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\dot{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\mathbf{J} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\mathbf{J} \left(\frac{\partial H^*}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{J} \frac{\partial (H^*)^T}{\partial \zeta}(\zeta, t) \\ &= \mathbf{J} \nabla_{\zeta} H^*(\zeta, t) + \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}=Z(\zeta, t)}. \end{aligned}$$

Na segunda parcela da expressão acima, usamos essa notação para representar a primeira derivada com respeito a t e aplicada em $\mathbf{z} = Z(\zeta, t)$. Do último resultado, segue o Teorema:

Teorema 1.2.8. *A transformação de coordenadas simplética $\zeta = E(\mathbf{z})$, que independe de t , transforma o sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana $H = H(\mathbf{z})$ em um novo sistema, cuja função Hamiltoniana H^* é definida por*

$$H^*(\zeta) = H(E(\mathbf{z})). \quad (1.14)$$

Quando a equação (1.12) depende de t , sua análise é feita na hipótese do conjunto

$$\mathcal{U}_t = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} / (\zeta, t) \in \mathcal{U} \times I\} \quad (1.15)$$

ser uma bola de $\mathbb{R}^{2n}$ para cada t fixo. Nestas condições, é possível mostrar que existe uma função diferenciável $R : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t)|_{\mathbf{z}=Z(\zeta, t)} = \mathbf{J}\nabla_{\zeta} R(\zeta, t). \quad (1.16)$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.9. *Suponha que a transformação de coordenadas $(\zeta, t) = E(\mathbf{z}, t)$ é simplética e, além disso, o contra-domínio $\mathcal{U} = E(U \times I)$ satisfaz (1.15), então E transforma o sistema Hamiltoniano com a função Hamiltoniana $H = H(\mathbf{z})$ num novo sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana é definida por*

$$H^*(\zeta, t) + R(\zeta, t). \quad (1.17)$$

Demonstração: Precisamos demonstrar que a função diferenciável R é o gradiente de uma função diferenciável a valores reais.

Como $\mathcal{U}_t$ é simplesmente conexo, basta demonstrar ¹ que a seguinte função

$$\Gamma(\zeta, t) = \mathbf{J} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)|_{\mathbf{z}=Z(\zeta, t)} \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \quad (1.18)$$

é simétrica, ou seja, $\Gamma = \Gamma^T$. Derive ambos os lados de (1.12)

$$\frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \mathbf{J} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = 0 \quad (1.19)$$

¹Teorema. Seja $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $\mathcal{O}$ é simplesmente conexo (uma bola aberta por exemplo), então $F = \nabla f$ se, e somente se, $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ é simétrica.

donde

$$\frac{\partial E^{-T}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \mathbf{J} + \mathbf{J} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = 0. \quad (1.20)$$

Substituindo $\mathbf{z} = Z(\zeta, t)$ em (1.20) e, além disso, $\frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(Z(\zeta, t), t) = \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t)$. Assim, encontramos que $-\Gamma + \Gamma^T = 0$. ■

Quando $\mathcal{U}_t$ não for uma bola, não podemos garantir a existência de R definida globalmente como única função a valores reais sobre todo $\mathcal{U}$. Mas, em cada ponto ζ de $\mathcal{U}$ existe uma função R como no Teorema anterior sobre uma vizinhança de ζ tal que o Teorema 1.2.9 é válido, isto é, se $\mathcal{U}_t$ não é uma bola, o Teorema acima só é válido localmente.

Teorema 1.2.10. *Seja $\mathbf{T}$ uma matriz simplética. Se λ é autovalor de $\mathbf{T}$, então λ^{-1} também é simplética.*

Demonstração: Seja $\mathbf{T}$ simplética, $\mathbf{T}^T = -\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}$ e $\det \mathbf{T} = \pm 1$. Notemos que

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{T}}(\lambda) &= \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \\ &= \det(\mathbf{T}^T - \lambda \mathbf{I}) \\ &= \det(-\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J} + \lambda \mathbf{J}\mathbf{J}) \\ &= \det(-\mathbf{T}^{-1} + \lambda \mathbf{I}) \\ &= \det(\lambda(\lambda^{-1}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{I})) \\ &= \lambda^{2n} \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\mathbf{T} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) \\ &= \pm \lambda^{2n} P_{\mathbf{T}}(\lambda^{-1}), \end{aligned}$$

donde temos o desejado. ■

Sabemos, de Álgebra Linear, que o determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores, segue que o determinante de uma matriz simplética é igual a 1. Uma consequência disso é que uma transformação simplética preserva volume. A seguir, faremos alguns exemplos, os quais nos ajudarão a entender algumas demonstrações de teoremas mais a diante.

Exemplo 1.2.11. Considere $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ e faça a mudança de coordenadas a qual não depende de t

$$E : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (1.21)$$

definida por

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{q} \quad e \quad \mathbf{P} = \beta \mathbf{p}, \quad (1.22)$$

onde α e β são constantes não nulas. Assim,

$$\mathbf{T} := \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \beta \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

com $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem n . Desta forma,

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \alpha \beta \mathbf{J} \quad (1.24)$$

Pela definição (1.2.1) a transformação de coordenadas E é $\alpha\beta$ -simplética.

Exemplo 1.2.12. Considere um Hamiltoniano autônomo e analítico que possui um ponto crítico na origem, assim,

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} + K(\mathbf{z}) \quad (1.25)$$

onde $\mathbf{S}$ é matriz Hessiana em $\mathbf{z} = 0$ e K é tal que as derivadas parciais de primeira e segunda ordem anulam-se na origem. Façamos a mudança de coordenadas

$$E : \mathbf{z} \mapsto \mathbf{w} = \epsilon^{-1} \mathbf{z} \quad (1.26)$$

com $\epsilon \neq 0$. Tome $\alpha = \beta = \epsilon^{-1}$ do exemplo (1.2.11), então E é uma transformação ϵ^{-2} -simplética. Assim, o novo Hamiltoniano satisfaz

$$\begin{aligned} H^*(\mathbf{w}) &= \frac{1}{\epsilon^2} H(E^{-1}(\mathbf{z})) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} H(\epsilon \mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{2} \epsilon^2 \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w} + K(\epsilon \mathbf{w}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w} + \frac{1}{\epsilon^2} K(\epsilon \mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Para entender o significado $\mathcal{O}(\epsilon) = \epsilon^{-2}K(\epsilon\mathbf{w})$ devemos lembrar que pelas hipóteses K começa ao menos com termos de terceira ordem do desenvolvimento da série de Taylor em torno da origem, isto é,

$$K(\mathbf{z}) = \sum_{i_1+\dots+i_{2n}=3} a_{i_1} \cdots a_{i_{2n}} z_1^{i_1} \cdots z_{2n}^{i_{2n}} + \cdots \quad (1.27)$$

A reticência foi utilizada para denotar a existência de termos de ordem superior. Agora faça $\mathbf{z} = \epsilon\mathbf{w}$ e temos

$$K(\epsilon\mathbf{w}) = \epsilon^3 K(\mathbf{w}). \quad (1.28)$$

Assumindo que $\mathbf{z}$ está na vizinhança da origem, $\epsilon\mathbf{w}$ também está. Logo,

$$|\epsilon^{-2}K(\epsilon\mathbf{w})| \leq C\epsilon \quad (1.29)$$

para alguma constante $C \geq 0$, para $\mathbf{w}$ próximo da vizinhança da origem e ϵ limitado.

Exemplo 1.2.13. Considere a mudança de coordenadas polares no plano dada por

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}.$$

Usando a notação $\mathbf{z} = (r, \varphi)$ e $\zeta = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e definindo

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

É claro que Φ é um difeomorfismo e satisfaz

$$[D_z \Phi(z)]^T \mathbf{J} [D_z \Phi(z)] = r \mathbf{J},$$

onde $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, a transformação Φ não é simplética.

No entanto uma “pequena” alteração permite-nos conseguir uma transformação simplética a partir das coordenadas polares no plano. De fato, considere a transformação

$$\Psi(z) = (\sqrt{2r} \cos \varphi, \sqrt{2r} \sin \varphi) = \eta$$

onde $\mathbf{z} = (r, \varphi)$ são definidas como antes. Verifica-se neste caso que

$$[D_z \Phi(\mathbf{z})]^T \mathbf{J} [D_z \Phi(\mathbf{z})] = \mathbf{J},$$

as novas variáveis $\mathbf{z} = (r, \varphi)$ são chamadas de **ação-ângulo**. Essa mudança de variáveis ação-ângulo pode ser aplicada a sistemas com n graus de liberdade, se as variáveis originais são $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, fazemos

$$x_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j, \quad y_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

1.3 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Nesta seção desenvolvemos o conceito de estabilidade de solução de equilíbrio no sistema de equações diferenciais ordinárias.

Considere uma Equação Diferencial Ordinária

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad (1.30)$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto.

Note que $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ é solução de (1.30) se, e somente se, $f(\mathbf{x}_0, t) = 0$, para todo t . Daí, dizemos que $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ é uma **solução de equilíbrio** ou simplesmente um equilíbrio da equação (1.30). Outro termo usado para o equilíbrio $\mathbf{x}_0$ é **ponto de singularidade**.

Sabe-se da teoria básica da Equação Diferencial Ordinária, que cada solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ depende continuamente de f e suas condições iniciais $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Em particular provamos que pequenas mudanças ou perturbações em $\mathbf{x}_0$ produzem pequenas mudanças em $\mathbf{x}(t)$ num intervalo ao redor de t_0 . Mostra-se também que duas soluções que iniciam próximas, permanecem próximas para um tempo suficientemente grande, mas finito. Fatos como estes são usualmente de grande importância para ter informações relativas ao comportamento no tempo, quando t representa o tempo das soluções perturbadas. Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: cada solução $\tilde{\mathbf{x}}$ que inicia-se próximo do ponto inicial $\mathbf{x}_0$ em t_0 de $\mathbf{x}$, ou seja, $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0$ está próximo de $\mathbf{x}_0$, permanece próxima da solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ para todo tempo? Ou será que existem soluções que eventualmente desviam-se de $\mathbf{x}(t)$ não importando o quanto próximas elas estivessem de $\mathbf{x}_0$? Vejamos algumas definições e resultados desta teoria:

Definição 1.3.1. (Estabilidade segundo Lyapunov) Seja $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ uma solução de equilíbrio de (1.30) de maneira que $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Dizemos que $\tilde{\mathbf{x}}$ é:

1. **Estável** em $t = t_0$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in B_\delta(\tilde{\mathbf{x}}(t_0))$ a solução $\mathbf{x}(t)$ que se inicia em $\mathbf{x}$ quando $t = t_0$ satisfaz $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}$ está definida para todo $t \geq t_0$, $\mathbf{x}(t) \in B_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}(t))$ ou seja satisfaz a desigualdade

$$\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq \epsilon,$$

para todo $t \geq t_0$.

2. **Assintoticamente Estável**, se ela é estável e além disso, existe um número positivo $\delta_1 < \delta$ tal que $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \delta_1$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| = 0$.
3. Dizemos que o equilíbrio é **instável**, quando não for estável, isto é, se existe um número $\epsilon > 0$ tal que, para todo número positivo $\delta < \epsilon$, existe algum ponto $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ é posição inicial de uma solução $\mathbf{x}(t)$ que está ou não definida para todo $t \geq 0$ ou

$$\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| \geq \epsilon,$$

para algum $t > 0$.

Observação 1.3.2. Se δ na definição não depender de t_0 dizemos que a estabilidade é **uniforme**.

Seja $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ uma solução de (1.30) e faça a mudança de coordenada no tempo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$, temos então que $\mathbf{x}(t)$ é solução de (1.30) se, e somente se, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$ é uma solução de

$$\dot{\mathbf{z}} = g(\mathbf{z}, t) \quad (1.31)$$

onde $g(\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t), t) - f(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$. A solução de equilíbrio $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ da equação (1.31) corresponde a $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$. Assim, a menos de uma translação, podemos considerar a origem como o equilíbrio do sistema em questão.

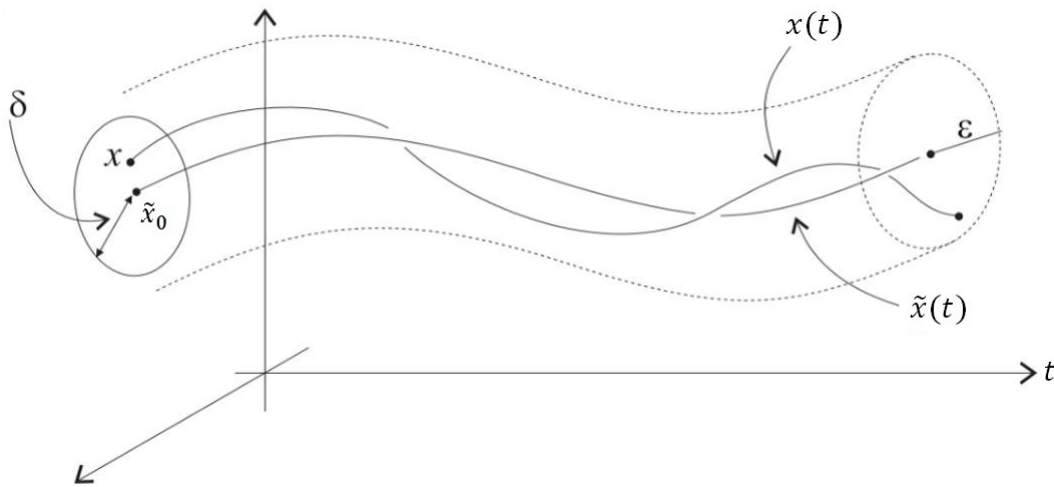


Figura 1.1: Estabilidade no sentido de Lyapunov

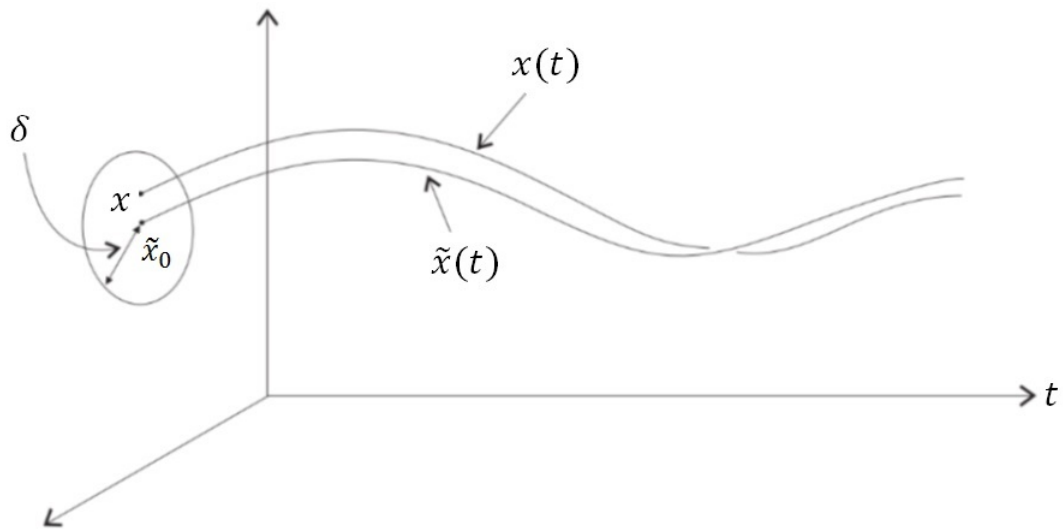


Figura 1.2: Assintoticamente estável no sentido de Lyapunov

A grosso modo um equilíbrio é estável se soluções que iniciam próximas a ele, permanecem próximas para um tempo futuro. Se além de estável a solução tende ao equilíbrio, então o equilíbrio é assintoticamente estável.

Lyapunov é conhecido por seu desenvolvimento da teoria da estabilidade, bem como por suas diversas contribuições à Física e Matemática. Devido ao seu valor prático e teórico, a teoria da estabilidade é atualmente uma das áreas mais importantes da Matemática. Na Mecânica Celeste, por exemplo, é de grande relevância saber sobre a estabilidade das soluções particulares dos problemas do n-corpos.

Faremos um estudo de estabilidade para o entendimento do Teorema de Dirichlet-Lagrange, enunciado e demonstrado no último capítulo. Em sistemas conservativos, o Hamiltoniano é escrito como a soma da energia potencial com a cinética. Se a origem é um ponto de mínimo estrito para energia potencial, o Teorema de Dirichlet-Lagrange nos garante que o equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov.

1.3.1 Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes

Considere o sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.32)$$

em que $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Esta matriz constante pode ser vista como um operador linear no $\mathbb{R}^n$ que a cada $\mathbf{x}$ associa $\mathbf{A}\mathbf{x}$, o qual pode ser estendido

a um operador linear $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ definido por $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathbf{A}x + i\mathbf{A}y$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ todos os autovalores distintos da matriz $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ e $\{z_{11}, \dots, z_{m_1 1}, \dots, z_{1k}, \dots, z_{m_k k}\}$ uma base de Jordan de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\mathbf{A}_{\mathbb{C}}(z_{ij}) = \begin{cases} \lambda_j z_{ij} + z_{i+1j}, & j = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, m_k - 1 \\ \lambda_j z_{ij}, & j = 1, \dots, k, \quad i = m_k, \end{cases}$$

onde m_k é a dimensão do bloco de Jordan associado a λ_j .

Uma condição necessária e suficiente para que

$$z(t) = \zeta_{11}(t)z_{11} + \dots + \zeta_{m_1 1}(t)z_{m_1 1} + \dots + \zeta_{1k}(t)z_{1k} + \dots + \zeta_{m_k k}(t)z_{m_k k}$$

seja uma solução da equação $\dot{z}(t) = \mathbf{A}_{\mathbb{C}}z(t)$ é que

$$\dot{\zeta}_{1j} = \lambda_j \zeta_{1j}, \quad \dot{\zeta}_{2j} = \lambda_j \zeta_{2j} + \zeta_{1j}, \dots, \quad \dot{\zeta}_{m_j j} = \lambda_j \zeta_{m_j j} + \zeta_{m_j - 1j}$$

para $j = 1, \dots, k$. Assim, a solução fica

$$z(t) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} \left[\zeta_{1j} z_{1j} + (\zeta_{1j} t + \zeta_{2j}) z_{2j} + \dots + \left(\frac{1}{m_j!} t^{m_j} \zeta_{1j} + \dots + \frac{1}{1!} t \zeta_{m_j - 1j} + \zeta_{m_j j} \right) z_{m_j j} \right].$$

É fácil ver que

$$\bar{z}(t) = \sum_{j=1}^k e^{\bar{\lambda}_j t} \left[\bar{\zeta}_{1j} \bar{z}_{1j} + (\bar{\zeta}_{1j} t + \bar{\zeta}_{2j}) \bar{z}_{2j} + \dots + \left(\frac{1}{m_j!} t^{m_j} \bar{\zeta}_{1j} + \dots + \frac{1}{1!} t \bar{\zeta}_{m_j - 1j} + \bar{\zeta}_{m_j j} \right) \bar{z}_{m_j j} \right]$$

também é uma solução de $\dot{z}(t) = \mathbf{A}_{\mathbb{C}}z(t)$. Assim as partes real, $x(t) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2}$

e imaginária, $y(t) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2i}$ são soluções reais do sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Com o que foi feito está demonstrado o próximo Teorema.

Teorema 1.3.3. *Uma solução geral do sistema (1.32) é da forma*

$$x(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{m_j-1} (\mathbf{A}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \cos(b_j t) + \mathbf{B}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \sin(b_j t))$$

onde $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ são os autovalores de $\mathbf{A}$, m_j é a dimensão do bloco de Jordan associado ao autovalor λ_j , $\mathbf{A}_{lj}$ e $\mathbf{B}_{lj}$ são vetores fixos do $\mathbb{R}^n$ para $j = 1, \dots, k$ e $l = 1, \dots, m_j$.

O próximo Teorema classifica a estabilidade no sentido dos sistemas lineares com coeficientes constantes.

