



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Restrição de Fourier em superfícies de $\mathbb{R}^n$ e estimativas lineares e bilineares de Strichartz

Ian Rodrigues dos Santos

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO PPG-UFS

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Ian Rodrigues dos Santos

Restrição de Fourier em superfícies de $\mathbb{R}^n$ e estimativas lineares e bilineares de Strichartz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, vinculado a Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida

UFS – São Cristóvão
Fevereiro de 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

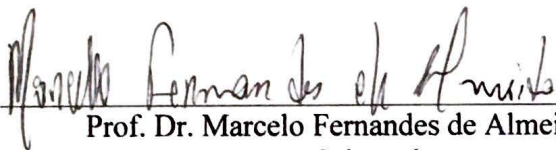
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

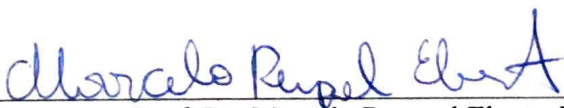
Restrição de Fourier em superfícies de $\mathbb{R}^n$ e estimativas lineares e bilineares de Strichartz.

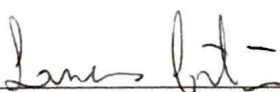
por

Ian Rodrigues dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:


Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS
Orientador


Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert - USP
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira - UNICAMP
Segundo Examinador

São Cristóvão
20 de Fevereiro de 2020

Ian Rodrigues dos Santos

Dissertation submitted to the Graduate Program in Mathematics, linked to the Federal University of Sergipe – in accordance with the requirements of the Graduate Program in Mathematics, for the degree of Master in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida

UFS – São Cristóvão
February 2020

*Aos meus pais,
minha irmã,
namorada
e todos aqueles que confiaram em mim.*

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos à todos que me ajudaram direta e indiretamente.

Aos meus pais e irmã, Patrícia Rodrigues dos Santos, João Zito dos Santos e Isabela Rodrigues dos Santos, por toda paciência.

A minha namorada, Ellen Santos Ribeiro, por todo incentivo.

Ao meu orientador, Professor Marcelo Fernandes de Almeida, por toda orientação, pelo companheirismo durante esses mais de dois anos.

Aos meus amigos Luiz Ricardo, Gabriel e Aelson, que me ajudaram em pedaços importantes deste trabalho.

Aos professores que fizeram parte do mestrado, lecionando disciplinas importantes que me proporcionaram uma boa compreensão do que escrevo aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“As invenções são, sobretudo,
o resultado de um trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

SANTOS, IAN, R. **Restrição de Fourier em superfícies de $\mathbb{R}^n$ e estimativas lineares e bilineares de Strichartz.** 2020. 170 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2020.

Neste trabalho estudamos integrais oscilatórias do primeiro tipo e via o método estacionário mostramos decaimento ótimo da transformada de Fourier de medidas cujo o suporte pertence a superfícies suaves com ℓ curvaturas principais não-nulas. Usamos este decaimento para mostrar teoremas de restrição de Fourier em superfícies compactas e superfícies quadráticas. Usando estas ideias, mostramos estimativas lineares de Strichartz em espaço L^p para as equações da onda e de Schrödinger. Finalizamos a dissertação obtendo estimativas bilineares de Strichartz para mostrar o caso “end-point” do ponto “sharp” admissível $P = (2, \frac{2\sigma}{\sigma-1})$ para um grupo $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de evolução dispersivo satisfazendo estimativas de energia e dispersão. Consequentemente, provamos o caso “end-point” das estimativas de Strichartz homogênea de Schrödinger e da onda para dimensões altas, a saber, $n \geq 4$.

Palavras-chave: Equação da onda, Equação de Schrödinger, Restrição de Fourier em superfícies, Integrais oscilatórias.

ABSTRACT

SANTOS, IAN, R. . 2020. 170 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2020.

In this work we study oscillatory integrals of the first type and via the stationary method we show an optimal decay of the Fourier transform of measures whose support belongs to smooth surfaces with m non-zero principal curvatures. We use this decay to show Fourier constraint theorems on compact surfaces and quadratic surfaces. Using these ideas, we show Strichartz linear estimates in Lebesgue space L^p for the wave and Schrödinger equations. We finish the dissertation with Strichartz's bilinear estimates to show the end-point case of the permissible sharp point $P = (2, \frac{2\sigma}{\sigma-1})$ for a dispersive evolution group $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfying energy and dispersion estimates. Consequently, we prove the end-point case for Schrödinger's homogeneous Strichartz estimates and for wave equation on high dimension, namely, $n \geq 4$.

Keywords: Wave equation, Schrödinger equation, Fourier restriction on surfaces, Oscillatory integrals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A área do trapézio $T_{A_1 A_2 A_3 Q_2} \setminus [A_1, A_2]$ para conjectura da restrição de Fourier em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$. A região limitada pelo triângulo $\Delta_{Q_1 Q_2 Q_3}$ corresponde ao Teorema de Tomas-Stein e Strichartz para $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$, $n = 3$	22
Figura 2 – Diagrama de Riesz-Thorin.	35
Figura 3 – Curva sobre a superfície	47
Figura 4 – Esfera do $\mathbb{R}^3$	49
Figura 5 – Paraboloide do $\mathbb{R}^3$	49
Figura 6 – Cone do $\mathbb{R}^3$	50
Figura 7 – Hiperplano em $\mathbb{R}^3$	106
Figura 8 – Superfície em $\mathbb{R}^3$ não contida inteiramente num hiperplano.	107
Figura 9 – A área do trapézio $T_{A_1 A_2 A_3 Q_2} \setminus [A_1, A_2]$ para conjectura da restrição de Fourier em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$. A região limitada pelo triângulo $\Delta_{Q_1 Q_2 Q_3}$ corresponde ao Teorema de Tomas-Stein e Strichartz para $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$, $n = 3$	109
Figura 10 – A área do trapézio $T_{A_1 A_2 A_3 Q_2} \setminus [A_1, A_2]$ para conjectura da restrição de Fourier em superfícies M com $\ell \neq 0$ curvaturas principais não-nulas. A região limitada pelo triângulo $\Delta_{Q_1 Q_2 Q_3}$ corresponde ao Teorema de Tomas-Stein-Littman 31 para superfícies compactas, onde tomamos $n = 3$ e $\ell = 1$. < https://www.geogebra.org/classic/tdqhue3p >	110
Figura 11 – A parte azul representa o Cone^2 do $\mathbb{R}^3$ intersectado com um dos anéis de Littlewood-Paley.	124
Figura 12 – Retângulo em $\mathbb{R}^3$ intersectando a superfície $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Em branco, as direções principais da superfície. Na figura a direita, a configuração do retângulo R_ϵ . Em vermelho o vetor normal N_x no ponto x que se encontra centralizado na intersecção de $\mathbb{S}^{n-1}$ com o retângulo R_ϵ	129
Figura 13 – Retângulo em $\mathbb{R}^3$ intersectando o Cone^{n-1} . Em branco as direções principais da superfície, note que as linhas em “vertical” possuem curvatura nula. Na figura à direita, em vermelho, o vetor normal N_x no ponto x no centro da intersecção do Cone^{n-1} e R_ϵ	131
Figura 14 – O segmento de reta fechado é Schrödinger admissível. O ponto $S = \left(\frac{2n+4}{n}, \frac{2n+4}{n}\right)$ é a estimativa pioneira de Strichartz obtida em (STRICHARTZ, 1977).	137

Figura 15 – A região fechada é wave admissível. O ponto $S = \left(\frac{2n+2}{n-1}, \frac{2n+2}{n-1}\right)$ é a estimativa pioneira de Strichartz obtida em (STRICHARTZ, 1977), que provamos no Corolário 16.	137
Figura 16 – Para $\sigma > 1$, $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$ está no interior do polígono convexo das estimativas (i) – (iii).	156
Figura 17 – Contorno Γ com orientação adequada e raio $R > 1$	170
Figura 18 – Contorno Γ' com orientação adequada e raio $R > 1$	170

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(x) = O(|x|^k)$ — Quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|x|^k$ para todo $x \geq x_0$.

$f(x) = o(|x|^k)$ — Quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|x|^k$ para todo $x \leq x_0$.

$C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ — É o conjunto de funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que tem k -derivadas contínuas.

$X \lesssim Y$ — Quando existe uma constante $C > 0$ tal que $X \leq CY$.

C_c^∞ — Conjunto de funções que tem infinitas derivadas contínuas e suporte compacto.

C_0^∞ — Conjunto de funções que tem infinitas derivadas contínuas e se anulam no infinito.

T^* — Operador adjunto de T .

J_f — Matriz jacobiana de uma função f definida em $\mathbb{R}^n$.

∇ — Operador gradiente.

Δ — Operador Laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$

df_x — Derivada de uma função f aplicada no ponto x .

$\wedge$ — Produto exterior.

$\text{int } \Omega$ — Interior do conjunto Ω .

$\partial\Omega$ — Fronteira do conjunto Ω .

Ω^c — Complementar do conjunto Ω .

$\perp$ — Ortogonalidade entre vetores.

$\delta_0(f)$ — Adistribuição delta de Dirac com $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Problema da restrição de Fourier	21
1.2	Estimativas lineares e bilineares de Strichartz	24
2	PRELIMINARES	29
2.1	Espaço de Lebesgue $L^p(d\mu)$	29
2.1.1	<i>Teoremas de Interpolação</i>	35
2.1.2	<i>Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev</i>	40
2.1.3	<i>Potencial de Riesz</i>	44
2.2	Geometria diferencial em $\mathbb{R}^n$	46
2.2.1	<i>Espaço tangente</i>	50
2.2.2	<i>A primeira forma fundamental</i>	52
2.2.3	<i>A aplicação de Weingarten</i>	57
2.2.3.1	<i>Segunda forma fundamental</i>	61
2.2.3.2	<i>Curvaturas principais de algumas superfícies quadráticas</i>	64
2.3	Medida intrínseca de superfície	66
2.3.1	<i>Teoremas de mudança de variável</i>	66
2.3.2	<i>Medidas intrínsecas de superfícies</i>	69
2.3.3	<i>Invariância de medidas</i>	70
2.3.4	<i>Coordenadas polares</i>	71
3	TRANSFORMADA DE FOURIER DE MEDIDAS	75
3.1	Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$	75
3.1.1	<i>Método de somabilidade</i>	77
3.1.2	<i>Aproximação da identidade</i>	79
3.2	O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	81
3.3	Transformada de Fourier de medidas sobre $\mathbb{R}^n$	86
3.3.1	<i>Medidas de variação limitada</i>	87
3.3.2	<i>Regularidade de μ em espaço de Schwartz</i>	88
4	DECAIMENTO DE MEDIDAS RESTRITAS A SUPERFÍCIES	91
4.1	Integrais oscilatórias	91
4.1.1	<i>Método da fase não-estacionária</i>	92
4.1.2	<i>Método da fase estacionária</i>	93

4.2	Transformada de Fourier de medidas sobre superfícies	98
4.2.1	<i>Decaimento de $\widehat{d\sigma}$ sobre esfera unitária</i>	98
4.2.1.1	<i>Técnica usando funções de Bessel</i>	98
4.2.1.2	<i>Técnica usando parametrização da esfera</i>	100
4.2.2	<i>Decaimento de $\widehat{d\mu}$ sobre superfícies</i>	102
5	RESTRIÇÃO DE FOURIER SOBRE SUPERFÍCIES	105
5.1	Noção da restrição de Fourier em subconjuntos	105
5.2	A conjectura da restrição	108
5.3	Método TT^*	111
5.4	Restrição de Fourier em superfícies compactas	113
5.4.1	<i>Teorema de Thomas-Stein e Littman</i>	113
5.5	Restrição de Fourier em superfícies não-compactas	116
5.5.1	<i>Teorema de Tomas-Stein-Strichartz</i>	116
5.6	Restrição de Fourier em superfícies quadráticas	120
5.7	Contra-exemplos de Knapp	127
5.7.1	<i>Contra-exemplo de Knapp na $\mathbb{S}^{n-1}$</i>	127
5.7.2	<i>Contra-exemplo de Knapp em superfícies com com segunda forma fundamental definida positiva</i>	129
5.7.3	<i>Contra-exemplo de Knapp em superfícies com segunda forma fundamental não-negativa</i>	130
6	ESTIMATIVAS DE STRICHARTZ	133
6.1	Invariância por “scaling”	136
6.2	Estimativas de Strichartz para equação de Schrödinger	138
6.3	Estimativas de Strichartz para equação da onda	142
6.4	Estimativas de Strichartz para grupos de evolução	149
6.5	Estimativas bilineares de Strichartz	151
6.5.1	<i>Estimativas homogêneas: caso no end-point</i>	152
6.5.2	<i>Estimativas homogêneas: caso end-point</i>	153
	REFERÊNCIAS	161
APÊNDICE A	APÊNDICE	165
A.1	Pullback da distribuição de Dirac sobre superfícies	165
A.2	Cálculo de Integrais	168

INTRODUÇÃO

Uma das maneiras de relacionar a geometria e a análise harmônica moderna é verificar quando podemos restringir a transformada de Fourier $\widehat{f}$ de certa classe de funções a superfícies M de forma que esta restrição $\mathcal{R}(f)$ possua propriedades significantes. O que faz isto ser possível é a curvatura desta superfície, e este é o elo de ligação entre estes dois ramos. Devido a importante aplicação deste problema de restrição em equações diferenciais parciais, pode-se considerar que é um fato surpreendente que este assunto não tenha sido observado até os anos 60. O problema de restrição e sua aplicação em estimativas de Strichartz para EDPs dispersivas será discutido nesta dissertação.

1.1 Problema da restrição de Fourier

De forma geral, podemos apresentar o problema da restrição de Fourier da seguinte maneira: seja M uma superfície regular não contida em um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ e seja $d\mu$ uma medida tal que $\text{supp}(d\mu) \subset M$. Dizemos que M satisfaz a *propriedade de restrição de Fourier*, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(M, d\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.1)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq q \leq \infty$. A desigualdade (1.1) será denotada por $\mathcal{R}_M(p \mapsto q)$.

Conjectura 1 (Conjectura da restrição para $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$). Seja $n \geq 2$. A restrição de Fourier $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \mapsto q)$ e $\mathcal{R}_{\mathbb{P}^{n-1}}(p \mapsto q)$ são verdadeiras se e somente se

$$1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p' \quad \text{e} \quad p' > \frac{2n}{n-1}. \quad (1.2)$$

A área (“range”) esperada para o problema da restrição de Fourier na esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e no parabolóide $\mathbb{P}^{n-1}$ é descrita na Figura 1,

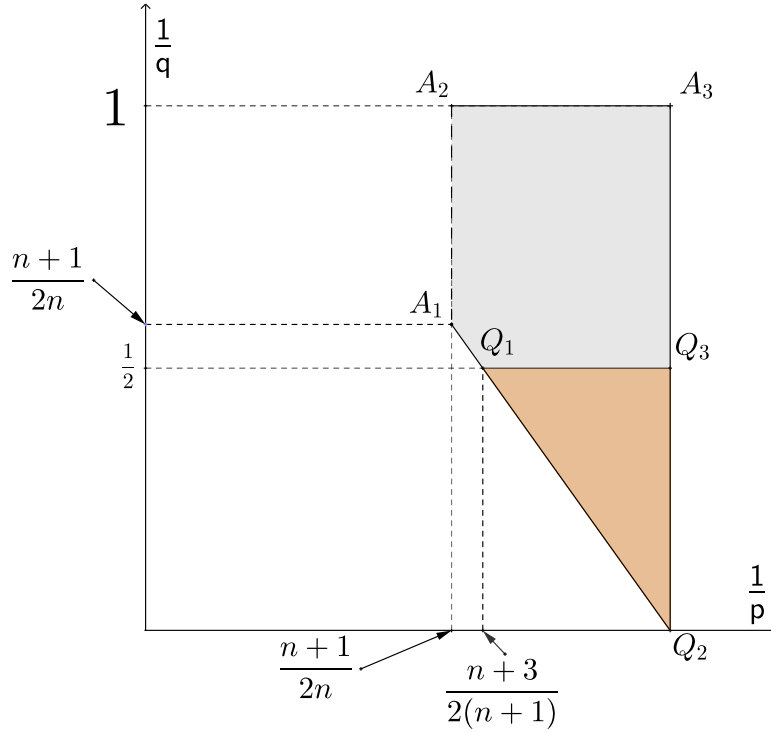


Figura 1 – A área do trapézio $T_{A_1 A_2 A_3 Q_2} \setminus [A_1, A_2]$ para conjectura da restrição de Fourier em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$. A região limitada pelo triângulo $\Delta_{Q_1 Q_2 Q_3}$ corresponde ao Teorema de Tomas-Stein e Strichartz para $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$, $n = 3$.

Nesta forma que apresentamos o problema de restrição, é notório que ele não é um problema trivial resolvê-lo. Será conveniente usarmos o $\mathbb{R}^n$ em alguns momentos e $\mathbb{R}^{n+1}$ em outros. Além disso, nesta dissertação a superfície M sempre será de codimensão 1.

Neste trabalho provamos a estimativa $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \mapsto 2)$ conhecida como Teorema de Tomas-Stein e a estendemos para estimativas do tipo $\mathcal{R}_M(p \mapsto 2)$, quando M é uma superfície regular compacta ou não-compacta, com a devida condição sobre as curvaturas principais, conteúdos das Seções 5.4 e 5.5 respectivamente. Resultados similares para $\mathcal{R}_{\text{Cone}^{n-1}}(p \mapsto 2)$ e $\mathcal{R}_{\mathbb{P}^{n-1}}(p \mapsto 2)$ foram provados por Strichartz (STRICHARTZ, 1977). Estes resultados, entre outros mais gerais, estão no Capítulo 5.

O problema da restrição de Fourier na esfera foi obtido por Tomas e Stein. O primeiro provou para $1 \leq p < \frac{2n+2}{n+3}$ e Stein estendeu o resultado para o ponto final $p_n = \frac{2n+2}{n+3}$ usando interpolação complexa de operadores dados por convoluções com funções de Bessel $B_\lambda(x) = J_\lambda(2\pi|x|)/|x|^\lambda$. Nesta dissertação apresentamos uma prova diferentes deste teorema, usando as ideias de Stein e sem passar por funções de Bessel.

Teorema 1 ((TOMAS, 1975; STEIN, 1993)). Seja $d\sigma$ a medida usual na esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.3)$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se e somente se

$$1 \leq p \leq \frac{2n+2}{n+3}.$$

Historicamente Stein provou este teorema para o range $1 \leq p < \frac{4n}{3n+1}$ e quando $n = 2$, Fefferman (FEFFERMAN, 1970) estendeu o range para $1 \leq p < 6/5$. Carleson e Sjölin provou o teorema para $n = 3$ e $1 \leq p \leq 4/3$. Finalmente, em dimensão $n = 2$, Zygmund (ZYGmund, 1974) provou a Conjectura para a esfera $\mathbb{S}^1$.

É comum encontrar provas do Teorema 1 usando propriedades de decaimento da função de Bessel. No entanto, ao descobrir que o decaimento da transformada de Fourier de medidas restritas a superfícies está relacionado as curvaturas principais da superfície e não a sua simetria, outras provas foram escritas. Neste trabalho, obtemos via método estacionário, um decaimento da forma

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Ainda no Capítulo 4 deste trabalho vimos que este tipo de decaimento se aplica a outras superfícies e provamos o seguinte teorema.

Teorema 2 ((LITTMAN, 1963)). Seja M uma superfície regular compacta munida de uma segunda forma fundamental não-negativa e com $\ell \geq 1$ curvaturas principais não-nulas. Seja $d\mu$ uma medida finita suportada em M . Então

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\ell}{2}}, \quad |\xi| > 1.$$

No Teorema 2 a condição sobre a segunda forma fundamental é crucial para garantir que as ℓ curvaturas principais não-nulas de M tenham sinais fixos. Em particular, esta hipótese é satisfeita por subconjuntos compactos do cone e do parabolóide, uma vez que calculamos suas curvaturas principais na Seção 2.2. Com este fantástico resultado obtido por Littman, não é difícil imaginar que é possível estender o Teorema 1 para superfícies compactas com $\ell \neq 0$ curvaturas principais não-nulas. E provamos o seguinte teorema.

Teorema 3 ((STEIN, 1993), pg 365). Suponha que M é uma superfície compacta e tem $\ell \neq 0$ curvaturas principais não-nulas em cada ponto $p \in M$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}|_M\|_{L^2(M, d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.4)$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 \leq p \leq \frac{2\ell+4}{\ell+4}$.

O mais surpreendente é que este resultado nos possibilitou estender o problema da restrição de Fourier para superfícies não-compactas via a Teoria de Littlewood-Paley. Nosso interesse no capítulo 5 é provar resultados de restrição de Fourier para superfícies compactas e para superfícies quadráticas como o parabolóide $\mathbb{P}^{n-1}$ e o cone Cone^{n-1} . Estes resultados são consequência do Teorema de Tomas-Stein 1 e Littman-Stein 3. Mais precisamente, provamos os resultados

Teorema 4 ((STRICHARTZ, 1977)). Seja $d\mu$ uma medida de superfície finita.

- Considere um parabolóide $\mathbb{P}^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_n = Q'(\xi')\}$, onde $Q'(\xi')$ a forma quadrática não-degenerada em $\mathbb{R}^{n-1}$ definida por $Q'(x') = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(d\mu)} = \left(\int_{\mathbb{P}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.5)$$

para $p = \frac{2n+2}{n+3}$, $n \geq 2$.

- Considere o cone $\text{Cone}^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : Q(\xi) = 0\}$, onde Q é uma forma quadrática não degenerada do $\mathbb{R}^n$ definida por $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2$. Então, para qualquer $\xi \neq 0$, existe uma contante $C_p > 0$, dependendo somente de p , tal que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(d\mu)} = \left(\int_{\text{Cone}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.6)$$

para $p = \frac{2n}{n+2}$, $n \geq 3$.

A prova do Teorema 4 foi inspirada em ideias de (MUSCALU; SCHLAG, 2013) e (STEIN, 1993). Aplicamos o Teorema 3 em cada *pedaço* compacto da superfície para obter um resultado *local* da restrição de Fourier. Em seguida, usando um argumento de “scaling” natural em cada superfície, verificamos para qual p no range $1 \leq p \leq \frac{2\ell+4}{\ell+4}$ possibilita estender este resultado local para toda a superfície. Este raciocínio nos permitiu verificar os resultados apresentados por Stein (STEIN, 1993) na página 367.

1.2 Estimativas lineares e bilineares de Strichartz

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e denotemos por Δ_x como o operador Laplaciano em $\mathbb{R}^n$. Vamos tratar de dois problemas neste trabalho. Considere o problema de Cauchy da equação de Schrödinger

$$iu_t + \Delta_x u = h, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (\text{Schrödinger})$$

e o problema de Cauchy da equação da onda

$$u_{tt} - \Delta_x u = h, \quad (u(x, 0), u_t(x, 0)) = (f, g). \quad (\text{onda})$$

Estimativas de Strichartz são uma família de estimativas dispersivas sobre soluções $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ para os problemas acima. Neste trabalho, buscamos provar a estimativa de Strichartz para a solução da equação de Schrödinger e da onda. O principal resultado deste trabalho é provar estimativas de Strichartz para estas equações para o *end-point*

$$\mathbf{P} = (p, q) = \left(2, \frac{2\sigma}{\sigma - 1} \right), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Note que $\mathbf{P}$ satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} = \frac{\sigma}{2}$$

e, neste caso, $\mathbf{P}$ é dito *sharp σ -admissível*. A relação que σ tem com as equações de [Schrödinger](#) e [onda](#) esta alinhado ao número de curvaturas principais não-nulas das superfícies características associadas a estes problemas, a saber o parabolóide $\mathbb{P}^n$ e o cone Cone^n em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 1. Dizemos que o par de expoentes (p, q) é σ -admissível se $p, q \geq 2$, $(p, q, \sigma) \neq (2, \infty, 1)$ e

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} \leq \frac{\sigma}{2}. \quad (1.7)$$

Se temos a igualdade em (1.7), dizemos que o par (p, q) é **sharp** σ -admissível. Note que o ponto $\mathbf{P} = \left(2, \frac{2\sigma}{\sigma-1}\right)$ é sharp σ -admissível, quando $\sigma > 1$.

Antes de tratarmos o caso “end-point” das estimativas de Strichartz, provamos estas estimativas para a *equação de Schrödinger* e para a *equação da onda* no caso “non-end-point”. Mais precisamente, provamos os teoremas

Teorema 5. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u(x, t)$ a solução da equação de [Schrödinger](#). Se (p, q) e (a, b) são sharp $(n/2)$ -admissíveis, então existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L^2} + \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}},$$

quando $2 < a, p < \infty$.

Teorema 6. Seja $n \geq 2$ e suponha que os pares (p, q) e (a, b) são $[(n-1)/2]$ -admissíveis, para todo $2 < q, b < \infty$. Se u é uma solução do problema da [onda](#) com dado $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} + \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}}, \quad (1.8)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfaz a condição (ou *gap condition*)

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \gamma = \frac{1}{a'} + \frac{n}{b'} - 2.$$

Neste trabalho interpretamos o grupo de soluções dos problemas de Cauchy para equação de Schrödinger e para equação da onda como um problema da *restrição de Fourier* no parabolóide $\mathbb{P}^n$ e no cone Cone^n , respectivamente, no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}$. Desta forma, mostramos que o grupo de Schrödinger $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e da onda $\{\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ (localizado em frequências baixas através de Littlewood-Paley) satisfazem as estimativas de *energia* e *dispersão*, veja a Seção 6.2 para equação Schorödinger e a Seção 6.3 para equação da onda. Mais precisamente, seja $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ um grupo de operadores lineares tais que

$$U(t)U(s) = U(t+s) \quad \text{e} \quad U(0) = I \quad (1.9)$$

satisfazem as estimativas:

- Para todo $t \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\|U(t)f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \quad (\text{Energia})$$

e para algum $\sigma \in \mathbb{R}$, temos a seguinte estimativa de decaimento.