Teorema 1.3.4. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ e suponha que J_λ é o bloco de Jordan em $\mathbb{C}$ associado a λ . Tem-se para a solução nula do sistema (1.32) as seguintes afirmações:*

1. *Se $\mathbf{A}$ é uma matriz não singular, o equilíbrio é:*
 - (a) *Assintoticamente estável no sentido de Lyapunov se, e somente se, $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ para todo $k = 1, \dots, n$;*
 - (b) *Estável, mas não assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se, e somente se, $\mathbf{A}$ tem pelo menos um par de autovalores imaginários puros, cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*
 - (c) *Instável nos demais casos.*
2. *Se $\mathbf{A}$ é uma matriz singular, o equilíbrio é:*
 - (a) *Estável no sentido de Lyapunov se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal;*
 - (b) *Estável no sentido de Lyapunov no caso em que $\mathbf{A}$ tem ao menos um par de autovalores imaginários puros, sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ seja diagonal, o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*
 - (c) *Instável nos demais casos.*

Podemos exibir alguns resultados específicos de sistemas Hamiltonianos com coeficientes constantes. Pelo Teorema 1.1.8 o polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é par. Assim, se λ é autovalor de $\mathbf{A}$ então $-\lambda$ também é autovalor desta matriz.

Então, em sistemas Hamiltonianos lineares, não é possível haver estabilidade assintótica, pois se a parte real de λ for negativa, a parte real de $-\lambda$ é positiva e vice-versa.

Assim, faz-se necessário obter resultados nos casos degenerados, isto é, a parte real de algum dos autovalores é nula. Considerando o sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, vamos estudar o caso em que todos autovalores são nulos

ou duas frequências nulas e o caso em que há um par de autovalores nulos e outro imaginário puro ($\lambda = \pm\omega i, \omega \neq 0$), este é, somente *uma frequência nula*.

Contudo, podemos caracterizar a estabilidade de um sistema Hamiltoniano linear com coeficientes constantes, a partir do teorema (1.3.4).

Teorema 1.3.5. *Seja o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, com $\mathbf{A}$ uma matriz Hamiltoniana constante. A solução de equilíbrio nulo deste sistema é:*

1. *Se $\mathbf{A}$ é uma matriz não singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só pode ser estável se todos os autovalores são imaginários puros e a matriz $\mathbf{A}$ for diagonalizável.*
2. *Se $\mathbf{A}$ é uma matriz singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só pode ser estável se a matriz $\mathbf{A}$ for diagonalizável.*

Este Teorema nos fornece uma caracterização da estabilidade de um sistema Hamiltoniano linear com coeficientes constantes.

1.3.2 O Método Direto de Lyapunov

O método direto de Lyapunov para o estudo da estabilidade foi desenvolvido pelo matemático e físico russo Aleksandr Lyapunov no final do século XIX. O método não consiste na integração das equações diferenciais do movimento perturbado, mas em encontrar funções das variáveis (x, t) , tais que sua derivada total (com respeito a t) tem certas propriedades devido a forma das equações do movimento. Um vez que ele aplica-se diretamente às equações do movimento, sem qualquer conhecimento das soluções, o mesmo é conhecido como método direto.

O mesmo Liapunov reconheceu, que ele foi levado a este método como consequência do estudo do trabalho de Poincaré, “*On curves defined by differential equations*”. A ideia por trás do método pode ser trazida do resultado de Lagrange baseado num fato físico bem conhecido: numa certa posição de equilíbrio um sistema conservativo tem energia potencial mínima (local), então esta posição corresponde a um equilíbrio estável, se a posição de equilíbrio não corresponde a um mínimo (local) então o equilíbrio é instável. Ou seja, uma solução que inicia próximo de um mínimo local da energia potencial perde potência numa vizinhança de um ponto de equilíbrio estável.

Considere o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias autônoma de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (1.33)$$

onde $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 definida no aberto $W \subset \mathbb{R}^n$. Denotaremos $\varphi_t(\mathbf{x})$ o fluxo associado a este sistema.

Seja $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial V}{\partial x}$ também seja contínua sobre o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Consideramos a função contínua V ao longo das soluções de (1.33) como $V(\mathbf{x}(t))$ desta forma V só depende da variável t , assim tem sentido falar de $\frac{dV}{dt}(\mathbf{x}(t))|_{t=0}$. Definimos, para cada $\mathbf{x} \in W$,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(\mathbf{x}) \right\rangle.$$

Se $\mathbf{x}(t)$ é solução de (1.33), então

$$\frac{dV}{dt}(\mathbf{x}(t))|_{t=0} = \dot{V}(\mathbf{x}(t))|_{t=0},$$

isto é, $\dot{V}$ é a derivada de V ao longo das soluções (1.33) e uma função contínua. Observe que $\dot{V}$ pode ser calculado diretamente de $f(\mathbf{x})$ e, portanto, não envolve integração.

A teoria que será desenvolvida a seguir permanece válida para a função escalar V for somente contínua sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso,

$$\dot{V}(\zeta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(\mathbf{x}(h, \zeta)) - V(\zeta)}{h}$$

onde $\mathbf{x}(h, \zeta)$ é a solução de (1.33) com valor inicial ζ em $h = 0$. Se V é contínua e localmente Lipschitz, então pode-se mostrar que esta última definição é equivalente a

$$\dot{V}(\zeta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(\zeta + hf(\zeta)) - V(\zeta)}{h}.$$

Em algumas aplicações é necessário considerar funções $V(\mathbf{x})$ as quais não têm derivadas parciais contínuas em todos os pontos $\mathbf{x}$. Por outro lado, as funções $V(\mathbf{x})$ são usualmente diferenciáveis por partes com o conjunto de descontinuidade nas derivadas de V acontecendo sobre uma superfície de dimensão mais baixa que a do espaço base $\mathbb{R}^n$.

Se f é de classe C^1 em W e $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é também de classe C^1 em Ω onde o aberto $\Omega \subset W$. Então, para $\mathbf{x} \in \Omega$ a derivada de V ao longo das soluções $\varphi_t(\mathbf{x})$ de (1.33) é

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(\varphi_t(\mathbf{x}))|_{t=0} = \langle DV(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle.$$

Vamos a partir de agora tratar de algumas preliminares para abordarmos o método direto de Lyapunov.

Definição 1.3.6. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, $\mathbf{x}_0 \in U$. Uma função escalar $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ é dita:*

- i) Definida positiva sobre U se é contínua sobre U , $V(\mathbf{x}_0) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$, se $\mathbf{x} \in U - \{\mathbf{x}_0\}$;*
- ii) Semi-definida positiva sobre U se é contínua sobre U , $V(\mathbf{x}) \geq 0$, se $\mathbf{x} \in U$;*
- iii) Definida negativa sobre U se $-V$ é definida positiva sobre U ;*
- iv) Semi-definida negativa sobre U se $-V$ é semi-definida positiva sobre U .*

Exemplo 1.3.7. 1. Considere $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. A função $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ é definida positiva sobre $\mathbb{R}^2$, pois $V(x_1, x_2) > 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e $V(0, 0) = 0$.

2. Considere $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. A função $V(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ é semi-definida positiva sobre $\mathbb{R}^2$, pois $V(x_1, x_2) = 0$ na reta $x_2 = -x_1$ e $V(x_1, x_2) > 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ com $(x_1, x_2) \neq (x_1, -x_1)$.

3. Considere $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. A função $V(x_1, x_2) = -x_1^2$ é semi-definida negativa sobre $\mathbb{R}^2$ uma vez que $V(x_1, x_2) \leq 0$, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Note que $V(x_1, x_2) = 0$ para todo $(x_1, x_2) = (0, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.3.8. Considere $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, de maneira que $\mathbf{x}_0 = (0, 0) \in U$. A função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2,$$

é definida positiva sobre U se, e somente se,

$$a > 0 \quad \text{e} \quad 4ac - b^2 > 0,$$

e é definida negativa sobre U se, e somente se,

$$a < 0 \quad \text{e} \quad 4ac - b^2 > 0.$$

Demonstração: Observemos inicialmente que,

$$\begin{aligned}
V(x_1, x_2) &= ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \\
&= ax_1^2 + bx_1x_2 + \frac{b^2}{4a}x_2^2 + cx_2^2 - \frac{b^2}{4a}x_2^2 \\
&= \left(ax_1^2 + bx_1x_2 + \frac{b^2}{4a}x_2^2\right) + x_2^2\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right).
\end{aligned}$$

Assim, se V é definida positiva então $V(0,0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$, para todo $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in U$, conseqüentemente,

$$a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) > 0, \text{ para todo } (x_1, x_2) \neq (0,0) \in U. \quad (1.34)$$

Pelo fato de $\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $x_2^2 \geq 0$, para todo $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in U$, temos que, a desigualdade (1.34) é satisfeita apenas se $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$. Reciprocamente, se $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$ então $a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) > 0$, $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in U$ e $V(0,0) = 0$. Logo, $V(x_1, x_2)$ é definida positiva em U .

Por outro lado, se V é definida negativa então $V(0,0) = 0$ e $V(x_1, x_2) < 0$, para todo $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in U$, ou seja,

$$a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) < 0, \text{ para todo } (x_1, x_2) \neq (0,0) \in U.$$

Novamente, pelo fato de $\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $x_2^2 \geq 0$, para todo $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in U$, então para termos $V(x_1, x_2) < 0$, devemos ter $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$. Reciprocamente, se $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$ então $a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) < 0$, para todo $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in U$ e $V(0,0) = 0$. Logo, $V(x_1, x_2)$ é definida negativa em U . ■

Definição 1.3.9. V é uma função de Liapunov para a solução de equilíbrio $\mathbf{x}_0$ da equação (1.33) se ela é definida positiva em $\mathbf{x}_0$ e se $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Teorema 1.3.10. (O método direto de Lyapunov) Seja $\mathbf{x}$ equilíbrio do sistema (1.33) e Ω vizinhança de $\mathbf{x}_0$. Segue que,

- i) Se existir uma função de Lyapunov V para $\mathbf{x}_0$, então $\mathbf{x}_0$ é **estável**;
- ii) Se existir uma função de Lyapunov V para $\mathbf{x}_0$ de maneira que $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x}$ em $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, então $\mathbf{x}_0$ é **assintoticamente estável**;
- iii) Seja V uma função escalar de classe C^1 positiva definida em uma vizinhança U de $\mathbf{x}_0$, tal que $\dot{V}(\mathbf{x})$ é positiva definida para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ em U , então $\mathbf{x}_0$ é **instável**.

Exemplo 1.3.11. Vamos estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio dos sistemas abaixo.

$$i) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1 + x_2)^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1 + x_2)^2 \end{array} \right. \quad (1.35)$$

$$ii) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1 + x_2)^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1 + x_2)^2 \end{array} \right. \quad (1.36)$$

Percebe-se que em ambos os sistemas $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio. Vamos analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio em questão. Para ambos os sistemas, vamos considerar a função $V : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo a origem e V é definida por $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Para o sistema 1.35 note inicialmente que V satisfaz as condições do item iii) do Teorema (1.3.10). Note que,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2 \\ &= 2x_1[x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)] \end{aligned}$$

onde $\dot{V}(x_1, x_2) > 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \Omega - (0, 0)$ e $\dot{V}(0, 0) = 0$ é definida positiva e pelo Teorema 1.3.10 o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é instável. Já para o sistema 1.36, vimos no exemplo 1.3.7 que V é definida positiva, e observemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2 \\ &= 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

onde $\dot{V}(x_1, x_2) < 0, \forall (x_1, x_2) \in \Omega - (0, 0)$ e $\dot{V}(0, 0) = 0$ é definida negativa, portanto, pelo Teorema 1.3.10, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

Teorema 1.3.12. (Teorema de Lyapunov para estabilidade no caso autônomo) *Se existe uma função de Lyapunov de classe C^1 para a solução de equilíbrio $\mathbf{x}_0$ do sistema (1.33), então o equilíbrio é estável.*

Demonstração: Sejam $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(\mathbf{0}) \subset \Omega$ e $0 < \epsilon \leq r$. Defina

$$m_\epsilon = \min\{V(\mathbf{x})/\mathbf{x} \in \partial B_\epsilon(\mathbf{0})\}.$$

Como V é definida positiva, temos que $m_\epsilon > 0$. Assim, pela continuidade de V e usando o fato que $V(\mathbf{x}) = 0$, temos que existe $\delta > 0$ tal que $V(\mathbf{x}) < m_\epsilon$, para todo $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in [0, t]$ tal que

$$V(\varphi_t(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x}) = \dot{V}(\varphi_s)(t - 0)$$

e como $\dot{V}(\varphi_s(\mathbf{x})) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ temos que $V(\varphi_t(\mathbf{x})) \leq V(\mathbf{x})$, donde $V(\varphi_t(\mathbf{x})) < m_\epsilon$ para todo $t \geq 0$ onde a solução é definida. Se existisse t_1 tal que $\varphi_{t_1}(\mathbf{x}) \in \partial B_\epsilon(\mathbf{0})$, então $V(\varphi_{t_1}(\mathbf{x})) \geq m_\epsilon$, o qual é uma contradição.

Logo, $\varphi_t(\mathbf{x}) \in B_\epsilon(\mathbf{0})$, para todo $t \leq 0$ onde a solução está definida. Observe que a solução está definida para todo $t \leq 0$, desde que ela fica dentro de um compacto. Isto prova a estabilidade do equilíbrio. ■

Corolário 1.3.13. *Se o sistema 1.33 possui uma integral primeira F (diferenciável) o qual é definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da solução de equilíbrio e todas as soluções estão definidas para todo tempo, então a solução de equilíbrio é estável.*

Demonstração: Basta definir $V(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ e notar que $\dot{V} \equiv 0$. Consequentemente V é uma função de Lyapunov e assim pelo Teorema 1.3.10 a solução de equilíbrio é estável. ■

Exemplo 1.3.14. *Considere a Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem*

$$\ddot{x} + q(x) = 0,$$

onde q é uma função contínua que satisfaz $xq(x) > 0, \forall x \neq 0$. Esta equação pode ser escrita na forma $\dot{x} = y$ e $\dot{y} = -q(x)$. A energia total do sistema é $E = \frac{y^2}{2} + \int_0^x q(s)ds$. Como E não depende explicitamente de t , temos que E é integral primeira para o sistema. Observe que E é definida positiva. Assim, pelo corolário 1.3.13 temos que a origem é um ponto de equilíbrio estável para este sistema.

Um caso particular importante deste exemplo ocorre quando $q(x) = x$. Neste caso, a equação correspondente é a equação fundamental das oscilações, $\ddot{x} + x = 0$.

Vamos agora enunciar um resultado relativo a sistemas mecânicos da forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}), \quad (1.37)$$

onde $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 , definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Um tal sistema é denominado sistema Newtoniano potencial. A formulação Hamiltoniana deste sistema é obtida da seguinte forma. Fazendo,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\nabla_{\mathbf{r}} U \end{cases}$$

Logo, se definimos

$$H = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + U(\mathbf{r}),$$

o sistema assume a forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{cases} \quad (1.38)$$

O próximo Teorema foi primeiro provado por Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet em 1848 e formulada por Joseph-Louis Lagrange em 1788, lembrando que os teoremas de Lyapunov sobre estabilidade são de 1882.

Teorema 1.3.15. (Teorema de Dirichlet-Lagrange) *Seja o sistema mecânico (1.37) e suponha que $\mathbf{r}_0$ é um ponto crítico de U e é um máximo local isolado, então a solução de equilíbrio $(\mathbf{r}_0, 0)$ do sistema Hamiltoniano (1.38) é estável.*

Demonstração: Seja $U_0 = U(\mathbf{r}_0)$ e $\epsilon > 0$ tal que $U(\mathbf{r}) < U_0$ para $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon$. Defina

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + U_0 = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + U(\mathbf{r}) + U_0$$

A função V é definida positiva na vizinhança $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon$ com $\mathbf{v}$ arbitrário, e como $\dot{V} = \dot{H} \equiv 0$, pelo Teorema 1.3.12 segue o resultado. ■

Para sistemas mecânicos da forma $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$, pelo Teorema (1.3.15) devemos assumir que o ponto crítico isolado é um mínimo local.

Vimos na seção 1.1.1 que trata de sistema Hamiltoniano linear que no caso de um sistema Hamiltoniano linear autônomo a função Hamiltoniana é da forma

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z},$$

ou seja, função Hamiltoniana é uma forma quadrática em $\mathbb{R}^{2n}$. Além disso, provamos que H é uma integral primeira para tal sistema, e se H for definida positiva (ou negativa) pelo Corolário 1.3.13 temos que o ponto de equilíbrio é estável. No caso em que H não é definida positiva (ou negativa) ainda não podemos afirmar nada quanto a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Suponhamos agora que H é uma função Hamiltoniana autônoma com n graus de liberdade, analítica numa vizinhança da origem e tal que a origem é um equilíbrio para o sistema associado. Desenvolvendo H em série de Taylor numa vizinhança da origem obtemos

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \cdots,$$

onde $H_s, s \geq 2$ é um polinômio homogêneo de grau s nas variáveis $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$. Se assumimos que a parte quadrática é definida positiva (ou negativa) temos que H é uma integral primeira definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da origem e, pelo corolário 1.3.13, temos que a origem é um equilíbrio estável para o sistema Hamiltoniano associado a H . Assim, podemos usar o corolário 1.3.13 para qualquer sistema Hamiltoniano autônomo que se encaixe nas condições exigidas.

1.4 A Forma Normal de Lie

Nessa seção, vamos abordar algumas conceitos e noções relacionadas a forma normal de Lie para sistemas Hamiltonianos que é um dos métodos matemáticos para simplificar o problema por meio de uma mudança de variáveis. Este método foi desenvolvido por Deprit [5] em 1969 e Hori [14] e estendido por Kamel [15] em 1970 e Henrard [13] em 1970. O método de Deprit original era somente para sistemas Hamiltonianos, mas as extensões de Kamel e Henrard foram para sistemas de equações não Hamiltonianas. Aqui trataremos somente do caso Hamiltoniano.

1.4.1 O Processo de Obtenção da Transformada de Lie

Considere a função Hamiltoniana $H = H(\mathbf{z}, \varepsilon)$ que depende de um pequeno parâmetro ε . Use uma função $W = W(\mathbf{z}, \varepsilon)$ como uma função Hamiltoniana

tendo o parâmetro ε como o tempo. Assim, suponha o sistema Hamiltoniano autônomo

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = \mathbf{J}\nabla W(\mathbf{z}, \varepsilon) \quad (1.39)$$

e a condição inicial $\mathbf{z}(0) = \mathbf{Z}$, onde W é diferenciável. Da teoria básica das Equações Diferenciais Ordinárias temos que a solução geral do problema acima é uma função diferenciável $\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ que satisfaz $\phi(\mathbf{Z}, 0) = \mathbf{Z}$. A aplicação $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ define uma transformação simplética próxima da identidade que leva o Hamiltoniano $H = H(\mathbf{z}, \varepsilon)$ no Hamiltoniano $H^* = H(\mathbf{Z}, \varepsilon) = H(\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon), \varepsilon)$.

Lema 1.4.1. *$\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ é uma mudança de coordenadas simpléticas próxima da identidade se, e somente se, é a solução geral de uma equação diferencial Hamiltoniana da forma (1.39) satisfazendo a condição inicial $\mathbf{z}(0) = \mathbf{Z}$.*

A função H^* as vezes é chamada de transformada de Lie de H gerada por W e é denotada por $\mathcal{L}_W H$. O método de Deprit-Hori consiste em obter uma função $W(\mathbf{z}, \varepsilon)$ de tal forma que seja mais simples o novo Hamiltoniano H^* .

Suponha que H, W e H^* sejam expansões em séries de potências com respeito ao parâmetro ε . O algoritmo do método de Lie é um conjunto de fórmulas recursivas que relacionam os termos destas várias expansões em séries. Em particular, sejam

$$H(\mathbf{z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) H_i^0(\mathbf{z}), \quad (1.40)$$

$$H(\mathbf{z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) W_{i+1}(\mathbf{z}), \quad (1.41)$$

$$\mathcal{L}_W H(\mathbf{Z}, \varepsilon) = H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) H_0^i(\mathbf{z}). \quad (1.42)$$

O método da transformada de Lie introduz um arranjo indexada por dois índices $\{H_j^i\}$, $i, j = 0, 1, \dots$ o qual coincide com a definição dada em (1.40) e (1.41) quando um dos índices i ou j é nulo.

O Teorema seguinte forma a base do processo:

Teorema 1.4.2. *As funções $\{H_j^i\}$ ($i = 1, 2, \dots, j = 1, \dots$) definidas acima satisfazem as identidades recursivas*

$$H_j^i = H_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{i+1}\}, \quad (1.43)$$

onde $\{, \}$ é o colchete de Poisson.

Demonstração: Inicialmente, defina o operador diferencial $\mathcal{D} = \mathcal{D}_W$ por

$$\mathcal{D}F = (\mathbf{z}, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\mathbf{z}, \varepsilon) + \{F, W\}(\mathbf{z}, \varepsilon).$$

Note que

$$\mathcal{D}F = (\mathbf{z}, \varepsilon)|_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{z}, \varepsilon)} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}F = (\mathbf{z}, \varepsilon)|_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{z}, \varepsilon)}. \quad (1.44)$$

Agora, considere a sequência de funções definida indutivamente por $H^0 = H$, $H^i = \mathcal{L}H^{i-1}$, $i \geq 1$ cujas expansões em série de potências é

$$H^i = (\mathbf{Z}, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^j}{j!} \right) H_j^i(\mathbf{z}).$$

Desde que o resultado obtido aplicando $\mathcal{D}$ ao j -ésimo termo da expansão em série de H^{j-1} é

$$\mathcal{D}\left(\frac{\varepsilon^j}{j!} H_j^{i-1}\right)(\mathbf{z}, \varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon^j}{j!}\right) \{H_j^{i-1}, W\}(\mathbf{z}, \varepsilon) + \frac{\varepsilon^{j-1}}{(j-1)!} H_j^{i-1}(\mathbf{z}),$$

temos que

$$\begin{aligned} H^i(\mathbf{z}, \varepsilon) &= \mathcal{D}H^{i-1}(\mathbf{z}, \varepsilon) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^j}{j!} \right) [H_{j+1}^{i-1} + \{H_j^{i-1}, W\}]. \end{aligned}$$

A soma que envolve o colchete de Poisson pode ser analisada da seguinte forma, onde fazemos $l = j + k$ e, subsequentemente, escreva j em lugar de l :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^j}{j!} \right) \{H_j^{i-1}, W\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^{j+k}}{j!k!} \right) \{H_j^{i-1}, W_{k+1}\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{l!}{(l-k)!k!} \left(\frac{\varepsilon^l}{l!} \right) \{H_{l-k}^{i-1}, W_{k+1}\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^j}{j!} \right) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{l-k}^{i-1}, W_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Logo as funções H_j^i relacionam-se por (1.43). Resta mostrar que H^* tem a expansão dada por (1.42). Pelo desenvolvimento em série de Taylor e por (1.44)

tem-se

$$\begin{aligned}
H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon)_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} (H(\mathbf{z}, \varepsilon)_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)})_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) (\mathcal{D}^i H(\mathbf{z}, \varepsilon)_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)})_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) H_0^i(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

■

Para construir a mudança de coordenadas simplética $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ basta notar que $\mathcal{L}_W \mathbf{I}(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$, onde $\mathbf{I}$ é a aplicação identidade.

A dependência das funções $\{H_j^i\}$ pode ser facilmente entendida considerando o Triângulo de Lie, dado a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_0^0 & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
H_1^0 & \rightarrow & H_0^1 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
H_2^0 & \rightarrow & H_1^1 & \rightarrow & H_0^2 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H_3^0 & \rightarrow & H_2^1 & \rightarrow & H_1^2 & \rightarrow & H_0^3 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Os coeficientes da expansão do Hamiltoniano antigo, H , estão na coluna a esquerda, e os coeficientes do novo Hamiltoniano estão sobre a diagonal. A fórmula dada em (1.43) estabelece que para calcular qualquer elemento no triângulo de Lie, é necessário ter as entradas na coluna em cada etapa a esquerda e acima. Por exemplo, para calcular a expansão em série para H^* através dos termos de ordem ε^2 , primeiro calculamos H_0^1 pela fórmula

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\},$$

a qual nós dá o termo de ordem ε , e então calculamos

$$H_1^1 = H_2^0 + \{H_1^0, W_1\} + \{H_0^0, W_2\},$$

$$H_0^2 = H_1^1 + \{H_0^1, W_1\}.$$

Então

$$H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = H_0^0(\mathbf{Z}) + \varepsilon H_0^1(\mathbf{Z}) + \frac{\varepsilon^2}{2} H_0^2 + \dots$$

Vamos agora ver um exemplo que mostra como a transformada de Lie pode simplificar um problema.

Exemplo 1.4.3. (*Aplicação a Equação de Duffing*) O Hamiltoniano associado a equação de Duffing é dado por:

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + \frac{\gamma}{4}q^4$$

em coordenadas retangulares (q, p) . Nas variáveis ação-ângulo, (r, φ) , ele é dado por

$$H = r + \frac{\gamma}{8}r^2(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi).$$

Considerando γ como um pequeno parâmetro e fazendo $\varepsilon = \frac{\gamma}{8}$ temos que

$$H(r, \varphi, \varepsilon) = H_0^0(r, \varphi) + \varepsilon H_1^0(r, \varphi),$$

onde

$$H_0^0 = r \quad e \quad H_1^0 = r^2(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi).$$

Da fórmula (1.43) do Teorema (1.4.2) temos que

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\},$$

assim

$$H_0^1 = r^2(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) + \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}.$$

Escolha $W = W_1$ tal que H_0^1 tenha “poucos” termos (esta é uma definição de “forma normal”). Assim, a forma mais simples para H_0^1 é

$$H_0^1 = 3r^2,$$

a qual é feita tomando

$$W + W_1 = -r^2(2\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi).$$

Com esta definição de W , o Hamiltoniano nas novas coordenadas, (J, θ) será

$$H(J, \theta, \varepsilon) = J + \frac{3\gamma}{8}J^2 + O(\gamma^2),$$

e as equações de movimento serão

$$\dot{J} = O(\gamma^2) \quad e \quad \dot{\theta} = -1 - \frac{3\gamma}{4}J + O(\gamma^2).$$

Nestas coordenadas, sem considerar os termos em $O(\gamma^2)$, a solução move-se sobre círculos $J = \text{constante}$ e com velocidade uniforme $-1 - \frac{3\gamma}{4}J$.

1.4.2 Forma Normal num Equilíbrio no Caso Onde a Matriz da Parte Linear é Simples

Considere um Hamiltoniano analítico H que possui uma solução de equilíbrio na origem de $\mathbb{R}^{2n}$. Então H tem um desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem da forma:

$$H(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(\mathbf{z}), \quad (1.45)$$

onde H_i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$. Assim, $H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z}$, onde $\mathbf{S} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é simétrica. A equação linearizada do sistema associado a (1.45) em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{z} = 0$ é

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z}, \quad (1.46)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{J} \mathbf{S}$. A solução geral de (1.46) é $\varphi(\mathbf{z}, t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}$. Para o estudo das soluções de (1.45) próximo da solução de equilíbrio será importante colocar as equações do movimento na forma normal.

No caso em que a matriz da parte linear é simples (diagonalizável sobre os complexos), o seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada na referência bibliográfica [6], nos fornece uma caracterização da forma normal de Lie:

Teorema 1.4.4. *Se $\mathbf{A} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é simples, então existe uma mudança formal de coordenadas simpléticas,*

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{z}) = \mathbf{Z} + \dots, \quad (1.47)$$

a qual transforma o Hamiltoniano (1.45) no Hamiltoniano

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}), \quad (1.48)$$

onde H^i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$ tal que

$$\{H^i, H_0\} = 0, \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (1.49)$$

isto é, H^i é uma integral primeira para o sistema linearizado (1.46).

1.5 A Forma Normal da Parte Quadrática

Veremos agora o processo de obtenção da forma normal de Birkhoff de uma função Hamiltoniana quadrática. Esse método será utilizado no último capítulo, para obter a forma normal do sistema linearizado do problema restrito espacial circular dos três corpos.

Consideraremos o sistema linear

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad (1.50)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{S}$ com $\mathbf{S}$ simétrica e cuja forma quadrática correspondente é H_2 .

Teorema 1.5.1. *Suponha que os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da matriz $\mathbf{A}$ são distintos. Então, existe uma transformação linear simplética $\mathbf{E} : \mathbf{z} = (q, p) \mapsto \mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ que leva o Hamiltoniano H_2 associado ao sistema (1.50) no Hamiltoniano $\bar{H}_2$ dado por:*

$$\bar{H}_2(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{H}}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{k}=1}^n \lambda_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}}. \quad (1.51)$$

Demonstração: Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são distintos, a matriz $\mathbf{A}$ é diagonalizável e, portanto, existe uma matriz invertível $\mathbf{C}$ tal que

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{C} = \mathbf{L}, \quad (1.52)$$

onde

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{L}_0 \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

sendo a matriz $\mathbf{L}_0 = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Da igualdade acima e usando os fatos $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$ chegamos a $\mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{L}$, onde $\mathbf{P} = (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{J})^{-1}$. Assim, a matriz $\mathbf{P}$ também diagonaliza $\mathbf{J} \mathbf{S}$. Como os autovalores de $\mathbf{J} \mathbf{S}$ são distintos, os subespaços próprios são unidimensionais, de modo que existe uma matriz diagonal,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.54)$$

tal que $\mathbf{C} = \mathbf{P} \mathbf{B}$. Como $\mathbf{J} \mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{C}$ é anti-simétrica, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. Considere a matriz diagonal

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

e seja $\mathbf{E} = \mathbf{CQ}$. Então $\mathbf{E}$ também diagonaliza $\mathbf{JS}$, isto é, $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{JSE} = \mathbf{L}$. Além disso, $\mathbf{E}$ é simplética, pois

$$\mathbf{E}^T \mathbf{J} \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{J} \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{J}. \quad (1.56)$$

Assim, a transformação linear $\mathbf{z} = \mathbf{E}\mathbf{w}$ é simplética e leva o sistema Hamiltoniano (1.50) no sistema $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{JSE}\mathbf{w} = \mathbf{L}\mathbf{w}$, que pode ser escrito na forma $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{J}\bar{H}_2\mathbf{w}$, onde

$$\bar{H}_2(\mathbf{w}) = \bar{H}_2(u, v) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k. \quad (1.57)$$

■

Suponha que $\lambda_j = \omega_j i \neq 0$. Fazendo a mudança simplética linear de coordenadas $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(\mathbf{Q}_j - i\mathbf{P}_j), \\ \mathbf{v}_j &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(\mathbf{Q}_j + i\mathbf{P}_j) \end{aligned} \quad (1.58)$$

o Hamiltoniano nas coordenadas $\mathbf{Q}_j, \mathbf{P}_j$ assume a forma:

$$\Gamma_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (\mathbf{Q}_j^2 + \mathbf{P}_j^2). \quad (1.59)$$

Com isso, temos o seguinte corolário do Teorema acima:

Corolário 1.5.2. *Suponha que os autovalores da matriz $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$ são distintos, imaginários puros e não nulos, digamos $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$. Então, existe uma matriz simplética $\mathbf{E} : \mathbf{z} \mapsto \mathbf{Z}$ que leva o Hamiltoniano H_2 associado ao sistema (1.50) no Hamiltoniano (1.5).*

Quando o Hamiltoniano quadrático H_2 está na forma (1.5), dizemos que H_2 está na forma normal de Birkhoff.

Capítulo 2

Estabilidade Normal

Neste capítulo, seguindo o artigo [20] abordamos um novo conceito de estabilidade chamado estabilidade normal que aplica-se a sistemas Hamiltonianos na forma normal e depende da existência de uma integral formal cuja parte quadrática é definida positiva. Mostraremos que uma condição necessária e suficiente para a estabilidade normal de um sistema linear autônomo é que seja satisfeita uma condição linear denominada de condição de Moser-Weinstein. No artigo [7], o autor mostra outras condições necessárias e suficientes para a estabilidade normal no caso autônomo e estende o conceito de estabilidade normal ao caso periódico.

Estamos particularmente interessados em critérios de estabilidade que dependem apenas da parte linear do sistema, mas que forneçam informações sobre o sistema não linear na forma normal em qualquer ordem.

2.1 A Definição da Estabilidade Normal no Caso Autônomo

Existem poucos resultados gerais, além do Teorema de Dirichlet-Lagrange para sistemas de n graus de liberdade e o Teorema de Arnold para sistemas de dois graus de liberdade, que garantem a estabilidade de um ponto de equilíbrio. No artigo [20], os autores introduzem um novo conceito de estabilidade para sistemas Hamiltonianos autônomos chamados de estabilidade normal, o qual conceituamos a seguir.

Considere um sistema Hamiltoniano linear autônomo

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (2.1)$$

e seja $\mathbb{H}$ a função Hamiltoniana associada.

Definição 2.1.1. Dizemos que o sistema Hamiltoniano linear (2.1) é normalmente estável se para toda função Γ definida numa vizinhança da origem que satisfaz

$$\{\mathbb{H}, \Gamma\} = 0,$$

onde $\{, \}$ é o colchete de Poisson, existe uma integral primeira formal

$$L(\mathbf{z}) = J(\mathbf{z}) + R(\mathbf{z}),$$

para o sistema Hamiltoniano associado $H(\mathbf{z}) = \mathbb{H}(\mathbf{z}) + \Gamma(\mathbf{z})$, onde $J(\mathbf{z})$ é uma forma quadrática positiva definida em $\mathbf{z}$ e $R(\mathbf{z})$ é uma série de potência formal em $\mathbf{z}$, tal que H é constante ao longo da solução de (2.1), ou seja,

$$\{L(\mathbf{z}), H(\mathbf{z})\} = 0.$$

Segue do Teorema de Dirichlet-Lagrange que se todas as séries forem convergentes, a origem será um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov para o sistema Hamiltoniano não linear associado a $H(\mathbf{z})$.

Apesar do conceito de estabilidade normal ser fornecido para sistemas lineares, ele é aplicável a sistemas não lineares. De fato, dado um sistema Hamiltoniano não linear cujo sistema linearizado correspondente seja normalmente estável, então o sistema não linear na forma normal de Lie em qualquer ordem arbitrária é estável no sentido de Lyapunov.

2.2 A Condição de Moser-Weinstein

Na Seção 1.3 vimos o Método Direto de Lyapunov, um critério bem geral que pode garantir a estabilidade de uma solução de equilíbrio de uma equação diferencial ordinária, o qual tem como corolário o Teorema de Dirichlet-Lagrange que garante a estabilidade da origem de um sistema Hamiltoniano quando a respectiva parte quadrática é definida positiva.

Outro resultado clássico, que pode ser encontrado na referência [22], diz que a origem será formalmente estável se o sistema linear for semi-simples, os autovalores imaginários puros e linearmente independentes sobre os racionais.

Nesta seção, introduzimos uma condição sobre parte quadrática de um sistema Hamiltoniano denominada de *Condição de Moser-Weinstein*. Mostramos que essa condição irá garantir a estabilidade normal do sistema Hamiltoniano linearizado. Se a parte quadrática do sistema linearizado for definida positiva ou se o sistema linear é semi-simples, os autovalores são imaginários puros e não são linearmente independentes sobre os racionais, então a condição de Moser-Weinstein será satisfeita. Haverá alguns casos em que não será possível aplicar um dos dois resultados acima, mas mesmo assim podemos assegurar a condição de Moser-Weinstein e assim, garantir a estabilidade normal, que é um tipo de estabilidade formal.

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz e assumamos que seus autovalores foram agrupados em r grupos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \pm\omega_1 k_{11}i, \pm\omega_1 k_{12}i, \dots, \pm\omega_1 k_{1s_1}i \\ & \pm\omega_2 k_{21}i, \pm\omega_2 k_{22}i, \dots, \pm\omega_2 k_{2s_2}i \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & \pm\omega_r k_{r1}i, \pm\omega_r k_{r2}i, \dots, \pm\omega_r k_{rs_r}i \end{aligned}$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_r$ são linearmente independentes sobre os racionais e $k_{11}, \dots, k_{rs_r}$ são inteiros diferentes de zero.

Seja $\mathbb{W}_j = [\eta(\omega_j k_{j1}i) \oplus \eta(-\omega_j k_{j1}i)] \oplus \dots \oplus [\eta(\omega_j k_{j\sigma}i) \oplus \eta(-\omega_j k_{j\sigma}i)]$. Aqui escrevemos σ para s_j para evitar subscritos duplos. Observe que $\mathbb{W}_j$ satisfaz a condição: $w \in \mathbb{W}_j$ se, e somente se, $\bar{w} \in \mathbb{W}_j$; assim tomaremos

$$\mathbb{V}_1 = \eta(\omega_j k_{j1}i) \oplus \eta(-\omega_j k_{j1}i), \dots, \mathbb{V}_\sigma = \eta(\omega_j k_{j\sigma}i) \oplus \eta(-\omega_j k_{j\sigma}i)$$

como sendo a complexificação do A -invariante subespaço simplético $\mathbb{W}_j$ e, assim,

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_r.$$

Seja A_j a restrição de A ao subespaço de $\mathbb{V}_j$ e $\mathbb{H}_j$ a função Hamiltoniana correspondente. Note que A_j tem autovalores

$$\pm\omega_j k_{j1}i, \pm\omega_j k_{j2}i, \dots, \pm\omega_j k_{j\sigma}i.$$

Definição 2.2.1. Dizemos que o sistema Hamiltoniano linear (2.1) satisfaz a condição de Moser-Weinstein se cada $\mathbb{H}_j$ for definida positiva ou definida negativa.

Nas coordenadas ação-ângulo $(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, conforme exemplo 1.2.13, $\mathbb{H}$ assume a forma

$$\mathbb{H} = \omega_1(k_{11}r_{11} + \dots + k_{1s_1}r_{1s_1}) + \dots + \omega_r(k_{r1}r_{r1} + \dots + k_{rs_r}r_{rs_r}). \quad (2.2)$$

Assim, para satisfazer a condição de Moser-Weinstein é necessário e suficiente que cada

$$\mathbb{H}_j = \omega_j(k_{j1}r_{j1} + k_{j2}r_{j2} + \dots + k_{js_j}r_{js_j})$$

seja positivo ou negativo definido.

2.3 Condições Necessárias e Suficientes para Estabilidade Normal

Seguindo o artigo [20], mostramos nesta seção que um sistema Hamiltoniano linear estável é **normalmente estável** se, e somente se, a condição de Moser-Weinstein for satisfeita.

Nesta seção consideremos um sistema Hamiltoniano linear autônomo

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad (2.3)$$

onde $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Assumiremos que o sistema (2.3) é estável e que a função Hamiltoniana correspondente é a função quadrática $\mathbb{H}$.

Teorema 2.3.1. *O sistema Hamiltoniano linear (2.3) é normalmente estável se, e somente se, a condição de Moser-Weinstein for satisfeita.*

Demonstração: Supondo que o sistema Hamiltoniano (2.3) satisfaz a condição de Moser-Weinstein, então $\mathbb{H}$ é na forma (2.2) com todos os $k_{jl} > 0$. Defina

$$J = |\omega_j|(k_{11}r_{11} + \dots + k_{1s_1}r_{1s_1}) + \dots + |\omega_r|(k_{r1}r_{r1} + \dots + k_{rs_r}r_{rs_r}).$$

então J é positivo definido. Considere $L(\mathbf{b}fz) = J(\mathbf{z}) + R(\mathbf{z})$ e tome $L = J$, com $R = 0$ ou $L = J + \Gamma$. Devemos mostrar que

$$\{L(\mathbf{z}), H(\mathbf{z})\} = \{J + R, \mathbb{H} + \Gamma\} = \{J, \Gamma\} = 0 \quad (2.4)$$

e precisamos olhar termo por termo. Tome o termo

$$J^* = |\omega_j|(k_{j1}r_{j1} + k_{j2}r_{j2} + \dots + k_{js_j}r_{js_j}).$$

Aqui novamente escrevemos σ para os s_j para evitar subscritos duplos. Como $\omega_j \neq 0$, podemos cancelá-lo da equação (2.4) e esquecê-lo. Como J^* depende somente das ações de $r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_\sigma}$ e a equação (2.4) é uma equação de colchetes de Poisson, precisamos apenas nos preocupar com os ângulos $\phi_{j_1}, \phi_{j_2}, \dots, \phi_{j_\sigma}$ no termo Γ . Considere o termo

$$\Gamma^* = c \mathcal{J} r_{j_1}^{\alpha_{j_1}/2} r_{j_2}^{\alpha_{j_2}/2} \dots r_{j_\sigma}^{\alpha_{j_\sigma}/2} \cos(\beta_{j_1} \phi_{j_1} + \beta_{j_2} \phi_{j_2} + \dots + \beta_{j_\sigma} \phi_{j_\sigma} + \Phi),$$

onde c é uma constante, $\mathcal{J}$ é o produto de todos os outros r_i 's para várias potências e Φ é a soma linear de todos os outros ϕ_i 's, então c , $\mathcal{J}$ e Φ são apenas constantes para esse cálculo, onde existe um termo seno similar.