- Para todo $t \in \mathbb{R}$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\|U(t)g\|_{L^\infty} \lesssim |t|^{-\sigma} \|g\|_{L^1}. \quad (\text{Dispersão})$$

Quando o grupo $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz as condições de energia e dispersão, dizemos que $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um *grupo de evolução dispersivo*. Usando as propriedades geométricas inerentes do Parabolóide e do Cone, mostramos que os grupos $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ são grupos de evolução dispersivos, pois devido a quantidade de curvaturas principais não-nulas de $\mathbb{P}^n$ e Cone^n , usando o método estacionário concluiremos que $\sigma = \frac{n}{2}$ para equação de Schrödinger e $\sigma = \frac{n-1}{2}$ para a equação da onda. Nas Seções 6.2 e 6.3 provamos os Teoremas 5 e 6.

Estimativas de Strichartz no contexto das equações Schrödinger e da onda tem uma longa história e diversas aplicações para EDPs não-lineares, para título de exemplo citamos (GUO; WANG, 2014) e (FANG; WANG, 2011). Começando com um trabalho pioneiro de Strichartz (STRICHARTZ, 1977), onde foi provado o caso particular com $p = q$ para a equação da onda e para a equação de Schrödinger. Neste trabalho, provamos um destes resultados, a saber, o seguinte teorema.

Teorema 7 ((STRICHARTZ, 1977)). Seja $u(x, t)$ solução do problema da equação da *onda* homogênea com dados iniciais $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com $n \geq 2$. Então

$$\|u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim_n \|f\|_{\dot{H}^{1/2}} + \|g\|_{\dot{H}^{-1/2}},$$

com $p' = \frac{2n+2}{n-1}$.

Este resultado foi generalizado (no sentido de $p \neq q$) em seguida por Ginibre e Velo em (GINIBRE; VELO, 1985) para a equação de Schrödinger, com o par (p, q) sendo sharp Schrödinger admissível e $q > 2$. As estimativas para a equação da onda foram obtidas independentemente por Ginibre-Velo em (GINIBRE; VELO, 1995) e Lindblad-Sogge em (LINDBLAD; SOGGE, 1995). Como podemos notar, o Teorema 7 é consequência do Teorema 6.

Note que o ponto $\mathbf{P}_{Sch} = (2, \frac{2n}{n-2})$ é sharp $\frac{n}{2}$ -admissível e o ponto $\mathbf{P}_{onda} = (2, \frac{2(n-1)}{n-3})$ é sharp $\frac{n-1}{2}$ -admissível, no entanto na abordagem feita nas Seções 6.2 e 6.3, a prova dos teoremas não englobam estes “end-points”. O problema que estava em aberto era provar as estimativas de Strichartz para os “end-points” $\mathbf{P}_{Sch}$ e $\mathbf{P}_{onda}$, estes resultados foram provados por Keel e Tao em (KEEL; TAO, 1998).

Para finalizar, usamos do trabalho de Keel e Tao para provar os Teoremas 5 e 6 para os pontos críticos $\mathbf{P}_{Sch} = (2, \frac{2n}{n-2})$ e $\mathbf{P}_{onda} = (2, \frac{2(n-1)}{n-3})$, respectivamente. Pagamos um preço na

dimensão, uma vez que precisamos assumir que $n > 2$ na equação de Schrödinger e $n > 3$ na equação da onda. Ou seja, provamos a estimativa de Strichartz para o ponto crítico

$$\mathbf{P} = \left(2, \frac{2\sigma}{\sigma-1}\right), \quad \sigma > 1,$$

uma vez que a condição sobre σ implica $n > 2$ e $n > 3$ nas equações de Schrödinger e da onda, respectivamente. As restrições sobre a dimensão é natural, pois quando $n = 2$ para a equação de Schrödinger e quando $n = 3$ para a equação da onda, as estimativas de Strichartz nos “end-points” $\mathbf{P}_{Sch}$ e $\mathbf{P}_{onda}$ são falsas, veja (KLAINERMAN; MACHEDON, 1993) e (MONTGOMERY-SMITH, 1998).

Para cobrir o caso end-point dos Teoremas 5 e 6, procedemos fazendo uso de estimativas bilineares de Strichartz. O operador bilinear definido é da forma

$$T(F, G) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle_{L^2} ds dt. \quad (1.10)$$

Decompomos este operador em uma soma diádica da forma

$$T_j(F, G) = \int_{\mathbb{R}} \int_{t-2^{j+1} < s \leq t-2^j} \langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle_{L^2} ds dt. \quad (1.11)$$

A chave na seção destinada a provar o caso end-point de operadores dispersivos é provar o seguinte lema.

Lema 1. A desigualdade

$$|T_j(F, G)| \lesssim 2^{-j\beta(r,b)} \|F\|_{L_t^2 L_x^{r'}} \|G\|_{L_t^2 L_x^{b'}}, \quad (1.12)$$

onde

$$\beta(r, b) = \sigma - 1 - \frac{\sigma}{r} - \frac{\sigma}{b},$$

é válida para todo $j \in \mathbb{Z}$ e todo $(\frac{1}{r}, \frac{1}{b})$ em uma vizinhança de $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$

Após provarmos o Lema acima, mostramos que o mesmo implica nas estimativas de Strichartz para o caso end-point com as restrições adequadas sobre as dimensões. Para isto, precisamos utilizar uma decomposição especial de funções $f \in L^p$, chamada decomposição atômica do L^p , veja o Lema 27. Esta decomposição, junto com o Lema 1 foram as peças que nos permitiram obter os resultados de estimativas homogêneas de Strichartz para a onda e para Schrödinger, os detalhes são descritos na Seção 6.5 de estimativas bilineares.

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos as definições e principais conceitos de um curso de medida e integração e geometria diferencial em nível de mestrado acadêmico em matemática que servirão como base para o desenvolvimento do presente trabalho. De forma sucinta, alguns dos temas aqui abordados são: funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$, superfícies regulares, espaço tangente, primeira e segunda forma fundamental, medidas intrínsecas de superfícies e etc. Alguns dos principais resultados provados foram: o Teorema de interpolação de Riesz-Thorin, o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev e o Teorema de coordenadas polares. As principais referências utilizadas na construção deste capítulo foram (FOLLAND, 1999), (GRAFAKOS, 2014), (LEE, 2013) e (TAYLOR, 2006).

2.1 Espaço de Lebesgue $L^p(d\mu)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e μ uma medida de Borel sobre Ω . Dizemos que uma função μ -Borel mensurável f sobre Ω pertence $L^p(d\mu)$, se

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu < \infty, \quad (2.1)$$

quando $1 \leq p < \infty$. Quando $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(d\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}) = 0\}.$$

A quantidade $\|f\|_p$ definida por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}) = 0\}$$

define uma norma sobre o espaço $L^p(d\mu)$. Para provar a desigualdade de Hölder, precisaremos da seguinte observação. Se $a, b \geq 0$ e $0 < \lambda < 1$, então vale

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b. \quad (2.2)$$

A igualdade vale se, e somente se, $a = b$. De fato, o resultado é óbvio se $b = 0$. Caso contrário, divida ambos os lados de (2.2) por b e defina $t = a/b$ para obter $t^\lambda \leq \lambda t + (1 - \lambda)$ e note que só vale a igualdade de $t = 1$, isto é, $a = b$.

Lema 2. Sejam $1 \leq p_j, r \leq \infty$ tais que $\sum_{j=1}^n 1/p_j = 1/r$.

(i) [Desigualdade de Hölder] Se $f \in L^{p_1}$ e $g \in L^{p_2}$, então $fg \in L^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}. \quad (2.3)$$

A igualdade é verdadeira se, e somente se, $a|f|^{p_1} = b|g|^{p_2}$ q.t.p para a, b tais que $ab \neq 0$.

(ii) [Desigualdade de Hölder generalizada] Se $f_j \in L^{p_j}$, com $1 \leq j \leq k$, então $\prod_{j=1}^k f_j \in L^r$ e

$$\left\| \prod_{j=1}^k f_j \right\|_r \leq \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{p_j}. \quad (2.4)$$

Demonstração. Evitando as trivialidades, note que se (2.3) for verificada para f e g , então o resultado é válido af e bg . Portanto, é suficiente verificar a desigualdade (2.3) para $\|f\|_{p_1} = \|g\|_{p_2} = 1$.

Usando a desigualdade (2.2) com $a = |f(x)|^{p_1}$ e $b = |g(x)|^{p_2}$ e $\lambda = 1/p_1$, obtemos

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^{p_1}}{p_1} + \frac{|g(x)|^{p_2}}{p_2}. \quad (2.5)$$

Integrando ambos os lados

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p_1} \int |f|^{p_1} d\mu + \frac{1}{p_2} \int |g|^{p_2} d\mu = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 = \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}.$$

É suficiente provar o item (ii) para $k = 2$. Pelo item (i) com $f = |f_1|^r$, $g = |f_2|^r$ e $p := p_1/r$ e $q := p_2/r$,

$$\|f_1 f_2\|_r^r = \int |f_1(x) f_2(x)|^r d\mu \leq \| |f_1|^r \|_p \| |f_2|^r \|_q = \|f_1\|_{p_1}^r \|f_2\|_{p_2}^r.$$

Agora, procedendo pelo processo de indução, se assumirmos que o resultado vale para $k = 1$, aplicamos o caso $k = 2$, substituindo f_2 por $\prod_{j=2}^k f_j$ e p_2 por $r' = \left[\sum_{j=2}^k 1/p_j \right]^{-1}$. Logo

$$\left\| \prod_{j=1}^k f_j \right\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \left\| \prod_{j=2}^k f_j \right\|_{r'},$$

aplicando a hipótese de indução, obtemos o resultado. $\square$

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$. O espaço das sequência ℓ^p para $0 < p < \infty$ consiste de todas as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo

$$\sum_n |x_n|^p < \infty.$$

Uma norma em ℓ^p , para $p \geq 1$ é definida por

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, os espaços ℓ^p são crescentes em p , isto é, temos a inclusão $\ell^p \subset \ell^q$, para $1 \leq p \leq q \leq \infty$. De fato, para provar isto, basta mostrarmos a desigualdade $\|x\|_{\ell^q} \leq \|x\|_{\ell^p}$. Para isto, defina $F = \frac{f}{\|f\|_p}$, como $f \in \ell^p$. Notando que $|F(m)| \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, segue da definição da norma a desigualdade desejada. O próximo lema relaciona os espaço ℓ^p e L^q .

Lema 3. Seja $(X, d\mu)$ um espaço de medida. Se $1 \leq q \leq p \leq \infty$, então

$$\left\| \{ \|f_j\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{L^p(d\mu)} \leq \left\| \{ \|f_j\|_{L^p(d\mu)} \}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}. \quad (2.6)$$

Seja $1 \leq p \leq \infty$ e q seu expoente conjugado. Usando a desigualdade de Hölder temos que o funcional linear $T_g : L^p(d\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por,

$$T_g(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x) \quad (2.7)$$

é um funcional linear contínuo, quando $g \in L^q(d\mu)$. O teorema seguinte garante que todo funcional linear sobre $L^p(d\mu)$ é desta forma. Mais precisamente,

Teorema 8. Seja $1 \leq p < \infty$ e q o expoente conjugado de p . Então $(L^p)'(d\mu)$ é isométrico a $L^q(d\mu)$ no seguinte sentido: para todo funcional linear T sobre L^p existe um único $g \in L^q$ tal que

$$T(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x). \quad (2.8)$$

e, além disso, $\|T_g\| = \|g\|_q$.

Este teorema justifica a terminologia de q ser chamado de expoente dual de p . No Capítulo 5 utilizaremos este teorema para provarmos o *Argumento de dualidade TT^** . A primeira aplicação deste teorema é um resultado conhecido como *desigualdade de Minkowski para integrais*, que será de suma importância para provarmos o Teorema de Riesz-Thorin.

Teorema 9 (Desigualdade de Minkowski para integrais). Sejam (X, μ) e (Y, ν) dois espaços com medidas σ -finitas e seja f uma função mensurável sobre $X \times Y$. Se $f \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, então

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left[\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y). \quad (2.9)$$

Demonstração. Quando $p = 1$ basta usar o Teorema de Fubini-Tonelli. Assuma $1 < p < \infty$ e seja $g \in L^q$, onde q é o expoente conjugado de p . Pela desigualdade de Hölder (2.3) (na variável x) e o Teorema de Fubini-Tonelli, obtemos

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu |g(x)| d\mu = \int_Y \int_X f(x, y) |g(x)| d\mu d\nu \leq \|g\|_q \int_Y \left[\int_X f(x, y)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} d\nu.$$

Portanto, pelo Teorema 8, temos

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|g\|_q=1} \int_X \int_Y f(x, y) d\nu |g(x)| d\mu \leq \int_Y \left(\int_X f(x, y)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} d\nu.$$

□

Seja $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a **convolução** entre f e g é definida pela equação

$$h(x) = \int f(x - y)g(y)dy. \quad (2.10)$$

A função em (2.10) está em L^1 , pois usando a invariância por translações da medida de Lebesgue e o Teorema de Fubini, temos

$$\|h\|_{L^1} \leq \int \int |f(z)||g(y)|dydz = \int |f(z)|dz \int |g(y)|dy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

isto mostra que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq q < \infty$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$|h(x)| = \left| \int g(x - y)f(y)dy \right| \leq \int |g(x - y)||f(y)|dy,$$

logo, pela Desigualdade de Minkowski (2.9),

$$\|h\|_{L^q} = \left(\int |h(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \int \left(\int |g(x - y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} |f(y)|dy = \|g\|_{L^q}\|f\|_{L^1}. \quad (2.11)$$

Usando a desigualdade de Hölder (2.3), obtemos

$$\|h\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \quad (2.12)$$

quando q é o expoente conjugado de p . Estas desigualdades são casos particulares da desigualdade de Young para convoluções, resultado que obteremos como corolário do Teorema de Riesz-Thorin.

Na próxima proposição, temos dois resultados de convergência em L^p .

Proposição 1. Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\int \varphi dx = 1$.

- (i) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, então $f * \varphi_\epsilon \rightarrow f$ em L^p , quando $\epsilon \rightarrow 0$.
- (ii) Se $f \in C_c(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $f * \varphi_\epsilon$ converge para f na métrica $d_\infty(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|$, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Para provar os dois resultados mostraremos que a diferença $f * \varphi_\epsilon - f$ é arbitrariamente pequena sempre que ϵ é pequeno. O ponto chave é notar que o espaço de funções $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em L^p , com $1 \leq p < \infty$ e, portanto, é suficiente provar o item (i) sob a hipótese

que f é uma função de suporte compacto. Usando mudança de variáveis e um abuso de notação na mudança $t \mapsto t\epsilon$, temos

$$\int \varphi_\epsilon(t) dt = \int \epsilon^{-n} \varphi(t/\epsilon) dt = \int \varphi(t) dt = 1.$$

Desta forma,

$$(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x) = \int f(x-t) \varphi_\epsilon(t) dt - \int f(x) \varphi_\epsilon(t) dt = \int [f(x-t) - f(x)] \varphi_\epsilon(t) dt. \quad (2.13)$$

Usando a desigualdade de Minkowski para integrais (2.9) e abusando (novamente) da notação para utilizar a mudança de variável $t \mapsto \epsilon t$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_\epsilon - f\|_{L^p} &= \left(\int \left| \int [f(x-t) - f(x)] \varphi_\epsilon(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int \left(\int |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \epsilon^{-n} |\varphi_\epsilon(t/\epsilon)| dt \\ &= \int \left(\int |f(x-\epsilon t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

Denote por $\omega(-\epsilon t) = \left(\int |f(x-\epsilon t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ e note que $\omega(-\epsilon t) \leq 2^p \|f\|_{L^p}$. De fato, basta observar que

$$|f(x-\epsilon t) - f(x)|^p \leq 2^p (\max\{|f(x-\epsilon t)|, |f(x)|\})^p = 2^p |f(x)|^p.$$

Além disso, se $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, então $\omega(-\epsilon t)$ converge pontualmente para 0, quando $\epsilon \rightarrow 0$. O resultado que obtemos é

$$\|f * \varphi_\epsilon - f\|_{L^p} \leq \int \omega(-\epsilon t) |\varphi_\epsilon(t)| dt.$$

O fato que $\omega(-\epsilon t) \leq 2^p \|f\|_{L^p}$ nos permite majorar a função $\omega(-\epsilon t) |\varphi_\epsilon(t)|$ por $2^p \|f\|_{L^p} |\varphi(t)|$ que, por hipótese, é integrável. Portanto, usando o Teorema da Convergência Dominada, tem-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\epsilon - f\|_{L^p} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \omega(-\epsilon t) |\varphi_\epsilon(t)| dt = \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega(-\epsilon t) |\varphi_\epsilon(t)| dt = 0.$$

Isto prova o item (i) desta Proposição com a hipótese de $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Usando o argumento de densidade, este resultado é estendido para $f \in L^p$. Para provar o item (ii), pela igualdade (2.13) podemos estimar

$$|f * \varphi_\epsilon(x) - f(x)| \leq \int |f(x-t) - f(x)| |\varphi_\epsilon(t)| dt,$$

novamente pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |f * \varphi_\epsilon - f| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int |f(x-t) - f(x)| |\varphi_\epsilon(t)| dt = \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega(-\epsilon t) |\varphi_\epsilon(t)| dt = 0.$$

□

Um resultado conhecido relacionado aos espaços de Lebesgue é a densidade de funções $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. No próximo exemplo, mostraremos que este conjunto não é vazio.

Exemplo 1. Existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$. Com efeito, considere a função

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Trivialmente, temos que f é limitada, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e todas suas derivadas são limitadas. Defina similarmente

$$\varphi(t) = f(1+t)f(1-t) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-t^2}}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

A função φ assim definida tem todas as propriedades de f e, além disso, é uma função de suporte compacto. Desta forma, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Para obter uma função definida no $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞ e com suporte compacto, defina

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Para que a tenhamos uma função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$, basta definir

$$\phi(x) = \frac{\psi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dy},$$

onde ψ é a função definida em (2.14).

O próximo resultado garante a existência de *funções de corte* em conjuntos compactos.

Teorema 10 (Função de Corte). Seja A um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $K \subset A$ um conjunto compacto. Então, existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

- (i) $\text{supp}(\varphi) \subset K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \delta\}$, para algum $\delta > 0$,
- (ii) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$,
- (iii) $\varphi(x) = 1$ em K_δ .

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário tal que $\epsilon < \frac{1}{4} \text{dist}(K, A^c)$. Note que, para qualquer $\delta < \text{dist}(K, A^c)$, temos a inclusão $K_\delta \subset A$. Pelo Exemplo 1, tome $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não-negativa tal que $\text{supp}(\psi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1.$$

Note que, para cada $\epsilon > 0$, se definirmos $\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \psi(\frac{x}{\epsilon})$ então $\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp}(\psi_\epsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \epsilon\}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon(x) dx = 1$. Considere a função característica $\chi_{K_{2\epsilon}}$ e defina a função

$\varphi = \psi_\epsilon * \chi_{K_{2\epsilon}}$. Note que $\text{supp}(\varphi) \subset K_{2\epsilon} \subset A$. Além disso, notando que $\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\chi_{K_{2\epsilon}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Proposição 8.10 (FOLLAND, 1999)) e $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o que prova (ii). Finalmente, note que

$$1 - \varphi = \int \psi_\epsilon(y) dy - \int \chi_{K_{2\epsilon}}(x - y) \psi_\epsilon(y) dy = \int_{\text{supp}(\psi_\epsilon)} [1 - \chi_{K_{2\epsilon}}(x - y)] \psi_\epsilon(y) dy,$$

se $x \in K_\epsilon$, como $|y| \leq \epsilon$, segue que $x - y \in K_{2\epsilon}$. Logo, $\chi_{K_{2\epsilon}}(x - y) = 1$ e, portanto, $\varphi(x) = 1$ no conjunto $K_{2\epsilon}$. Escolhendo $\delta = 2\epsilon$, obtemos (i) e (iii). $\square$

2.1.1 Teoremas de Interpolação

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que $T : L^{p_0}(X) \rightarrow L^{q_0}(Y)$ e $T : L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_1}(Y)$ é um operador linear e contínuo sobre estes espaços, quando $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Portanto, pela linearidade

$$T : L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_0}(Y) + L^{q_1}(Y)$$

e satisfaz

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)} \quad \text{e} \quad \|Tf\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}$$

para toda $f \in L^{p_0}(X)$ e $f \in L^{p_1}(X)$, onde M_0, M_1 são constantes positivas. Nosso interesse é mostrar que $T : L^{p_\theta}(X) \rightarrow L^{q_\theta}(Y)$ continuamente, quando

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (2.15)$$

para algum $\theta \in (0, 1)$. Quando $p_0 = p_1$, usando a log-convexidade em L^p (Proposição 6.13, (FOLLAND, 1999)) segue que

$$\|T\|_{L^{p_\theta}(X) \rightarrow L^{q_\theta}(Y)} \leq \|T\|_{L^{p_0}(X) \rightarrow L^{q_0}(Y)}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_1}(Y)}^\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

isto é,

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}(X)}.$$

Geometricamente o significado de (2.15) é que os pontos $\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right)$ são pontos de um segmento de retas com vértices em $A = \left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right)$ e $B = \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$, isto é,

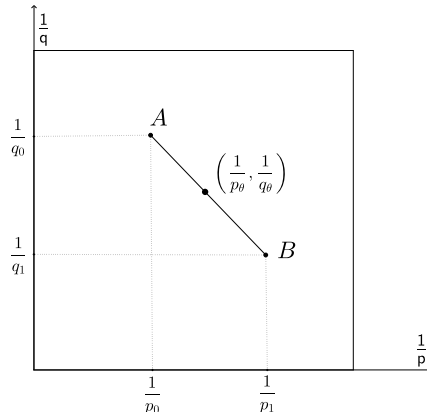


Figura 2 – Diagrama de Riesz-Thorin.

Lema 4 (Lema das três linhas). Considere a faixa $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ e seja ϕ uma função contínua em $\operatorname{int} A$ e contínua em ∂A . Suponha que

- (i) $|\phi(z)| \leq M_0, \quad \operatorname{Re}(z) = 0$
- (ii) $|\phi(z)| \leq M_1, \quad \operatorname{Re}(z) = 1,$

então $|\phi(z)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$, para $\theta = \operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$.

Este lema é uma consequência imediata do Teorema de Phragment-Lindelöf.

Teorema 11 (Phragment-Lindelöf). Suponha que $f(z)$ é holomorfa em $S = \{z : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ e contínua até $\partial S = \{z : \operatorname{Re}(z) \in \{0, 1\}\}$. Se f é limitada em ∂S , então

$$\sup_{z \in S} |f(z)| \leq \max\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(1 + it)|\right\}.$$

Demonstração. Assuma que a função $|f(z)| \rightarrow 0$ quando $|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow +\infty$ e considere a função

$$h(z) = \frac{e^{i\pi z} - i}{e^{i\pi z} + i}, \quad z \in S.$$

Temos que h é holomorfa em $\operatorname{int}(S)$ e h envia as retas ∂S no disco perfurado $U = \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{\pm 1\}$. Defina $g(z) = f(h^{-1}(z))$ limita e contínua sobre U . Como g é holomorfa em $\operatorname{int}(U)$, pelo Teorema da esfera de Riemann para singularidades removíveis temos que g tem uma extensão $\bar{g}$ analítica para $\{z : |z| \leq 1\}$. Portanto, pelo princípio do módulo máximo

$$|\bar{g}(z)| \leq \max_{|w|=1} |\bar{g}(w)| = \sup_{z \in S} |f(z)| \leq \max\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(1 + it)|\right\}.$$

Quando f não converge à zero, considere

$$f_{\delta, z_0}(z) = e^{\delta(z-z_0)^2} f(z), \quad \delta > 0, \quad z \in \operatorname{int} S,$$

onde $z - z_0 = x + iy$, $-1 \leq x \leq 1$ e $y \in \mathbb{R}$. Então, $|e^{\delta(z-z_0)^2}| = e^{\delta(x^2-y^2)}$ e $f \rightarrow 0$, quando $|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow +\infty$. Como

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= |f_{\delta, z_0}(z_0)| \leq \max\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_{\delta, z_0}(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_{\delta, z_0}(1 + it)|\right\} \\ &\leq e^\delta \max\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(1 + it)|\right\}, \end{aligned}$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos o desejado, para todo $z_0 \in \operatorname{int}(S)$. □

Para obter o Lema das três linhas basta tomar

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(it)|, \quad M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(1 + it)|$$

e dado $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$F_\lambda(z) = e^{\lambda z} \phi(z).$$

Portanto, pelo Teorema de Phragmen-Lindelöf

$$F_\lambda(z) \leq \max\{M_0, e^\lambda M_1\},$$

ou seja, $|\phi(\theta + it)| \leq e^{-\lambda\theta} \max\{M_0, e^\lambda M_1\}$. Tomando $\lambda = \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right)$, temos

$$|\phi(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 12 (Interpolação de Riesz-Thorin). Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida. Seja $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, e se $q_0 = q_1 = \infty$, assumamos que $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ é semifinito. Para $0 < \theta < 1$ defina p_θ, q_θ por

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Assumamos que $T : L^{p_0} + L^{p_1} \rightarrow L^{q_0} + L^{q_1}$ é um operador linear tal que

$$\|Tf\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}} \quad \text{e} \quad \|Tf\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}},$$

onde $M_0, M_1 \in (0, \infty)$. Então T é um operador linear limitado de L^{p_θ} para L^{q_θ} . Mais precisamente,

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}},$$

para todo $f \in L^{p_\theta}(X)$.