Usando $k_{j_1} \beta_{j_1} + k_{j_2} \beta_{j_2} + \dots + k_{j_\sigma} \beta_{j_\sigma}$, ($j = 1, \dots, r$) calculamos

$$\{R^*, \Gamma^*\} = (k_{j_1} \beta_{j_1} + \dots + k_{j_\sigma} \beta_{j_\sigma}) \times |\omega_j| c \mathcal{J} r_{j_1}^{\alpha_{j_1}/2} \dots r_{j_\sigma}^{\alpha_{j_\sigma}/2} \sin(\beta_{j_1} \phi_{j_1} + \dots + \beta_{j_\sigma} \phi_{j_\sigma} + \Phi) = 0.$$

Isso completa a prova de que a condição de Moser-Weinstein implica na estabilidade normal.

Se $\mathbb{H}_e$ não satisfazer a condição de Moser-Weinstein independentemente do número positivo e negativo $k_{\alpha\beta}$ associado a $\mathbb{H}_e$, pode ser colocado na forma

$$\mathbb{H}_e(r, \phi) = \omega(k_1 r_1 - k_2 r_2) + v_3 r_3 + \dots + v_n r_n,$$

onde $\omega \neq 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $v_3 \dots v_n$ diferente de zero. Também $k_1 \neq k_2$. Mudando o tempo, podemos assumir $\omega = 1$, $\gcd(k_1, k_2) = 1$.

É suficiente olharmos para o caso particular

$$\begin{aligned} H_e(r, \phi) &= \mathbb{H}_e(r, \phi) + H_p(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2) \\ &= k_1 r_1 - k_2 r_2 + v_3 r_3 + \dots + v_n r_n + r_1^{k_2/2} r_2^{k_1/2} \cos(k_2 \phi_1 + k_1 \phi_2). \end{aligned}$$

Para ver que a origem não é estável, temos que provar que não há integral formal $L_e = J_e + R_p$ de H_e com J_e definida positiva ou definida negativa. Quando tentamos obter L_e , observamos que L_e é quadrática em z coordenadas enquanto precisamos escolher R_p tal que expresso em z seja um polinômio de grau $k_1 + k_2$. Então levamos em conta que $\{H_e, L_e\} = 0$ se, e somente se, $\{\mathbb{H}_e, J_e\} = 0$, $\{H_p, J_e\} + \{\mathbb{H}_e, R_p\} = 0$ e $\{H_p, R_p\} = 0$. A razão para isso é que $\{\mathbb{H}_e, J_e\}$, $\{H_p, J_e\} + \{\mathbb{H}_e, R_p\}$ e $\{H_p, R_p\}$ são polinômios homogêneos em z de respectivos graus dois, $k_1 + k_2$ e $2(k_1 + k_2 - 1)$.

Lembrando que $\{\mathbb{H}_e, J_e\} = 0$ implica que J_e é constante ao longo das soluções de $\mathbb{H}_e$, uma solução é

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, & \phi_1 &= -k_1 t, \\ r_2 &= 1, & \phi_2 &= k_2 t, \\ r_k &= 0, & \phi_k &= v_k t \quad \text{para } k = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

O termo de menor grau que contém os ângulos ϕ_1 e ϕ_2 e é constante ao longo desta solução seria $c r_1^{k_2/2} r_2^{k_1/2} \cos(k_2 \phi_1 + k_1 \phi_2)$ (ou um similar para termo seno) com grau $k_1 + k_2 > 2$. Tal termo não poderia estar em J_e . Então

$$J_e = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + F(r_1, \dots, r_n, \phi_1, \dots, \phi_n)$$

para algum número real α_1, α_2 com $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e F é tal que

$$F = \frac{\partial F}{\partial r_1} = \frac{\partial F}{\partial r_2} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} = \frac{\partial F}{\partial \phi_2} = 0, \quad \text{quando } r_3 = r_4 = \dots = r_n.$$

Quando expresso nas coordenadas z , F é um polinômio de grau dois pois tem característica d'Alembert. De fato F é uma combinação linear de termos da forma

$$c r_1^{q_1/2} \dots r_n^{q_n/2} (\gamma_1 \cos(r_1 \phi_1 + \dots + r_n \phi_n) + \gamma_2 \sin(r_1 \phi_1 + \dots + r_n \phi_n)),$$

com os q_i 's inteiros não negativos, os r_j 's inteiros e c e γ_j 's quantidades reais. Como J_e é quadrática $q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = 2$, mas com $q_1 + q_2 < 2$ sobre a condição em F . Além disso, essas constantes são escolhidas de tal forma que J_e é uma função definida nas coordenadas z . O cálculo de $\{H_p, J_e\}$ produz

$$\{H_p, J_e\} = -(k_2 \alpha_1 + k_1 \alpha_2) r_1^{k_2/2} r_2^{k_1/2} \sin(k_2 \phi_1 + k_1 \phi_2),$$

quando $r_3 = r_4 = \dots = r_n$. Note que $k_2 \alpha_1 + k_1 \alpha_2$ é positivo ou negativo, mas não zero. Portanto, $\{H_p, J_e\}$ não se anula.

Por outro lado, se escolhermos um par típico de termos em R_p , digamos T_p , com

$$\begin{aligned} T_p &= r_1^{m_1/2} r_2^{m_2/2} r_3^{m_3/2} \dots r_n^{m_n/2} \{ (\beta_1 \cos(p_1 \phi_1 + p_2 \phi_2 + p_3 \phi_3 + \dots + p_n \phi_n) \\ &\quad + \beta_2 \sin(p_1 \phi_1 + p_2 \phi_2 + p_3 \phi_3 + \dots + p_n \phi_n)) \} \end{aligned}$$

com os m_j 's inteiros não negativos e os p_j 's inteiros tal que eles satisfaçam o característica de d'Alembert, de forma que se T_p forem escritos em termos de z

é polinomial de grau $k_1 + k_2$. Além do mais, β_1, β_2 são coeficientes reais e junto com os $m_j's$ e os $p_j's$ têm que ser determinados. Temos,

$$\begin{aligned} \{\mathbb{H}_e, T_p\} = & (k_2 p_2 - k_1 p_1 + k_3 v_3 + \cdots + p_n v_n) r_1^{m_1/2} r_2^{m_2/2} r_3^{m_3/2} \cdots r_n^{m_n/2} \times \\ & \times \{\beta_2 \cos(p_1 \phi_1 + p_2 \phi_2 + p_3 \phi_3 + \cdots + p_n \phi_n) \\ & - \beta_1 \sin(p_1 \phi_1 + p_2 \phi_2 + p_3 \phi_3 + \cdots + p_n \phi_n)\}. \end{aligned}$$

Para cancelar os termos de $\{H_p, J_e\}$ com os de $\{\mathbb{H}_e, T_p\}$, temos que escolher $\beta_2 = 0$, $m_1 = p_1 = k_2$, $m_2 = p_2 = k_1$ e $p_j = m_j = 0$ para $j = 3, \dots, n$, mas então $\{\mathbb{H}_e, T_p\} = 0$ e $\{H_p, J_e\} \neq 0$. Assim, não se pode escolher as constantes $\beta_j's$, $m_j's$, $n_j's$ de tal forma que se faça $\{H_p, J_e\} + \{\mathbb{H}_e, R_p\} = 0$ e isso é independente de possíveis relações de ressonância.

Assim, a conclusão é que não é possível obter R_p para construir L_e como uma integral formal de $\mathbb{H}_e$ com J_e definida e a estabilidade normal não é estabelecida, o que é uma contradição. Assim, a condição de Moser-Weinstein é garantida se a estabilidade normal for satisfeita. ■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3.2. *Considere um sistema Hamiltoniano linear com 6 graus de liberdade cujos autovalores estejam agrupados como segue:*

$$\begin{aligned} \pm 3i, \pm 7i & \quad \text{onde } \omega_1 = 1, \quad k_{11} = 3, k_{12} = 7 \\ \pm \sqrt{2}i & \quad \text{onde } \omega_2 = \sqrt{2}, k_{21} = 1 \\ \pm 2\pi i, \pm 3\pi i, \pm 7\pi i & \quad \text{onde } \omega_3 = \pi, \quad k_{31} = 2, k_{32} = 3, k_{33} = 7. \end{aligned}$$

A função Hamiltoniana associada tem a forma:

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + \mathbb{H}_3,$$

onde

$$\mathbb{H}_1 = \delta_1 \frac{3\omega_1}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \delta_2 \frac{7\omega_1}{2} (q_2^2 + p_2^2)$$

$$\mathbb{H}_2 = \delta_3 \frac{\omega_2}{2} (q_3^2 + p_3^2)$$

$$\mathbb{H}_3 = \delta_4 \frac{2\omega_3}{2} (q_4^2 + p_4^2) + \delta_5 \frac{3\omega_3}{2} (q_5^2 + p_5^2) + \delta_6 \frac{7\omega_3}{2} (q_6^2 + p_6^2),$$

onde $\delta_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Sabemos que se cada $\mathbb{H}_j$, $j = 1, 2, 3$, for definido positivo ou definido negativo o sistema Hamiltoniano linear associado à $\mathbb{H}$ será normalmente estável. Assim, concluímos que o sistema será normalmente estável se, e somente se, $\delta_1 \delta_2 > 0$ e $\delta_4, \delta_5, \delta_6 > 0$ ou $\delta_4, \delta_5, \delta_6 < 0$.

Exemplo 2.3.3. *Considere a função Hamiltoniana*

$$\mathbb{H} = r_1 - 2r_2.$$

Neste caso $\omega = 1$ e os autovalores do sistema correspondente são $\pm\omega i$ e $\pm 2\omega i$, que são linearmente dependentes sobre os racionais. Como $\mathbb{H}$ não é definido positivo nem negativo, segue que o sistema associado à $\mathbb{H}$ não satisfaz a condição de Moser-Weinstein, de modo que pelo Teorema 2.3.1 ele não é normalmente estável. Neste caso, perturbações de ordem maior que 2 podem gerar instabilidade do sistema na forma normal de Lie.

Exemplo 2.3.4. *Considere agora*

$$\mathbb{H} = r_1 - \sqrt{2}r_2.$$

Neste caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -\sqrt{2}$, que são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, e os autovalores do sistema correspondente são $\pm\omega_1 i$ e $\pm\omega_2 i$, além disso $\mathbb{H}_1 = r_1$ e $\mathbb{H}_2 = -\sqrt{2}r_2$. Como $\mathbb{H}_1$ é definido positivo e $\mathbb{H}_2$ é definido negativo segue que o sistema associado à $\mathbb{H}$ satisfaz a condição de Moser-Weinstein e, consequentemente, pelo Teorema 2.3.1, é normalmente estável. Neste caso, perturbações de ordem maior que 2 não podem gerar instabilidade do sistema na forma normal de Lie.

Exemplo 2.3.5. *Seja agora*

$$\mathbb{H} = r_1 + 2r_2 - \sqrt{2}(r_3 + 3r_4),$$

de modo que $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = -\sqrt{2}$ e os autovalores correspondente são $\pm\omega_1 i$, $\pm 2\omega_1 i$, $\pm\omega_2 i$ e $\pm 3\omega_2 i$ (cada um com multiplicidade 2). Neste caso

$$\mathbb{H}_1 = r_1 + 2r_2$$

é definido positivo e

$$\mathbb{H}_2 = -\sqrt{2}(r_3 + 3r_4)$$

é definido negativo, de modo que o sistema associado à $\mathbb{H}$ satisfaz a condição de Moser-Weinstein e, portanto pelo Teorema 2.3.1, é normalmente estável.

Note que dada uma função Hamiltoniana na forma normal de Lie do tipo

$$H = r_1 + 2r_2 - \sqrt{2}(r_3 + 3r_4) + r_1^{1/2}r_2^{3/2}r_3^{1/2}r_4^{1/2}\cos(-2\theta + \theta - 3\theta + \theta),$$

como a parte quadrática coincide com a função Hamiltoniana do Exemplo 2.3.5, e portanto satisfaz as condições de Moser-Weinstein, segue a estabilidade do sistema associado. Na verdade,

$$L_1 = r_1 + 2r_2 + \sqrt{2}(r_3 + 3r_4)$$

e

$$L_2 = r_1 + 2r_2 + \sqrt{2}(r_3 + 3r_4) + r_1 r_2^{1/2} r_3^{3/2} r_4^{1/2} \cos(-2\theta + \theta - 3\theta + \theta)$$

são integrais primeiras definida positiva para o sistema associado, e o Teorema de Lyapunov garante a estabilidade da solução de equilíbrio.

No artigo [7] o autor F. dos Santos forneceu outras condições necessárias e suficientes para a estabilidade normal no caso **autônomo**, as quais exibimos a seguir.

Como o sistema (2.3) é estável e não degenerado, podemos assumir que

$$\mathbb{H} = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \cdots + \frac{\omega_n}{2}(q_n^2 + p_n^2), \quad (2.5)$$

onde $\pm\omega_1 i, \dots, \pm\omega_n i$ são os autovalores da matriz **A**. Neste caso podemos associar um $\mathbb{Z}$ -módulo

$$M_\omega = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n; \quad \mathbf{k} \cdot \omega = k_1 \omega_1 + \cdots + k_n \omega_n = 0\},$$

onde $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ é determinado pelo processo de normalização da função Hamiltoniana para a forma (2.5). Como M_ω é um submódulo do módulo finitamente gerado de $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{Z}$ é um domínio ideal principal, temos que M_ω é finitamente gerado, ou seja, existe $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_s \in M_\omega$ tal que

$$M_\omega = \mathbf{m}_1 \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{m}_s \mathbb{Z} = \{j_1 \mathbf{m}_1 + \cdots + j_s \mathbf{m}_s; \quad j_1, \dots, j_s \in \mathbb{Z}; \quad \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_s \in M_\omega\}.$$

Agora, escolhendo o conjunto de geradores $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_s$ de M_ω minimal, temos que $s < n$.

Teorema 2.3.6. *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *O sistema Hamiltoniano linear autônomo (2.3) é normalmente estável;*
2. *Alguma combinação linear da $n-s$ integrais primeira quadráticas do sistema (2.3)*

$$J_j = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{r} \quad j = 1, \dots, n-s$$

onde $\mathbf{b}_j$ são soluções linearmente independente do sistema linear $\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}_1 = \cdots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{m}_s = 0$ e $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $r_j = \frac{1}{2}(q_j^2 + p_j^2)$ é uma forma quadrática definida não degenerada;

3. Existe $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{r-s}$ tal que $B_\omega \cdot \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tem todos os componentes não negativos, onde

$$B_\omega = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n-s} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n-s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n-s} \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{b}_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{n,j})$, para $j = 1, \dots, n-s$, são dados em (2);

4. Para todo $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$, temos que $\mathbf{v} \notin M_\omega$;

5. Para todo $v_1, \dots, v_n$ números inteiros não negativos, temos que $v_1\omega_1 + \dots + v_n\omega_n \neq 0$;

6. A condição de Moser-Weinstein é satisfeita.

Demonstração: A sentença (1. $\Leftrightarrow$ 6.) foi provada no Teorema 2.3.1. Assuma que (6) seja satisfeita, isto é, que o sistema Hamiltoniano linear (2.3) satisfaça a condição de Moser-Weinstein. Se os autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ fossem agrupados em r grupos da seguinte forma

$$\begin{array}{cccc} \pm\omega_1 k_{11}i, & \pm\omega_1 k_{12}i, & \cdots, & \pm\omega_1 k_{1s_1}i \\ \pm\omega_2 k_{21}i, & \pm\omega_2 k_{22}i, & \cdots, & \pm\omega_2 k_{2s_2}i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pm\omega_r k_{r1}i, & \pm\omega_r k_{r2}i, & \cdots, & \pm\omega_r k_{rs_r}i \end{array}$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_r$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$ e $k_{11}, \dots, k_{rs_r}$ são inteiros diferente de zero. Temos que $H_2 = H^1 + H^2 + \dots + H^r$, onde

$$H^j = \omega_j(k_{j1} + k_{j2} + \dots + k_{js_j})r_j, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

é definida positiva ou negativa. Nesse caso, $r = n - s$, onde $s = \text{rank}(M_\omega)$ e

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{b}_1 & = & (k_{11}, k_{12}, k_{1s_1}, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{b}_2 & = & (0, \dots, 0, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2s_2}) \\ & \vdots & \\ \mathbf{b}_r & = & (0, \dots, 0, k_{r1}, k_{r2}, \dots, k_{rs_r}) \end{array}$$

são soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}_1 = \dots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{m}_s = 0$ e portanto $J_j(\mathbf{r}) = H^j(\mathbf{r})$. A função

$$J = c_1 H_2^1 + c_2 H_2^2 + \dots + c_r H_2^r,$$

onde $c_j = 1$ se H_2^j é definida positiva e $c_j = -1$ se H_2^j é definida negativa. É uma combinação linear de $n - s$ integrais primeira de $J_1, \dots, J_{n-s}$ forma quadrática definida não degenerada. Isto mostra que $(6. \Rightarrow 2.)$ e então $(1. \Rightarrow 2.)$.

Por outro lado, se existir $c_1, \dots, c_{n-s}$ tal que $J(\mathbf{z}) = c_1 J_1(\mathbf{z}) + \dots + c_{n-s} J_{n-s}(\mathbf{z})$ é uma integral primeira positiva do sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}z$, então para todo Γ tal que $\{H, \Gamma\} = 0$, considere $L(\mathbf{z}) = J(\mathbf{z}) + R(\mathbf{z})$, onde $R = 0$ e temos que

$$\{L, H + \Gamma\} = \{L, H\} + \{L, \Gamma\} = \{J, H\} + \{J, \Gamma\} \quad (2.6)$$

Desde que $H = \omega \cdot \mathbf{r}$ e $\omega \cdot \mathbf{m}_1 = \dots = \omega \cdot \mathbf{m}_s = 0$, temos que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-s} \in \mathbb{R}$ tal que $\omega = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_{n-s} \mathbf{b}_{n-s}$. Então,

$$\{J, H\} = \{c_1 J_1 + \dots + c_{n-s} J_{n-s}, \alpha_1 J_1 + \dots + \alpha_{n-s} J_{n-s}\} = 0$$

Temos que,

$$\{J, \Gamma\} = c_1 \{J_1, \Gamma\} + \dots + c_{n-s} \{J_{n-s}, \Gamma\} = 0,$$

então por (2.6) concluímos que $\{L, H + \Gamma\} = 0$ e portanto o sistema Hamiltoniano linear é normalmente estável. A prova de $(1. \Leftrightarrow 2.)$ está completa.

Se $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{n-s}) \in \mathbb{R}^{n-s}$ então

$$c_1 J_1(\mathbf{z}) + \dots + c_{n-s} J_{n-s}(\mathbf{z}) = B_w \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \quad (2.7)$$

A equação (2.7) mostra que $(2. \Leftrightarrow 3.)$.

Para mostrar que $(3. \Leftrightarrow 4.)$, note que considerando o sistema (2.3) temos que

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1 k_{11}, \dots, \omega_1 k_{1s_1}, \dots, \omega_r k_{r1}, \dots, \omega_r k_{rs_r}) \\ &= c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_{n-s} \mathbf{b}_{n-s} \quad , \end{aligned}$$

onde $c_1, \dots, c_{n-s} \in \mathbb{R}$ escolhidos em (2). Portanto, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$\mathbf{v} \cdot \omega = c_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + c_{n-s} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_{n-s} = \mathbf{v} \cdot B_w \mathbf{c}. \quad (2.8)$$

Supondo que (3) seja válido, para todo $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$ temos que $\mathbf{v} \cdot B_w \cdot \mathbf{c} > 0$ e portanto, usando (2.8) concluímos que $\mathbf{v} \cdot \omega \neq 0$, ou equivalente $\mathbf{v} \notin M_\omega$.

Por outro lado, assuma que para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$ temos que $\mathbf{v} \cdot \omega \neq 0$, usando (2.8) concluímos que $\mathbf{v} \cdot B_w \cdot \mathbf{c} \neq 0$. Desde que $\mathbf{v} \cdot B_w \cdot \mathbf{c} \neq 0$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$, temos que B_w têm todos os componentes não negativos.

A sentença $(4. \Leftrightarrow 5.)$ é claramente verdadeira, de modo que a prova do Teorema 2.3.6 está completa. ■

2.4 Relação Entre a Estabilidade Normal e a Estabilidade de Lie

Nesta seção, mostramos que sob certas condições a estabilidade normal do sistema linear associado a um sistema Hamiltoniano arbitrário garante a estabilidade de Lie do sistema completo.