Demonstração. Assumamos $p_0 \neq p_1$. Provaremos primeiro para funções simples e usaremos densidade para estender o resultado para L^p . Seja $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ e $g = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{B_k}$, tal que $\|f\|_{p_0} = 1$ e $\|g\|_{q'_0} = 1$. Queremos mostrar que

$$\left| \int_Y (Tf)g d\nu \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

onde $\{A_j\}$ e $\{B_k\}$ são sequências de conjuntos dois-a-dois disjuntos de X e Y , respectivamente, e $a_j, b_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em coordenadas polares, podemos escrever $a_j = |a_j|e^{i\alpha_j}$ e $b_j = |b_j|e^{i\beta_k}$. Defina

$$\gamma(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{e} \quad \rho(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}.$$

Temos, pelas definições de γ e ρ , que $\gamma(\theta) = \frac{1}{p_\theta}$ e $\rho(\theta) = \frac{1}{q_\theta}$, para todo $t \in (0, 1)$. Fixe $\theta \in (0, 1)$. Assumamos que $p_\theta < \infty$, isto é, $\gamma(\theta) > 0$ e defina

$$f_z = \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{\gamma(z)}{\gamma(\theta)}} e^{i\alpha_j} \chi_{A_j} \quad \text{e} \quad g_z = \begin{cases} \sum_{k=1}^m |b_k|^{\frac{1-\rho(z)}{1-\rho(\theta)}} e^{i\beta_k} \chi_{B_k}, & \rho(\theta) < 1 \\ g, & \rho(\theta) = 1. \end{cases}$$

Então,

$$\Phi(z) = \int_Y (Tf_z)g_z d\nu = \begin{cases} \sum_{j,k} E_{j,k} |a_j|^{\frac{\gamma(z)}{\gamma(\theta)}} |b_k|^{\frac{1-\rho(z)}{1-\rho(\theta)}}, & \rho(\theta) < 1 \\ \sum_{j,k} E_{j,k} |a_j|^{\frac{\gamma(z)}{\gamma(\theta)}} |b_k|, & \rho(\theta) = 1, \end{cases}$$

onde $E_{j,k} = e^{i(\alpha_j + \beta_k)} \int (T\chi_{A_j})\chi_{B_k} d\nu$. Note que $\Phi(z)$ é uma função holomorfa em $S = \{z : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ e contínua em ∂S , pois é definida pela integral de funções holomorfas. Pelo Lema 4 é suficiente mostrar que $|\Phi(z)| \leq M_0$, para $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $|\Phi(z)| \leq M_1$, para $\operatorname{Re}(z) = 1$, pois desta forma obteremos

$$|\Phi(z)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad \text{para } \operatorname{Re}(z) = \theta \in (0, 1).$$

Comecemos com o caso $\rho(\theta) < 1$. Para $r \in \mathbb{R}$, temos que

$$\gamma(ir) = \frac{1}{p_0} + ir \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) \quad \text{e} \quad 1 - \rho(ir) = \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) - ir \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right).$$

Observe que

$$|f_{ir}| = \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{\gamma(ir)}{\gamma(\theta)}} e^{i\alpha_j} \chi_{A_j} = |f|^{\operatorname{Re}(\frac{\gamma(ir)}{\gamma(\theta)})} = |f|^{\frac{p_\theta}{p_0}},$$

e, analogamente, $|g_{ir}| = |g|^{\frac{q_\theta}{q_0}}$. Usando a desigualdade de Hölder, tem-se

$$|\Phi(ir)| \leq \|Tf_{ir}\|_{q_0} \|g_{ir}\|_{q'_0} \leq M_0 \|f_{ir}\|_{p_0} \|g_{ir}\|_{q'_0} = M_0 \|f_{ir}\|_{p_\theta} \|g\|_{q'_\theta} = M_0. \quad (2.16)$$

Da mesma forma,

$$\gamma(1+ir) = \frac{1}{p_1} + ir \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) \quad \text{e} \quad 1 - \rho(1+ir) = \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) - ir \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right),$$

logo $|f_{1+ir}| = |f|^{\frac{p_\theta}{p_1}}$ e $|g_{1+ir}|^{\frac{q'_\theta}{q'_1}}$. Novamente pela desigualdade de Hölder,

$$|\Phi(1+ir)| \leq \|Tf_{1+ir}\|_{q_1} \|g_{1+ir}\|_{q'_1} \leq M_1 \|f_{1+ir}\|_{p_1} \|g_{1+ir}\|_{q'_1} = M_1 \|f\|_{p_\theta} \|g\|_{q'_\theta} = M_1. \quad (2.17)$$

Para o caso $\rho(\theta) = 1$, observe que, como $\rho(\theta) = \frac{1}{q_\theta}$, temos que $q_\theta = 1$, para todo $\theta \in (0, 1)$, o que significa que $q_0 = q_1 = q_\theta = 1$. Procedendo de maneira análoga à (2.16), para $r \in \mathbb{R}$, temos

$$|\Phi(ir)| \leq M_0 \|f_{ir}\|_{p_0} \|g_{ir}\|_{q'_0} = M_0,$$

uma vez que $\|f_{ir}\|_{p_\theta} = \|f\|_{p_\theta} = 1$, $g_{ir} = g$, $\|g\|_{q'_\theta} = 1$ e $q_0 = q_\theta$. Agora, da mesma forma de (2.17),

$$|\Phi(1+ir)| \leq M_1 \|f_{1+ir}\|_{p_1} \|g_{1+ir}\|_{q'_\theta} = M_1,$$

uma vez que $\|f_{ir}\|_{p_1} = \|f\|_{p_\theta} = 1$, $g_{1+ir} = g$, $\|g\|_{q'_\theta} = 1$ e $q_1 = q_\theta$. Portanto, pelo Lema 4, temos que

$$\|Tf\|_{q_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{p_\theta}.$$

Agora, seja $f \in L^p(X)$ uma função qualquer. Temos que existe uma sequência $\{f_n\} \subset \Sigma_X$ tal que $|f_n| \leq |f|$ e $\lim f_n = f$. Seja $A = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$ e defina as funções $g = f\chi_A$, $g_n = f_n\chi_A$, $h = f\chi_{A^c}$ e $h_n = f_n\chi_{A^c}$. Trivialmente, temos que $f = g + h$ e $f_n = g_n + h_n$. Podemos assumir que $1 \leq p_0 < p_\theta < p_1 \leq \infty$, pois em caso contrário, podemos "recolocar" p_1

e p_0 . Observe que $|g|^{p_0} \leq |f|^{p_\theta} \chi_A$ e $|h|^{p_1} \leq |f|^{p_\theta} \chi_{A^c}$, logo $\|g\|_{p_0} \leq \|f\|_{p_\theta}$ e $\|h\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_\theta}$. Usando o Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{p_\theta} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{p_0} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\|_{p_1} = 0.$$

Isto significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tg_n - Tg\|_{q_0} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Th_n - h\|_{q_1} = 0,$$

uma vez que

$$\|Tg_n - Tg\|_{q_0} \leq M_0 \|g_n - g\|_{p_0} \quad e \quad \|Th_n - Th\|_{q_1} \leq M_1 \|h_n - h\|_{p_1}.$$

Como as sequências $\{Tg_n\}$ e $\{Th_n\}$ convergem em L^p , temos que existem subsequências $\{Tg_{n_k}\}$ e $\{Th_{n_k}\}$, que convergem ν -q.t.p para Tg e Th , respectivamente. Como $f_n = g_n + h_n$, temos que $Tf_n \rightarrow Tf$, ν -q.t.p. Portanto, pelo Lema de Fatou, temos que

$$\|Tf\|_{q_\theta} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|Tf_n\|_{q_\theta} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f_n\|_{p_\theta} = M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{p_\theta},$$

isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 1 (Desigualdade de Young). Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ onde $1 \leq p, q \leq r \leq \infty$ satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Então

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (2.18)$$

Demonstração. Fixe $g \in L^q$ e considere o operador $T_g(f) = f * g$. Usando as desigualdades (2.11) e (2.12), temos que

$$\|T_g f\|_q \leq M_0 \|f\|_1 \quad e \quad \|T_g f\|_\infty \leq M_1 \|f\|_{q'},$$

onde $M_0 = M_1 = \|g\|_q$. Assumindo $1 < p < \infty$, $1 < q < r < \infty$, para aplicar o Teorema de Riesz-Thorin, precisamos encontrar $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{q} \quad e \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q'} + \frac{\theta}{1}.$$

Basta tomar $\theta = q/r < 1$ e notar que

$$\frac{q}{r} + \frac{1-\theta}{q'} = \frac{1}{p} \quad \text{se e somente se} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}.$$

Portanto, o Teorema de Riesz-Thorin garante que $\|T_g(f)\|_{L^r} \leq \|g\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$. $\square$

Dizemos que um operador T é do tipo fraco (p, p) , se existe uma constante $C > 0$ positiva tal que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\alpha > 0} \alpha^p m(\{x : Tf(x) > \alpha\}) \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dizemos que T é do tipo forte (p, p) , se

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

Teorema 13 (Teorema de interpolação de Marcinkiewicz). Seja (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida e seja T um operador sublinear definido de $L^{p_1}(X) + L^{p_2}(Y)$ com valores no espaço de funções Y –mensuráveis. Suponha que

$$\|Tf\|_{L^{p_1}, \infty} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}} \quad \text{e} \quad \|Tf\|_{L^{p_2}, \infty} \leq A_2 \|f\|_{L^{p_2}}.$$

Então T é do tipo forte (p, p) , para todo $1 \leq p_1 < p < p_2 \leq \infty$.

O próximo Lema é um resultado importante para coberturas finitas formada por bolas abertas. Este resultado garante que podemos extrair uma sub-coleção disjuntas tal que podemos relacionar as medidas destas bolas.

Lema 5 (Lema da cobertura de Vitali). Seja $B_1, \dots, B_N$ uma coleção finita de bolas. Então existe uma sub-coleção $B_{n_1}, \dots, B_{n_M}$ de bolas disjuntas tais que

$$\sum_{j=1}^M \mu(B_{n_j}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^M B_{n_j}\right) \geq 3^{-n} \mu\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right).$$

2.1.2 Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev

Dizemos que uma função Lebesgue mensurável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se existe um conjunto limitado $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|f\|_{L^1_{loc}} = \int_K |f(x)| dm(x) < \infty,$$

onde dm denota a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $B(x, r)$ uma bola em $\mathbb{R}^n$ centrada em x com raio $r > 0$, o operador maximal M de Hardy-Littlewood é definido por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| dm(y) \quad (2.19)$$

Note que M é um operador sublinear, isto é, $M(f + g) \leq Mf + Mg$ e, pelo teorema de mudança de variáveis, $M(\lambda f) = \lambda M(f)$. Observe também que o operador maximal de Hardy-Littlewood não é limitado de L^1 em L^1 .

Exemplo 2. Considere $n = 1$ e $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. Dado $x > 1$,

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2x} \int_0^1 |f(y)| dy = \frac{1}{2x}.$$

No entanto,

$$\int_{\mathbb{R}} Mf(x) dx \geq \int_1^{\infty} Mf(x) dx \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{2x} = \infty.$$

Teorema 14 (Teorema do operador máximo de Hardy-Littlewood). O operador máximo de Hardy-Littlewood M satisfaz as seguintes propriedades de limitação:

(i) O operador M é do tipo fraco $(1, 1)$, isto é, para todo $\lambda > 0$ obtemos a estimativa

$$m(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

sempre que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Em particular $\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}$.

(ii) O operador M é do tipo forte (p, p) , isto é,

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C_{n,p} \|f\|_{L^p},$$

para todo $1 < p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiro observe que M é do tipo forte (∞, ∞) . De fato, basta notar que uma média nunca excede o máximo. Pelo Teorema de interpolação de Marcinkiewicz 13 é suficiente provar M é do tipo fraco $(1, 1)$. Para isso, basta mostrar que

$$m(\{y \in \mathbb{R}^n : Mf(y) > \lambda\}) \lesssim_n \|f\|_{L^1}.$$

Agora fixe $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e defina o conjunto

$$E := \{y \in \mathbb{R}^n : |Mf(y)| > \lambda\},$$

e seja $K \subset E$ qualquer subconjunto compacto de E . Nosso interesse é obter uma estimativa da forma $m(K) \leq C_n \|f\|_{L^1}$, onde C é uniforme em $K \subset E$.

Para todo $x \in K$, existe uma bola $B_x = B(x, r(x))$, com $r(x) > 0$, tal que

$$\frac{1}{\lambda} \int_{B_x} |f(y)| dy > m(B_x), \quad (2.20)$$

pois $Mf(y) > \lambda$ sobre K . Claramente, $\{B_x\}_{x \in K}$ é uma cobertura de K satisfazendo (2.20). A compacidade de K nos permite afirmar que $K \subset \bigcup_{m=1}^N B_m$, logo

$$m(K) \leq \sum_{m=1}^N m(B_m) < \sum_{m=1}^N \frac{1}{\lambda} \int_{B_m} |f(y)| dy = \frac{1}{\lambda} \int |f(y)| \sum_{m=1}^N \chi_{B_m}(y) dy.$$

Por outro lado, observe que

$$\int |f(y)| \chi_{\bigcup_{m=1}^N B_m}(y) dy \leq \|f\|_{L^1},$$

por isso, se conseguirmos mostrar que

$$\sum_{m=1}^N \chi_{B_m}(y) \leq C_n \chi_{\bigcup_{m=1}^N B_m}(y),$$

em quase toda parte, concluímos o desejado, isto é,

$$m(K) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

O problema principal para obter esta estimativa é que as bolas B_m podem se sobrepor bastante. Se estas bolas fossem disjuntas (ou "quase disjuntas") então não teríamos problema. Para contornar este problema, precisaremos recorrer ao Lema da cobertura de Vitalli. Apesar de não podermos garantir que a família $\{B_m\}$ não se sobrepe, este lema nos permitirá extrair uma sub-coleção de bolas que possui esta propriedade, sem perder muito da medida da união das bolas na coleção. Relembre que extraímos uma cobertura finita de $\{B_x\}$ que satisfaz

$$\int_{B_m} |f(x)| dx > m(B_m), \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Pelo Lema da cobertura de Vitalli, podemos extrair uma sub-coleção de bolas disjuntas $\{B_{m_j}\}_{j=1}^M$ tal que a medida da união exceda um múltiplo da medida da união da família original $\{B_m\}$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} m(K) &\leq m\left(\bigcup_{m=1}^N B_m\right) \leq 3^n m\left(\bigcup_{j=1}^M B_{m_j}\right) = 3^n \sum_{j=1}^M m(B_{m_j}) \\ &< 3^n \sum_{j=1}^M \int_{B_{m_j}} |f(y)| dy = 3^n \int |f(y)| \sum_{j=1}^M \chi_{B_{m_j}}(y) dy \\ &= 3^n \int |f(y)| \chi_{\bigcup_{j=1}^M B_{m_j}}(y) dy \leq 3^n \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Observe que esta estimativa é uniforme sobre todos os compactos $K \subset E$, tomando o supremo em tais conjuntos e usando a regularidade interna da medida de Lebesgue, concluímos que

$$m(E) \leq 3^n \|f\|_{L^1},$$

como queríamos demonstrar. □

Usando o Teorema do operador máximo podemos mostrar que quase todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ são pontos de Lebesgue.

Definição 2 (Pontos de Lebesgue). Seja f uma função mensurável, dizemos que x_0 é um ponto de Lebesgue se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |f(y) - f(x_0)| dy = 0,$$

isto é, o valor médio da oscilação de f tende a zero em x_0 .

Teorema 15 (Teorema da diferenciação de Lebesgue). Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy < \epsilon, \quad (2.21)$$

q.t.p em $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então $f \chi_{B_r(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $r > 0$. Note que todo $x \in B_r(0)$ é um ponto de Lebesgue de f se, e somente se, é um ponto de Lebesgue de $f \chi_{B_r(0)}$. Portanto, podemos assumir que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Defina a aplicação

$$Tf(x_0) = \limsup_{m(B) \rightarrow 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x_0)| dy,$$

o limite é tomado sobre todas as bolas contendo x_0 com raio tendendo a zero. Pela desigualdade

$$\limsup_{m(B) \rightarrow 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x_0)| dy \geq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} |f(y) - f(x_0)| dy,$$

se $Tf(x_0) = 0$ concluiremos que x_0 é um ponto de Lebesgue de f . Seja $\epsilon > 0$ e considere o conjunto dos pontos $E_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \epsilon\}$ que não são pontos de Lebesgue de f . Queremos mostrar que $m(E_\epsilon) = 0$ para todo $\epsilon > 0$, consequentemente $m(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 0\}) = 0$. Pela desigualdade triangular,

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(x) - f(x_0)| dx \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x)| dx + |f(x_0)| = \tilde{f}(x_0) + |f(x_0)|,$$

quando $x_0 \in B$. Tomando o supremo sobre B contendo $x_0 \in E_{2\epsilon}$, segue que $\tilde{f}(x_0) + |f(x_0)| \geq 2\epsilon$.

Isto implica que para todo $x_0 \in E_{2\epsilon}$ ou $\tilde{f}(x_0) > \epsilon$ ou $|f(x_0)| > \epsilon$. Segue daí que

$$m(E_{2\epsilon}) \leq m(\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{f}(x) > \epsilon\}) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \epsilon\}).$$

Usando o Teorema 14(i) e a desigualdade

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \epsilon\}) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \epsilon\}} \epsilon dx \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$$

obtemos

$$m(E_{2\epsilon}) \leq \frac{C}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx. \quad (2.22)$$

Pela desigualdade triangular

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |g(x) - g(x_0)| + |(f - g)(x) - (f - g)(x_0)|,$$

para toda função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Isto nos dá

$$Tf(x_0) \leq Tg(x_0) + T(f - g)(x_0).$$

Se g é contínua então $Tg(x_0) = 0$. Isto significa que $Tf(x_0) \leq T(f - g)(x_0)$ para toda função contínua g . Defina $F_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : T(f - g)(x) > \epsilon\}$. Então $E_\epsilon \subset F_\epsilon$ e, portanto, $m(E_\epsilon) \leq m(F_\epsilon)$. Aplicando (2.22) para $f - g$ e F_ϵ no lugar de f e $E_{2\epsilon}$, respectivamente, obtemos

$$m(E_\epsilon) \leq m(F_\epsilon) \leq \frac{C}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| dx.$$

Como funções contínuas são densas em $L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos escolher g contínua tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| dx$ seja arbitrariamente pequena, logo $m(E_{2\epsilon}) = 0$ para todo $\epsilon > 0$ como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 2. Se f é contínua em $\mathbb{R}^n$, então a convergência em (2.21) é obtida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Vamos mostrar que dado qualquer $\epsilon > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{m(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} |f(y) - f(x_0)| dy < \epsilon,$$

sempre que $r < \delta$. De fato, pela definição de continuidade em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x_0)| < \epsilon$ sempre que $|y - x_0| < \delta$. Desta forma, para todo $r < \delta$

$$\frac{1}{m(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} |f(y) - f(x_0)| dx < \frac{\epsilon}{m(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} dx = \epsilon.$$

Isto conclui a prova. $\square$

2.1.3 Potencial de Riesz

Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \alpha < n$. O potencial de Riesz I_α é definido por

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{\alpha-n} f(y) dm(y), \quad (2.23)$$

onde $\gamma_n(\alpha)$ é uma constante de normalização. Queremos mostrar que I_α é um operador contínuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $L^q(\mathbb{R}^n)$, este resultado é conhecido como Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Lema 6. Se $0 < \alpha < n$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{|x-y| \leq r} |f(y)| |x - y|^{\alpha-n} dm(y) \leq Cr^\alpha Mf(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Demonstração. Primeiramente observe que $B = \{y : |x - y| \leq r\} = \cup_k A_k$, onde $A_k = \{y : \frac{r}{2^{k+1}} < |x - y| \leq \frac{r}{2^k}\}$ são anéis centrados em x . Logo,

$$\int_B |f(y)| |x - y|^{\alpha-n} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} |f(y)| |x - y|^{\alpha-n} dy.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ note que,

$$\int_{A_k} |f(y)| |x - y|^{\alpha-n} dy \leq (2^{-k}r)^{\alpha-n} \int_{|x-y| \leq \frac{r}{2^k}} |f(y)| dy,$$

assim, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \int_B |f(y)| |x - y|^{\alpha-n} dy &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}r)^{\alpha-n} \int_{|x-y| \leq \frac{r}{2^k}} |f(y)| dy \\ &\leq 2^{n-\alpha} r^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} (Mf)(x) \leq Cr^\alpha (Mf)(x), \end{aligned}$$

pois a série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}$ é convergente. $\square$

Lema 7. Seja $0 < \alpha < n$ e $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ uma função não-negativa. Então

$$(I_\alpha f)(x) \leq C \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} [(Mf)(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}}.$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{|x-y| \geq r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} \leq C_1 \left\| \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q} \|f\|_{L^p} \leq C_1 r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

E usando o Lema 6, obtemos

$$\int_{|x-y| \leq r} |f(y)| |x-y|^{\alpha-n} dy \leq C_2 r^\alpha Mf(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (I_\alpha f)(x) &= \int_{|x-y| \geq r} |f(y)| |x-y|^{\alpha-n} dy + \int_{|x-y| \leq r} |f(y)| |x-y|^{\alpha-n} dy \\ &\leq C_1 r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p} + C_2 r^\alpha Mf(x) \\ &\lesssim \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)} \right)^{\frac{p\alpha}{n}-1} \|f\|_{L^p} + \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)} \right)^{\frac{p\alpha}{n}} Mf(x) = \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} [Mf(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}}, \end{aligned}$$

onde escolhemos $r = \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n}}$. □

Teorema 16 (desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev). Seja $1 < p < q < \infty$ e $0 < \alpha < n$ tal que $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Então existe um constante $C > 0$ tal que $\|I_\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pelo Lema 7, temos

$$[(I_\alpha f)(x)]^q \leq A^q \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha q p}{n}} [(Mf)(x)]^{q-\frac{\alpha p q}{n}} = A^q \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha q p}{n}} [(Mf)(x)]^p.$$

Assim,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(I_\alpha f)(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq A \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Mf)(x)^p dx \right)^{\frac{p}{q}} = A \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} \|Mf\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}.$$

Desde que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, então $\frac{p}{q} = 1 - \frac{\alpha p}{n}$. Além disso, pelo Teorema 14, temos que $\|Mf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$. Portanto,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq A \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} C \|f\|_{L^p}^{1-\frac{\alpha p}{n}} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

□

Observação 1.

(i) A desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev pode ser re-escrita por

$$\| |\cdot|^{-\alpha} * f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.24)$$

para todo $0 < \alpha < n$ e $1 < p < q < \infty$ tal que

$$1 - \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

(ii) A desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev tem uma versão bilinear equivalente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^\alpha} f(x)g(y) dx dy \lesssim \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} \quad (2.25)$$

para todo $0 < \alpha < n$ e $1 < p_1, p_2 < \infty$ tal que

$$\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} = \frac{\alpha}{n}.$$

2.2 Geometria diferencial em $\mathbb{R}^n$

Nosso objetivo principal nesta seção é apresentar os pré-requisitos necessários para o estudo de superfícies que abordaremos nos capítulos seguintes. Esta seção foi baseada prioritariamente nas referências (CARMO, 1976), (LEE, 2013) e (THORPE, 1979). A noção de superfície regular será essencial para nossos estudos futuros neste trabalho. Relembre que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, dado qualquer ponto $p \in S$, existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$, onde U é aberto, tais que

(i) α é um difeomorfismo;

(ii) A aplicação $(d\alpha)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$ tal que $\alpha(q) = p$.

A imagem do aberto U por α é chamada de vizinhança coordenada de S no ponto p . É natural estender esta definição para superfícies regulares em $\mathbb{R}^{n+1}$. Antes, definamos a aplicação diferencial.

Definição 3. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável sobre o aberto U do $\mathbb{R}^n$. Seja $\zeta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma curva regular (diferenciável) tal que $\zeta(0) = q$ e $\zeta'(0) = u$. Dado $q \in U$, a diferencial de F no ponto q é definida por $(dF)_q(u) = \gamma'(0)$, onde $\gamma = F \circ \zeta$.

A regra da cadeia garante que a curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, pois é a composição de aplicações diferenciáveis. Podemos agora definir uma superfície regular em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 4. Seja M um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que M é uma superfície regular se, para todo $p \in M$ existem um aberto V de p em $\mathbb{R}^{n+1}$ e um aberto U de $\mathbb{R}^n$ tal que a aplicação $\alpha : U \rightarrow V \cap M$ satisfaz

(i) $\bigcup_\alpha \alpha(U) = M$;

(ii) A aplicação α é um difeomorfismo local de classe C^1 ;

(iii) Para cada $q \in U$ a aplicação derivada $(d\alpha)_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é injetiva.

O par $\{U, \alpha\}$ com $p \in \alpha(U)$ é chamado de parametrização de M no ponto p e $\alpha_p(U)$ é conhecido por vizinhança coordenada de M em p . Dada uma parametrização $\alpha : U \rightarrow M$ no ponto p , tal que $\alpha(U) = V$, uma curva sobre a superfície S é uma função $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ definida por $\gamma = \alpha \circ \zeta$, onde $\zeta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ é uma curva regular em U . A curva γ é chamada de curva coordenada em M passando pelo ponto p . (Ver figura 3)

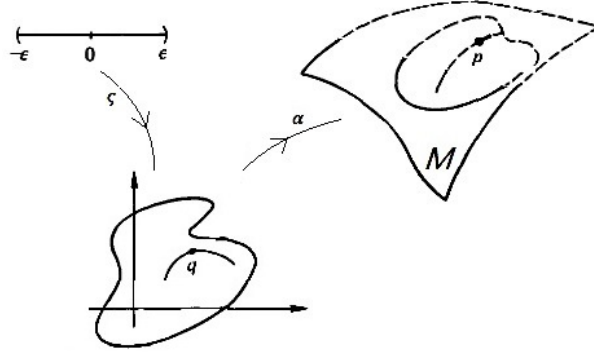


Figura 3 – Curva sobre a superfície

Exemplo 3. A esfera unitária do $\mathbb{R}^{n+1}$ definida por $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; \|p\| = 1\}$ é uma superfície regular. De fato, para cada $i = 1, \dots, n$, defina aplicações $\alpha_i : U_i \rightarrow V_i \cap \mathbb{S}^n$, sobre os abertos U_i do $\mathbb{R}^n$, por

$$\alpha_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_i, \dots, x_n).$$

Cada α_i é evidentemente diferenciável e $(d\alpha_i)_p$ é injetiva, pois $J_{\alpha_i}(p)$ o jacobiano de α_i tem uma submatriz de ordem n com determinante não nulo. Além disso, a coleção $\{\alpha_i\}$ formada por $2n$ parametrizações cobrem a esfera. Para concluir que $\mathbb{S}^n$ é uma superfície regular, precisamos mostrar que cada α_i é um difeomorfismo.

Seja $D_i^+ = V_i^+ \cap \mathbb{S}^n$, onde $V_i^+ = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i > 0\}$. Similarmente, seja D_i^- os subconjuntos de $\mathbb{S}^n$ tais que $x_i < 0$. Para cada $i = 1, \dots, n+1$, as aplicações $\varphi_i^\pm : D_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$, definidas por $\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1})$, onde $\widehat{x_i}$ significa que x_i é omitida. É óbvio que cada aplicação $\varphi_i^\pm$ é contínua e diferenciável. Perceba que

$$\begin{aligned} (\alpha_i \circ \varphi_i^+)(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \alpha_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \text{ e} \\ (\varphi_i^+ \circ \alpha_i)(x_i, \dots, x_n) &= \varphi_i^+(x_1, \dots, x_{i-1}, +\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Analogamente fazemos para φ_i^- . Assim, mostramos que para cada i a inversa de α_i são contínuas e diferenciáveis. Portanto, cada α_i é difeomorfismo.

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre um aberto A do $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que c é um valor regular de f quando

$$\nabla f(p) = (\partial_1 f(p), \partial_2 f(p), \dots, \partial_{n+1} f(p)) \neq 0,$$

para todo $p \in \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = c\}$. O conjunto de nível $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = c\} = f^{-1}(c)$ tem a estrutura de superfície regular, conteúdo da próxima proposição.

Proposição 3. Seja $f \in C^k(A \rightarrow \mathbb{R})$ sobre um aberto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $k \geq 1$. Se $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f , então o conjunto de nível $M = \{x \in A : f(x) = c\}$ é uma superfície regular de classe C^k .

Demonstração. Visto que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f , então $\nabla f(x) \neq 0$ sempre que $x \in M$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \neq 0$. Considere a aplicação $F : A \rightarrow A$ definida por

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_{n+1})).$$

Note que $F \in C^k$ e a matriz jacobiana de F no ponto p é dada por:

$$J_F(p) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \end{bmatrix},$$

Portanto $\det J_F(p) = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \neq 0$ e o Teorema da Função Inversa garante que existe uma vizinhança V de p e uma vizinhança W de $F(p)$ tais que $F : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe $C^k(V \rightarrow W)$.

Seja $(u_1, \dots, u_{n+1}) \in W$ as funções coordenadas de F^{-1} . Veja que devemos ter

$$(F^{-1} \circ F)(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n+1}),$$

desta forma

$$x_1 = u_1 \quad \cdots \quad x_n = u_n \quad x_{n+1} = g(u_1, \dots, u_{n+1}),$$

onde g é uma função diferenciável sobre o aberto W . Em particular, veja que

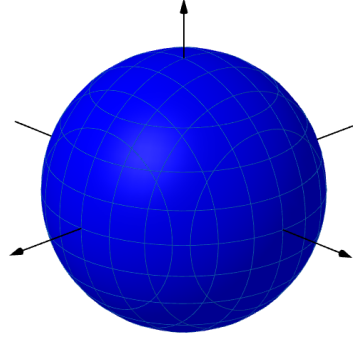
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= u_{n+1}(F(x_1, \dots, x_{n+1})) = u_{n+1}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_{n+1})) \\ &= u_{n+1}(x_1, \dots, x_n, c) = h(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde h é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$. Observe que $F(M \cap V) = W \cap \{(u_1, \dots, u_n, c)\}$, concluímos que o gráfico de h é $(M \cap V)$, a qual sabemos é uma superfície regular.

□

A superfície n -dimensional estudada na Proposição 3, é conhecida como n -dimensional *hiperfície* regular de classe C^k . Na próxima seção, veremos alguns exemplos de hiperfícies.

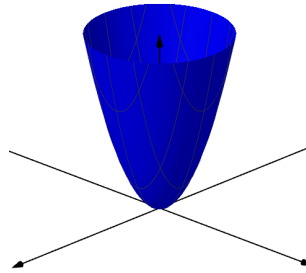
Exemplo 4. (Esfera unitária) A esfera unitária do $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ser vista como uma hipersuperfície regular n -dimensional. De fato, considere a função diferenciável $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2$. Note que 1 é valor regular de f , pois $\nabla f(x) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) \neq 0$ em $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 1\}$ e f é de classe C^1 .

Figura 4 – Esfera do $\mathbb{R}^3$

Exemplo 5 (Paraboloides de $\mathbb{R}^{n+1}$). O parabolóide $\mathbb{P}^n = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau = \frac{1}{2}|\xi|^2\}$ é uma hipersuperfície regular n -dimensional do $\mathbb{R}^{n+1}$. Com efeito, defina a função $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(\xi, \tau) = |\xi|^2 - \tau.$$

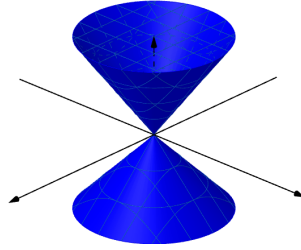
Note que 0 é um valor regular de h , pois $\nabla h(\xi, \tau) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, -1) \neq 0$ em $\mathbb{P}^n$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R})$. Usando a Proposição 3, segue que $\mathbb{P}^n$ é uma superfície regular.

Figura 5 – Parabolóide do $\mathbb{R}^3$

Exemplo 6 (Cones de $\mathbb{R}^{n+1}$). O cone $\text{Cone}^n = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau^2 = |\xi|^2\}$ é uma hipersuperfície regular n -dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$, se $\xi \neq 0$. De fato, considere a função $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(\xi, \tau) = |\xi|^2 - \tau^2.$$

Note que h é diferenciável fora da origem e zero é valor regular de h , pois $\nabla h(\xi, \tau) = 2(\xi_1, \dots, \xi_n, -\tau) \neq 0$ em $h^{-1}(0)$. Além disso, a função h é de classe C^1 .

Figura 6 – Cone do $\mathbb{R}^3$

Exemplo 7. (Gráfico de funções) Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 sobre o aberto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. O gráfico da função f ,

$$G_f = \{(x, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau = f(x)\},$$

é uma hipersuperfície n -dimensional e de classe C^1 . De fato, considere a função $g : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, \tau) = f(x) - \tau.$$

Note que g é de classe C^1 . Além disso, zero é valor regular de g pois $\nabla g(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1\right) \neq 0$ em G_f .

2.2.1 Espaço tangente

Nosso objetivo nesta seção é definir o espaço tangente de uma superfície regular. Para isso, seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular n -dimensional e $f, g \in C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R})$. Uma *derivação* em M no ponto $p \in M$, é um funcional linear $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a regra do produto

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + X_p(g)f(p).$$

O **espaço tangente** de M no ponto p é o conjunto formado por todas as derivações em p , o qual denotaremos por $T_p M$. Claramente, este conjunto tem a estrutura de um espaço vetorial, quando munido das operações

$$\begin{aligned} (X + Y)_p(f) &= X_p(f) + Y_p(f) \\ (cX)_p(f) &= cX_p(f), \end{aligned}$$

para toda $f \in C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$.

Lema 8. Seja $p \in M$ e $X_p \in T_p M$.

(i) Se f é constante, então $X_p(f) = 0$.

(ii) Se $f(p) = g(p) = 0$, então $X_p(fg) = 0$.

Demonstração. É suficiente provar (i) para a função constante $f_1 \equiv 1$, e usar linearidade para provar que se $f \equiv c$, temos $X_p(f) = 0$. Para f_1 , segue usando a regra do produto

$$X_p(f_1) = X_p(f_1 f_1) = f_1(p)X_p(f_1) + f_1(p)X_p(f_1) = 2X_p(f_1)$$

o que implica que $X_p(f_1) = 0$. Similarmente, usando a regra do produto, podemos mostrar (ii). $\square$

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular n -dimensional e $f \in C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R})$. Dada $\{U, \alpha\}$ uma coordenada de M no ponto $p = \alpha(q)$ e $X_p \in T_p M$ uma derivação de M no ponto p . A derivada de α no ponto p , é uma aplicação $(d\alpha)_q : T_q U \rightarrow T_p M$ definida por

$$(d\alpha)_q(X(f)) = X_p(f \circ \alpha). \quad (2.26)$$

Relembre que, se $f : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo entre abertos A, B do $\mathbb{R}^n$, então a derivada de f no ponto $q \in A$, a saber, $(df)_q$ é um isomorfismo. Como α é um difeomorfismo local, segue que $(d\alpha)_q$ leva uma base de $T_q \mathbb{R}^n$ para uma base de $T_p M$. Seja $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, sabemos que $\left\{ \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ é uma base para o $\mathbb{R}^n$ e, portanto,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = (d\alpha)_q \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q \right),$$

é uma base para $T_p M$. Mais precisamente, seja $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre $V = \alpha(U)$, então

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p g = (d\alpha)_q \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q g \right) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q (g \circ \alpha).$$

Acabamos de verificar o seguinte lema.

Lema 9. O conjunto $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right\}_{i=1}^n$ é uma base para $T_p M$.

Seja $\{U, \alpha\}$ uma coordenada local de M no ponto $p = \alpha(q)$ e seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma curva regular passando por $\gamma(0) = q$ e tal que $\gamma'(0) = v$. Então a aplicação $\zeta = \alpha \circ \gamma$ é uma curva regular sobre M passando por p e cuja a derivada é definida por

$$w = (d\alpha)_q(v) = \frac{d}{dt}(\alpha \circ \gamma)(0).$$

A definição acima tem um problema, curvas γ diferentes geram o mesmo vetor w . Desta forma perdemos a unicidade. Para garantir que a definição acima é bem definida, olhamos para a curva γ como uma classe de equivalência segundo a relação equivalência abaixo.

Definição 5. Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular n -dimensional e $\{U, \alpha\}$ uma coordenada local de M no ponto $p = \alpha(q)$. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ curvas regulares tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = q$. Dizemos que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ são equivalentes, quando

$$\frac{d}{dt}(\alpha \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\alpha \circ \gamma_2)(0).$$

Esta definição não depende da escolha da parametrização. Queremos mostrar que $X_p \in T_p M$ é uma derivação em M no ponto p se, e somente se existe uma curva coordenada $\alpha \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \alpha(U)$ passando por $p = \alpha(q)$ tal que

$$X_p = \frac{d}{dt}(\alpha \circ \gamma)(0), \quad (2.27)$$

para alguma curva regular $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) = q$. Seja ζ uma curva coordenada em M passando por $p = \zeta(0)$, então usando (2.26),

$$\zeta'(0)(f) = (d\alpha)_q(\zeta(0)(f)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ \zeta) = X_{\zeta(0)}(f).$$

O próximo lema mostra que todo vetor tangente (no sentido de derivação) de uma superfície é o vetor tangente de alguma curva coordenada. Isto nos apresenta uma alternativa geométrica para o espaço tangente, isto é, os vetores tangentes são vistos como derivadas de curvas regulares sobre uma superfície.

Lema 10. Seja M uma superfície regular e $p \in M$. Todo vetor $X_p \in T_p M$ é o vetor tangente para alguma curva regular sobre M .

Demonstração. Seja $X_p \in T_p M$ uma derivação em M . Então $X_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_p$. Considere o caminho $\gamma(t) = t(c_1, \dots, c_n)$. Para que este caminho seja o que procuramos, escolha c_i de forma que $\frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_p = c_i$. Veja que $X_p(f - f(p)) = X_p(f)$, uma vez que X_p é linear e a derivação de funções constantes é nula. Portanto

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha(tc_1, \dots, tc_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_{\gamma(0)}.$$

□

Com esta equivalência, podemos escolher com qual das definições de vetor tangente queremos trabalhar. Usaremos a definição de vetores tangentes segundo a identificação (2.27).

2.2.2 A primeira forma fundamental

Nosso objetivo é definir a primeira forma fundamental de uma superfície M do $\mathbb{R}^{n+1}$. Antes disso, precisamos definir uma partição da unidade para uma superfície regular. Seja $\{V_j\}_{j \in J}$ uma cobertura aberta e *localmente finita* de uma superfície regular M . Uma *partição da unidade* subordinada a $\{V_j\}_{j \in J}$ é uma coleção de funções suaves $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ tais que

- (i) $0 \leq \varphi_j(p) \leq 1$, para todo $j \in J$ e $p \in M$
- (ii) $\text{supp } \varphi_j \subset V_j$
- (iii) $\sum_{j \in J} \varphi_j(p) = 1$, para todo $p \in M$.

Observação 2. A série $\sum_{j \in J} \varphi_j(p)$ é, na verdade, uma soma finita. De fato, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V_p de p tal que V_p intersecta somente finitos suportes de φ_j . Portanto, a série acima se trata de uma soma finita. Toda superfície regular tem uma cobertura localmente finita (LEE, 2013, Teorema 1.15)

Lema 11. (Existência da partição da unidade) Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular e seja $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ uma cobertura localmente finita e aberta de M . Então existe uma partição da unidade $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ subordinada a $\mathcal{V}$.

Demonstração. Seja $\{W_i\}$ um refinamento de $\mathcal{V}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que esta nova cobertura é localmente finita. Para cada i , seja $\psi_i : W_i \rightarrow B_3(0)$ um difeomorfismo cuja existência é garantida pela definição de cobertura regular. Por exemplo, basta tomar a aplicação inversa de uma parametrização. Considere os conjuntos $U_i = \psi_i^{-1}(B_1(0))$ e $V_i = \psi_i^{-1}(B_2(0))$. Para cada i , defina a função $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_i = \begin{cases} \phi \circ \psi_i & \text{sobre } W_i, \\ 0 & \text{sobre } M \setminus \overline{V}_i, \end{cases}$$

onde ϕ é uma *função de corte* que satisfaz $\phi(x) \equiv 1$ para todo $x \in B_1(0)$ e $\text{supp}(\phi) = \overline{B}_2(0)$. Note que $W_i \cap (M \setminus \overline{V}_i) = W_i \setminus \overline{V}_i$. Se $\overline{V}_i \subsetneq W_i$, teremos que a intersecção $W_i \cap (M \setminus \overline{V}_i) = W_i \setminus \overline{V}_i$ é não vazia. Mas, note que as duas definições de f_i sobre este conjunto, $f_i(x) = 0$, para todo $x \in W_i \setminus \overline{V}_i$. Portanto, f_i está bem definida e, além disso, $\text{supp} f_i \subset W_i$.

Definindo as funções $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_j f_j(x)}.$$

A condição sob a cobertura $\{W_i\}$ a soma no denominador tem somente finitos termos não-nulos. Portanto, g é uma função $C^\infty(M)$ por construção. Como $f_i \equiv 1$ sobre U_i e todo ponto de $p \in M$ está em algum U_i , o denominador é sempre positivo. Imediatamente obtemos a condição $0 \leq g_i \leq 1$ e $\sum g_i \equiv 1$.

Reindexemos as funções g_i para que ela seja indexada pelo mesmo conjunto V de nossa cobertura aberta. Para cada i , existe algum índice $a(i) \in J$ tal que $W_i \subset V_{a(i)}$. Para cada $j \in J$, definamos $\varphi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_j = \sum_{i: a(i)=j} g_i.$$

Cada φ_j é C^∞ e satisfaz $0 \leq \varphi_j \leq 1$ e $\text{supp}(\varphi_j) \subset V_j$. Além disso, a condição sobre a cobertura $\{W_i\}$ garante que o conjunto formado pelos suportes das funções φ_j é localmente finito e $\sum_j \varphi_j = \sum_i g_i = 1$, como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 6 (Primeira forma fundamental). Seja M uma superfície regular. Uma primeira forma fundamental sobre M é uma família de formas bilineares, simétricas e definidas positiva sobre o

espaço tangente de M , isto é, para cada $p \in M$ associamos uma forma bilinear sobre $T_p M$,

$$I_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

1. $I_p(X_p, X_p) > 0$, para todo $0 \neq X_p \in T_p M$
2. $I_p(X_p, Y_p) = I_p(Y_p, X_p)$, para todo $X_p, Y_p \in T_p M$
3. A função $p \in M \mapsto I_p(Y_p, X_p)$ é suave.

Seja $\{U, \alpha\}$ uma coordenada local de M no ponto p e seja $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}(p) \right\}$ uma base de $T_p M$. Então, dados $v, w \in T_p M$ existem escalares $v_i = v_i(p)$ e $w_i = w_i(p)$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}.$$

Portanto, pela bilinearidade de I_p , obtemos

$$I_p(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j I_p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right) := \sum_{i,j=1}^n v_i g_{ij}(p) w_j = [v]_{\mathcal{B}}^t G [w]_{\mathcal{B}},$$

onde $[v]_{\mathcal{B}} = (v_1, \dots, v_n)^t$ e definimos $g_{ij}(p) = I_p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right)$. Note que $g_{ij} = g_{ji}$. A matriz $G = (g_{ij}(p))_{i,j=1}^n$ é chamada de matriz da primeira forma fundamental na coordenada local $\{U, \alpha\}$ de M no ponto p .

Notação: Seja I_p uma primeira forma fundamental sobre M , escreveremos

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_p &= I_p(v, w) \\ |v|_p &= \sqrt{\langle v, v \rangle_p} \quad \text{para todo } v, w \in T_p M. \end{aligned}$$

Também usaremos a notação $G^{-1} = (g^{ij}(p))_{i,j=1}^n$ para denotar a matriz inversa de G e a notação $g = \det G$.

Exemplo 8. A primeira forma fundamental canônica sobre o $\mathbb{R}^n$, é a aplicação I_p definida por

$$I_p = \sum \delta_{ij}(p) dx_i \otimes dy_j,$$

onde $G = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ denota a matriz identidade. Portanto, para todo $v, w \in T_p \mathbb{R}^n$,

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} v_i w_j = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v \cdot w.$$

É possível definir, intrinsecamente, uma primeira forma fundamental em uma superfície regular? O resultado a seguir garante que é possível.

Proposição 4. Toda superfície regular M tem uma primeira forma fundamental I_p , para todo $p \in M$.

Demonstração. Seja $\{U_j, \alpha_j\}$ as coordenadas locais de M tais que $\alpha_j(U_j) = V_j$. Desta forma, temos que a coleção $\{V_j\}_{j \in J}$ é uma cobertura aberta de M . Para cada j fixado, considere um produto interno I_j sobre U_j tal que $(I_j(p))_{k,l=1}^n$ é a matriz identidade. Pelo Lema 11, sabemos que uma coleção de funções suaves $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ tais que $0 \leq \varphi_j(p) \leq 1$, $\text{supp} \varphi_j \subset V_j$ satisfaz $\sum_{j \in J} \varphi_j(p) = 1$, para todo $p \in M$. Defina

$$I_p = \sum_i \varphi_j I_j \quad (2.28)$$

Note que a soma (2.28) é finita. Além disso, I_p é bilinear e simétrica. Para verificar que I_p é definida positiva, basta notar que $\varphi_j \geq 0$ para todo j e $\sum_j \varphi_j = 1$. Logo, I_p é uma primeira forma fundamental sobre a superfície M . $\square$

A Proposição 4 nos diz que toda superfície regular pode ser munida com uma primeira forma fundamental. Considere M' uma superfície regular e I uma primeira forma fundamental de M' . Suponha que existe uma imersão $\iota : M \hookrightarrow M'$, ou seja, suponha $M \subset M'$ é uma superfície regular e aplicação ι é injetiva. Queremos saber se é possível induzir a primeira forma fundamental de M' na superfície M . A resposta para esta questão é positiva e para respondê-la precisamos definir push-forwards.

Seja $F : M \rightarrow M'$ uma aplicação contínua e $X_p \in T_p M$. O *push-forward* de F é uma aplicação $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} M'$ definida por

$$F_*(X_p) = \left. \frac{d}{dt} (F \circ \gamma) \right|_{t=0},$$

onde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva regular tal que $\gamma(0) = p$. A aplicação dual de F_* , denotada por F^* é chamada de *pullback*. Observe que, geralmente, a imagem de um campo de vetores pelo push-forward não define um campo de vetores sobre M' . De fato, se F não é sobrejetiva, então podemos encontrar um ponto $p' \in M' \setminus F(M)$ e não conseguimos associar um vetor na forma $F_*(X_p)$ a este ponto. Se F não é injetiva, então podemos ter vários vetores diferentes associados a um ponto $p' \in M'$.

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular e I uma primeira forma fundamental do $\mathbb{R}^{n+1}$. Considere a imersão $\iota : M \rightarrow \iota(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dada pela *inclusão*. Note que podemos enxergar o espaço tangente $T_p M$ como um subespaço de $T_{\iota(p)} \mathbb{R}^{n+1}$ através da aplicação $(\iota_*)_p : T_p M \rightarrow T_{\iota(p)} \mathbb{R}^{n+1}$. Desta forma, podemos induzir uma primeira forma fundamental do $\mathbb{R}^{n+1}$ em M no ponto p definindo

$$I_p(v, w) = \iota^* I(v, w) = I(\iota_*(v), \iota_*(w)) = I(v, w), \quad \text{para todos } v, w \in T_p M. \quad (2.29)$$

Exemplo 9. A primeira fundamental de $\mathbb{S}^n$ no ponto p induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$ é a forma bilinear $I_p : T_p\mathbb{S}^n \times T_p\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p(v, w) = \langle \iota_*(v), \iota_*(w) \rangle_p = \langle v, w \rangle_p$$

a qual é simétrica e definida positiva, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ denota um produto interno em $\mathbb{R}^{n+1}$. A matriz g_{ij} da primeira forma fundamental induzida em $\mathbb{S}^{n-1}$ é igual a matriz do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dada uma parametrização local $\{U, \alpha\}$ de M , podemos obter a primeira forma fundamental *intrínseca* à superfície M . Faremos isto nos próximos exemplos.

Exemplo 10. Seja $\mathbb{S}_r^n$ a esfera do $\mathbb{R}^{n+1}$ de raio $r > 0$. Seja $\psi : \mathbb{S}_r^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica do polo norte N de $\mathbb{S}_r^n$ sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$. Queremos encontrar a função inversa de ψ . Para isto, seja $q \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a reta que liga o ponto $(q, 0)$ ao polo norte $N = (0, \dots, 0, r)$,

$$\gamma(t) = (tq, (1-t)r).$$

Quando esta reta intersecta a esfera $\mathbb{S}_r^n$, obtemos

$$\|\gamma(t)\|^2 = t^2\|q\|^2 + (1-t)^2r^2 = r^2 \iff t\|q\|^2 + tr^2 = 2r^2 \iff t = \frac{2r^2}{\|q\|^2 + r^2}.$$

Portanto, a aplicação inversa da projeção estereográfica $\alpha = \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}_r^n$ é definida por

$$\alpha(q) = \left(r^2 \frac{2q}{\|q\|^2 + r^2}, r \frac{\|q\|^2 - r^2}{\|q\|^2 + r^2} \right).$$

Se $v \in T_p\mathbb{S}_r^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle 2p, v - p \rangle = 0\}$ então

$$\begin{aligned} d\alpha(v) &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha(q + tv) \right) \\ &= \left(\frac{2r^2(\langle q, q \rangle + r^2)v - 4r^2q\langle q, v \rangle}{(\langle q, q \rangle + r^2)^2}, \frac{2r\langle q, v \rangle(\langle q, q \rangle + r^2) - 2r\langle q, v \rangle(\langle q, q \rangle - r^2)}{(\langle q, q \rangle + r^2)^2} \right) \\ &= \frac{2r^2}{(\|q\|^2 + r^2)^2} ((\|q\|^2 + r^2)v - 2\langle q, v \rangle q, 2r\langle q, v \rangle). \end{aligned}$$

Assim, dado $v, w \in T_p\mathbb{S}^n$ tem-se

$$\langle d\alpha(v), d\alpha(w) \rangle = \frac{4}{(1 + \|q\|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Em particular, a matriz da primeira forma fundamental da esfera unitária $\mathbb{S}^n$ no ponto p é dada por

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{4}{(1 + \|q\|^2)^2} \delta_{ij}.$$

Exemplo 11. Seja $f \in C^k(U \rightarrow \mathbb{R})$, $k \geq 1$. O gráfico de f é uma superfície regular contida no $\mathbb{R}^{n+1}$. A aplicação $\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\alpha(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, f(u_1, \dots, u_n))$$

é uma parametrização global de $G_f = \{(u, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau = f(u)\}$. A primeira forma fundamental sobre G_f induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$I_p = \alpha^* I = \alpha^*((dx_1)^2 + \dots + (dx_{n+1})^2) = \sum_{i=1}^n (du_i)^2 + (df)^2.$$

Nesta coordenada global, a matriz da primeira forma é dada por

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_j}.$$

De fato, note que

$$\frac{d\alpha}{du_i} = d\alpha(e_i) = \left(0, \dots, 1, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_i}\right).$$

Logo,

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j}\right) = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_j}.$$

2.2.3 A aplicação de Weingarten

Nosso objetivo nessa seção é definir a *aplicação de Weingarten* e uma segunda forma fundamental sobre uma superfície regular M . Para isso, precisamos definir um campo vetorial normal a superfície M , chamado de *aplicação normal de Gauss*.

Alguns conceitos preliminares de álgebra linear. Sejam V um espaço vetorial de n -dimensional com $n \geq 1$ e $\Lambda^n(V)$ um n -tensor alternado sobre V . Suponha que Ω é um elemento não nulo de $\Lambda^n(V)$. Uma orientação para V é dada por uma base ordenada $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $\Omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Exemplo 12. Uma orientação do $\mathbb{R}^n$ é dada pela base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$. De fato,

$$\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} = 1 > 0.$$

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Um *produto exterior* de $v_1, \dots, v_n$, denotado por $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, é um elemento de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido pela equação

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n+1} \\ v_1^1 & v_1^2 & \dots & v_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & v_n^2 & \dots & v_n^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

onde $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^{n+1})$ e $e_1, \dots, e_{n+1}$ são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 13. Sejam e_1, e_2 os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$. O produto exterior de e_1 e e_2 é o vetor

$$e_1 \wedge e_2 = 0e_1 - 0e_2 + 1e_3 = e_3.$$

O produto exterior definido em (2.30) tem as seguintes propriedades:

Proposição 5. Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Então o produto exterior $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ satisfaz:

(i) $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ é anti-simétrico, isto é

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge v_n = -v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n.$$

(ii) o vetor $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ é tal que $w \perp v_i$, para todo $1 \leq i \leq n$;

(iii) se $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes, então $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$.