Considere um sistema Hamiltoniano autônomo com n graus de liberdade

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{q}}, \quad (2.9)$$

onde $\Gamma = \Gamma(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é uma função analítica real de $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ em uma vizinhança da origem. Assume-se que a origem do espaço de fase é uma solução de equilíbrio não degenerada e que a série de Taylor de Γ em uma vizinhança da origem é da forma

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \dots + \Gamma_j + \dots,$$

onde Γ_j representa um polinômio homogêneo de grau j em $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, isto é,

$$\Gamma_j = \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=j} h_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \mathbf{q}^{\mathbf{k}} \mathbf{p}^{\mathbf{l}}, \quad (2.10)$$

com $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{k}| = |k_1| + \dots + |k_n|$, $|\mathbf{l}| = |l_1| + \dots + |l_n|$, $h_{\mathbf{k}\mathbf{l}} = h_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}$, $\mathbf{q}^{\mathbf{k}} = q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n}$ e $\mathbf{p}^{\mathbf{l}} = p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}$. Supondo que a solução de equilíbrio do sistema Hamiltoniano (2.9) é linearmente estável, podemos assumir sem perda de generalidade que uma transformação simplética linear já foi construída de tal forma que

$$\Gamma_2 = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \dots + \frac{\omega_n}{2}(q_n^2 + p_n^2),$$

onde $\pm\omega_1 i, \dots, \pm\omega_n i$ são os autovalores do sistema linearizado. Nessa seção, Γ_*^m representa a função Hamiltoniana truncada em ordem m na forma normal de Lie, ou seja,

$$\Gamma_*^m = \Gamma_2 + \dots + \Gamma_m, \quad \{\Gamma_2, \Gamma_j\}, \quad j = 1, \dots, m$$

com $\Gamma_j (j = 2, \dots, m)$ definido em (2.10).

Definição 2.4.1. *Se a origem do sistema Hamiltoniano associado a Γ_*^m for estável no sentido de Lyapunov para todo m dizemos que a origem é Lie-estável ou estável no sentido de Lie.*

Seja $\Gamma_*^m(\mathbf{r}, \delta)$ a função Hamiltoniana truncada em sua forma normal de Lie em ordem m e escrita nas variáveis simples de ação-ângulo $(\mathbf{r}, \varphi) = (r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ que são definidos por

$$q_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad \text{e} \quad p_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j.$$

A prova da seguinte proposição pode ser encontrada na referência [8].

Proposição 2.4.2. *Suponha que Γ_*^m (m é um número inteiro fixo maior que 2) está na forma normal de Lie, isto é,*

$$\{\Gamma_2, \Gamma_*^m\} = 0,$$

onde $\{, \}$ é o colchete de Poisson. Então,

- a) Se $M_\omega = 0$, então $\Gamma_*^m = \Gamma_*^m(\mathbf{r})$ para todo m , isto é, Γ_*^m depende somente do vetor $\mathbf{r}$.
- b) Se $M_\omega = \mathbf{m}_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{m}_s\mathbb{Z} \neq \{0\}$, temos que $\Gamma_*^m = \Gamma_*^m(\mathbf{r}, \mathbf{m}_1 \cdot \varphi, \dots, \mathbf{m}_s \cdot \varphi)$.

Lema 2.4.3. *Se $M_\omega = \mathbf{m}_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{m}_s\mathbb{Z}$ então as funções $J_j = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{r}$, ($j = 1, \dots, n-s$) onde $\mathbf{b}_j$ são soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1 = \dots = \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_s = 0$, são integrais primeira quadrática linearmente independentes para o sistema Hamiltoniano associado a Γ_*^m , onde Γ_*^m está na forma normal de Lie sobre m , para todo m .*

Demonstração: Pela preposição (2.4.2), podemos supor que $\Gamma_*^m = \Gamma_*^m(\mathbf{r}, \mathbf{m}_1 \cdot \varphi, \dots, \mathbf{m}_s \cdot \varphi)$ e então

$$\{J_j, \Gamma_*^m\} = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{m}_1 \frac{\partial \Gamma_*^m}{\partial(\mathbf{m}_1 \cdot \varphi)} + \dots + \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{m}_s \frac{\partial \Gamma_*^m}{\partial(\mathbf{m}_s \cdot \varphi)}.$$

Desde que $\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{m}_1 = \dots = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{m}_s = 0$, $j = 1, \dots, n-s$ a função J_j é a integral primeira de H^m . A segunda parte é imediato porque $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-s}$ são linearmente independentes em $\mathbb{Z}^n$. ■

Observação 2.4.4. *Suponha que $\Gamma = \Gamma_2 + \Lambda$ esteja na forma normal. Se $M_\omega = \{0\}$ então $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r})$. No caso $M_\omega = \mathbf{m}_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{m}_s\mathbb{Z} \neq \{0\}$, temos que $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{m}_1 \cdot \varphi, \dots, \mathbf{m}_s \cdot \varphi)$. Em particular, concluímos que se $M_\omega = \mathbf{m}_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{m}_s\mathbb{Z}$ então as funções $J_j = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{r}$, ($j = 1, \dots, n-s$) onde $\mathbf{b}_j$ são soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1 = \dots = \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_s = 0$, são integrais primeira quadrática linearmente independentes para o sistema Hamiltoniano associado a $\Gamma = \Gamma_2 + \Lambda$, que está na forma normal de Lie.*

Teorema 2.4.5. *Se o sistema linearizado associado a Γ_2 é normalmente estável, então a solução nula de (2.9) é Lie-estável.*

Demonstração: Considere as funções $J_j = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{r}$, ($j = 1, \dots, n-s$) onde $\mathbf{b}_j$ são soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1 = \dots = \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_s = 0$. Se o sistema linearizado associado a Γ_2 é normalmente estável, pelo Teorema (2.3.6), existe $c_1, \dots, c_{n-s}$ tal que

$$J = c_1 J_1 + \dots + c_{n-s} J_{n-s},$$

é uma integral primeira quadrática definida positiva do sistema Hamiltoniano linearizado associado a Γ_2 . Pelo Lema (2.4.3), temos que J é uma integral primeira quadrática linearmente independente para o sistema Hamiltoniano associado a $\Gamma_*^m = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \dots + \Gamma_m$, que está na forma normal de Lie até a ordem m , para todo m . Então, tomando J como uma função de Lyapunov de (2.9), concluímos que a solução nula de (2.9) é Lie-estável. ■

2.5 Estabilidade Normal no Caso Periódico

Agora, consideremos um sistema Hamiltoniano linear 2π -periódico

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{JS}(t)\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz 2π -periódica contínua real simétrica. Suponha que o sistema Hamiltoniano periódico (2.11) é estável e não degenerado. Então, podemos supor, sem perda de generalidade, que uma transformação canônica linear já foi construída de tal forma que

$$H = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \dots + \frac{\omega_n}{2}(q_n^2 + p_n^2), \quad (2.12)$$

onde $\pm\omega_1 i, \dots, \pm\omega_n i$ são expoentes característicos diferentes de zero. Neste caso podemos associar um $\mathbb{Z}$ -módulo

$$M_\omega = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n; \quad \mathbf{k} \cdot \omega = k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n \in \mathbb{Z}\},$$

onde $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ é determinado pelo processo de normalização que altera a função Hamiltoniana para a forma dada por (2.12). Note que no caso autônomo M_ω era definido de maneira similar, sendo $\mathbf{k} \cdot \omega = 0$. Como no caso autônomo M_ω é finitamente gerado, ou seja, existem $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_s \in M_\omega$ tais que

$$M_\omega = \mathbf{m}_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{m}_s\mathbb{Z} = \{j_1\mathbf{m}_1 + \dots + j_s\mathbf{m}_s; \quad j_1, \dots, j_s \in \mathbb{Z}; \quad \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_s \in M_\omega\}.$$

Agora, escolhendo o conjunto de geradores $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_s$ de M_ω minimal, temos que $s < n + 1$ (no caso autônomo tínhamos $s < n$).

Lema 2.5.1. *Para todo $\Gamma(\mathbf{z}, t)$, 2π -periódica em t , tal que*

$$\{H, \Gamma\} - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0,$$

existe uma mudança simplética de variáveis $\mathbf{z} = \eta(\mathbf{Z}, t)$, 2π -periódica em t , tal que $(H + \Gamma)(\eta(\mathbf{Z}, t)) = \Gamma^(\mathbf{Z})$ é autônomo e*

$$\frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial Z_i \partial Z_j}(0) = 0, \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

Demonstração: Como $\Gamma(\mathbf{z}, t)$ está na forma normal de Lie, ou seja,

$$\{H, \Gamma\} - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0,$$

fazendo a mudança canônica de variáveis

$$q_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad \text{e} \quad p_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j.$$

a função $\Gamma(\mathbf{r}, \varphi, t)$ satisfaz

$$\omega_1 \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_1} + \dots + \omega_n \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_n} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = \{H, \Gamma\} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (2.13)$$

Podemos assumir que

$$\Gamma(\mathbf{r}, \varphi, t) = \sum_{\eta} a_{\eta}(\mathbf{r}) e^{i(\eta \cdot \varphi + \mu t)}, \quad (2.14)$$

onde $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mu \neq 0$ é um número real, e $a_{\eta} n = a_{\eta} \dots a_{\eta_n}$. A equação (2.13) nos oferece

$$\sum_{\eta} i a_{\eta}(\mathbf{r}) (\eta \cdot \omega - \mu) e^{i\eta \cdot \varphi} = 0,$$

que ocorre se, e somente se, $\eta \cdot \omega = \mu \in \mathbb{Z}$, assim $\eta_n = 0$ se $\eta \neq M_\omega$.

Se $M_\omega = \{0\}$, $\eta_n = 0$ exceto para $\eta = 0$, então $\Gamma(\mathbf{r}, \varphi, t) = \Gamma(\mathbf{r}, t)$. No caso $M_\omega = \mathbf{m}_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{m}_s \mathbb{Z}$, a função Γ está na forma (2.14) com $\eta \in M_\omega$, e portanto $\Gamma = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{m}_1 \cdot \varphi + \mathbf{m}_1 \cdot \omega t, \dots, \mathbf{m}_s \cdot \varphi + \mathbf{m}_s \cdot \omega t)$.

Fazendo agora a mudança canônica de variáveis $(\mathbf{r}, \varphi) \mapsto (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\varphi})$:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi} = \varphi + \omega t.$$

Como essa transformação é dada pela função geradora

$$S(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\varphi}) = \tilde{\mathbf{r}} \cdot (\varphi + \omega t)$$

e por relações

$$\mathbf{r} = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{r}}}$$

Então

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \tilde{\mathbf{r}} \cdot \omega$$

e o novo Hamiltoniano tem a forma

$$\Gamma^* = \Gamma^*(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{m}^1 \cdot \tilde{\varphi}, \dots, \mathbf{m}^s \cdot \tilde{\varphi}).$$

Fazendo $\mathbf{Z} = (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\varphi})$ temos que a mudança canônica de variáveis $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{Z}$ é 2π -periódica em t tal que $\Gamma^*(\mathbf{Z}) = (H + \Gamma)(\eta(\mathbf{Z}, t))$ é autônomo e

$$\frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial Z_i \partial Z_j}(0) = 0, \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

■

Definição 2.5.2. Dizemos que o sistema Hamiltoniano periódico (2.11) é normalmente estável se para cada $\Gamma(\mathbf{z}, t)$, 2π -periódica em t tal que

$$\{H, \Gamma\} - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0,$$

existe uma integral formal $L(\mathbf{Z}) = J(\mathbf{Z}) + R(\mathbf{Z})$ para o sistema Hamiltoniano associado Γ^* dado pelo lema (2.5.1), onde $J(\mathbf{Z})$ é uma forma quadrática positiva definida em $\mathbf{Z}$ e $R(\mathbf{Z})$ é uma série de potências formal em $\mathbf{z}$.

A definição da estabilidade normal no caso periódico não é uma simples adaptação do caso autônomo. De fato, o lema (2.5.1) é muito essencial, como mostra o próximo corolário.

Corolário 2.5.3. Se o sistema Hamiltoniano periódico (2.11) é normalmente estável, então o sistema Hamiltoniano associado a $\Gamma^* = H + \Gamma$ dado pelo lema (2.5.1) é estável para todo $\Gamma(\mathbf{z}, t)$, 2π -periódica em t .

Agora mostramos uma condição necessária e suficiente para a estabilidade formal no caso periódico.

Teorema 2.5.4. *O sistema Hamiltoniano linear periódico (2.11) é normalmente estável se, e somente se, para todos $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$ temos que $\mathbf{v} \neq M_\omega$.*

Demonstração: Suponha que exista $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$ e que $\mathbf{v} \in M_\omega$. Mostremos que o sistema Hamiltoniano periódico (2.11) não é normalmente estável. De fato, escolhendo

$$\Gamma = r_1^{\eta_1/2} \dots r_n^{\eta_n/2} \cos(\eta_1 \varphi_1 \dots + \eta_n \varphi_n + \eta \cdot \omega t),$$

e fazendo a mudança 2π -periódica das variáveis $(\mathbf{r}, \varphi) \mapsto (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\varphi})$ dado na demonstração do lema (2.5.1), temos que

$$\Gamma^* = H + \Gamma = r_1^{\eta_1/2} \dots r_n^{\eta_n/2} \cos(\eta_1 \varphi_1 \dots + \eta_n \varphi_n).$$

O sistema Hamiltoniano associado a Γ^* é instável porque possui a solução

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \eta e^{t\eta_1 \eta_1/2 \dots \eta_n \eta_n/2}, \quad \eta_1 \varphi_1 \dots + \eta_n \varphi_n = \frac{\pi}{2},$$

que satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\mathbf{r}}(t) = 0.$$

Consequentemente, uma integral formal $L(\mathbf{Z}) = J(\mathbf{Z}) + R(\mathbf{Z})$ não existe para o sistema Hamiltoniano associado a Γ^* . Então, o sistema Hamiltoniano (2.11) não é estável.

Agora, suponha que para todo $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$ e que $\mathbf{v} \notin M_\omega$.

Provemos que o sistema Hamiltoniano (2.11) é normalmente estável.

Para todo $\mathbf{m} \in M_\omega$, temos que $\mathbf{m}$ possui componentes com sinais diferentes, em particular, $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_s$ componentes com sinais diferentes. Seja $\Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{t})$ uma função 2π -periódica em t tal que

$$\{H, \Gamma\} - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0.$$

Usando a demonstração do (2.5.1), construímos uma mudança canônica de variáveis $\mathbf{z} = \eta(\mathbf{Z}, t)$, 2π -periódica em t tal que

$$(H + \Gamma)(\eta(\mathbf{Z}, t)) = \Gamma^*(\mathbf{Z}) = \Gamma^*(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{m}^1 \cdot \tilde{\varphi}, \dots, \mathbf{m}^s \cdot \tilde{\varphi}),$$

onde $\mathbf{Z} = (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\varphi})$. Usando a prova do lema (2.4.5) construímos uma integral primeira quadrática positiva definida $J(\mathbf{Z}) = \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{r}}$, onde $\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1 = \dots = \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_s = 0$,

para o sistema Hamiltoniano associado a Γ^* . A função $L(\mathbf{Z}) = J(\mathbf{Z}) + R(\mathbf{Z})$, onde $R(\mathbf{Z}) = 0$, é uma integral primeira para o sistema Hamiltoniano associado a Γ^* . Então, o sistema Hamiltoniano (2.11) é normalmente estável. ■

Observe que a condição necessária e suficiente para a estabilidade normal dada pelo Teorema (2.5.4) é equivalente a dizer que para todo $v_1, \dots, v_n$ números inteiros não negativos temos que $v_1\omega_1 + \dots + v_n\omega_n \notin \mathbb{Z}$. Esta condição é a condição de *Moser-Weinstein* no caso periódico, então, dizemos que a condição de *Moser-Weinstein* vale no sistema Hamiltoniano periódico (2.11) se, e somente se, para todo $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, \dots, v_n \geq 0$ e que $\mathbf{v} \notin M_\omega$.

Pelas condições (2.3.6) e (2.5.4) concluímos que se $M_\omega = \{\mathbf{0}\}$ temos estabilidade normal no caso autônomo ou periódico. Mas os casos periódicos e autônomos são muito distintos. Por exemplo, a função Hamiltoniana positiva definida é normalmente estável no caso autônomo, mas no caso periódico o resultado é falso. De fato, considere um sistema Hamiltoniano periódico em que uma transformação canônica linear periódica tenha sido construída de tal forma que

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2).$$

Então $M_\omega = (1, 0)\mathbb{Z} + (0, 1)\mathbb{Z}$, e portanto $(1, 1) \in M_\omega$. Então, o correspondente sistema Hamiltoniano periódico não é normalmente estável. Mas H é positivo definido.

Observe que, se considerarmos a função Hamiltoniana periódica com 2 graus de liberdade

$$H = \frac{\pi}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{3\pi}{2}(q_2^2 + p_2^2),$$

então $M_\omega = (3, -1)\mathbb{Z}$. Nesse caso, para todo $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $v_1, v_2 \geq 0$ e que $\mathbf{v} \notin M_\omega$. Então, pelo Teorema (2.5.4) temos que o sistema Hamiltoniano periódico correspondente é normalmente estável.

Outras consequências do Teorema (2.5.4) são as seguintes:

- i) Se $\omega_j \in \mathbb{Q}$ para algum j então não temos estabilidade normal no caso periódico;
- ii) Se $n = 1$, no caso periódico, temos estabilidade normal se, e somente se, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. No caso autônomo, o sistema Hamiltoniano correspondente é normalmente estável;
- iii) Se $n = 2$, no caso autônomo temos estabilidade normal se, e somente se, H é positivo definido ou $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Capítulo 3

Estabilidade Normal dos Pontos de Libração L_4 e L_5 do Problema Restrito Circular dos Três Corpos

Neste capítulo, fornecemos a formulação do problema restrito dos três corpos que consiste em estudar a dinâmica três partículas que se movem no espaço sob a ação unicamente das forças de atração mútua. A explicação dos vários problemas da mecânica torna-se mais fácil quando se reduz o problema dos três corpos a certos casos particulares. Além disso, discutiremos sobre o problema restrito circular dos três corpos que abrange no estudo de um caso limite do problema de três corpos, no qual fazemos a suposição que a massa m_3 é infinitesimal e no qual a órbita do corpo m_1 é um círculo ($\epsilon = 0$), como também abordaremos os pontos de libração L_4 e L_5 e um estudo da estabilidade dos pontos de libração L_4 e L_5 do problema restritos dos três corpos nos casos planar e espacial circular.

3.1 O Problema dos Três Corpos

O problema dos três corpos consiste em estudar a dinâmica (estudo do movimento considerando as causas que os produzem e modificam) de três partículas materiais que se movem no espaço sob a ação unicamente das forças de atração mútua. Sejam m_1 , m_2 e m_3 as três partículas materiais no espaço com vetores

posição $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ e $\mathbf{q}_3$ respectivamente, movendo-se sob a ação mútua da atração gravitacional definida pela Lei de Newton (ver figura 3.1). Assim, pela Segunda Lei de Newton, as equações para o movimento são:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \\ m_3 \ddot{\mathbf{q}}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \end{cases}$$

E pela Lei da Gravitação Universal $\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{q_{ij}^3}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)$, chegamos a equação

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{q_{12}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + \frac{Gm_1 m_3}{q_{13}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{Gm_2 m_1}{q_{21}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \frac{Gm_2 m_3}{q_{23}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) \\ m_3 \ddot{\mathbf{q}}_3 = \frac{Gm_3 m_1}{q_{31}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \frac{Gm_3 m_2}{q_{32}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $q_{ij} = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$ são chamadas de distâncias mútuas e G é a constante de gravitação universal.

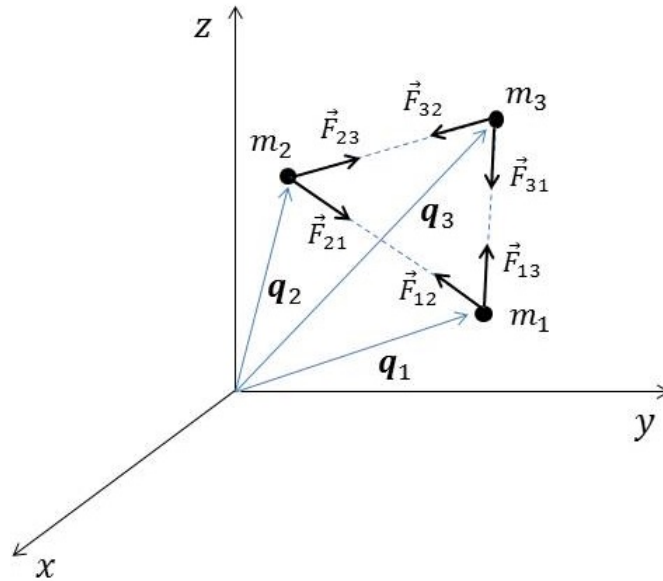


Figura 3.1: Problema dos três corpos.

A função escalar dos vetores posição

$$U = U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \left(\frac{Gm_1m_2}{q_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{q_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{q_{23}} \right)$$

é chamada o *Potencial Newtoniano do Problema dos Três Corpos*.

Denotando $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ e por $\nabla_{\mathbf{q}}U$ o gradiente da função U relativamente ao vetor $\mathbf{q}$, o sistema (3.1) assume a forma

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}}U(\mathbf{q}) \quad (3.2)$$

Seja $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$ momento linear do sistema, isto é, $\mathbf{p}_i = m_i\dot{q}_i$, $i = 1, 2, 3$. Podemos escrever o sistema (3.2) na seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{q}}U(\mathbf{q}), \end{cases}$$

que corresponde a um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p} - U(\mathbf{q}).$$

Com essa formulação temos que o estudo do problema dos três corpos se resume ao estudo de um sistema Hamiltoniano, com 9 graus de liberdade.

3.2 O Problema Restrito dos Três Corpos

O problema restrito dos três corpos consiste no estudo de um caso limite do problema de três corpos, no qual fazemos a suposição que a massa m_3 é infinitesimal ¹ de tal forma que ela não influencia no movimento dos corpos de massa m_1 e m_2 , chamados de binários, no entanto sua órbita é afetada por eles de forma usual. Isto é uma sensível aproximação da realidade, somente se a trajetória de m_3 não chegar muito próxima de m_1 ou m_2 . Matematicamente o que fazemos é

¹“O corpo infinitesimal” é em Mecânica Celeste um conceito bem definido. Corpo de massa tão próxima de zero que o limite desta massa variável, zero, é o corpo infinitesimal, e como sua massa aproxima-se de zero, seu movimento satisfaz as equações diferenciais, as quais no limite nulo para a massa variável define o movimento do corpo infinitesimal. É precisamente neste sentido que a massa infinitesimal é usada no problema restrito.

considerar $m_3 \rightarrow 0$, assim temos que o centro de massa ² do sistema é o centro de massa dos binários e a equação do movimento do corpo de massa m_3 é dada pela última equação (3.1), isto é,

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = \frac{Gm_1}{q_{13}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \frac{Gm_2}{q_{23}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \quad (3.3)$$

e o movimento do corpo m_2 relativamente ao corpo m_1 é definido pelo problema de dois corpos conseguido da seguinte forma. Subtraindo a primeira equação da segunda equação em (3.1) obtemos

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 - \ddot{\mathbf{q}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{q_{12}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + Gm_3 \left(\frac{1}{q_{23}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) - \frac{1}{q_{13}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) \right),$$

denotando $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$, a equação acima é equivalente a

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{q^3}\mathbf{q} + Gm_3 \left(\frac{1}{q_{23}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) - \frac{1}{q_{13}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) \right),$$

onde $q = \|\mathbf{q}\|$. Fazendo $m_3 = 0$, esta equação fica

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{q^3}\mathbf{q}, \quad (3.4)$$

o que corresponde a um *Problema de Kepler ou Problema de Força Central* ³, onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ é o vetor posição do corpo de massa m_2 em relação ao corpo de massa m_1 e G a constante de gravitação universal, na qual as soluções são completamente conhecidas. O estudo do movimento da massa m_3 é conhecido como problema restrito dos três corpos. Denote $\mu = G(m_1 + m_2)$. Da equação (3.4) temos que a energia potencial do sistema é dada por

$$U(\mathbf{q}) = \frac{\mu}{q},$$

onde μ é uma constante positiva, e com isto, temos que a função Hamiltoniana do sistema é

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|},$$

onde $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$, o que corresponde a energia total do sistema.

²Centro de massa é o ponto hipotético onde toda a massa de um sistema físico está concentrada e que se move como se todas as forças externas estivessem sendo aplicadas nesse ponto

³O problema de força central consiste no estudo do movimento de uma partícula P de massa m_2 que é atraída por uma outra partícula S de massa m_1 , a qual supõe-se que esta situada num ponto fixo do espaço, o qual pode ser tomado como a origem de um sistema de coordenadas inercial.

Sendo $r = q = \|\mathbf{q}\|$ a distância entre m_1 e m_2 , então temos que

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

onde $p = \frac{C^2}{\mu} = \frac{C^2}{G(m_1+m_2)}$ um parâmetro e ϵ é a excentricidade de sua órbita Kepleriana definida pelos corpos m_1 e m_2 e θ é a anomalia verdadeira.

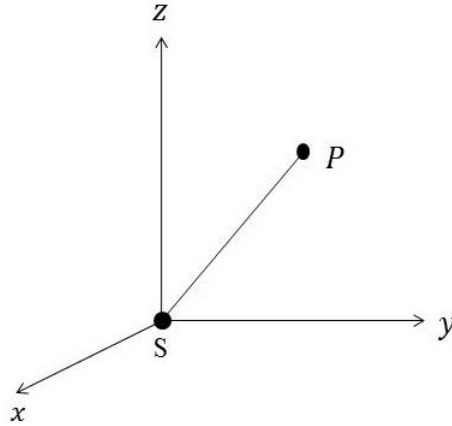


Figura 3.2: Problema da força central.

Dependendo do valor da excentricidade ϵ podem-se distinguir as seguintes variantes do problema restrito de três corpos:

- i) *O problema restrito hiperbólico*, quando a órbita do corpo m_2 é uma hipérbole ($\epsilon > 1$);
- ii) *O problema restrito elíptico*, quando a órbita do corpo m_2 é uma elipse ($0 < \epsilon < 1$);
- iii) *O problema restrito circular*, no qual a órbita do corpo m_2 é um círculo ($\epsilon = 0$);
- iv) *O problema restrito parabólico*, no qual o corpo m_2 move-se sobre uma parábola ($\epsilon = 1$);
- v) *O problema restrito linear*, no qual o corpo m_2 move-se sobre uma reta.

Se o corpo de massa infinitesimal m_3 permanece para todo tempo, no plano do movimento de m_1 e m_2 , dizemos que o problema restrito correspondente é

planar; se o corpo m_3 , em seu movimento, sai do plano de m_1 e m_2 falamos de problema restrito espacial.

Dois exemplos servem para ilustrar a importância do problema restrito. Sabe-se que depois do Sol, o planeta de maior massa é Júpiter, o qual move-se numa elipse de excentricidade pequena, podemos assumir como primeira aproximação que ela é um círculo. Além disso, existem dois grupos de pequenos asteroides Trojanos⁴ e Gregos, cujo movimento é controlado principalmente pelo Sol e Júpiter, uma primeira aproximação de seu movimento é dada por uma solução do problema restrito circular com o Sol e Júpiter como os primários.

O segundo importante exemplo diz respeito à teoria lunar, onde consideramos o movimento da Terra ao redor do Sol como circular. O corpo de massa infinitesimal aqui corresponde a Lua. De fato, a órbita da terra ao redor do Sol é uma elipse de modo que a lua orbita numa solução do problema restrito dos três corpos.

Uma outra forma de escrever as equações de movimento de m_3 consiste em definir o potencial

$$U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = G \left(\frac{m_1}{q_{13}} + \frac{m_2}{q_{23}} \right),$$

assim, (3.3) é equivalente ao sistema

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = \nabla_{\mathbf{q}_3} U(\mathbf{q}).$$

Esta é a forma de escrever as equações do movimento da massa m_3 num sistema de coordenadas genérico.

Vamos escrever estas equações num sistema de coordenadas conveniente (sistema de coordenadas giratória), no qual as equações do movimento assumem uma forma particularmente simples.

Para obter a forma conveniente das equações de movimento do corpo m_3 , introduzimos um sistema de coordenadas $Oxyz$, com origem no centro de massa dos corpos m_1 e m_2 e com o plano Ox coincidindo com o plano da órbita dos binários. Tomemos o eixo Oxy ao longo da reta que liga m_1 a m_2 , na direção m_1 , com a menor mudança do eixo Ox para o eixo Oy coincidindo com o sentido de

⁴Objetos trojanos são corpos astronômicos, tais como asteroides e satélites, que dividem e orbitam a uma determinada distância de uma órbita com um planeta ou satélite maior, mas não colidem com o último por que a órbita do primeiro está localizada em dois pontos de Lagrange de estabilidade, L_4 e L_5 , sessenta graus à frente e atrás do corpo principal.

rotação de m_2 relativa ao corpo m_1 . O eixo Oz forma com os eixos Ox e Oy um sistema de coordenadas com a regra da mão direita.

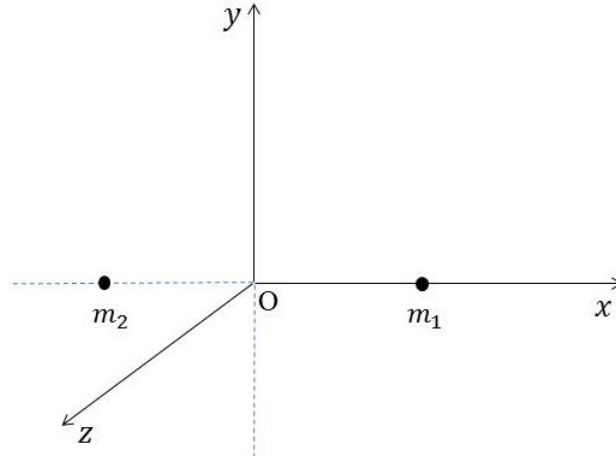


Figura 3.3: Movimento dos binários.

Defina um referencial móvel:

$$e_1 = \frac{\mathbf{q}}{r}, \quad e_2 = e_3 \times e_1, \quad e_3 = \frac{\mathbf{C}}{c},$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$, com $\mathbf{q}_2$ e $\mathbf{q}_1$ correspondendo respectivamente aos vetores posição de m_1 e m_2 , $\mathbf{C}$ é o momento angular (o qual é ortogonal ao plano do movimento dos binários), $r = q = \|\mathbf{q}\|$ e $c = \|\mathbf{C}\|$. Derivando estas relações obtemos

$$\dot{e}_1 = \dot{\theta}e_2, \quad \dot{e}_2 = -\dot{\theta}e_1 \quad \text{e} \quad \dot{e}_3 = 0, \quad (3.5)$$

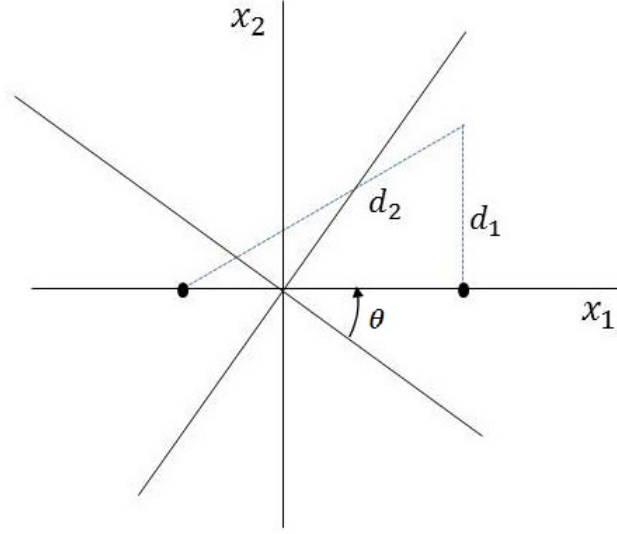


Figura 3.4: Sistema de coordenadas giratória.

onde θ representa o ângulo formado pelo vetor $\mathbf{q}$ e o eixo Ox (eixo das abscissas do sistema inercial fixado), logo temos que $\dot{\theta}$ representa a velocidade angular associado aos binários $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$, ou seja, $\frac{c}{q^2}$. Por outro lado, $m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 = 0$ e $q = \|\mathbf{q}_1\| + \|\mathbf{q}_2\|$, assim $\mathbf{q}_1 = \|\mathbf{q}_1\|e_1$ e $\mathbf{q}_2 = -\|\mathbf{q}_2\|e_1$. Logo,

$$\|\mathbf{q}_1\| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}q, \quad \|\mathbf{q}_2\| = \frac{m_1}{m_1 + m_2}q. \quad (3.6)$$

Seja $\mathbf{q}_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ o vetor posição do corpo de massa infinitesimal. Assim, pelas equações (3.5) temos

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = (\dot{x} - \dot{\theta}y)e_1 + (\dot{\theta}x + \dot{y})e_2 + \dot{z}e_3$$

e

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = (\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x)e_1 + (\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y)e_2 + \ddot{z}e_3 \quad (3.7)$$

e também verifica-se que

$$\nabla_{\mathbf{q}_3}U = U_x e_1 + U_y e_2 + U_z e_3.$$

Portanto, de (3.5) e (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x &= U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y &= U_y \\ \ddot{z} &= U_z \end{aligned} \quad (3.8)$$

com

$$U = U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = G \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right)$$

onde, de acordo com as equações (3.6), temos que

$$\begin{aligned} d_1 = r_{13} = q_{13} &= \sqrt{(x + \|\mathbf{q}_1\|)^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{m_2}{M}r\right)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_2 = r_{23} = q_{23} &= \sqrt{(x - \|\mathbf{q}_2\|)^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{m_1}{M}r\right)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

com $M = m_1 + m_2$.

Façamos agora a seguinte mudança de variáveis (devido a Nashville):

$$x = r\xi, \quad y = r\eta \text{ e } z = r\zeta. \quad (3.9)$$

Assim, $\dot{x} = \dot{r} + r\dot{\xi}$ e como $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$, com $p = \frac{c^2}{M}$ e $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$ temos

$$\dot{r} = \frac{\epsilon c}{p} \sin \theta.$$

Considerando o re-escalamento no tempo associado a anomalia verdadeira θ , onde $(\cdot)' = \frac{d}{d\theta}$, temos $\dot{\xi} = \frac{c}{r^2} \xi'$, logo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\epsilon c}{p} \xi \sin \theta + \frac{c}{r} \xi' \\ \ddot{x} &= \frac{c^2}{pr^2} \left(\epsilon \xi \cos \theta + \frac{p}{r} \xi'' \right) \\ &= \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 [\epsilon \xi \cos \theta + (1 + \epsilon \cos \theta) \xi'']. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{c}{r} \eta' + \frac{\epsilon c}{p} \eta \sin \theta \\ \ddot{y} &= \frac{c^2}{r^3} \eta'' + \left(\frac{\epsilon c^2 r^2}{p} \eta \sin \theta \right) \\ &= \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 [\epsilon \eta \cos \theta + (1 + \epsilon \cos \theta) \eta'']. \end{aligned} \quad (3.11)$$

e também

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \frac{c}{r}\zeta' + \frac{\epsilon c}{p}\zeta \sin\theta \\
\ddot{z} &= \frac{c^2}{pr^3} \left[\epsilon\zeta \cos\theta + \frac{p}{r}\zeta'' \right] \\
&= \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos\theta)^2 \left[\epsilon\zeta \cos\theta + (1 + \epsilon \cos\theta)\zeta'' \right].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Além disso,

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2} = \frac{r}{p^2} (1 + \epsilon \cos\theta)^2 \quad \text{e} \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\epsilon c^2}{p^4} (1 + \epsilon \cos\theta)^3 \sin\theta. \tag{3.13}$$

Por outro lado,

$$d_1 = r\sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad d_2 = r\sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

onde $\mu = \frac{m_2}{M}$ com $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$. Assim,

$$U(x, y, z) = \frac{G}{r} \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right),$$

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Logo, substituindo as relações (3.10), (3.11) e (3.13) em (3.8) obtemos,

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x &= \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos\theta)^3 \left(\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1 + \epsilon \cos\theta} \right) \xi \\
&= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \\
&= \frac{(1 + \epsilon \cos\theta)^2}{p^2} \frac{\partial W}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1 + \epsilon \cos\theta} \xi = \frac{p}{c^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos\theta} \frac{\partial W}{\partial \xi} \tag{3.14}$$

onde

$$W = W(\xi, \eta, \zeta) = G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right). \tag{3.15}$$

Analogamente verifica-se que

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2 y &= \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 [1 + \epsilon \cos \theta \eta'' - 2(1 + \epsilon \cos \theta)\xi' - \eta] \\
&= \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \eta} \\
&= \frac{(1 + \epsilon \cos \theta)^2}{p^2} \frac{\partial W}{\partial \eta},
\end{aligned}$$

assim

$$\eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \eta = \frac{p}{c^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad (3.16)$$

e por último

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \frac{c^2}{p^3} (\epsilon \zeta \cos \theta + (1 + \epsilon \cos \theta)) \zeta'' \\
&= \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{p^2} \frac{\partial W}{\partial \zeta},
\end{aligned}$$

desta forma tem-se que

$$\zeta'' + \frac{\epsilon \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \zeta = \frac{p}{c^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \quad (3.17)$$

Portanto, o sistema (3.8) nas novas variáveis e usando o re-escalamento no tempo é equivalente ao sistema dado pelas equações (3.14), (3.16) e (3.17), isto é, ao sistema

$$\begin{aligned}
\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \xi &= \frac{p}{c^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \\
\eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \eta &= \frac{p}{c^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\
\zeta'' + \frac{\epsilon \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \zeta &= \frac{p}{c^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial W}{\partial \zeta}.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Lembrando que $G = \frac{1}{M} \frac{c^2}{p}$ e $\mu = \frac{m_2}{M}$, temos que o potencial W definido em (3.15) pode ser escrito da forma

$$W = \frac{c^2}{p} \left(\frac{m_1}{M} \frac{1}{r_1} + \frac{m_2}{M} \frac{1}{r_2} \right) = \frac{c^2}{p} \left(\frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right).$$

Assim, o sistema (3.18) toma a forma

$$\begin{aligned}\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \xi &= \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial V}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \eta &= \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial V}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + \frac{\epsilon \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \zeta &= \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial V}{\partial \zeta}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

onde

$$V = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Introduzindo a função

$$\Omega = \Omega(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}\epsilon \zeta^2 \cos \theta + V,$$

as equações de movimento (3.18) são escritas na forma

$$\begin{aligned}\xi'' - 2\eta' &= \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Vamos agora obter a formulação Hamiltoniana deste sistema. Inicialmente faça:

$$p_\xi = \xi' - \eta, \quad p_\eta = \eta' + \xi, \quad p_\zeta = \zeta'.$$

Com isso, o sistema (3.20) pode ser escrito na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = p_\xi + \eta \\ \eta' = p_\eta - \xi \\ \zeta' = p_\zeta \\ p'_\xi = p_\eta - \xi + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \Omega_\xi \\ p'_\eta = -p_\xi - \eta + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \Omega_\eta \\ p'_\zeta = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \Omega_\zeta \end{array} \right.$$

que corresponde a um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi + \frac{\epsilon \cos \theta}{2(1 + \epsilon \cos \theta)}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta}\Omega.$$

Note que se consideramos o caso do problema restrito circular, ou seja, $\epsilon = 0$, então a função

$$\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \Omega$$

é uma integral primeira para o sistema (3.20), chamada *Integral de Jacobi*, onde C é a constante de Jacobi (constante de movimento), onde veremos com mais detalhes na seção seguinte.

3.3 O Problema Restrito Circular dos Três Corpos

Considere um sistema dinâmico isolado consistindo de três interações gravitacionalmente de massas pontuais m_1, m_2 e m_3 . Suponha, no entanto, que a terceira massa m_3 , seja tão menor do que os outros dois que tem um efeito desprezível em seu movimento. Suponha, ainda, que as duas primeiras massas, m_1 e m_2 , executam órbitas circulares em torno de seus centro de massa. A seguir, examinaremos esse problema simplificado, que se refere geralmente como *o Problema Circular Restrito de Três Corpos*. O problema sob investigação tem aplicações óbvias para o sistema solar.

Por exemplo, as duas primeiras massas podem representar o Sol e um planeta (lembrando-se que um determinado planeta e o Sol executam de fato órbitas quase circulares em torno do seu centro de massa), enquanto a terceira massa pode representar um asteroide ou um cometa (asteroides e cometas de fato têm massas muito menores do que o Sol ou qualquer um dos planetas).