Temos ferramentas suficientes para determinar uma orientação de superfície. Seja M uma superfície regular. Uma **orientação pontual** sobre M no ponto p é definida pela escolha de uma orientação para o espaço tangente $T_p M$, isto é, a orientação proveniente de uma base ordenada $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_p M$ tal que $\Omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ para alguma n -forma diferenciável $\Omega \in \Lambda^n(T_p M)$ sobre o espaço tangente. Dizemos que M é **orientável**, se a n -forma $\Omega \in \Lambda^n(T_p M)$ preserva o sinal da orientação de $T_p M$ para todo $p \in M$. A menos que mencionemos o contrário, todas as superfícies aqui citadas serão orientáveis.

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular de dimensão n e seja $p \in M$. Fixe uma coordenada $\{U, \alpha\}$ local de M no ponto p tal que $\alpha(q) = p$ e denote $\alpha_i = \alpha_i(q) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(q)$. Uma vez que M é orientável, podemos definir uma aplicação diferenciável $N : \alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$N(p) = \frac{\alpha_1(q) \wedge \dots \wedge \alpha_n(q)}{\|\alpha_1(q) \wedge \dots \wedge \alpha_n(q)\|}.$$

O vetor normal $N(p)$ está bem definido para todo $p \in M$. Isto decorre do fato de que os vetores $\alpha_i(q)$ são linearmente dependentes (condição (iii) da Definição 4) e a condição (iii) da Proposição 5 garante que o produto exterior destes vetores é um vetor não-nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$.

A aplicação N é chamada de **aplicação de Gauss**. Como N é um vetor unitário, a aplicação N tem imagem contida na esfera unitária $\mathbb{S}^n$. A imagem da aplicação de Gauss

$$N(M) = \{q \in \mathbb{S}^n; q = N(p), \text{ para algum } p \in M\},$$

é chamada de *imagem esférica* da hipersuperfície orientada M . Introduzido a aplicação de Gauss, queremos medir a *curvatura* de uma superfície. O cálculo se baseia na chamada segunda forma fundamental de um mapa da superfície. No entanto, é preciso saber como derivar um campo de

vetores diferenciável. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k sobre o aberto A do $\mathbb{R}^{n+1}$. A derivada de f em p na direção de $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ é definida por

$$\nabla_v f = \nabla f(p) \cdot v. \quad (2.31)$$

Considere uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow A$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$, então pela regra da cadeia, temos

$$\nabla_v f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = \nabla f(p) \cdot v. \quad (2.32)$$

Note que a fórmula em 2.32 mostra que $\nabla_v f$ não depende da escolha da curva γ .

Considere o campo de vetores diferenciável $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sobre o aberto A do $\mathbb{R}^{n+1}$. A derivada de $\mathbf{F}$ no ponto p e na direção de v é definida por

$$\nabla_v \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \circ \gamma)(t_0) = \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{F}^1 \circ \gamma)(t_0), \dots, \frac{d}{dt}(\mathbf{F}^{n+1} \circ \gamma)(t_0) \right) \quad (2.33)$$

onde $\gamma : I \rightarrow A$ é uma curva diferenciável em A tal que $\gamma'(t_0) = v$ e $\mathbf{F}^i$ são as funções componentes do campo $\mathbf{F}$. Esta definição não depende da escolha da curva.

Usando as propriedades das derivadas, é fácil verificar que a derivação de campos de vetores tem as seguintes propriedades:

Proposição 6. Seja $\mathbf{F}, \mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dois campos de vetores diferenciáveis sobre o aberto A do $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A . Então valem as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_v(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla_v \mathbf{F} + \nabla_v \mathbf{G}$;
- (ii) $\nabla_v(f\mathbf{F}) = (\nabla_v f)\mathbf{F}(p) + f(p)(\nabla_v \mathbf{F})$;
- (iii) (Regra do produto) $\nabla_v(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\nabla_v \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G}(p) + \mathbf{F}(p) \cdot (\nabla_v \mathbf{G})$.

Seja M uma superfície regular e $F : M \rightarrow TM$, onde $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$, um campo de vetores diferenciável. Pergunta $\nabla_v F \in T_p M$, para algum $p \in M$? A resposta para esta questão é positiva quando consideramos a aplicação de Gauss, pois

$$0 = \nabla_v(1) = \nabla_v(N \cdot N) = \nabla_v N \cdot N + N \cdot \nabla_v N = 2\nabla_v N \cdot N,$$

ou seja, $\nabla_v N \perp N$.

A aplicação de Weingarten dN_p sobre uma superfície M , é um operador linear sobre $T_p M$, isto é, $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ definido por

$$dN_p(v) = -\nabla_v N.$$

Exemplo 14. Seja $\mathbb{S}_r^n$ uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ de raio r , isto é

$$\mathbb{S}_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = r\}.$$

O campo de vetores normal da esfera $\mathbb{S}_r^n$ é dado por

$$N(x) = -\frac{x}{r} = -\left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_{n+1}}{r}\right), \text{ para cada } x \in \mathbb{S}_r^n.$$

Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Portanto, por (2.33), temos

$$\nabla_v N(p) = \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \Big|_{t=0}.$$

Escolhendo o vetor normal que aponta para o exterior da esfera, obtemos

$$N(\gamma(t)) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \frac{\gamma(t)}{r}.$$

Portanto, $dN_p(v) = \left(\frac{\gamma'_1(t)}{r}, \dots, \frac{\gamma'_{n+1}(t)}{r}\right) = \frac{v}{r}$.

Exemplo 15. Seja M uma superfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ dada pelo gráfico da função $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$ no aberto A de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Phi(x) = x_{n+1} - \phi(x_1, \dots, x_n) = 0\}, \quad (2.34)$$

Considere a parametrização $\alpha : A \rightarrow M$ de M definida por $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - \phi(x_1, \dots, x_n))$. O produto exterior $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ é o vetor

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \phi}{\partial x_n}, 1\right) = \nabla \Phi.$$

O campo normal $N : \alpha(A) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é definido por

$$N(x) = \frac{\nabla \Phi(x)}{\|\nabla \Phi(x)\|}.$$

Seja $v \in T_x M$, pela regra do produto

$$\begin{aligned} dN_x(v) &= -\nabla_v N = -\nabla_v \left(\frac{\nabla \Phi(x)}{\|\nabla \Phi(x)\|} \right) \\ &= -\left[\nabla_v \left(\frac{1}{\|\nabla \Phi\|} \right) \nabla \Phi(x) + \frac{1}{\|\nabla \Phi(x)\|} \nabla_v (\nabla \Phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Um fato importante sobre a aplicação de Weingarten pode ser observado na seguinte proposição.

Proposição 7. A aplicação de Weingarten é auto-adjunta.

Demonstração. Denotemos $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \alpha_i$. Como dN_p é linear, é suficiente mostrar que $\langle dN_p(\alpha_i), \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, dN_p(\alpha_j) \rangle$, onde $\alpha_i, \alpha_j \in T_p S$ são dois vetores quaisquer que formam a base do espaço tangente. Como $\langle N, \alpha_j \rangle = 0$, então, derivando na direção de α_j , obtemos

$$\langle -\nabla_{\alpha_j} N, \alpha_j \rangle + \langle N, \alpha_{ij} \rangle = 0. \quad (2.36)$$

De forma análoga, derivando $\langle N, \alpha_i \rangle = 0$ com respeito a α_i

$$\langle -\nabla_{\alpha_i} N, \alpha_i \rangle + \langle N, \alpha_{ij} \rangle = 0. \quad (2.37)$$

Agora, sabendo que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, pelas equações (2.36) e (2.37) e sabendo que o produto interno é simétrico, obtemos o resultado. $\square$

2.2.3.1 Segunda forma fundamental

Nesta seção definiremos a segunda forma fundamental de uma superfície e obteremos algumas propriedades locais das superfícies regulares, tais como, o fato de toda superfície regular M ser localmente uma hipersuperfície.

Relembre que a aplicação $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ é linear, desta forma podemos associar a dN_p uma forma bilinear $\Pi_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Pi_p(u, v) = -\langle dN_p(u), v \rangle, \text{ onde } u, v \in T_p M.$$

A forma bilinear Π_p é simétrica. Esta forma bilinear é conhecida como a **segunda forma fundamental** de M em p .

Proposição 8. Seja M uma superfície regular dada por $G_\phi = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \phi(x)\}$, onde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^k , $k \geq 2$, e $p = (q, \phi(q)) \in M$. Então,

$$[\Pi_p]_{i,j=1,\dots,n} = \text{Hess}_\phi(q),$$

aqui, $\text{Hess}_\phi(q)$ denota a matriz Hessiana de ϕ no ponto q

$$\text{Hess}_\phi(q) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(q) \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Demonstração. Defina a função $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(x) = x_{n+1} - \phi(x')$. Claramente Φ é de classe C^k , $k \geq 2$, visto que é a soma de duas funções de classe C^k , $k \geq 2$ e $\nabla \Phi = (-\nabla \phi, 1)$. Sejam $u, v \in T_p M$. Note que podemos enxergar u, v como vetores do $\mathbb{R}^{n+1}$ quando $u_{n+1} = v_{n+1} = 0$. Então, usando (2.35)

$$\Pi_p(u, v) = -\langle dN_p(u), v \rangle = -\left\langle \nabla_u \left(\frac{1}{\|\nabla \Phi\|} \right) \nabla \Phi(p), v \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\|\nabla \Phi(p)\|} \nabla_u(\nabla \Phi), v \right\rangle.$$

Como podemos trabalhar localmente sobre a superfície, podemos supor que a função Φ é tal que $\|\nabla\Phi\| = 1$, pois, em caso contrário, definimos a função $\Psi = \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}$, a qual tem o mesmo comportamento local de Φ . Sob a hipótese que $\|\nabla\Phi\| = 1$ e sabendo que $\nabla\Phi \perp v$ temos

$$\begin{aligned} \Pi_p(u, v) &= -\langle \nabla_u(\nabla\Phi), v \rangle = -\langle (\nabla(\nabla\Phi))^1 \cdot u, \dots, \nabla(\nabla\Phi)^{n+1} \cdot u, v \rangle \\ &= -\left\langle \left(\nabla \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right) \cdot u, \dots, \nabla \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n+1}} \right) \cdot u \right), v \right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_1} u_i, \dots, \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_{n+1}} u_i \right), v \right\rangle \\ &= -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j, \end{aligned}$$

onde u_i e v_j são as componentes dos vetores u e v . Notando que

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(q)$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$, concluímos a demonstração. $\square$

Como a segunda forma fundamental é uma forma bilinear simétrica, então a matriz $[\Pi_p]$ associada a esta forma é simétrica. Desta forma, o Teorema Espectral para operadores simétricos garante a existência de uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ tal que $[\Pi_p]_{\mathcal{B}}$ é diagonal. Em outras palavras, existem $k_1(p), \dots, k_n(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$[\Pi_p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_1(p) & & \\ & \ddots & \\ & & k_n(p) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Seja M uma superfície regular e $p \in M$. Considere que $\mathcal{B} = \{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$ tal que a matriz da aplicação de Weingarten de M no ponto p escrita nesta base é diagonal. Seja $k_1(p), \dots, k_n(p) \in \mathbb{R}$ os autovalores da matriz $[dN_p]_{\mathcal{B}}$. Seja $[\Pi_p] = (a_{ij})$ matriz da segunda forma fundamental de M no ponto p . Note que

$$a_{ij} = \langle dN_p(k_i e_i), e_j(p) \rangle = k_i(p) \delta_{ij},$$

ou seja, a matriz da segunda forma fundamental de M no ponto p coincide com a matriz associada a aplicação de Weingarten $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$.

Definição 7. Sejam $p \in M$ e $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ a aplicação de Weingarten. Suponha que a matriz de dN_p esteja na forma (2.38). Os números reais $k_i(p)$ são chamados de **curvaturas principais** da superfície M no ponto p , as direções correspondentes e_i são chamadas de **direções principais** em p . Note que as curvaturas principais de M são os autovalores da aplicação de Weingarten dN_p .

Agora podemos definir as curvaturas Gaussiana K , no ponto p , de uma superfície M

Definição 8. Seja $p \in M$ e $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ a aplicação de Weingarten de uma superfície orientável M . A curvatura **Gaussiana** de M em p é o número real $K(p)$ definido por $K(p) = \det[dN_p]$.

O nosso objetivo é analisar o comportamento local das curvaturas principais de uma superfície em um ponto $p \in M$. A proposição seguinte afirma que localmente uma superfície M é um gráfico de uma função F de classe C^k . Esta informação vai ser relevante para o Capítulo 3 que estuda o decaimento de medidas suportadas em superfícies.

Lema 12. Seja $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de classe C^1 , então existe um aberto V de $\mathbb{R}^{n+1}$ e uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$x \in V \cap M \quad \text{se e somente se} \quad x_j = F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Demonstração. A hipersuperfície M de $\mathbb{R}^{n+1}$ é dada pela equação

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

onde G é uma função de classe C^1 tal que $\nabla G(x) \neq 0$, para todo $x \in M$. O espaço tangente de M em um ponto $x \in M$ é, por definição, o espaço normal ao vetor $\nabla G(x)$, isto é,

$$T_x M = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \nabla G(x) \cdot (z - x) = 0\} \quad (2.39)$$

Considere a aplicação

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, G(x_1, \dots, x_{n+1}), x_{j+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Claro que $F \in C^k$ e $\det J_F(p) = \frac{\partial G}{\partial x_j} \neq 0$ para algum j . Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta W de p e uma vizinhança aberta V de $F(p)$ tais que $F : W \rightarrow V$ é um difeomorfismo de classe C^k . Ou seja, $x \in V \cap M$ se e somente se $x_j = F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$. $\square$

Este resultado pode ser estendido para superfícies regulares de classe C^k .

Proposição 9. Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular de classe C^k e $p \in M$. Então existe uma vizinhança coordenada $W \cap \alpha(U)$ de p e uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que $W \cap \alpha(U)$ é o gráfico de f .

Demonstração. Seja $\{U, \alpha\}$ uma coordenada local de M em um ponto $p = \alpha(q)$. Escreva,

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha^{n+1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Considere a aplicação $\pi \circ \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde π é a projeção $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$. Observe que $J_{\pi \circ \alpha}(q)$ é a submatriz de ordem n da matriz jacobiana de α no ponto q , excluindo a

última linha da matriz jacobiana $J_\alpha(q)$. A condição (iii) da Definição 4 garante que o determinante da matriz jacobiana de $\pi \circ \alpha$ é diferente de zero no ponto q . Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta V de q e uma vizinhança aberta W de $(\pi \circ \alpha)(q)$ tal que $\pi \circ \alpha : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo. Claro que $\alpha(V)$ é um aberto contendo p e $\pi|_{\alpha(V)}$ é bijetiva. Considere a função $f = \alpha^{n+1} \circ (\pi \circ \alpha)^{-1}$. Queremos mostrar que $\alpha(V)$ é o gráfico da função f . Com efeito, dado $\tilde{p} \in \alpha(V)$ existem únicos $\tilde{q}_1 \in V$ e $\tilde{q}_2 \in W$ tais que $\alpha(\tilde{q}_1) = \tilde{p}$ e $\pi(\tilde{p}) = \tilde{q}_2$. Seja $\tilde{p} = (\alpha^1(\tilde{q}_1), \dots, \alpha^{n+1}(\tilde{q}_1))$ e $\tilde{q}_2 = (\alpha^1(\tilde{q}_1), \dots, \alpha^n(\tilde{q}_1))$. Para simplificar a notação, denote $x_i = \alpha^i(\tilde{q}_1)$. Considere a composição

$$V \xrightarrow{\alpha} \alpha(V) \xrightarrow{\pi} \alpha(V) \xrightarrow{\alpha^{n+1}} \mathbb{R}$$

Então,

$$x_{n+1} = \alpha^{n+1}(\tilde{q}_1) = \alpha^{n+1}(\alpha^{-1}(\tilde{p})) = \alpha^{n+1} \circ (\pi \circ \alpha)^{-1}(\tilde{q}_2) = f(\tilde{q}_2)$$

Segue que, $\tilde{p} = (\tilde{q}_2, f(\tilde{q}_2))$. □

Observação 3. Seja $p \in M$ um ponto de uma superfície orientável M . Então, pela Proposição 9, existe uma vizinhança V de M contendo p tal que $V = G_f$ é o gráfico de uma função f de classe $\phi \in C^k$. Portanto, pela Definição 7 e a Proposição 8, as curvaturas principais $k_j(p)$ de M são os autovalores da matriz Hessiana de ϕ no ponto p .

2.2.3.2 Curvaturas principais de algumas superfícies quadráticas

Nesta seção, iremos utilizar a Proposição 8 para calcular as curvaturas principais de um certo grupo de superfícies quadráticas.

Exemplo 16 (Curvatura da esfera). Denote o hemisfério superior da esfera $\mathbb{S}_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = r^2\}$ por $\mathbb{S}_{r+}^n$. Dado $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}_{r+}^n$ então $x_{n+1} = \sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2}$. Considere a função $f \in C^k(U \rightarrow \mathbb{R}_+)$ definida por

$$f(y) = \sqrt{r^2 - \|y\|^2}.$$

Concluimos que $\mathbb{S}_{r+}^n$ é o gráfico de f . O gradiente de f é dado pelo vetor

$$\nabla f = \left(-\frac{y_1}{\sqrt{r^2 - \|y\|^2}}, \dots, -\frac{y_n}{\sqrt{r^2 - \|y\|^2}} \right).$$

A matriz Hessiana de f no ponto q é dada por

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) (q) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(-\frac{y_i}{\sqrt{r^2 - \|y\|^2}} \right) (q) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{r^2 - \|q\|^2}} + \frac{y_i^2}{(r^2 - \|q\|^2)^{\frac{3}{2}}}, & i = j \\ \frac{y_i y_j}{(r^2 - \|q\|^2)^{\frac{3}{2}}}, & i \neq j. \end{cases}$$

Em outras palavras,

$$\text{Hess}_f(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{r} \end{bmatrix},$$

isto é, a esfera $\mathbb{S}^n$ possui n curvaturas principais não-nulas e constantes.

Exemplo 17 (Curvatura do cone). Vimos que o cone

$$\text{Cone}^n = \left\{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : x_{n+1} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \right\} = G_f$$

é gráfico da função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = \|x\|$. Note que f é de classe C^1 fora da origem e o vetor gradiente de f é dado por

$$\nabla f(q) = \left(\frac{y_1}{\|q\|}, \dots, \frac{y_n}{\|q\|} \right), \quad q = (y_1, \dots, y_n).$$

A matriz Hessiana da função f é dada por

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(y_i (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = \begin{cases} -\frac{y_i y_j}{\|q\|^3}, & i \neq j \\ \frac{1}{\|q\|} - \frac{y_i y_j}{\|q\|^3}, & i = j. \end{cases}$$

Se $p \in V = \alpha(U)$ é o ponto $(a, 0, \dots, 0, a)$, onde $a \neq 0$, então $p = (q, f(q))$, onde $q = (a, 0, \dots, 0)$. Pela Proposição 8, as curvaturas principais de Cone^n são os autovalores

$$\text{Hess}_f(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o cone Cone^n possui $n-1$ curvaturas principais não-nulas no ponto $p = (a, 0, \dots, 0, |a|)$.

Além disso, note que a curvatura Gaussiana do cone é uma função constante.

Exemplo 18 (Curvatura do paraboloide). Seja $\{U, \alpha\}$ uma coordenada local do paraboloide $\mathbb{P}^n$ no ponto $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n$ tal que $x_{n+1} = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Considere a função $f(x) = \|x\|^2$, note que o gráfico de f é dado pelo paraboloide $\mathbb{P}^n = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = x_1^2 + \cdots + x_n^2\}$. O vetor gradiente de f é

$$\nabla f(y) = (2y_1, \dots, 2y_n) = 2y.$$

A matriz Hessiana de f no ponto q é dada por

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) (q) = \frac{\partial}{\partial y_j} (2y_i) (q) = \begin{cases} 2, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Portanto, segundo a Definição 8 e a Proposição 8, a curvatura Gaussiana do Paraboloide no ponto p é dada por

$$K(p) = \det \text{Hess}_f(q) = \det \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4\|y\|^2+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{2}{\sqrt{4\|y\|^2+1}} \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{\sqrt{4\|y\|^2+1}} \right)^n.$$

Desta forma, todas as curvaturas principais do parabolóide são constantes e não-nulas em cada ponto $p \in \mathbb{P}^n$. Isto implica que a curvatura Gaussiana do parabolóide é também não-nula.

2.3 Medida intrínseca de superfície

Esta seção tem o objetivo de apresentar ao leitor medidas intrínsecas $d\sigma$ aquelas derivadas da primeira forma fundamental de uma superfície regular. As referências adotadas para esta seção foram (FOLLAND, 1999, cap. 2), (TAYLOR, 2006, cap. 7).

Seja M uma superfície regular imersa em $\mathbb{R}^n$ e seja dm a medida de Lebesgue definida sobre a σ -álgebra $\mathcal{L}^n$ formada pelos conjuntos Lebesgue mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. É natural perguntar como devemos proceder para induzir uma medida $d\sigma$ sobre a superfície M . Nesta seção, o nosso objetivo é responder esta questão. No Apêndice A apresentaremos uma construção natural de medidas canônicas sobre superfícies usando teoria de distribuições, veja Seção A.1.

2.3.1 Teoremas de mudança de variável

Começamos relembando dois teoremas clássicos, conhecidos como *Teoremas de mudança de variáveis* para medidas μ e para funções em $L^1(\mathbb{R}^n, dm)$. Para enunciar e provar o primeiro deles, precisamos definir o conceito de *pushforward* de medidas.

Definição 9. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e (Y, Σ) um espaço mensurável. Seja $F : X \rightarrow Y$ uma função mensurável. O **pushforward** de uma medida μ pela aplicação F , é uma medida $F_*\mu$ sobre o espaço (Y, Σ) definida por

$$(F_*\mu)(B) = \mu(F^{-1}(B)), \quad \text{para todo } B \in \Sigma.$$

Teorema 17. (Teorema da mudança de variáveis para medidas) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e (Y, Σ) um espaço mensurável. Se f é uma função Σ -mensurável, então

$$\int_Y f(y) d_{F_*\mu} = \int_X (f \circ F)(x) d\mu, \quad (2.40)$$

sempre que $F : X \rightarrow Y$ for uma aplicação mensurável.

Demonstração. Para provar este teorema, provaremos em primeiro caso que a tese é válida para funções não-negativas. Em seguida, generalizaremos para quaisquer funções f Σ -mensurável.

Primeiramente, considere que $f = \chi_B$, com $B \in \Sigma$. Neste caso, teremos

$$(f \circ F)(b) = \chi_B(F(b)) = \chi_{F^{-1}(B)}(b).$$

Desta forma

$$\int_Y f dF_*\mu = (F_*\mu)(B) = \mu(F^{-1}(B)) = \int_X \chi_{F^{-1}(B)}(b) = \int_X (f \circ F) d\mu. \quad (2.41)$$

Portanto, o resultado vale para funções características e, pela linearidade da integral, para funções simples.

Considere que $f \geq 0$ e seja $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções simples não-decrescentes tais que $0 \leq f_n \leq f$ e $f_n \rightarrow f$ pontualmente, quando $n \rightarrow \infty$. Usando o Teorema da Convergência monótona e (2.41), tem-se que

$$\int_Y f dF_*\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n dF_*\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y (f_n \circ F) d\mu.$$

Como a sequência $\{f_n \circ F\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não-negativa, não-decrescente e converge pontualmente para $f \circ F$, podemos utilizar novamente o Teorema da Convergência monótona para obter

$$\int_Y f dF_*\mu = \int_X f \circ F d\mu.$$

Isto mostra que o resultado é válido para funções não negativas. Para provar o caso para qualquer f mensurável, basta notar que podemos fazer

$$f \circ F = (f \circ F)^+ - (f \circ F)^- = (f^+ \circ F) - (f^- \circ F) = (f^+ - f^-) \circ F,$$

e proceder como no caso anterior. □

O Teorema 17 é efetivamente um teorema de mudança de variáveis entre os espaços $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \Sigma, F_*\mu)$. Seja $GL(n, \mathbb{R})$ o espaço vetorial dos operadores $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertíveis. Da álgebra linear elementar, sabemos que toda aplicação $T \in GL(n, \mathbb{R})$ pode ser escrita como composição de aplicações lineares elementares. Estas três aplicações são definidas por,

$$\begin{aligned} T_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, cx_k, \dots, x_n) \quad (c \neq 0) \\ T_2(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_j + cx_k, \dots, x_n) \quad (k \neq j) \\ T_3(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_k \dots, x_j, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Teorema 18. Seja $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lebesgue mensurável, então $f \circ T$ é Lebesgue mensurável. Além disso, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dm = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) |\det T| dm. \quad (2.42)$$

Em particular, $m(T(E)) = |\det T| m(E)$, sempre que $E \in \mathcal{L}^n$.

Demonstração. Claro que $f \circ T$ é Lebesgue mensurável, pois T é sempre uma aplicação contínua. Claro $(GL(n, \mathbb{R}), \circ)$ é um grupo. Desta forma, é suficiente provar (2.42) para as transformações lineares elementares T_1, T_2 e T_3 . Para $T = T_3$ basta mudar a ordem de integração nas variáveis x_j e x_k . Além disso, note que $|\det T_3| = 1$. Para $T = T_1$, veja que a matriz (a_{ij}) associada a T_1 é dada por,

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \neq k \\ c, & i = j = k. \end{cases}$$

Portanto, $\det T_1 = c \neq 0$ e a fórmula (2.42) é válida. Para T_2 o determinante $\det T_2 = 1$ e temos (2.42), pois a integral na j -ésima coordenada é invariante por translação.

Veja que, se E é Lebesgue mensurável, então $T^{-1}(T(E)) = E$ é Lebesgue mensurável, pois T^{-1} é contínua. Agora, tome $f = \chi_{T(E)}$. Veja que $\chi_{T(E)} \circ T = \chi_E$. De fato, se $x \in E$, então $\chi_E(x) = 1$ e $T(x) \in T(E)$, daí $\chi_{T(E)} \circ T(x) = 1$. Se $x \notin E$, então $\chi_E(x) = 0$ e, além disso, $T(x) \notin T(E)$, daí $\chi_{T(E)} \circ T(x) = 0$. Usando a parte *i.*, obtemos

$$m(T(E)) = \int \chi_{T(E)}(x) dm = |\det T| \int (\chi_{T(E)} \circ T)(x) dm = |\det T| m(E).$$

Assim concluímos a demonstração do teorema. □

Seja $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ o grupo de transformações ortogonais em $\mathbb{R}^n$, isto é, dada $T \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, então

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, $\det T = 1$ sempre que $T \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. Dizemos que uma medida μ é invariante por transformações ortogonais quando $\mu(T(E)) = \mu(E)$, para qualquer $T \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. Com o Teorema 18, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2. A medida de Lebesgue é invariante por transformações ortogonais.