Vamos definir um sistema de coordenadas cartesianas ξ, η, ζ em um referencial inercial cuja origem coincide com o centro de massa C das duas massas orbitais m_1 e m_2 . Além disso, seja o plano orbital dessas massas coincidir com o plano $\xi - \eta$, e que ambos estejam no eixo ξ no instante $t = 0$. Suponha que a seja a distância constante entre as duas massas em órbita, r_1 a distância constante entre massa m_1 e a origem, e r_2 a distância constante entre a massa m_2 e a origem. (Figura 3.2)

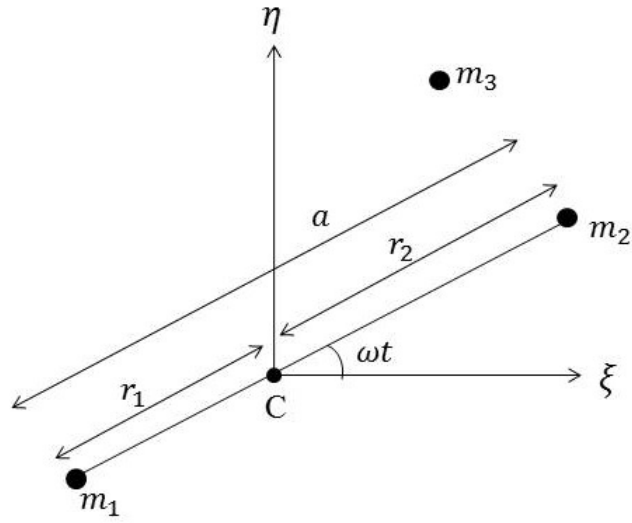


Figura 3.5: Problema restrito circular de três corpos.

Além disso, sabemos que a função

$$\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \Omega$$

representa a integral primeira para o sistema (3.20). Logo esse sistema tem a forma

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde Ω é definido por

$$\Omega = \Omega(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + V,$$

Fazendo a transformação de coordenadas

$$p_\xi = \xi' - \eta, \quad p_\eta = \eta' + \xi, \quad p_\zeta = \zeta'.$$

O sistema definido por (3.21) é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = p_\xi + \eta \\ \eta' = p_\eta - \xi \\ \zeta' = p_\zeta \\ p'_\xi = p_\eta - \xi + V_\xi \\ p'_\eta = -p_\xi - \eta + V_\eta \\ p'_\zeta = V_\zeta \end{array} \right. \quad (3.22)$$

que corresponde a um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - V. \quad (3.23)$$

definindo a função H , temos que o sistema (3.22) pode ser re-escrito da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = H_{p_\xi} \\ \eta' = H_{p_\eta} \\ \zeta' = H_{p_\zeta} \\ p_\xi = -H_\xi \\ p_\eta = -H_\eta \\ p_\zeta = -H_\zeta \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Assim, H representa a função Hamiltoniana associado ao sistema Hamiltoniano autônomo definido em (3.24), logo H é uma integral do movimento para o fluxo definido por (3.24). Notemos que

$$\frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \Omega,$$

donde,

$$H = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - V$$

Tomando a constante $H = \frac{C}{2}$, onde C é a constante de Jacobi, temos

$$0 \leq \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = \Omega + \frac{C}{2}.$$

3.4 Os Pontos de Libração

Em geral, o problema dos $n - \text{corpos}$ não apresenta soluções de equilíbrio, pois se $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ fosse uma solução de equilíbrio de (3.2) teríamos

$$\nabla_{\mathbf{q}} U(\mathbf{q}_0) = 0 \text{ e } \mathbf{p}_0 = 0$$

e, sendo

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

uma função homogênea de grau -1 em $\mathbf{q}$ e pela identidade de Euler⁵ para funções homogêneas concluiríamos que

$$U(\mathbf{q}_0) = -q \cdot \nabla_{\mathbf{q}} U(\mathbf{q}_0) = 0,$$

uma contradição. Assim, como caso particular, temos que o problema restrito dos três corpos não apresenta soluções de equilíbrio. Entretanto:

Teorema 3.4.1. *Nas coordenadas de Nashville definida em (3.9) temos cinco soluções de equilíbrio do problema restrito de três corpos, a qual L_1, L_2 e L_3 estão situados na reta que passa pelos binários e os outros dois L_4 e L_5 formam com os binários triângulos equiláteros.*

Demonstração: Provemos que as equações (3.20) admitem alguns pontos de equilíbrio nas coordenadas de Nashville ξ, η, ζ . Uma posição fixa (ξ_0, η_0, ζ_0) é solução de (3.20) se, e somente se, $\zeta_0 = 0$ e ξ_0 e η_0 satisfazem ao sistema de equações com duas incógnitas. Assim,

Seja $\Omega = \Omega(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + V$ e

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = 0. \end{cases}$$

⁵Identidade de Euler para função homogênea: Se $f(x)$ for uma função homogênea de grau k , diferenciável, então $x \cdot \nabla f(x) = k f(x)$

Então,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \xi + \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \eta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = -\epsilon \zeta \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \end{cases}$$

e, sendo

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

e fazendo

$$V = V(r_1, r_2),$$

$$r_1 = r_1(\xi, \eta, \zeta),$$

$$r_2 = r_2(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial V}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_{r_1}}{\sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \cdot 2(\xi + \mu) + \frac{1}{2} \frac{V_{r_2}}{\sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \cdot 2(\xi + \mu - 1) \\ &= \frac{V_{r_1}}{r_1} \cdot (\xi + \mu) + \frac{V_{r_2}}{r_2} \cdot (\xi + \mu - 1) \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \xi + \frac{V_{r_1}}{r_1} \cdot (\xi + \mu) + \frac{V_{r_2}}{r_2} \cdot (\xi + \mu - 1) = 0$$

$$\frac{\xi + \mu}{r_1} V_{r_1} + \frac{\xi + \mu - 1}{r_2} V_{r_2} = -\xi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{\partial V}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_{r_1}}{\sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \cdot 2\eta + \frac{1}{2} \frac{V_{r_2}}{\sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \cdot 2\eta \\ &= \frac{V_{r_1}}{r_1} \cdot \eta + \frac{V_{r_2}}{r_2} \cdot \eta \\ &= \left(\frac{V_{r_1}}{r_1} + \frac{V_{r_2}}{r_2} \right) \cdot \eta \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \eta + \left(\frac{V_{r_1}}{r_1} + \frac{V_{r_2}}{r_2} \right) \cdot \eta = 0$$

$$\frac{\eta}{r_1} V_{r_1} + \frac{\eta}{r_2} V_{r_2} = -\eta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= \frac{\partial V}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_{r_1}}{\sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \cdot 2\zeta + \frac{1}{2} \frac{V_{r_2}}{\sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \cdot 2\zeta \\ &= \frac{V_{r_1}}{r_1} \cdot \zeta + \frac{V_{r_2}}{r_2} \cdot \zeta \\ &= \left(\frac{V_{r_1}}{r_1} + \frac{V_{r_2}}{r_2} \right) \cdot \zeta \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = -\epsilon \zeta \cos \theta + \left(\frac{V_{r_1}}{r_1} + \frac{V_{r_2}}{r_2} \right) \cdot \zeta = 0$$

$$\left(\frac{V_{r_1}}{r_1} + \frac{V_{r_2}}{r_2} \right) \cdot \zeta = \epsilon \zeta \cos \theta$$

$$\zeta = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\xi + \mu}{r_1} V_{r_1} + \frac{\xi + \mu - 1}{r_2} V_{r_2} = -\xi \\ \frac{\eta}{r_1} V_{r_1} + \frac{\eta}{r_2} V_{r_2} = -\eta \end{cases} \quad (3.25)$$

O sistema de equações (3.25) é equivalente ao conjunto dos dois sistemas de equações, e sabendo que:

$$\eta \cdot \left(\frac{V_{r_1}}{r_1} + \frac{V_{r_2}}{r_2} \right) = -\eta$$

$$\frac{V_{r_1}}{r_1} + \frac{V_{r_2}}{r_2} = -1$$

$$V_{r_1} + \frac{r_1}{r_2} V_{r_2} = -r_1$$

$$V_{r_1} = -\frac{r_1}{r_2} V_{r_2} - r_1$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = 0 \\ \frac{\xi + \mu}{r_1} V_{r_1} + \frac{\xi + \mu - 1}{r_2} V_{r_2} = -\xi \end{array} \right. \quad (3.26)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{r_1} = -\frac{r_1}{r_2} V_{r_2} - r_1 \\ \frac{\xi + \mu}{r_1} V_{r_1} + \frac{\xi + \mu - 1}{r_2} V_{r_2} = -\xi \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Cada solução dos sistemas (3.26) e (3.27) corresponde, no sistema de coordenadas $O\xi\eta\zeta$, a uma solução de equilíbrio das equações de movimento (3.20). No sistema de coordenadas $O\xi\eta\zeta$, os corpos binários estão fixos e as soluções de equilíbrio correspondem aqueles movimentos particulares do corpo de massa infinitesimal, onde os três corpos formam uma configuração invariável.

Vamos obter as soluções de equilíbrio de (3.9) ou equivalentemente, as soluções (3.26) e (3.27). Consideremos, inicialmente, o sistema (3.27). Substituindo a expressão para V_{r_1} da primeira equação (3.27) na segunda equação, obtemos:

$$\frac{\xi + \mu}{r_1} \cdot \left(-\frac{r_1}{r_2} V_{r_2} - r_1 \right) + \frac{\xi + \mu - 1}{r_2} V_{r_2} = -\xi$$

$$-\frac{(\xi + \mu)}{r_2} V_{r_2} - \xi - \mu + \frac{\xi + \mu - 1}{r_2} V_{r_2} = -\xi$$

$$-(\xi + \mu) V_{r_2} - \mu r_2 + (\xi + \mu) V_{r_2} - V_{r_2} = 0$$

$$-\mu r_2 - V_{r_2} = 0$$

$$V_{r_2} = -\mu r_2,$$

e, então, da primeira equação de (3.27) segue-se que:

$$V_{r_1} = -\frac{r_1}{r_2} \cdot (-\mu r_2) - r_1$$

$$V_{r_1} = \mu r_1 - r_1 = (\mu - 1)r_1$$

$$V_{r_1} = -(1 - \mu)r_1$$

Usando a expressão $V = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$, concluímos que o sistema de equações (3.27) tem uma única solução real, a qual $r_1 = r_2 = 1$. Ou seja, derivando V em relação a r_1 e r_2 obtemos:

$$V_{r_1} = -(1 - \mu)r_1^{-2} = \frac{\mu - 1}{r_1^2},$$

donde

$$(\mu - 1)r_1 = \frac{\mu - 1}{r_1^2}$$

$$r_1^3 = 1$$

$$r_1 = 1$$

e também,

$$V_{r_2} = -\mu r_2^{-2} = -\frac{\mu}{r_2^2},$$

donde

$$-\mu r_2 = -\frac{\mu}{r_2^2},$$

$$r_2^3 = 1$$

$$r_2 = 1$$

Esta solução corresponde a um dos pontos de libração triangulares L_4 e L_5 . O ponto L_4 é dada pelas coordenadas $\left(\frac{1 - 2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e o ponto L_5 tem coordenadas $\left(\frac{1 - 2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ no sistema $O\xi\eta\zeta$. Ele é simétrico ao ponto L_4 , relativamente ao eixo $O\xi$. Ou seja, temos que:

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

Fazendo

$$\zeta_0 = 0, \quad r_1 = 1 \quad \text{e} \quad r_2 = 1$$

Então,

$$1 = r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2}$$

$$1 = r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2}$$

Assim,

$$\begin{cases} (\xi + \mu)^2 + \eta^2 = 1 \\ (\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 = 1 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação pela primeira, obtemos:

$$(\xi + \mu)^2 - (\xi + \mu - 1)^2 = 0$$

$$(\xi + \mu)^2 = (\xi + \mu - 1)^2$$

$$(\xi + \mu)^2 = (\xi + \mu)^2 - 2(\xi + \mu) + 1$$

$$-2(\xi + \mu) + 1 = 0$$

$$\xi + \mu = \frac{1}{2}$$

$$\xi = \frac{1}{2} - \mu$$

$$\xi = \frac{1 - 2\mu}{2}$$

Substituindo na primeira equação, temos:

$$\left(\frac{1 - 2\mu}{2} + \mu \right)^2 + \eta^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + \eta^2 = 1$$

$$\eta^2 = \frac{3}{4}$$

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Os pontos de libração colineares são dados pelo primeiro sistema de equações (3.26), o qual, para $\eta = \zeta = 0$, é escrito na forma:

$$f(\xi) = \xi - (1 - \mu) \frac{|\xi + \mu|}{(\xi + \mu)^3} - \mu \frac{|\xi + 1 - \mu|}{(\xi + 1 - \mu)^3} = 0. \quad (3.28)$$

A função $f(\xi)$ é contínua e limitada em todo o eixo real, exceto nos valores de ξ iguais à $\pm\infty, -\mu$ e $1 - \mu$, onde ela se torna infinita. Calculando a derivada da função $f(\xi)$ temos que,

$$f'(\xi) = 1 + 2(1 - \mu) \frac{|\xi + \mu|}{(\xi + \mu)^4} + 2\mu \frac{|\xi + 1 - \mu|}{(\xi + 1 - \mu)^4}.$$

Em cada um dos três intervalos

$$(-\infty, -\mu), \quad (-\mu, 1 - \mu), \quad (1 - \mu, +\infty), \quad (3.29)$$

em que o eixo numérico é decomposto pelos pontos de descontinuidade, a função $f(\xi)$ é estritamente crescente, pois $f'(\xi)$ é sempre positiva. Usando os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) &= -\infty, & \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) &= \infty \\ \lim_{\xi \rightarrow \mu^-} f(\xi) &= \infty, & \lim_{\xi \rightarrow \mu^+} f(\xi) &= -\infty \\ \lim_{\xi \rightarrow (1-\mu)^-} f(\xi) &= \infty, & \lim_{\xi \rightarrow (1-\mu)^+} f(\xi) &= -\infty. \end{aligned}$$

Concluimos que, em cada um dos intervalos (3.29) existe uma, e somente uma, solução $\xi = \xi_0$ da equação (3.28). Estas soluções dão três pontos de libração colineares. Por tradição é estabelecida que o equilíbrio que está no intervalo $(-\infty, -\mu)$ é denotado por L_3 , o equilíbrio do intervalo $(-\mu, 1 - \mu)$ é denotado por L_1 e, finalmente, o ponto de libração L_2 fica no intervalo $(1 - \mu, +\infty)$. ■

As soluções de equilíbrio nas coordenadas de Nashville são chamados de pontos de libração ou soluções de equilíbrio relativo do problema restrito dos três corpos. Num sistema de coordenadas fixas, os pontos de libração são soluções no qual os três corpos têm uma configuração invariável, de modo que a cada instante no tempo os três corpos possuem a mesma configuração a menos de rotações e translações. A disposição esquemática dos pontos de libração do problema restrito dos três corpos está mostrada na figura abaixo. Os pontos de libração L_1, L_2 e L_3 são chamados de pontos de libração colineares, já os pontos L_4 e L_5 são chamados de pontos de libração triangulares.

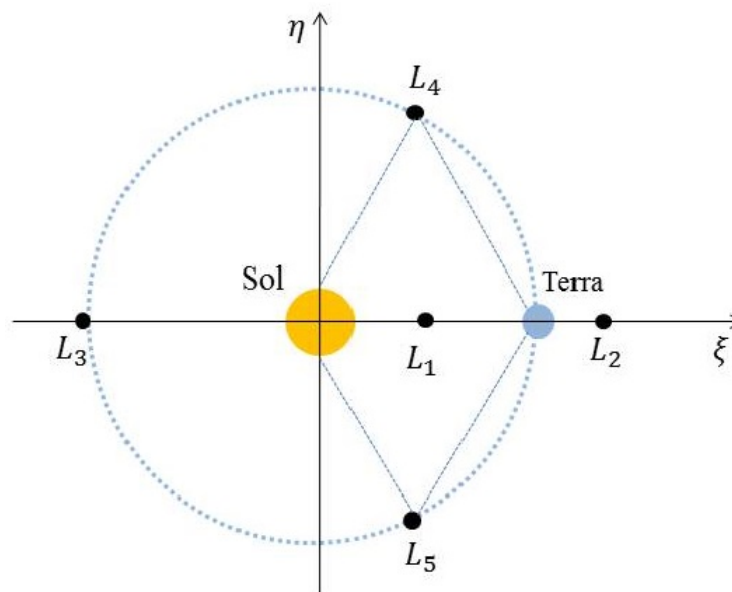


Figura 3.6: Pontos de libração do problema restrito dos três corpos no sistema Sol-Terra.

No sistema de coordenadas fixas os pontos de libração correspondem aqueles movimentos particulares no problema dos três corpos onde os binários e o corpo de massa infinitesimal descrevem órbitas Keplerianas semelhantes, relativamente ao seu centro de massa comum.

Os pontos de libração L_1 , L_2 e L_3 foram descobertos por Leonhard Paul Euler em 1767, enquanto que L_4 e L_5 , por Joseph-Louis Lagrange em 1772. No início, logo depois da descoberta dos pontos de libração, pensava-se que eles representavam apenas interesse teórico, como chegou a afirmar Lagrange. Mas, a descoberta, no ano de 1906, de um grupo de asteroides movendo-se na vizinhança dos pontos de libração Lagrangeanos do sistema Sol-Júpiter mostrou o grande valor prático dos pontos de libração para o estudo do movimento dos corpos cósmicos no sistema solar. Em tempos bem recentes, o interesse nos pontos de libração cresceu bastante em virtude das necessidades práticas da pesquisa cósmica. Existem projetos de lançamentos de satélites artificiais na vizinhança dos pontos de libração do sistema solar e, em primeiro lugar, do sistema Terra-Lua. No sistema Sol-Terra, o ponto de libração L_1 é utilizado pela NASA como base para o satélite *Solar and Heliospheric Observatory Satellite SOHO*, enquanto L_2 serve como base para o satélite WMAP. Frequentemente, enfatiza-se a importância da característica dinâmica singular dos pontos de libração sob o ponto

de vista da astrodinâmica, da geofísica e da exploração. Ainda mais, os pontos de libração despertam o interesse dos engenheiros em virtude da possibilidade do interesse prático de suas aplicações: para a conexão com a Lua, para encontros na vizinhança da Lua e dos planetas, para a transferência interplanetária, para a investigação da esfera magnética da terra e para outros fins. Sabe-se que os pontos L_1 e L_2 do sistema Sol-Terra são instáveis e que é necessário ajustar a escala orbital a cada 23 dias aproximadamente, até se atingir novamente um ponto de equilíbrio.

O ponto L_3 também se encontra ao longo da mesma reta que liga L_1 e L_2 , mas numa posição simétrica oposta ao centro das massas. A NASA não encontrou, ainda, uma funcionalidade para o ponto L_3 . O Sol estará sempre entre este ponto e um observador localizado na Terra, impedindo a sua visualização direta. Foi a partir desta premissa que apareceu a teoria de um “Planeta X” no ponto de L_3 , tópico popular em ficção científica leiga. A instabilidade orbital não permitiria tal astro naquele local.

Os pontos L_4 e L_5 situam-se sobre a órbita terrestre em posições simétricas em relação à Terra. As direções de ambos os pontos formam ângulos de sessenta graus com a reta que une os dois corpos principais. Dependendo da relação entre as massas dos dois corpos, estes pontos podem ser estáveis ou instáveis. Eles são estáveis para os sistemas gravitacionais Sol-Terra, Sol-Júpiter e Terra-Lua.

3.5 Estabilidade Linear dos Pontos de Libração

Nesta seção, vamos estudar a estabilidade linear dos cinco pontos de libração L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 do problema restrito dos três corpos no caso espacial circular.

3.5.1 O Caso Planar Circular

Por comodidade, nesta seção, chamaremos as variáveis (ξ, η) que definiam o problema restrito circular dos três corpos, simplesmente de (x_1, x_2) e as variáveis (p_ξ, p_η) de (y_1, y_2) . Sabemos que o Hamiltoniano definido neste problema é:

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + (y_1x_2 - y_2x_1) - V \quad (3.30)$$

onde Ω é definido por

$$\Omega = \Omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + V$$

e V é definido por

$$V = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

com

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

A matriz da parte linear do sistema associada ao sistema Hamiltoniano correspondente a (3.30) tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_{x_1 x_1} & V_{x_1 x_2} & 0 & 1 \\ V_{x_1 x_2} & V_{x_2 x_2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

onde

$$V_{x_1 x_1} = \Omega_{x_1 x_1} - 1, \quad V_{x_1 x_2} = \Omega_{x_1 x_2} \quad \text{e} \quad V_{x_2 x_2} = \Omega_{x_2 x_2} - 1.$$

Vamos lembrar que no problema restrito circular dos três corpos temos cinco soluções de equilíbrio, duas dadas explicitamente por

$$L_4 = \left(\frac{1 - 2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{e} \quad L_5 = \left(\frac{1 - 2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

e três da forma $L_i = (x^*, 0)$, $i = 1, 2, 3$ onde x^* satisfaz uma das três possibilidades:

- a) $-\infty < x_1 < -\mu$, onde $r_1 = -x_1 - \mu$, $r_2 = 1 - x_1 - \mu$, $r_2 = r_1 + 1$;
- b) $-\mu < x_1 < 1 - \mu$, onde $r_1 = x_1 + \mu$, $r_2 = 1 - x_1 - \mu$, $r_2 = 1 - r_1$;
- c) $1 - \mu < x_1 < \infty$, onde $r_1 = x_1 + \mu$, $r_2 = x_1 + \mu - 1$, $r_2 = r_1 - 1$.

Vamos estudar a estabilidade linear dessas soluções particulares do problema restrito dos três corpos. Inicialmente, fazendo

$$s = (1 - \mu)r_1^{-3} + \mu r_2^{-3} > 0,$$

e por meio de cálculos simples, obtemos

$$\Omega_{x_1 x_1} = 1 + 2s - 3x_2 \left[(1 - \mu)r_1^{-5} + \mu r_2^{-5} \right],$$

$$\Omega_{x_1 x_2} = 3x_2 \left[(1 - \mu)(x_1 + \mu - 1)r_1^{-5} + \mu(x_1 + \mu)r_2^{-5} \right],$$

$$\Omega_{x_2 x_2} = 1 - s + 3x_2^2 \left[(1 - \mu)r_1^{-5} + \mu r_2^{-5} - 5 \right].$$

	$\Omega_{x_1x_1}$	$\Omega_{x_1x_2}$	$\Omega_{x_2x_2}$	$\Omega_{x_1x_2}\Omega_{x_2x_2} - \Omega_{x_1x_2}^2$
L_1	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_2	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_3	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_4	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$
L_5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$

Tabela 3.1: Derivadas de segunda ordem no problema restrito.

Com base nisso, obtemos a tabela:

O polinômio característico de (3.31) é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (4 - \Omega_{x_1x_1} - \Omega_{x_2x_2})\lambda^2 + \Omega_{x_1x_2}\Omega_{x_2x_2} - \Omega_{x_1x_2}^2 = 0 \quad (3.32)$$

Proposição 3.5.1. *Nos pontos colineares, a matriz (3.31) tem dois autovalores reais e dois imaginários puros.*

Demonstração: Tem-se da tabela acima que numa solução co-linear:

$$\Omega_{x_1x_1} > 0 \quad \text{e} \quad \Omega_{x_1x_2} = 0.$$

Mostramos a seguir que $\Omega_{x_1x_1} < 0$. Analisamos somente a solução de equilíbrio dada pela restrição do item (c), isto é, para o equilíbrio $(x^*, 0)$ com $1 - \mu < x^*$, pois a justificativa nos outros casos é análoga. Neste caso temos,

$$r_1 = x^* + 1 \quad \text{e} \quad r_2 = x^* - 1 + \mu$$

Além disso, x^* satisfaz a equação:

$$x^* - \frac{1 - \mu}{r_1^2} - \frac{\mu}{r_2^2} = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{1 - \mu}{r_1^2} = x^* - \frac{1 - \mu}{r_1^2} = r_1 - \mu - \frac{1 - \mu}{r_1^2}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Omega_{x_1 x_1} &= 1 - s \\
&= 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \\
&= 1 - \frac{1}{r_1^2} \left[r_1 - \mu - \frac{\mu}{r_2^2} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] \\
&= 1 - \frac{\mu}{r_1} \left[1 - \frac{1}{r_2^3} (r_2 - r_1) \right] \\
&= \frac{\mu}{r_1} \left[1 - \frac{1}{r_2} \right] < 0,
\end{aligned}$$

pois $r_1 = 1 + r_2$ e $0 < r_2 < 1$. Dessa forma,

$$B = -\Omega_{x_1 x_1} \Omega_{x_2 x_2} > 0.$$

Assim, de (3.32) segue a conclusão da proposição.

Da proposição 3.5.1 e do Teorema 1.3.4 segue que:

Teorema 3.5.2. *Os pontos de libração L_1, L_2 e L_3 , do problema restrito planar circular dos três corpos, são linearmente instáveis.*

No caso das soluções de equilíbrio Lagrangeanas, novamente pelo Teorema 1.3.4, temos o seguinte Teorema sobre estabilidade linear:

Teorema 3.5.3. *No problema restrito circular planar dos três corpos temos:*

- i) Para os valores de μ no intervalo $0 < \mu < \mu_R$, onde $\mu_R = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$, os pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito dos três corpos planar circular os equilíbrios são linearmente estáveis;*
- ii) Para $\mu = \mu_R$, os pontos de libração L_4 e L_5 são linearmente instáveis;*
- iii) Para $\mu_R < \mu < \frac{1}{2}$, os pontos de libração L_4 e L_5 são linearmente instáveis.*

Demonstração: Neste caso, o polinômio característico da matriz da parte linear é dada por

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu),$$

e, portanto, se denotarmos $\delta = \delta(\mu) = 27\mu(1 - \mu)$, temos que os autovalores da matriz da parte linear são

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \delta(\mu)}}{2}}$$

- a) A equação do segundo grau $\delta(\mu) = 1$ tem uma raiz positiva dada por $\mu_R = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$;
- b) Se $\delta(\mu) < 1$ (ou equivalentemente $0 < \mu < \mu_R$), então os autovalores são imaginários puros e distintos donde, pelo Teorema 1.3.4, temos a estabilidade linear de L_4 e L_5 ;
- c) Se $\delta(\mu) > 1$ (ou $\mu_R < \mu < \frac{1}{2}$), temos dois pares de autovalores complexos com parte real não nula e, também pelo Teorema 1.3.4, temos a instabilidade linear do equilíbrio.

Vamos, agora, analisar o caso onde $\mu = \mu_R = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$. Neste caso, temos dois autovalores imaginários puros, a saber $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}i}{2}$. A matriz da parte linear, neste caso, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovetores são

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{23}}{5}, 1, -\frac{1}{5}, -\frac{\sqrt{23}}{5} \right) + i \left(-\frac{4\sqrt{2}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{46}}{10}, -\frac{3\sqrt{2}}{10} \right)$$

$$e_2 = \left(-\frac{\sqrt{23}}{5}, 1, -\frac{1}{5}, -\frac{\sqrt{23}}{5} \right) + i \left(\frac{4\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{\sqrt{46}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10} \right),$$

ou seja, ela não é diagonalizável e, portanto, pelo Teorema 1.3.4 segue a instabilidade linear do equilíbrio neste caso.

3.5.2 O Caso Espacial Circular

Vamos, agora, estudar a estabilidade linear do pontos de libração do problema restrito espacial circular dos três corpos. Por comodidade, nesta seção, chamaremos as variáveis (ξ, η, ζ) que definiam o problema restrito circular dos três corpos, simplesmente de (x_1, x_2, x_3) e as variáveis (p_ξ, p_η, p_ζ) de (y_1, y_2, y_3) . Sabemos que o Hamiltoniano definido neste problema é:

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + (y_1x_2 - y_2x_1) - \Omega.$$

Neste caso, temos as seguintes propriedades:

a) A matriz da parte linear é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_{x_1x_1} & V_{x_1x_2} & V_{x_1x_3} & 0 & 1 & 0 \\ V_{x_1x_2} & V_{x_2x_2} & V_{x_2x_3} & -1 & 0 & 0 \\ V_{x_1x_3} & V_{x_2x_3} & V_{x_3x_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

b) No caso co-linear devemos adicionar os autovalores imaginários puros

$$\lambda_3 = \pm i \sqrt{V_{x_3x_3}(x_j^*, 0, 0)} = \pm i \sqrt{\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}};$$

c) No caso das soluções equiláteras L_4 e L_5 , temos que o polinômio característico é dado por:

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)),$$

ou seja, os autovalores são

$$\pm i, \quad \pm i\omega_1, \quad \pm i\omega_2.$$

Portanto, no caso espacial podemos concluir os seguinte Teorema:

Teorema 3.5.4. *No problema restrito circular espacial dos três corpos temos:*

i) Os pontos de libração L_1, L_2 e L_3 do problema restrito espacial circular dos três corpos são linearmente instáveis para qualquer valor de μ ;

- ii) Para os valores de μ no intervalo $0 < \mu < \mu_R$, onde $\mu_R = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$, os pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito dos três corpos espacial circular os equilíbrios são linearmente estáveis;
- iii) Para $\mu = \mu_R$, os pontos de libração L_4 e L_5 são linearmente instáveis;
- iv) Para $\mu_R < \mu < \frac{1}{2}$, os pontos de libração L_4 e L_5 são linearmente instáveis.

3.6 Estabilidade Normal de L_4 e L_5

Os problemas de maior interesse sobre os pontos de libração são os de existência, estabilidade e construção de soluções periódicas em sua vizinhança. Já mostramos a existência dos cinco pontos de libração do problema dos três corpos, que L_1, L_2 e L_3 são instáveis e que L_4 e L_5 são linearmente estáveis para $\mu \neq \mu_R$. Em geral, no caso espacial, o problema de determinar a natureza da estabilidade no sentido de Lyapunov de L_4 e L_5 é um problema em aberto. No entanto, há muitos resultados sobre a estabilidade formal desses pontos. Um tipo particular de estabilidade formal, onde a parte quadrática da função Hamiltoniana admite uma integral primeira na forma de uma série de potências formal definida positiva ou negativa, é a estabilidade normal.

Nosso objetivo nesta seção é estudar a estabilidade normal dos pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito espacial circular dos três corpos, aplicando os resultados vistos na capítulo anterior dessa dissertação.

Conforme vimos neste capítulo, o problema restrito espacial circular dos três corpos trata do movimento de uma partícula m_3 infinitesimal que está sujeita à gravidade influenciada por duas partículas de massa m_1 e m_2 no espaço tridimensional, além disso a função Hamiltoniana escrita nas coordenadas giratórias x_1, x_2 e x_3 foi apresentado em (3.23), a qual é dada por

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + y_1x_2 - y_2x_1 - \Omega \\
&= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (y_2x_1 - y_1x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - V \\
&= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (y_2x_1 - y_1x_2) \\
&\quad - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x_1 + \mu)^2 + x_2^2 + x_3^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 - 1 + \mu)^2 + x_2^2 + x_3^2}}.
\end{aligned}$$

O parâmetro μ representa o quociente $m_1/(m_1 + m_2)$ e assumindo que $m_1 \geq m_2$ então μ está em $(0, 1/2)$. As massas m_1 e m_2 estão localizadas nos pontos $(-\mu, 0, 0)$ e $(1 - \mu, 0, 0)$, respectivamente.

O sistema Hamiltoniano H tem cinco equilíbrios no sistema de coordenadas giratórios x_1, x_2 e x_3 , os pontos de Euler L_1, L_2 e L_3 e os pontos de Lagrange L_4 e L_5 . Os pontos L_1, L_2 e L_3 estão situados no eixo ξ enquanto as coordenadas de L_4 e L_5 são da forma $(1 - 2\mu/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $(1 - 2\mu/2, -\sqrt{3}/2, 0)$, respectivamente.

Os pontos L_1, L_2 e L_3 são instáveis, conforme vimos na seção anterior. Portanto nosso foco será o caráter de estabilidade do L_4 e L_5 . Enquanto a estabilidade no caso planar $\zeta = p_\zeta = 0$ tem sido amplamente estudado, o caso espacial é mais difícil e a questão da estabilidade no sentido de Lyapunov permanece uma questão em aberto. Levando em conta os valores dos momentos para esses pontos, no espaço de fase na sexta dimensão as coordenadas de L_4 e L_5 são $(1 - 2\mu/2, \pm\sqrt{3}/2, 0, \mp\sqrt{3}/2, 1 - 2\mu/2, 0)$ (os sinais superiores para L_4 e os inferiores para L_5). Mudando a origem para L_4 (ou para L_5), linearizando H em torno da origem, dando o mesmo nome às coordenadas e descartando os termos constantes, o Hamiltoniano na vizinhança do L_4 e L_5 assume a forma $H = H_2 + \dots$, onde

$$H_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (y_2x_1 - y_1x_2) + \frac{1}{8}x_1^2 \pm \frac{3\sqrt{3}(2\mu - 1)}{4}x_1x_2 - \frac{5}{8}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \dots,$$

onde os três pontos representam os termos de ordem maiores que dois.

A matriz da parte linear é dada por

$$A = J \cdot Hess(H_2) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \pm \frac{3\sqrt{3}(2\mu-1)}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pm \frac{3\sqrt{3}(2\mu-1)}{4} & \frac{5}{4} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os autovalores associados são $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$ e $\pm\lambda_3$ com

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{-1 - \sqrt{27\mu^2 - 27\mu + 1}}}{\sqrt{2}}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{27\mu^2 - 27\mu + 1}}}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = i.$$

Quando $\mu = \mu_R = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$, isto é a razão crítica de Routh, os equilíbrios são do tipo foco-centro, portanto instáveis, assim restringimos μ à $(0, \mu_R]$. Nesse intervalo os autovalores $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$ e $\pm\lambda_3$ são todos imaginários puros. Além disso, em $(0, \mu_R)$ os autovetores correspondentes formam uma base de $\mathbb{R}^6$, então o sistema linear é diagonalizável, de modo que o sistema correspondente é linearmente estável. Introduzimos as frequências $\omega_j = -\lambda_j i$, com $\omega_j > 0$ para $j = 1, 2, 3$. Note que $0 < \omega_2 < \sqrt{2}/2 < \omega_1 < 1$, $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$ e $\omega_3 = 1$. Neste caso, com base no Teorema 1.5.1 construímos uma mudança simplética de coordenadas de Birkhoff $(x, y) \mapsto (X, Y)$ que transformam os termos quadráticos do Hamiltoniano em

$$\mathbb{H} = -\frac{\omega_1}{2}(X_1^2 + Y_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(X_2^2 + Y_2^2) + \frac{\omega_3}{2}(X_3^2 + Y_3^2).$$

Note que $\mathbb{H}$ não é definido positivo nem definido negativo, de modo que não podemos aplicar o Teorema de Dirichlet-Lagrange. Mudando para as coordenadas ação-ângulo, temos que

$$\mathbb{H} = -\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3.$$

Vamos analisar dois casos, sem perda de generalidade: (i) $\omega_j > 0$ para todo j , ou (ii) $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0$ e $\omega_3 > 0$.

No caso (i), temos que $\mathbb{H}_1 = -\omega_1 r_1$ é definido negativo e $\mathbb{H}_2 = \omega_2 r_2$ e $\mathbb{H}_3 = \omega_3 r_3$ são definidos positivo, de modo que a condição de Moser-Weinstein é verificada.

No caso (ii) a condição de Moser-Weinstein é satisfeita se, e somente se, os quocientes ω_2/ω_1 e ω_3/ω_1 são irracionais. Observemos que $0 < \omega_2/\omega_1 < 1$ e $1 < \omega_3/\omega_1 < \sqrt{2}$. Há um número infinito de valores de μ tal que $\omega_2/\omega_1 = r \in \mathbb{Q}$, com $r \in (0, 1)$ e $\omega_3/\omega_1 = 1/s \in \mathbb{Q}$, com $s \in (1/\sqrt{2}, 1)$, dado por

$$\mu_r = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{27r^4 + 38r^2 + 27}}{6\sqrt{3}(r^2 + 1)}, \quad \mu_s = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{48s^4 - 48s^2 + 81}}{18}. \quad (3.33)$$

Note que ω_1 e ω_2 são racionalmente independentes excluindo os valores $\mu = \mu_r$, enquanto ω_1 e ω_3 são racionalmente independentes excluindo os valores $\mu = \mu_s$. As três frequências podem ser racionalmente independentes quanto $\mu_r = \mu_s$ e r e

s são números racionais. Ocorre que $s = 1/\sqrt{r^2 + 1}$, $r = m/n$ com m e n números inteiros tal que $\sqrt{m^2 + n^2}$ também é inteiro.

Por exemplo,

- a) Se $m = 3$ e $n = 4$, então $r = 3/4$, $s = 4/5$ e $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (4/5, 3/5, 1)$;
- b) Se $m = 5$ e $n = 12$, então $r = 5/12$, $s = 12/13$ e $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (12/13, 5/13, 1)$.

Considerando o Teorema 2.3.1 acabamos de provar o seguinte Teorema:

Teorema 3.6.1. *Os pontos de Lagrange L_4 e L_5 são normalmente estáveis no problema restrito espacial circular de três corpos para todos os valores de $\mu \in (0, \mu_R)$, exceto para $\mu = \mu_r$ e $\mu = \mu_s$ dado em (3.33) com r e s números racionais tais que $r \in (0, 1)$ e $s \in (1/\sqrt{2}, 1)$.*

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] CABRAL, H., MEYER, K. R. *Stability of Equilibria and Fixed Points of Conservative Systems*, p. 1351 - 1362, 1999.
- [3] CABRAL, H., VIDAL C. *Introdução à Mecânica Celeste*, Agosto, 1999.
- [4] CHETAEV, N.G. *Stability of motion*. English translation. Pergamon Press, Book No. 090505.1961.
- [5] DEPRIT, A. *Canonical transformations depending on a small parameter*. *Celestial Mechanics*, [Netherlands], v. 72, p. 173-179, 1969.
- [6] DOS SANTOS, F. *Formas Normais e Estabilidade de Equilíbrios para Sistemas Hamiltonianos*. 211f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2004.
- [7] DOS SANTOS, F. *Normal stability of autonomous and periodic linear Hamiltonian systems*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 41 (2018) 401-411.
- [8] DOS SANTOS, F., MANSILLA J. E., VIDAL C., *Stability of equilibrium solutions of autonomous and periodic Hamiltonian systems with n -degrees of freedom in the case of single resonance*, *J. Dyn. Differential Equations* 22 (2010) 805-821.
- [9] FITZPARTICK, R. *an introduction to Celestial Mechanics*, Cambridge University Press, 2012.
- [10] GARCIA, M.V.P., BARROS, I.Q. *Mecânica Analítica Clássica*. Edgard Blucher. São Paulo, 1995.

- [11] HALE, J.K., *Ordinary Differential Equations*. [S.1.]: Wiley - interscience, 1969.
- [12] HENRARD, J. *Concerning The Genealogy Of Long Period Families At L_4* . Astronom. Astrophys., [S.1.], v.5, p. 45-52, 1970.
- [13] HENRARD, J. *On perturbation theory using Lie transforms*. Celestial Mechanics., [S. 1.], v. 3, p. 107-120, 1970.
- [14] HORI, G. *Theory of general perturbations with unspecific canonical variables*. Publ. Astron. Soc. Japan, Japan, v. 18, p. 287-296, 1966.
- [15] KAMEL, A. *Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations*. Celestial Mechanics, [S. 1.], v. 3, p. 90-99, 1970.
- [16] LYAPUNOV. A. M. *General Problem of Stability of Motion*. Gostekhizdat: Obshchaya Zadacha ob Ustoichivosti Dvizheniya. 1950.
- [17] MARKEEV, A. P. *Linear Hamiltonian Systems and some applications to the problem of stability of motion of satellites relative to the center of mass*. Moscow-Izhe, 2009.
- [18] MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Second Edition. Springer, 1999.
- [19] MEYER, K. R., HALL, G. R., OFFIN, D. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, 2nd Edition, Springer, New York, 2009.
- [20] MEYER, K. R., PALACIÁN, J. F., YANGUAS, P. *Normally Stable Hamiltonian Systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013) p. 1201-1214.
- [21] MOSER, J. it Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein. Comm. Pure Appl. Math., 29(6), 1976, 727-747; addendum in Comm. Pure Appl. Math., 31(4), 1978, 529-530.
- [22] MOSER, J. K. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems, *Comm. Appl. Math.*, v. 11, n.1, p.81-114, 1958.
- [23] SIEGEL, G.L., MOSER, J.K. *Lectures on Celestial Mechanics*. Now York: Springer-Verlog, 1971.

- [24] VIDAL, C. *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos*. Recife, 2003. (Notas de curso).
- [25] VIDAL, C. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. Recife, 2004.