O Teorema 18 pode ser generalizado, quando substituímos $T \in GL(n, \mathbb{R})$ por difeomorfismos G . Mais precisamente, seja A um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $G : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k . Se a matriz jacobiana $J_G(x)$ de G é uma matriz invertível, para todo $x \in A$, pelo Teorema da Função Inversa existem vizinhanças U do ponto x e $V = G(U)$ do ponto $G(x)$ tal que a aplicação inversa $F = G^{-1} : V \rightarrow U$ é de classe C^k . Além disso, $F \circ G : A \rightarrow A$ é a aplicação identidade em A . Neste caso, temos que $J_{F \circ G} = J_F J_G$ e, usando a propriedade do determinante do produto de matrizes, obtemos

$$\det J_F \det J_G = \det I_n = 1.$$

Teorema 19. Seja $G : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 sobre um aberto A do $\mathbb{R}^n$. Se f é uma função Lebesgue mensurável sobre $G(A)$, então $f \circ G$ é Lebesgue mensurável sobre A . Além disto, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$, então

$$\int_{G(A)} f dm = \int_A (f \circ G) |\det J_G(x)| dm. \quad (2.43)$$

Em particular, $m(G(E)) = \int_E |\det J_G(x)| dm$, quando $E \subset A$ é Lebesgue mensurável.

Demonstração. Basta considerar $T = J_G(x)$ no Teorema 18. $\square$

2.3.2 Medidas intrínsecas de superfícies

O Teorema 19 nos motiva como definir uma medida intrínseca sobre uma superfície M . Nesta seção, usaremos a notação $d\sigma$ para a medida intrínsecas sobre superfícies. Veremos que a matriz da primeira forma fundamental desta superfície agirá de forma similar a matriz jacobiana.

Definição 10. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, dm)$ e seja M uma superfície regular de C^k , $k \geq 1$. Seja $G(x)$ a matriz da primeira forma fundamental de M no ponto x . Uma **medida intrínseca** $d\sigma$ sobre a superfície M é a medida de Lebesgue induzida pela primeira forma fundamental em coordenadas locais. Mais precisamente,

$$\int_{\alpha^{-1}(U)} f d\sigma = \int_U f(x) \sqrt{g} dm,$$

onde $\{U, \alpha\}$ é uma coordenada local de M e $g(x) = \det G(x)$. Usando partição da unidade, podemos definir a medida $f d\sigma$ globalmente,

$$\int_M f d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sqrt{g} dm, \quad (2.44)$$

Precisamos verificar se a integral (2.44) é invariante por mudanças de coordenadas. Mais precisamente, seja $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ a matriz da primeira forma fundamental de M no ponto p ,

$$g_{ij}(p) = I_p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p) \right), \quad (2.45)$$

onde $\{B, \alpha\}$ é uma coordenada local de M no ponto p e seja $\{A, \beta = \alpha \circ F\}$ uma reparametrização de M no ponto $q \in M$, onde F é um difeomorfismo de classe C^k tal que $x = F(y)$. A matriz da primeira forma fundamental com respeito a coordenada local $\{A, \beta\}$ é dada por $H = I_p \left(\frac{\partial \beta}{\partial y_i}, \frac{\partial \beta}{\partial y_j} \right)$. Precisamos mostrar que

$$\int_{F(A)} f(y) \sqrt{h} dm = \int_A f(F(x)) \sqrt{g} dm.$$

De fato, seja $K_\alpha = \{\alpha_{x_j}(q)\}_{j=1}^n$ uma base de $T_p M$ no ponto $p = \alpha(q)$. Como a matriz jacobiana $J_F(y)$ de F é uma matriz invertível, pela regra da cadeia concluímos que $K_\beta = \{\beta_{y_j}(y)\}_{j=1}^n$ é

outra base de $T_p M$ no ponto $p = \alpha(F(y))$, basta observar que $\beta_{y_j}(y) = \alpha_{x_j}(q) \circ (dF)_y$. Seja $[u']_{K_\beta} = [J_F(y)][u]_{K_\alpha}$, como a primeira forma fundamental $I_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante por mudança de coordenadas, temos que

$$G(x) = [J_F(y)]^t H(y) [J_F(y)], \quad (2.46)$$

pois $I_p(u', v') = [u']^t H(y) [v'] = [u]^t [J_F(y)]^t H(y) [J_F(y)] [v]$. Portanto, $\det G = (\det J_F)^2 \det H$ e podemos escrever

$$\sqrt{h} := \sqrt{\det H} = (\det J_F)^{-1} \sqrt{g}.$$

Usando o Teorema 19 via o difeomorfismo $F : A \rightarrow B$, obtemos

$$\int_B f(y) \sqrt{h} dy = \int_A f(F(x)) |\det J_F(x)|^{-1} \sqrt{g} |\det J_F(x)| dx = \int_A f(F(x)) \sqrt{g} dx.$$

Portanto, a integral em (2.44) está bem definida.

Proposição 10. Seja $f \in C^1(B \rightarrow \mathbb{R})$ sobre o aberto B do $\mathbb{R}^{n-1}$ e seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular dada pelo gráfico de f , $M = \{(y, f(y)) : y \in B\}$. Então a medida de superfície $d\sigma$ sobre M é dada por $d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dm$

Demonstração. Seja $\{B, \alpha\}$ uma coordenada local definida por $\alpha(y) = (y, f(y))$. Já provamos que M é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$, portanto $\nabla f(x) \neq 0$, quando $x \in M$. Pelo Exemplo 11 a matriz da primeira forma fundamental G é dada por

$$G = (g_{ij}) = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial y_j},$$

com $1 \leq i, j \leq n$. Para calcular g em um ponto $y \in B$, como $\nabla f(y) \neq 0$, façamos uma mudança de coordenadas através de uma rotação $R : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\nabla f(R(y)) = ce_1$, onde $c > 0$ é uma constante. Assim, a matriz H através da reparametrização dada pela rotação é igual a matriz identidade I_n com o incremento de c^2 na entrada h_{11} . Logo

$$g = \det(g_{ij}) = (\det(dR))^2 \det H = \det H = 1 + c^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Portanto, pela Definição 2.44, obtemos

$$\int_{\alpha^{-1}(B)} \varphi d\sigma = \int_B \varphi(y) \sqrt{g} dm = \int_B \varphi(y) \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dm,$$

sempre que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Escolhendo $\varphi = \chi_B$, segue que $d\sigma(\alpha(B)) = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dm(B)$. $\square$

2.3.3 Invariância de medidas

Nosso próximo objetivo é responder a seguinte questão:

Pergunta 1. A medida de superfície $d\sigma$ satisfaz algum tipo de invariância?

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Uma transformação $T : X \rightarrow X$ é dita mensurável se $T^{-1}B \in \mathcal{B}$, para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definição 11. Uma medida μ é dita invariante por transformação, ou simplesmente, medida T -invariante, se $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$, para todo $B \in \mathcal{B}$.

Usando a definição de medida T -invariante e o Teorema 17 obtemos uma caracterização para este tipo de medida.

Corolário 3. São equivalentes:

- (i) μ é uma medida T -invariante;
- (ii) Para cada $f \in L^1(X, \mu)$, temos $\int_X f d\mu = \int_X f \circ T d\mu$.

Demonstração. Se μ é uma medida T -invariante então, pelo Teorema 17, obtemos (ii). Agora, assumamos que (ii) é válido e lembre que se $B \in \mathcal{B}$ é um conjunto mensurável tem-se $\chi_B \circ T = \chi_{T^{-1}B}$. Portanto,

$$\mu(B) = \int \chi_B d\mu = \int \chi_B \circ T d\mu = \int \chi_{T^{-1}B} d\mu = \mu(T^{-1}B),$$

como queríamos. □

A nossa questão é respondida pelo próximo Corolário.

Corolário 4. Seja M uma superfície regular e $d\sigma$ uma medida de superfície. Então $d\sigma$ é invariante por transformações ortogonais sobre o espaço tangente $T_p M$.

Demonstração. É suficiente verificar que a medida de superfície $d\sigma$ é T -invariante sobre uma vizinhança coordenada V da superfície M . A Proposição 9 garante que existe uma $\phi \in C^k$ tal que $V = G_\phi$ é o gráfico de ϕ . Assim, pela Proposição 10 temos que $d\sigma(V) = \sqrt{1 + |\nabla \phi|^2} dm(V)$. Como a medida de Lebesgue é invariante por transformações ortogonais, usando o Teorema 18 e o Corolário 3 concluímos a prova. □

2.3.4 Coordenadas polares

Para finalizar o capítulo, enunciaremos e provaremos o Teorema de coordenadas polares. Usaremos este teorema frequentemente nos cálculos de integrais sobre o $\mathbb{R}^n$. Portanto, esta seção cumpre papel fundamental para total compreensão deste trabalho.

Teorema 20 (Teorema de Coordenadas Polares). Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$ é uma função Borel mensurável não negativa sobre $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dm = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty f(r\omega) r^{n-1} dr d\sigma, \quad (2.47)$$

Demonstração. Seja $\{A, \alpha\}$ uma parametrização de $\mathbb{S}^{n-1}$. Sabemos que as coordenadas polares esféricas estão definidas sobre o difeomorfismo $F : (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, dado por $F(r, \omega) = r\omega$.

Denotemos por $H = (h_{ij})$ a matriz da primeira forma fundamental de $\mathbb{S}^{n-1}$ induzida pela parametrização α , isto é,

$$(h_{ij}) := I_p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} \right). \quad (2.48)$$

Pelo algoritmo de Gram-Schmidt, podemos considerar $\beta = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial y_{n-1}} \right\}$ uma base ortonormal, isto é,

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial y_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} \right\rangle_p := I_p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} \right) = \delta_{ij}.$$

Portanto, a matriz H na base β é dada por $H = I_{n-1}$. Sejam $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos e considere a aplicação $\Phi : (0, \infty) \times A \rightarrow B$ definida por $\Phi(r, y) = r\alpha(y)$. Note que $\Phi^{-1} : B \rightarrow (0, \infty) \times A$ definida por $\Phi^{-1}(\omega) = \left(\|\omega\|, \alpha^{-1}\left(\frac{\omega}{\|\omega\|}\right) \right)$ é a função inversa de Φ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Phi^{-1}(\omega) &= \Phi \left(\|\omega\|, \alpha^{-1}\left(\frac{\omega}{\|\omega\|}\right) \right) = \|\omega\| \alpha \left(\alpha^{-1}\left(\frac{\omega}{\|\omega\|}\right) \right) = \omega \\ \Phi^{-1} \circ \Phi(r, y) &= \Phi^{-1}(r\alpha(y)) = \left(\|r\alpha(y)\|, \alpha^{-1}\left(\frac{r\alpha(y)}{\|r\alpha(y)\|}\right) \right) = (r, y). \end{aligned}$$

Como Φ^{-1} é contínua e diferenciável, segue que Φ é um difeomorfismo. Denote por

$$\phi = (\phi_{kl}) := \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_l} \right\rangle,$$

a matriz do produto interno do $\mathbb{R}^n$ induzido por Φ com $1 \leq k, l \leq n$. Se $k = l = 1$, então

$$\phi_{11} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right\rangle = \langle \alpha(y), \alpha(y) \rangle = \|\alpha(y)\|^2 = 1.$$

Temos também que, se $k = 1$ e $2 \leq l \leq n$, então

$$\phi_{1l} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_l} \right\rangle = r \left\langle \alpha(y), \frac{\partial \alpha}{\partial y_l} \right\rangle = 0,$$

pois $\alpha(y) \cdot \alpha(y) = 1$ e, derivando esta equação, obtemos $2 \left(\alpha(y) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y_i}(y) \right) = 0$. Analogamente, obtemos que $\phi_{k1} = 0$. Finalmente, se $2 \leq k, l \leq n$, então

$$\phi_{kl} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_l} \right\rangle = r^2 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial y_k}, \frac{\partial \alpha}{\partial y_l} \right\rangle = r^2 h_{kl},$$

logo, a matriz ϕ é dada por

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r^2 h_{22} & \cdots & r^2 h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r^2 h_{n2} & \cdots & r^2 h_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & [r^2(h_{ij})] \end{bmatrix}.$$

Dáí,

$$\sqrt{\det \phi} = \sqrt{\det(r^2 h_{ij})} = \sqrt{r^{2(n-1)} \det(h_{ij})} = r^{n-1} \sqrt{h}.$$

Portanto, usando (2.44), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dm = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty f(r\omega) r^{n-1} dr d\sigma,$$

quando $f \geq 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$. $\square$

Enunciaremos alguns corolários do Teorema de Coordenadas Polares que serão utilizados em nossa teoria neste trabalho. Para o próximo corolário, precisamos esclarecer o conceito de uma função radial. Uma função é dita *radial* se $f(Tx) = f(x)$, onde $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma rotação. Analogamente, dizemos que uma medida é radial, se é invariante por transformações ortogonais $T \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ e T é uma rotação.

Corolário 5. Se f é uma função não negativa ou integrável, mensurável sobre o $\mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g sobre $(0, \infty)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$

Corolário 6. Sejam c e C constantes positivas e seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < c\}$. Suponha que f é uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^n$.

- (i) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ sobre B , para algum $a < n$, então $f \in L^1(B)$. Contudo, se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ sobre B , então $f \notin L^1(B)$;
- (ii) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ sobre B^c , para algum $a > n$, então $f \in L^1(B^c)$. Contudo, se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ sobre B^c , então $f \notin L^1(B^c)$.

Em alguns momentos neste trabalho iremos recorrer ao Teorema de Coordenadas Polares para obter alguns resultados. Portanto, é importante conhecer alguns resultados de integrais sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ do $\mathbb{R}^n$, quando $n \geq 2$. Essencialmente, estes resultados são corolários do Teorema de Coordenadas Polares. Nos próximos dois resultados, denotaremos a medida induzida na esfera $\mathbb{S}^i$ por $d\sigma_i$.

Corolário 7 (Fórmula de mudança de variáveis). Seja f uma função definida sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Então

$$\int_{\mathbb{S}_R^{n-1}} f(\omega_{n-1}) d\sigma_{n-1} = \int_{-R}^R \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{R^2-s^2}}^{n-2}} f(s, \omega_{n-2}) d\sigma_{n-2} \frac{R ds}{\sqrt{R^2-s^2}},$$

quando $n \geq 2$.

Demonstração. É suficiente fazer para o caso em que $R = 1$. Defina a aplicação $F : (-1, 1) \times \mathbb{S}_{\sqrt{1-s^2}}^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$F(s, \omega_{n-2}) = \begin{cases} (\sqrt{1-s^2} \omega_{n-2}, s) & \text{se } s \notin (-1, 1) \\ (0, \dots, 0, 1) & \text{se } s = 1 \\ (0, \dots, 0, -1) & \text{se } s = -1 \end{cases}$$

e proceda de maneira análoga ao Teorema 20 para obter

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega_{n-1}) d\sigma_{n-1} = \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{S}^{n-2}} f(s, \sqrt{1-s^2} \omega_{n-2}) d\sigma_{n-2} (\sqrt{1-s^2})^{n-2} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}},$$

fazendo a mudança de $\mathbb{S}^{n-2}$ para $\mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{1-s^2}}$, obtemos a fórmula desejada. $\square$

Corolário 8. Seja K uma função real. Então

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(x \cdot \omega_{n-1}) d\sigma_{n-1} = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right)^{-1} \int_{-1}^1 K(s|x|) (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds,$$

quando $n \geq 2$.

Demonstração. Defina $y = \frac{x}{|x|}$ e escolha uma aplicação $T \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ tal que $Te^1 = y$, onde $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$. Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(x \cdot \omega_{n-1}) d\sigma_{n-1} &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(|x|(y \cdot \omega_{n-1})) d\sigma_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(|x|(Te^1 \cdot \omega_{n-1})) d\sigma_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(|x|(e^1 \cdot T^{-1}\omega_{n-1})) d\sigma_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(|x|\omega_{n-1}^1) d\sigma_{n-1}. \end{aligned}$$

Usando o Corolário 7 com $R = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(x \cdot \omega_{n-1}) d\sigma_{n-1} &= \int_{-1}^1 K(|x|s) \int_{\mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{1-s^2}}} d\sigma_{n-2} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= A_{n-2} \int_{-1}^1 K(|x|s) (\sqrt{1-s^2})^{n-2} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= A_{n-2} \int_{-1}^1 K(|x|s) (\sqrt{1-s^2})^{n-3} ds, \end{aligned}$$

onde $A_{n-2} = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^{-1}$ é a área de superfície de $\mathbb{S}^{n-2}$. $\square$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE MEDIDAS

Este capítulo está destinado a tratar da Transformada de Fourier de medidas e suas propriedades elementares. Em princípio, trataremos da teoria da Transformada de Fourier de funções. Em seguida, generalizaremos este conceito para medidas no $\mathbb{R}^n$. Dedicaremos uma seção completa para tratar do espaço de Schwartz. As principais referências utilizadas neste capítulo foram (FOLLAND, 1999, cap. 6), (WOLFF, 2003, cap. 1,2,3,4), (MATTILA, 2015, cap. 3), (GRAFAKOS, 2014, cap. 2) e, finalmente, (STEIN; SHAKARCHI, 2011, cap.1). Neste capítulo denotaremos $\int_{\mathbb{R}^n}$ simplesmente por $\int$, a menos que mencionemos o contrário.

3.1 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Nesta seção nosso objetivo é definir a transformada de Fourier de funções em $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e apresentar quando é possível recuperar f a partir de sua transformada de Fourier.

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier é o operador linear $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, definido por

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad (3.1)$$

onde $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ denota o produto interno canônico de $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 19 (Função Característica). Seja $Q = [a, b]^n \subset \mathbb{R}^n$. Então

$$\hat{\chi}_Q(\xi) = 2^n e^{-ix_Q \cdot \xi} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi \xi_j} \text{sen} \left(\frac{b_j - a_j}{2} \xi_j \right).$$

Note que

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-ix\xi} dx = \frac{i}{\pi \xi} \left(\frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{2} \right) = e^{-i\xi \frac{b+a}{2}} \frac{2}{\xi \pi} \text{sen} \left(\frac{b-a}{2} \xi \right),$$

onde usamos a fórmula $\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, para obter

$$\frac{2}{\xi} e^{-i\xi \frac{b+a}{2}} \text{sen} \left(\frac{b-a}{2} \xi \right) = \frac{i}{\xi} \left(\frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{2} \right). \quad (3.2)$$

Observando que a transformada de Fourier da Função Característica de um cubo $Q = [a, b]^n$ é o produto de n fatores do resultado obtido em (3.2), obtemos o resultado.

O teorema seguinte reúne algumas propriedades fáceis, mas importantes do operador $\mathcal{F}$.

Teorema 21. Seja $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a, b \in \mathbb{C}$ e $T \in GL(n, \mathbb{R})$.

- (i) A transformada de Fourier é um operador linear.
- (ii) A função $\widehat{f}$ é uniformemente contínua e $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.
- (iii) (Riemann-Lebesgue) Temos que $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.
- (iv) (Translação de f) Seja $f_\tau(x) = f(x - \tau)$. Então $\widehat{f_\tau}(\xi) = e^{-2\pi i \tau \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$;
- (v) (Modulação de f) Seja $e_\tau(x) = e^{2\pi i x \cdot \tau}$. Então $\widehat{e_\tau f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$;
- (vi) Seja $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Denote por T^* a adjunta de T . Então $\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-1} \widehat{f} \circ (T^{-1})^*$.
Em particular, se $T \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, então $\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T$;
- (vii) (Reflexão de f) Defina $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Então $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$.

Demonstração. As propriedades (i) e (ii) são elementares. Para provar (iii), usaremos a densidade do espaço de funções simples em L^p . Existe g função simples, escrita na sua representação padrão por $g(x) = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{Q_j}(x)$, onde Q_j é um cubo do $\mathbb{R}^n$ tal que, $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon$, para $\epsilon > 0$. Portanto, pela linearidade,

$$\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{L^\infty} \leq \|f - g\|_{L^1} < \epsilon.$$

Usando o Exemplo 19 podemos escolher $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|\widehat{g}(\xi)\|_{L^\infty} < \epsilon$, quando $|\xi| > M$. Então, usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\|\widehat{f}(\xi)\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)\|_{L^\infty} + \|\widehat{g}(\xi)\|_{L^\infty} < 2\epsilon.$$

A prova das outras propriedades decorrem da definição de Transformada de Fourier. Para provar (iv), basta considerar a mudança de variável $y \xrightarrow{T} x - \tau$ e usar o Teorema 18. O item (v) segue diretamente da definição de transformada de Fourier. Para o item (vi), seja $y \in \mathbb{R}$ tal que $Tx = y$. Sendo assim, $T^{-1}y = x$. Além disso, pela definição de operador adjunto, $\xi \cdot T^{-1}y = (T^{-1})^* \xi \cdot y$, novamente pelo Teorema 18

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot T^{-1}y} f(Tx) dx = |\det T^{-1}| \int e^{-2\pi i (T^{-1})^* \xi \cdot y} f(y) dy = |\det T^{-1}| \widehat{f} \circ (T^{-1})^*(\xi).$$

Portanto $\widehat{f \circ T} = |\det T^{-1}| \widehat{f} \circ (T^{-1})^*$. Por fim, para verificar (vii), considere a mudança de variável $R(x) = -x$, pelo Teorema 18

$$\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot \xi} \overline{f(-x)} dx = \overline{\int e^{2\pi i \xi \cdot \xi} f(-x) dx} = \overline{\int e^{-2\pi i \xi \cdot \xi} f(x) dx} = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

□

Observação 4. (i) Relembre que função é dita radial se $f(Tx) = f(x)$, onde $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma rotação. Usando o item (iii), com T sendo uma rotação, temos que a transformada de Fourier é invariante sobre rotações, isto é, que a aplicação $\mathcal{F}$ é radial.

(ii) Se T é uma dilatação, isto é, $Tx = rx$, $r > 0$, então a transformada de Fourier de $f(rx)$ é $r^{-n} \hat{f}(r^{-1}\xi)$. A fórmula reversa também vale. Substitua r por r^{-1} e multiplique por r^{-n} , obtemos que a transformada de Fourier de $r^{-n} f(r^{-1}x)$ é $\hat{f}(r\xi)$.

Proposição 11. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Demonstração. Vimos que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, quando $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Agora usando o Teorema de Fubini e o Teorema 18 com a mudança de variáveis $z \mapsto x - y$, temos

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \int \int f(x - y)g(y)dy e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int \int e^{-2\pi i z \cdot \xi} f(z)g(y)dy e^{-2\pi i y \cdot \xi} dz = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

□

3.1.1 Método de somabilidade

Esta seção está destinada a tratar de métodos de somabilidade. Entre as diversas aplicações que esse método possui, recorreremos a este para conseguir recuperar uma função f a partir de sua transformada de Fourier. Começamos com a seguinte definição.

Definição 12. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função suave com suporte compacto tal que $\phi(0) = 1$. Dizemos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é ϕ -somável para L , se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int \phi(\delta x) f(x) dx - L \right| < \varepsilon.$$

Quando a função $\phi(\epsilon x) = e^{-\epsilon|x|^2}$, dizemos que f é *Gauss somável* e caso $\phi(\epsilon x) = e^{-\epsilon|x|}$, dizemos que f é *Abel somável*.

Lema 13. Para qualquer $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int e^{-\pi\epsilon|\xi|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \epsilon^{-\frac{n}{2}} e^{\pi \frac{|x|^2}{\epsilon}} \\ (ii) \quad & \int e^{-2\pi\epsilon|\xi|} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\epsilon}{(\epsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

Demonstração. Observe primeiro que a integral em (i) é o produto de n fatores de uma integral em $\mathbb{R}$, isto é

$$\int e^{-\pi\epsilon|\xi|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\epsilon\xi_j^2} e^{-2\pi i x_j \xi_j} d\xi_j. \quad (3.3)$$

Calculando a integral da direita em (3.3), usando a fórmula $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}}$, obtemos

$$\int e^{-\pi\epsilon|\xi|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \prod_{j=1}^n \epsilon^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-\pi x_j^2}{\epsilon}} = \epsilon^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\epsilon}}. \quad (3.4)$$

Por mudança de variáveis, é suficiente verificar (ii) quando $\alpha = 1$. Assuma que a fórmula

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du$$

é válida, sempre que $\beta > 0$. Pelo item (i),

$$\begin{aligned} \int e^{-2\pi|\xi|\epsilon} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi &= \int \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{(2\pi|\xi|\epsilon)^2}{4u}} du \right] e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left[\int e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{u}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right] du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left[\left(\sqrt{\frac{u}{\pi}} \right)^n e^{-u|x|^2} \right] du \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u(1+|x|^2)} du. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $v \mapsto u(1+|x|^2)$, obtemos

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u(1+|x|^2)} du = \frac{\pi^{-\frac{n+1}{2}}}{(1+|x|^2)^{\frac{n-1}{2}}(1+|x|^2)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{n-1}{2}} dv = \frac{\pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

onde $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$. Portanto, para demonstrar o item (ii), basta demonstrar que 3.4 é verdadeira. Para isso, precisamos de duas fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2} dx, \quad \beta > 0; \\ \text{(b)} \quad \frac{1}{1+x^2} &= \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du. \end{aligned}$$

Para verificar (b) basta utilizar as técnicas básicas de integrais impróprias. Para verificar (a) é necessário aplicar a teoria de resíduos para a função $\frac{e^{i\beta z}}{1+z^2}$. Portanto, para concluir a demonstração do item (ii), note que

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\beta x) \left[\int_0^\infty e^{-u} e^{-ux^2} du \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left[\int_0^\infty e^{ux^2} \cos(\beta x) dx \right] du. \end{aligned}$$

Usando integração por partes, é fácil checar que $\int_{-\infty}^\infty e^{-ux^2} \sin(\beta x) dx = 0$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left[\int_0^\infty e^{ux^2} \cos(\beta x) dx \right] du &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{ux^2} e^{i\beta x} dx \right] du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left[\pi \int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2 u y^2} e^{-2\pi i \beta y} dy \right] du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} \right] du \quad (\text{item (i)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du. \end{aligned}$$

□

Denotemos a transformada de Fourier de $e^{-4\pi\alpha|y|^2}$ e $e^{-2\pi\alpha|y|}$, respectivamente, por

$$W_\epsilon(x) = W(x, \epsilon) = (4\pi\epsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} \quad \text{e} \quad P_\epsilon = P(x, \epsilon) = C_n \frac{\epsilon}{(\epsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (3.5)$$

A primeira função é chamada de *núcleo de Weierstrass*, enquanto a segunda é chamada de *núcleo de Poisson*. O resultado obtido no Lema 13 será importante para conseguirmos recuperar f a partir de $\hat{f}$. Veremos que é possível escrever funções Abel e Gauss somáveis em termos de convoluções com os núcleos de Poisson e Weierstrass. Para isso, precisaremos do seguinte teorema.

Teorema 22 (Fórmula da multiplicação). Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int \hat{f}(x)g(x)dx = \int f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int \hat{f}(x)g(x)dx = \int \left[\int g(x)e^{-2\pi i x \cdot y} dx \right] f(y)dy = \int f(y)\hat{g}(y)dy.$$

□

3.1.2 Aproximação da identidade

Definição 13. Uma aproximação da identidade é uma família $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(i) \int \varphi_\epsilon(x)dx = 1 \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

$$(ii) \sup_{\epsilon>0} \|\varphi_\epsilon\|_{L^1} < \infty.$$

O próximo lema garante que o núcleo de Weierstrass $W_\epsilon(x)$ e o núcleo de Poisson $P_\epsilon(x)$ satisfazem as propriedades de aproximação da identidade.

Lema 14. Os núcleos de Weierstrass $W_\epsilon(x)$ e de Poisson $P_\epsilon(x)$ são aproximações da identidade.

Demonstração. Pela definição de W e P , o item (ii) da definição de aproximação da identidade é obtido trivialmente. Portanto, usando uma mudança de variáveis é suficiente provar

$$\int (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = 1 \quad \text{e} \quad \int \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}}}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx = 1.$$

Relembrando a fórmula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, obtemos

$$(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_j^2}{4}} dx_j = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \sqrt{4\pi} = 1.$$

O caso para o núcleo de Poisson é um pouco mais trabalhoso. Primeiro, note que

$$\frac{1}{c_n} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{A_n}{2}, \quad (3.6)$$

onde A_n denota a área da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, é suficiente mostrar que

$$\int \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{A_n}{2}. \quad (3.7)$$

Definindo $r = |x|$, $y = \frac{x}{r}$, quando $x \neq 0$, usando o Teorema de Coordenadas polares 20,

$$\int \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{(1 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy \right] r^{n-1} dr = A_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr.$$

Fazendo $r = \tan \theta$, obtemos

$$\int \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = A_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta d\theta. \quad (3.8)$$

Note que $A_{n-1} \sin^{n-1} \theta$ é a área de superfície da esfera obtida pela intersecção do hiperplano $x_n = \cos \theta$ com a esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Portanto, a área de superfície do hemisfério norte de $\mathbb{S}^n$ é obtido pela soma das áreas de superfície das $(n-1)$ -dimensionais esferas obtidas pela intersecção citada, com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Em outras palavras

$$A_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta d\theta = \frac{A_n}{2},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Suponha que a função ϕ da Definição 12 satisfaz $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{\phi} = \varphi$. Usando a Observação 4, temos que

$$\widehat{\delta_\epsilon \phi}(\xi) = \epsilon^{-n} \widehat{\phi}(\epsilon^{-1} \xi) = \epsilon^{-n} \varphi(\epsilon^{-1} \xi) = \varphi_\epsilon(\xi),$$

onde $\delta_\epsilon \phi(x) = \phi(\epsilon x)$. Em particular, usando o Lema 13 com $\phi(x) = e^{-4\pi^2|x|^2}$ e $\phi(x) = e^{-2\pi|x|}$, respectivamente, obtemos $\varphi_\epsilon(\xi) = W(\xi, \epsilon^2)$ e $\varphi_\epsilon(\xi) = P(\xi, \epsilon)$.

Teorema 23. Se $f, \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{\phi} = \varphi$, então

$$\int \widehat{f}(x) e^{2\pi i x \cdot y} \phi(\epsilon x) dx = \int f(x) \varphi_\epsilon(x - y) dx, \quad \epsilon > 0. \quad (i)$$

A função $\widehat{f}(x) e^{2\pi i x \cdot y}$ é ϕ -somável para f , isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \int \phi(\epsilon x) \widehat{f}(x) e^{2\pi i x \cdot y} dx - f(x) \right| < \varepsilon. \quad (ii)$$

Demonstração. Se provarmos (i), obtemos (ii) através da Proposição 1. Para verificar (i), basta usar a o Teorema 22 e a propriedade (v) da Proposição 21, para obter

$$\int \widehat{f}(x) e^{2\pi i x \cdot y} \phi(\epsilon x) dx = \int f(x) \mathcal{F}(e^{2\pi i x \cdot y} \phi_\epsilon(x)) dx = \int f(x) \varphi_\epsilon(x - y) dx.$$

$\square$

Tomando $\phi(\sqrt{\epsilon}x) = e^{-4\pi^2\epsilon|x|^2}$, vimos que $\widehat{\delta_{\sqrt{\epsilon}}\phi} = W(\xi, \epsilon)$. Portanto, pelo item (i) do Teorema 23, obtemos

$$\int \widehat{f}(x)e^{2\pi i x \cdot y} e^{-4\pi^2\epsilon|x|^2} dx = \int f(x)W(x-y, \epsilon)dx, \quad \epsilon > 0.$$

Corolário 9 (Inversa da Transformada de Fourier). Se $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$f(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad x\text{-}q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Considere a função $\phi(t) = e^{-4\pi^2|t|^2}$. Pelo Lema 13, temos que $\widehat{\phi}(\sqrt{\epsilon}t) = \varphi_{\sqrt{\epsilon}}(t) = W(t, \epsilon)$. Agora, escreva

$$s_{\epsilon}(x) = \int \widehat{f}(t)e^{2\pi i t \cdot x} e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2} dt.$$

Usando o Teorema 23-(i) e o Teorema da multiplicação 22, temos

$$s_{\epsilon}(x) = \int \widehat{f}(t)e^{2\pi i t \cdot x} \phi(\sqrt{\epsilon}t) dt = \int f(t)\varphi_{\sqrt{\epsilon}}(t-x) dt = \varphi_{\sqrt{\epsilon}} * f.$$

Vimos no Lema 13 que $\int W(t, \epsilon) dt = 1$, portanto a Proposição 23-(ii) garante que $\varphi_{\sqrt{\epsilon}} * f \rightarrow f$ em L^1 quando $\epsilon \rightarrow 0$. Usando a Proposição 1 e que convergência em L^p implica convergência em medida, temos que $(\varphi_{\sqrt{\epsilon}} * f)(x) \rightarrow f(x)$ x -q.t.p em $\mathbb{R}^n$, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Como $\widehat{f}(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tem-se $|\widehat{f}(t)e^{2\pi i t \cdot x} e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2}| \leq |\widehat{f}(t)|$, nesta situação, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \widehat{f}(t)e^{2\pi i t \cdot x} e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2} dt = \int \widehat{f}(t)e^{2\pi i t \cdot x} dt, \quad x\text{-}q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

□

3.2 O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Nosso objetivo nesta seção é apresentar o espaço de Schwartz e obter algumas propriedades da transformada de Fourier de funções desta classe. Em particular, o nosso principal resultado é mostrar que o operador $\mathcal{F}$ restrito a esta classe de funções é um homeomorfismo. O **espaço de Schwartz**, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é o espaço de funções

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{N,\alpha} < \infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\}$$

onde

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^{\alpha} f(x)|, \quad (3.9)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Existem outras definições deste espaço. Uma definição comumente encontrada em nossa literatura deste espaço é obtida definindo $\|f\|_{\alpha,\beta}$ por

$$\|f\|_{(\alpha,\beta)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} \partial^{\beta} f(x)|.$$

para quaisquer multi-índices α, β . Veremos na Proposição 12 que estas definições são equivalentes.

Para um bom entendimento desta seção, será necessário fazer uso da versão mais geral de derivadas, isto é, precisaremos utilizar a notação de multi-índices. Um *multi-índice* é um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ cujos componentes são inteiros não negativos. Se α é um multi-índice, por definição

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}.$$

Através da notação de multi-índices, podemos obter a derivada parcial da transformada de Fourier de f e a transformada de Fourier da derivada parcial de f . Ou seja, obtemos as seguintes identidades.

$$\begin{aligned} (i) \quad \partial^\alpha \widehat{f} &= \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f) \\ (ii) \quad \widehat{\partial^\alpha f} &= (2\pi i x)^\alpha \widehat{f}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Estas duas igualdades serão provadas na seção que trata de transformada de Fourier de medidas finitas, deixaremos os detalhes da prova para tal situação.

A Proposição a seguir nos dá uma caracterização para o espaço de Schwartz que nos será útil na prova do resultado principal desta seção. Nesta proposição, o item (i) refere-se ao espaço de Schwartz com a norma (3.9).

Proposição 12. Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e α, β um par de multi-índices. Então são equivalentes,

- (i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) $x^\beta \partial^\alpha f$ é limitada para todos multi-índices α, β ;
- (iii) $\partial^\alpha (x^\beta f)$ é limitada para todos multi-índices α, β .

Demonstração. Suponha que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, agora observe que $|x^\beta| \leq (1 + |x|)^N$, para $|\beta| \leq N$. Portanto, $x^\beta \partial^\alpha f$ é limitada para quaisquer multi-índices α, β . Por outro lado, por hipótese, $\partial^\alpha f$ é limitada, além disso $\sum_{j=1}^n |x_j|^N$ é estritamente positivo sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$, então existe um número positivo mínimo δ . Segue que $\sum_{j=1}^n |x_j|^N \geq \delta |x|^N$, para todo x pois ambos os lados são homogêneos de grau N , logo

$$(1 + |x|)^N \leq 2^N (1 + |x|^N) \leq 2^N \left(1 + \delta^{-1} \sum_{j=1}^n |x_j|^N \right) \leq 2^N \delta^{-1} \sum_{|\beta| \leq N} |x|^\beta.$$

Portanto, $(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f| \leq 2^N \delta^{-1} \sum_{|\beta| \leq N} |x|^\beta |\partial^\alpha f|$. Isso nos dá a equivalência entre os itens (i) e (ii). A equivalência entre (ii) e (iii) é obtida usando a regra da cadeia, que nos permitirá escrever $x^\beta \partial^\alpha f$ como combinação linear de termos na forma $\partial^\gamma (x^\delta f)$ e vice-versa. $\square$

Uma importante propriedade do espaço de Schwartz é a seguinte.

Lema 15. O espaço das funções $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Fixe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi(x) = 1$ se $|x| < 1$. Para $k \in \mathbb{N}$, defina

$$\|\varphi\|_{C^k} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|.$$

Para $j \in \mathbb{N}$, defina a função $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $\varphi_j(x) = \varphi(x/j)$. Agora seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\varphi_j f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para completar a prova, mostraremos que $\varphi_j f \rightarrow f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quando $j \rightarrow \infty$.

Fixe $k, N \in \mathbb{N}$. Nosso objetivo é encontrar uma estimativa para $\|\varphi_j f - f\|_{(N,k)}$, independente de f . Para isto, primeiro note que para todo multi-índice β , nós temos $\partial^\beta \varphi_j(x) = (1/j)^{|\beta|} \partial^\beta \varphi(1/j)$. Daí, segue que

$$\sup |\partial^\beta \varphi_j| \leq \frac{1}{j} \|\varphi\|_{C^k}, \quad \text{para } j \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq |\beta| \leq k.$$

Seja $|\alpha| \leq k$. Então, usando a regra de Leibniz obtemos, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, que

$$|\partial^\alpha (\varphi_j f - f)(x)| \leq |(\varphi_j(x) - 1) \partial^\alpha f(x)| + \frac{1}{j} \|\varphi\|_{C^k} \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} f(x)|. \quad (3.11)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.11) é 0 para $|x| \leq j$. Para $|x| \geq 1$, podemos estimar o primeiro termo por

$$|(\varphi_j(x) - 1) \partial^\alpha f(x)| \leq (1 + \sup |\varphi|) j^{-1} (1 + |x|) |\partial^\alpha f(x)| \leq 2j^{-1} (1 + |x|) |\partial^\alpha f(x)|.$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue que o termo $(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$ é finito para todo $N \in \mathbb{N}$, portanto mostramos que existe uma constante C_k , que depende somente de k , tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi_j f - f\|_{(N,k)} \leq \frac{C_k}{j} \|f\|_{(N+1,k)},$$

passando ao limite, com $j \rightarrow \infty$, obtemos o resultado. $\square$

O Lema 15 nos dá um corolário imediato e este resultado será crucial para nossa teoria.

Corolário 10. Seja $1 \leq p < \infty$. Então $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, usando a linearidade da derivada, não há dúvidas que a soma $f + g$ é uma função de Schwartz. Uma questão é, uma função definida pelo produto finito de funções de Schwartz é uma função de Schwartz? Esta pergunta é respondida na próxima proposição.

Proposição 13. Seja $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então,

- (i) $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$, para todo multi-índice α ;

(iii) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$;

(iv) $(\widehat{\widehat{f}})^\wedge = \widehat{f}$.

Demonstração. O item (i) é uma consequência imediata da regra de Leibniz para multi-índices. Sejam $\alpha = e_j$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $h = (0, \dots, h_j, \dots, 0)$. Sabemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$. Observe também que

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j} = \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{(f * g)(x+h) - (f * g)(x)}{h_j} = \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{1}{h_j} \int [f(z+h) - f(z)]g(z-x)dz. \quad (3.12)$$

A função da integral em (3.12) é uma função de Schwartz, pois é o produto de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, usando o Teorema da convergência dominada

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j} = \int \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{1}{h_j} [f(z+h) - f(z)]g(z-x)dz = \int \frac{\partial f}{\partial x_j}(z)g(z-x)dx = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g.$$

Portanto, para $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ a proposição é verificada. Para obter o resultado para qualquer multi-índice basta usar o processo de indução. Sabemos, pela Proposição 11, que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. Portanto, $(\check{f} * \check{g}) = (fg)^\check{}.$ Agora, note que usando a mudança de variável $x \mapsto \xi + y$

$$(\check{f} * \check{g})(x) = \int \check{f}(x-y)\check{g}(y)dy = \int \widehat{f}(-\xi)\widehat{g}(\xi-x)d\xi = (\widehat{f} * \widehat{g})(-x),$$

logo $(\widehat{f} * \widehat{g})(x) = (\check{f} * \check{g})(-x) = (fg)^\check{}(-x) = \widehat{fg}(x)$. Para provar o item (iv), pelo Corolário 9, podemos escrever

$$\overline{\widehat{f}(x)} = \overline{\int \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi} = \int \overline{\widehat{f}(\xi)}e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \widehat{\widehat{f}}(x).$$

□

O próximo teorema nos dá um indício de como age o operador de transformada de Fourier se restrito a funções de Schwartz.

Teorema 24. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Usando o item (ii) de (3.10), notamos que $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sempre que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, combinando com o item (i) obtemos,

$$(2\pi i x)^\alpha (\partial^\beta \widehat{f}) = (2\pi i x)^\alpha \mathcal{F}((-2\pi i x)^\beta f) = \mathcal{F}(\partial^\alpha((-2\pi i x)^\beta f)),$$

isto nos dá $x^\alpha (\partial^\beta \widehat{f}) = \frac{(-2\pi i)^\beta}{(2\pi i)^\alpha} \mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta f))$. Sabendo que $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$, logo

$$|x^\alpha (\partial^\beta \widehat{f})| \leq \frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}} \int |\partial^\alpha(x^\beta f)| d\mu < \infty.$$

□

Agora podemos enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção. Pelo Teorema 24, sabemos que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sempre que f é uma função de Schwartz. O Corolário 9 nos motiva a definir

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad (3.13)$$

sempre que $\hat{f} \in L^1$. De forma resumida, o que fizemos foi mostrar que $(\varphi_\epsilon * f)(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \phi(\epsilon \xi) d\xi$ e, impondo as condições que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\int \phi dx = 1$, onde $\hat{\phi} = \varphi$, obtemos que $\|\varphi_\epsilon * f - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, em quase toda parte em $\mathbb{R}^n$. Em particular, se $\phi(\epsilon x) = e^{-4\pi^2 \epsilon |x|^2}$, então $s_\epsilon(x)$, definido pela equação,

$$s_\epsilon(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 \epsilon |\xi|^2} d\xi$$

converge em $L^1(\mathbb{R}^n)$ para $f(x)$, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Consequentemente, assumindo que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tem-se que

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_\epsilon(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad x\text{-q.t.p em } \mathbb{R}^n.$$

Porém, se tomarmos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ teremos alguns benefícios. Primeiro, note que o Teorema 24 garante que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, se combinarmos os resultados obtidos na Proposição 1-(ii) e no Lema 15, obtemos que a convergência $\|\varphi_\epsilon * f - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ é para todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad (3.14)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, sempre que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Isto é, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, notando que $\hat{f}(-x) = \check{f}(x)$, tem-se que $\mathcal{F}(\check{f}) = f$. Invocando o Teorema 21, obtemos que o operador $\mathcal{F}^{-1}$ é contínuo. Acabamos de provar o seguinte resultado.

Teorema 25. A transformada de Fourier é um homeomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. O operador definido em (3.13) é a inversa contínua de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id,$$

sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então o Teorema 24 garante que $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\widehat{f\hat{g}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (basta usar a regra da cadeia com multi-índices para verificar esta afirmação). A Proposição 11 nos diz que $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f\hat{g}}$. Aplicando a transformada de Fourier inversa, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 26. Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para finalizar esta seção, apresentaremos algumas propriedades a transformada de Fourier de funções de Schwartz. Estas propriedades serão utilizadas até o fim deste trabalho.

Teorema 27. Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

- (i) (Igualdade de Parseval) $\int f(x)\overline{h(x)}dx = \int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi$;
- (ii) (Identidade de Plancherel) $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2}$;
- (iii) $\int f(x)h(x)dx = \int \widehat{f}(x)h^\vee(x)dx$.

Demonstração. Para provar (i) note que se tivermos $g = \overline{\widehat{h}}$ e usando a identidade $\widehat{\check{f}} = \overline{\widehat{f}}$ junto com o Teorema 25, obtemos

$$\widehat{g} = \widehat{\overline{\widehat{h}}} = \check{\widehat{h}} = \overline{h}.$$

Usando o Teorema da Multiplicação 22 obtemos o resultado. O item (ii) é um caso particular de (i) com $h = f$. Para (iii) basta usar o Teorema da Multiplicação 22 para $\widehat{g} = h$. $\square$

Usaremos o Teorema de interpolação de Riesz-Thorin para obter um resultado referente a ação da Transformada de Fourier sobre o $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sabendo que se f é uma função de Schwartz, então $f \in L^p$, para $1 \leq p \leq \infty$, a desigualdade da próxima proposição é válida para toda função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 14 (Desigualdade de Hausdorff-Young). Fixe $1 \leq p \leq 2$. Para toda função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, temos a estimativa

$$\|\widehat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p},$$

onde p e q são expoentes conjugados.

Demonstração. Note que $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$ e $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$. Então, seja

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{1} + \frac{1-t}{2} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{t}{\infty} + \frac{1-t}{2}.$$

Isto implica que $1 - t = 2/q$. Logo,

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q}.$$

Ou seja, p e q são expoentes conjugados. Além disso, temos que $t = 2/p - 1$, portanto

$$0 < \frac{2}{p} - 1 < 1 \iff 1 < \frac{2}{p} < 2 \iff 1 < p < 2.$$

Desta forma, as hipóteses desta proposição nos permite utilizar o Teorema da Interpolação de Riesz-Thorin 12 para obter $\|\widehat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}$. $\square$

3.3 Transformada de Fourier de medidas sobre $\mathbb{R}^n$

Nosso objetivo nesta seção é definir a transformada de Fourier de medidas do $\mathbb{R}^n$. Veremos que isso nada mais é que uma generalização da definição de transformada de Fourier de funções. Esta seção foi baseada no primeiro capítulo de (WOLFF, 2003).

3.3.1 Medidas de variação limitada

Fixe um espaço de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$, onde $\mathcal{B}$ denota a σ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$. Seja $E \in \mathcal{B}$, uma coleção $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de E , é uma *partição* de E quando

- (i) $Q_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\bigcup_i Q_i = E$;
- (iii) $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset \Rightarrow Q_i = Q_j$.

Denotemos por $\mathcal{P}(E)$ como o conjunto de todas as partições de um conjunto $E \in \mathbb{R}^n$. A *variação total* de μ sobre E é definida como

$$|\mu|(E) = \sup_{Q_i \in \mathcal{P}(E)} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(Q_i)|, \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

A quantidade $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ definida por

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{Q_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(Q_i)|, \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

define uma norma sobre o espaço de medidas $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. De fato, é fácil verificar que

- (i) $\|\mu\|_{\mathcal{M}} = 0$ se, e somente se $\mu(Q_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, o que implica que Q_i são conjuntos de medida nula,
- (ii) Seja $\mu \in \mathcal{M}$ e $\delta_\lambda \mu(E) = \mu(\lambda E)$, então $\|\delta_\lambda \mu\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \|\mu\|_{\mathcal{M}}$,
- (iii) Se $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, então $\|\mu + \nu\|_{\mathcal{M}} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}} + \|\nu\|_{\mathcal{M}}$.

Exemplo 20. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a medida μ definida por

$$\mu(E) = \int_E f(x) dx, \quad \forall E \in \mathcal{B},$$

pertence $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} \leq \int |f(x)| dz = \|f\|_{L^1}.$$

De fato, basta notar que

$$|\mu|(E) = \sup_{A_i \in \mathcal{P}(E)} \sum_i |\mu(A_i)| \leq \sup_{A_i} \sum_i \int_{A_i} |f(x)| dx = \sup_{A_i} \int_{E=\bigcup_i A_i} |f(x)| dx \leq \|f\|_{L^1}. \quad (3.15)$$

Estamos com ferramentas suficientes para generalizar a Definição 3.1 para a transformada de Fourier de medidas finitas do $\mathbb{R}^n$.

Definição 14 (Transformada de Fourier de medidas). Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de μ é definida pela equação

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x). \quad (3.16)$$

A condição $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é crucial para que a integral (3.16) seja finita.

Proposição 15. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Então,

- (i) $\|\hat{\mu}\|_{L^\infty} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$,
- (ii) $\hat{\mu}$ é contínua.

Demonstração. Para verificar (i), basta notar que

$$|\hat{\mu}(\xi)| = \left| \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu \right| \leq \int d|\mu| = |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

Para mostrar que $\hat{\mu}$ é contínua, seja $\{\xi_n\}_n$ uma sequência que converse pontualmente para ξ , quando $n \rightarrow \infty$. Mostraremos que $\hat{\mu}(\xi_n) \rightarrow \hat{\mu}(\xi)$. Sabemos que $|e^{-2\pi i x \cdot \xi_n}| = 1$ e a função $g = 1$ é uma função integrável, pois a medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é finita. Portanto,

$$\lim_n \hat{\mu}(\xi_n) = \lim_n \int e^{-2\pi i x \cdot \xi_n} d\mu = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu = \hat{\mu}(\xi).$$

□

Proposição 16. Seja T é uma transformação linear em $\mathbb{R}^n$ e μ uma medida T -invariante. Então, a transformada de Fourier $\hat{\mu}$ é uma medida T -invariante.

Demonstração. Usando o Teorema 17 e o Corolário 3, respectivamente, obtemos

$$\hat{\mu}(T\xi) = \int e^{-2\pi i \langle T^*x, \xi \rangle} d\mu(x) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \circ T^* d\mu(x) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x) = \hat{\mu}(\xi).$$

□

3.3.2 Regularidade de μ em espaço de Schwartz

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto μ -mensurável, o *suporte* de uma medida μ sobre E é definido por

$$\text{supp}(\mu) := \{p \in E : p \in V \text{ aberto de } E \text{ tal que } \mu(V) > 0\}.$$

A Proposição seguinte é uma extensão da Proposição 15-(i). Mais geralmente, que uma medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto é uma função de Schwartz, isto é, $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, garantindo a limitação de suas derivadas e usando a caracterização de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ obtida na Proposição 12.

Proposição 17. Seja μ uma medida em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto. Então $\hat{\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial^\alpha \hat{\mu} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha \mu). \quad (3.17)$$

Em particular, se $\text{supp}(\mu) \subset D(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ então

$$\|\partial^\alpha \hat{\mu}\|_{L^\infty} \leq (2\pi r)^{|\alpha|} \|\mu\|. \quad (3.18)$$

Demonstração. Veja que $(-2\pi i x)^\alpha \mu$ é uma medida finita sobre seu suporte, visto que o suporte de μ é compacto. Portanto, basta provarmos que $\mu \in C^1$ para o multi-índice $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. A prova para qualquer multi-índice α seguirá por indução. Pela definição de derivada

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \xi_k}(\xi) = \lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{\hat{\mu}(\xi + h) - \hat{\mu}(\xi)}{h_k} = \lim_{h_k \rightarrow 0} \int \frac{e^{-2\pi i x \cdot h} - 1}{h_k} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x),$$

onde $h = (0, \dots, h_k, \dots, 0)$. Usando o Teorema da Convergência Dominada, tem-se

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \int \frac{e^{-2\pi i x \cdot h} - 1}{h_k} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x) = \int -2\pi i x_k e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x) = -2\pi i x_k \hat{\mu}(\xi).$$

A condição (ii) da Proposição 15 garante que $\mu \in C^1$ e concluímos a demonstração. $\square$

Com o resultado obtido na Proposição 17, temos que a transformada de Fourier de medidas μ com suporte compacto pertence ao espaço de Schwartz.

Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e μ uma medida finita do $\mathbb{R}^n$ definida sobre a σ -álgebra de Borel. A convolução entre f e μ é definida pela equação

$$h(x) = f * \mu(x) = \int f(x - y) d\mu(y). \quad (3.19)$$

Observe que o Lema 13 garante que $f * \mu$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 18. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma medida com suporte compacto, então

$$\widehat{f * \mu} = \widehat{f} \hat{\mu}.$$

Em particular, obtemos

$$\widehat{f} * \mu = \widehat{f \check{\mu}}.$$

Demonstração. Pela Proposição 17 vimos que $\hat{\mu} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $\text{supp}(\mu)$ é compacto, então podemos tomar $\mu = g$ no item (iii) da Proposição 13, desta forma obtemos o desejado. $\square$

DECAIMENTO DE $\widehat{d\mu}$ RESTRITAS A SUPERFÍCIES

Este capítulo é destinado a obter o decaimento de medidas superficiais. Veremos que as curvaturas principais da superfície são de suma importância no cálculo deste tipo de resultado. Esperamos obter o seguinte resultado, dada uma medida finita de superfície $d\mu$, então

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{\ell}{2}}$$

onde ℓ é o número de curvaturas principais não nulas da superfície M . Para obter este decaimento será necessário o estudo dos integrais oscilatórios do primeiro tipo. Os resultados obtidos para este tipo de integral é crucial no desenvolvimento deste capítulo.

Nossa principal referência foi (STEIN; SHAKARCHI, 2011, Cap.8) do livro do professor Elias Stein em conjunto com Ramir Shakarchi. Devemos citar também o livro do professor Thomas Wolff (WOLFF, 2003), que dedica o capítulo 6 para tratar de integrais oscilatórios. No fim, quando tratamos de integrais sobre a esfera, buscamos referência no livro do professor Loukas Grafakos (GRAFAKOS, 2014), que dedica dois apêndices para a função de Bessel e integrais sobre a esfera.

4.1 Integrais oscilatórios

Nesta seção o nosso interesse é obter o comportamento assintótico de integrais do tipo

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx, \text{ para } \lambda > 0 \quad (4.1)$$

onde $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C})$. Estas integrais são conhecidas como integrais oscilatórios do primeiro tipo. A função ϕ é chamada de fase e ψ de amplitude. Vamos assumir aqui que λ é um número real. Com condições apropriadas sobre a fase ϕ , vamos mostrar via o

método estacionário que

$$|I(\lambda)| \lesssim |\lambda|^{-\frac{\ell}{2}} \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty,$$

onde $\ell = \text{posto Hess}_\phi(x)$ e $x \in \text{supp}(\psi)$.

4.1.1 Método da fase não-estacionária

Dizemos que a fase ϕ é não-estacionária, quando o gradiente $\nabla\phi$ não se anula no suporte da amplitude ψ , isto é, $\nabla\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Sob esta restrição, a integral (4.1) tem um decaimento rápido para todo $\lambda > 0$. Mais precisamente,

Proposição 19. Seja $\psi, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e assuma que ψ tem suporte compacto. Suponha que $\nabla\phi(x) \neq 0$ para todo x no suporte de ψ . Então, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$|I(\lambda)| \leq C_N \lambda^{-N}. \quad (4.2)$$

Demonstração. Por hipótese $\nabla\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{supp}(\psi)$ e defina o operador

$$L(f) := \frac{1}{i\lambda}(a \cdot \nabla f)$$

onde $a = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}$. Queremos encontrar o operador adjunto formal de L no sentido $\langle L(f), g \rangle = \langle f, L^*(g) \rangle$. Aqui o par $\langle f, g \rangle$ é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$$

para todo $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C})$. Em $\mathbb{R}$ substituímos o gradiente por $\phi'(x) > 0$ e obtemos

$$\langle L(f), g \rangle = \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{g(x)}}{\phi'(x)} f'(x) dx = -\frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{\overline{g(x)}}{\phi'(x)} \right)' dx = \langle f, L^*(g) \rangle.$$

Portanto, o adjunto formal de L é definido por

$$L^*(g) = -\frac{1}{i\lambda} \left(\frac{\overline{g(x)}}{\phi'(x)} \right)',$$

consequentemente, em $\mathbb{R}^n$ o adjunto formal de L é definido por

$$L^*(f) = -\frac{1}{i\lambda} \nabla \cdot (af).$$

Observe $e^{i\lambda\phi(x)}$ é um auto-vetor (auto-função) do operador L . Com efeito,

$$L(e^{i\lambda\phi(x)}) = \frac{1}{i\lambda} \left(\frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|^2} \cdot (i\lambda e^{i\lambda\phi(x)}) \nabla\phi(x) \right) = e^{i\lambda\phi(x)}.$$

Portanto, $L^N(e^{i\lambda\phi(x)}) = e^{i\lambda\phi(x)}$. Usando o fato $\langle L(f), g \rangle = \langle f, L^*(g) \rangle$ podemos escrever

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} L^N(e^{i\lambda\phi(x)}) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} (L^*)^N(\psi(x)) dx.$$

Vamos mostrar (4.2) por indução sobre N . Quando $N = 1$, temos

$$|I(\lambda)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} L(e^{i\lambda\phi(x)})\psi(x)dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} L^*(\psi(x))dx \right| = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \cdot (a\psi)|dx. \quad (4.3)$$

Precisamos mostrar que o suporte de $\nabla \cdot (a\psi)$ é compacto, para garantir que a integral (4.3) é finita. Notando que

$$\nabla \cdot (a\psi) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(\psi a^j) = \sum_{j=1}^n (\psi_{x_j} a^j + a_{x_j}^j \psi)$$

é suficiente verificar que ψ_{x_j} tem suporte compacto. Mais precisamente, vamos mostrar que $\text{supp}(\psi_{x_j}) \subseteq \text{supp}(\psi)$. De fato, lembrando que $\text{supp}(\psi)$ é fechado, dado $x \in (\text{supp}(\psi))^c$ existe $h = (0, \dots, h_j, \dots, 0)$ tal que $x + h \in (\text{supp}(\psi))^c$ quando $h_j \rightarrow 0$. Portanto,

$$\psi_{x_j}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{|h|} = 0$$

ou seja, $x \notin \text{supp}(\psi_{x_j})$. Portanto,

$$|I(\lambda)| \leq C\lambda^{-1}.$$

Por indução sobre N , suponha que

$$|I(\lambda)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} L^N(e^{i\lambda\phi(x)})\psi(x)dx \right| \leq C\lambda^{-N}, \text{ quando } N = 1, \dots, k-1, \quad (4.4)$$

para todo $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Precisamos mostrar que $|I(\lambda)| \leq c_N \lambda^{-k}$. Note que

$$|I(\lambda)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} L^k(e^{i\lambda\phi(x)})\psi(x)dx \right| = \left| \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} L^{k-1}(e^{i\lambda\phi(x)})\nabla \cdot (a\psi)dx \right|.$$

Vimos que $\text{supp}(\nabla \cdot (a\psi)) \subset \text{supp}(\psi)$, então pela hipótese de indução,

$$\left| \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} L^{k-1}(e^{i\lambda\phi(x)})\nabla \cdot (a\psi)dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} c_k \lambda^{-(k-1)} = c_k \lambda^{-k},$$

portanto a estimativa (4.2) é válida para todo $N \in \mathbb{N}$. □

4.1.2 Método da fase estacionária

Vimos que a integral em (4.1) tem um decaimento rápido, quando $\nabla\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \psi$. Nesta seção, nosso objetivo é estudar o decaimento de (4.1), quando $\nabla\phi$ se anula em algum ponto do suporte de ψ , isto é, quando ϕ tem um ponto crítico $x_0 \in \text{supp}(\psi)$. Este caso é conhecido como o *método da fase estacionária*.

Lema 16. Seja B uma bola em $\mathbb{R}^n$ centrada em x_0 com raio $\epsilon > 0$. Assuma que $\left| \int_B e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \right| = O(|\lambda|^{-\frac{n}{2}})$, quando $\lambda \rightarrow +\infty$. Então

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \right| = O(|\lambda|^{-\frac{n}{2}})$$

para quaisquer $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Dado $x \in \text{supp}(\psi)$, segue que $\text{supp}(\psi) \subset \bigcup_x B_\varepsilon(x)$ e a compacidade do suporte de ψ garante a existência de uma subcoleção $\{B_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^N$ tal que $\text{supp}(\psi) \subset \bigcup_{j=1}^N B_{\varepsilon_j}$. Seja $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\bigcup_{j=1}^N B_{\varepsilon_j}$ tal que $\text{supp}(\psi_j) \subset B_{\varepsilon_j}$ e $\sum_{j=1}^N \psi_j(x) = 1$. Portanto

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \left(\sum_{j=1}^N \psi(x) \psi_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} (\psi \psi_j)(x) dx,$$

e $\psi \psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois é o produto de funções de classe C_c^∞ e $\text{supp}(\psi \psi_j) \subset B_{\varepsilon_j}$. Assim, pela hipótese, obtemos $|I(\lambda)| \leq \left(\sum_{j=1}^N c_j \right) \lambda^{-\frac{n}{2}}$, como queríamos. $\square$

Teorema 28. Sejam $\psi, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e assumamos que ψ tem suporte compacto. Suponha que $\nabla\phi(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in \text{supp}(\psi)$ e que $\det \text{Hess}_\phi \neq 0$ sobre o suporte de ψ . Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq C |\lambda|^{-\frac{n}{2}}, \quad (4.5)$$

para todo $\lambda > 0$ suficientemente grande tal que

$$C \leq \sum_{1 \leq |\alpha| \leq n} |\partial_x^{\alpha+2} \phi| |\partial_x^{\alpha+1} \psi|.$$

Demonstração. Pelo Lema 16 é suficiente provar (4.5) quando o suporte de ψ está contido em uma bola B_ε , $\varepsilon > 0$. Usando o Teorema de Fubini e lembrando que $|z|^2 = z\bar{z}$, temos que

$$|I(\lambda)|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(y)-\phi(x)]} \psi(y) \bar{\psi}(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]} \Psi(x, u) dx du = \int_{\mathbb{R}^n} J_\lambda(u) du,$$

onde fizemos a mudança de variável $y \mapsto x + u$ com x fixado, $\Psi(x, u) = \bar{\psi}(x) \psi(x + u)$ é uma função C_c^∞ e denotamos

$$J_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]} \Psi(x, u) dx.$$

Inicialmente, queremos mostrar que

$$|J_\lambda(u)| \leq c_N |\lambda u|^{-N}, \quad (4.6)$$

para todo $N \geq 0$. Notando que

$$\begin{aligned} |J_\lambda(u)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} L^N (e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]}) \Psi(x, u) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]} L_*^N \Psi(x, u) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |L_*^N \Psi(x, u)| dx, \end{aligned}$$

o adjunto formal de $L(\Psi) = \frac{1}{i\lambda}(a \cdot \nabla \Psi)$ é dado por

$$L_*(\Psi) = -\frac{1}{i\lambda} \nabla \cdot (a\Psi),$$

para cada u fixado, com $a = (a^1, \dots, a^n)$ definido por $a = \frac{\nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x))}{|\nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x))|^2} = \frac{b}{|b|^2}$. Portanto, precisamos mostrar que existe uma constante $C_k > 0$ tal que

$$|\partial_{x_i}^k a| \leq C_k |u|^{-1} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

De fato, $|u| \sim |b|$, isto é, existe constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 |u| \leq |b| \leq c_2 |u|. \quad (4.8)$$

A desigualdade $|b| \leq c_2 |u|$ é consequência da *desigualdade do valor médio* k -vezes,

$$|\partial_{x_j}^k b| \leq c_k |u|, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Para mostrar a desigualdade $|b| \geq c_1 |u|$, considere o campo gradiente $f = \nabla_x \phi$. Pela definição de derivadas, podemos escrever

$$f(x+u) - f(x) = Df(x) \cdot u + o(|u|),$$

onde $o(|u|) \rightarrow 0$, quando $|u| \rightarrow 0$. Note que $Df(x) = \text{Hess}_\phi(x)$, podemos reescrever

$$b = \nabla_x \phi(x+u) - \nabla_x \phi(x) = \text{Hess}_\phi(x) \cdot u + o(|u|).$$

Visto que $\text{Hess}_\phi(x)$ é invertível em algum ponto x do suporte de ψ , então existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$|b| \geq |\text{Hess}_\phi(x) \cdot u| \geq c_1 |u|.$$

Usando as desigualdades (4.8) e (4.9), vamos mostrar a desigualdade (4.7) por indução em k . Quando $k = 0$ e $k = 1$, claro que $|a| \leq |u|^{-1}$ e temos

$$|\partial_{x_i} a| = \left| \partial_{x_i} \left(\frac{b}{|b|^2} \right) \right| = \left| \frac{\partial_{x_i} b \langle b, b \rangle - 2 \langle \partial_{x_i} b, b \rangle b}{|b|^4} \right| \leq \frac{|\partial_{x_i} b| |b|^2 + 2 |\partial_{x_i} b| |b|^2}{|b|^4} = \frac{3 |\partial_{x_i} b|}{|b|^2}.$$

Usando as desigualdades (4.8) e (4.9), obtemos

$$|\partial_{x_i} a| \leq C \frac{|\partial_{x_i} b|}{|u|^2} \leq C |u|^{-1}.$$

Agora suponha que $|\partial_{x_i}^j a| \leq C_j |u|^{-1}$, para $j = 1, \dots, k-1$. Usando a fórmula de Leibniz, obtemos

$$\partial_{x_i}^k b = \partial_{x_i}^k (a \langle b, b \rangle) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \langle b, b \rangle^{(j)} a^{(k-j)} = \partial_{x_i}^k a \langle b, b \rangle + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \langle b, b \rangle^{(j)} a^{(k-j)},$$

ou seja,

$$|\partial_{x_i}^k a| |b|^2 = \left| \partial_{x_i} b - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \langle b, b \rangle^{(j)} a^{(k-j)} \right| \leq |\partial_{x_i} b| + \left| \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \langle b, b \rangle^{(j)} a^{(k-j)} \right|. \quad (4.10)$$

Sabemos que a j -ésima derivada de $\langle b, b \rangle$ é dada por

$$\langle b, b \rangle^{(j)} = \sum_{j_1+j_2=j} \binom{j}{j_1} \langle \partial_x^{j_1} b, \partial_x^{j_2} b \rangle$$

então usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a desigualdade (4.9), obtemos a desigualdade $|\langle b, b \rangle^{(j)}| \leq C_j |u|^2$. Mas usando a hipótese indutiva, as derivadas $a^{(k-j)}$ são limitadas por $c_{k-j} |u|^{-1}$, quando $(k-j) = 0, 1, \dots, k-1$. Portanto, cada parcela do somatório (4.10) é limitada por $C_j |u|$. Esta limitação em conjunto com a equivalência (4.8) implica que

$$|\partial_{x_i}^k a| \leq \frac{c_k |u| + C_k |u|}{|b|^2} \leq C_k |u|^{-1}.$$

Agora que mostramos a limitação das derivadas parciais de a , estamos em condições de mostrar (4.6). Quando $N = 1$, por (4.7) obtemos

$$\begin{aligned} |J_\lambda(u)| &= \int_{\mathbb{R}^n} |L_* \Psi(x, u)| dx = \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \cdot (a \Psi)| dx \\ &= \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\Psi a^i) \right| dx \\ &\leq \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (|\Psi_{x_i} a^i| + |a_{x_i}^i \Psi|) dx \\ &\leq C_1 |\lambda u|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (|\Psi_{x_i}| + |\Psi|) dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como o suporte de $\Psi_{x_i}(\cdot, u)$ esta contido no suporte de $\Psi(\cdot, u)$ para cada u fixado e o suporte de $\Psi(x, u) = \bar{\psi}(x) \psi(x+u)$ é compacto, segue que a integral (4.11) é finita. Para provar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |L_*^N \Psi(x, u)| dx \leq c_N |\lambda u|^{-N}$$

para todo $N > 1$, basta usar indução em N similar ao que fizemos na prova da desigualdade (4.4). Agora, note que

$$|I(\lambda)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |J_\lambda(u)| du \leq c_N \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda u|^{-N} du = c_N \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda u|^{-N} \lambda^n du = c_N \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{-N} dv,$$

onde usamos o Teorema 18 de mudança de variável $T : v \mapsto \lambda u$ na última igualdade. Usando o Teorema de coordenadas polares 20 tem-se

$$\begin{aligned} |I(\lambda)|^2 &\leq c_N \sigma(S^{n-1}) \lambda^{-n} \int_0^\infty r^{-N} r^{n-1} dr \\ &= c_N \omega_{n-1} \lambda^{-n} \left(\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \right) r^{-N} r^{n-1} dr \\ &= c_N \omega_{n-1} \lambda^{-n} \left(\frac{\varepsilon^n}{n} + \varepsilon^{-1} \right), \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde tomamos $N = 0$ na primeira integral e $N = n + 1$ na segunda integral em (4.12). Portanto,

$$|I(\lambda)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |J_\lambda(u)| du \leq c_N \omega_{n-1} \lambda^{-n},$$

como desejamos. □

O próximo resultado é uma re-leitura do teorema anterior quando $\nabla\phi(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \text{supp}(\psi)$, isto é, quando ϕ tem um ponto crítico no suporte de ψ .

Definição 15. Seja x_0 um ponto crítico da função f . Dizemos que x_0 é um ponto crítico *degenerado*, se a matriz Hessiana $\text{Hess}_f(x_0)$ não tem posto máximo. Caso contrário, dizemos que x_0 é um ponto crítico *não-degenerado* de f .

Corolário 11. Suponha que $x_0 \in \text{supp}(\psi)$ é um ponto crítico não-degenerado de ϕ . Então existe uma constante $C > 0$, uniforme sobre λ , tal que

$$|I(\lambda)| \leq C |\lambda|^{-\frac{n}{2}}, \text{ para } \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Demonstração. Por hipótese $\det \text{Hess}_\phi(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in \text{supp}(\psi)$, então obtemos o desejado pelo Teorema 28. $\square$

Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $\det A = 0$, então **posto** $A < n$. Além disso, podemos extrair uma submatriz de A de ordem $m < n$, digamos A_m tal que $\det A_m \neq 0$.

Corolário 12. Sejam $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Suponha que $x_0 \in \text{supp}(\psi)$ é um ponto crítico degenerado de ϕ . Então

$$|I(\lambda)| \lesssim |\lambda|^{-\frac{\ell}{2}} \quad \text{para } \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.14)$$

onde $\ell = \text{posto } \text{Hess}_\phi(x_0) < n$.

Demonstração. Como o **posto** $\text{Hess}_\phi(x_0) = \ell < n$, podemos extrair uma sub-matriz $A(x_0)$ de ordem ℓ da matriz $\text{Hess}_\phi(x_0)$ tal que $\det A(x_0) \neq 0$. Relembrando que $\text{Hess}_\phi(x_0)$ é uma matriz simétrica, pelo Teorema espectral existe uma base espectral no ponto x_0 tal que

$$\text{Hess}_\phi(x_0) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

onde $A = (\delta_{ij} \lambda_i(x_0))_{i,j=1}^\ell$ e $B = (\delta_{ij} \lambda_i(x_0))_{i,j=\ell+1}^n$. Notando que posto de $\text{Hess}_\phi(x_0)$ é igual ao número de seus autovalores $\lambda_i(x_0) \neq 0$ da matriz $A(x_0)$ e usando que o determinante **det** é uma aplicação contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon)$.

Pelo Lema 16 é suficiente supor que o suporte de ψ esta contido em B_ε . Fazendo $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, considere B'_ε a projeção de B_ε sobre $\mathbb{R}^\ell$ e B''_ε a projeção sobre $\mathbb{R}^{n-\ell}$. Logo, pelo Teorema de Fubini, podemos escrever

$$|I(\lambda)| = \left| \int_{\mathbb{R}^{n-\ell}} \int_{\mathbb{R}^\ell} e^{i\lambda\phi(x', x'')} \psi(x', x'') dx' dx'' \right| \leq \int_{B''_\varepsilon} \left| \int_{B'_\varepsilon} e^{i\lambda\phi(x', x'')} \psi(x', x'') dx' \right| dx'', \quad (4.15)$$

pois $B_\varepsilon \subset B'_\varepsilon \times B''_\varepsilon$. Fixando $x'' \in \mathbb{R}^{n-\ell}$ segue que $\text{Hess}_\phi(x', \cdot) = A(x)$ para todo $x \in B_\varepsilon$, então pelo Teorema 28 existe $C > 0$ uniforme em x'' e $\lambda > 0$ tal que

$$\left| \int_{B'_\varepsilon} e^{i\lambda\phi(x', \cdot)} \psi(x', \cdot) dx' \right| \leq C \lambda^{-\frac{\ell}{2}}, \text{ para } \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) em (4.15), obtemos o resultado desejado. $\square$

4.2 Transformada de Fourier de medidas sobre superfícies

Nesta seção queremos obter decaimentos similares aos obtidos da Seção 4.1 dedicada ao estudo de integrais oscilatórios do primeiro tipo. Seja $d\mu$ uma medida em $\mathbb{R}^n$ tal que o *suporte*

$$\text{supp}(\mu) := \{p \in M : p \in V \text{ aberto de } M \text{ onde } \mu(V) > 0\}.$$

está contido em uma superfície regular M . Denote por ℓ o número de curvaturas principais $k_j(p)$ não-nulas de M em cada ponto $p \in \text{supp}(\mu)$. Usando o método da fase estacionária queremos mostrar o decaimento

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\ell}{2}}, \quad |\xi| > 1.$$

Aqui $\widehat{d\mu}(\xi)$ denota a transformada de Fourier de medidas μ com suporte $\text{supp}(\mu) \subseteq M$,

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_M e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x).$$

Quando M é a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ sabemos que $\ell = n - 1$ (veja Exemplo 16), consequentemente obtemos a estimativa

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}, \quad |\xi| > 1, \quad (4.17)$$

a medida $d\sigma$ denota a medida de superfície sobre a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Na próxima seção, vamos mostrar de duas formas como podemos obter este decaimento sem usar o método da fase estacionária.

4.2.1 Decaimento de $\widehat{d\sigma}$ sobre esfera unitária

4.2.1.1 Técnica usando funções de Bessel

Nesta seção, iremos obter o decaimento de $\widehat{d\sigma}$ usando o comportamento assintótico da função de Bessel. Este método não é geométrico no seguinte sentido: não usaremos nenhuma propriedade geométrica da esfera unitária para obter o decaimento (4.17). Mesmo assim, é possível obter tal decaimento sem entender a real natureza geométrica da esfera para obter este resultado. Esta parte do texto foi baseada na referência (GRAFAKOS, 2014).

A função de Bessel J_ν de ordem complexa ν é definida por

$$J_\nu(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{its} (1 - s^2)^\nu \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad (4.18)$$

onde $\text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$ e $t \geq 0$. Se $\nu \in \mathbb{Z}^+$, então a função de Bessel é definida por

$$J_\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(t \sin \theta - \nu \theta)} d\theta. \quad (4.19)$$

A proposição a seguir relaciona $\widehat{d\sigma}$ com a função de Bessel J_ν .

Proposição 20. Seja $d\sigma$ uma medida de superfície sobre a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Então

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|\xi|).$$

Demonstração. Usando o Corolário 8 e a definição (4.18), temos

$$\begin{aligned} \widehat{d\sigma}(\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \theta \cdot \xi} d\sigma(\theta) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^1 e^{-2\pi i |\xi| s} (1-s^2)^{\frac{n-2}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{(\pi |\xi|^{\frac{n-2}{2}})} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|\xi|) \\ &= \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|\xi|). \end{aligned}$$

□

Note que se f é uma função radial, então $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é uma função constante. Desta forma, uma pergunta natural a se fazer é se podemos relacionar a transformada de Fourier de funções radiais com os resultados obtidos para integral sobre a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e, portanto, com a função de Bessel. Esta questão é o conteúdo da próxima Proposição.

Proposição 21. Seja $f(x) = g(|x|)$ uma função radial definida sobre o $\mathbb{R}^n$, onde g é uma função definida sobre $[0, \infty)$. Então

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(r) J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r|\xi|) r^{\frac{n}{2}} dr.$$

Demonstração. Usando o Teorema de coordenadas polares 20, temos

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(r) e^{-2\pi i \xi \cdot r\theta} r^{n-1} d\theta dr = \int_0^\infty g(r) \widehat{d\sigma}(r\xi) r^{n-1} dr$$

e, pela Proposição 20, obtemos o desejado. □

Antes de obtermos o principal resultado desta subseção, vamos relembrar do comportamento assintótico da função de Bessel $J_\nu(r)$ para $r \rightarrow \infty$ e $\text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$. Temos a seguinte identidade para $r > 0$:

$$J_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + R_\nu(r), \quad (4.20)$$

onde $R_\nu(r)$ dado por

$$\begin{aligned} R_\nu(r) &= \frac{r^\nu}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} e^{i(r - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty e^{-rt} t^{\nu + \frac{1}{2}} [(1 + \frac{it}{2})^{\nu - \frac{1}{2}} - 1] \frac{dt}{t} \\ &\quad + \frac{r^\nu}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} e^{-i(r - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty e^{-rt} t^{\nu + \frac{1}{2}} [(1 - \frac{it}{2})^{\nu - \frac{1}{2}} - 1] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

satisfaz o decaimento

$$|R_\nu(r)| \leq C_\nu r^{-\frac{3}{2}},$$

sempre que $r \geq 1$ e $\text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$.

Proposição 22. Seja $d\sigma$ uma medida de superfície sobre a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Então

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}).$$

Demonstração. Usando a Proposição 20 e a identidade (4.20) obtemos

$$\begin{aligned} |\widehat{d\sigma}(\xi)| &= 2\pi|\xi|^{-\frac{n-2}{2}} |J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|\xi|)| \\ &\leq 2\pi|\xi|^{-\frac{n-2}{2}} (\sqrt{2}(\pi|\xi|)^{-\frac{1}{2}} + C_{\frac{n-2}{2}}|\xi|^{-\frac{3}{2}}) \\ &\leq 2\pi|\xi|^{-\frac{n-2}{2}} (\sqrt{2}(\pi|\xi|)^{-\frac{1}{2}} + C_{\frac{n-2}{2}}|\xi|^{-\frac{1}{2}}) \\ &\lesssim |\xi|^{-\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}$$

como desejamos. □

4.2.1.2 Técnica usando parametrização da esfera

Nesta seção utilizaremos conhecimentos geométricos específicos da esfera para obter o mesmo decaimento obtido na Proposição 22. Veremos que este tipo de resultado a abordagem é mais difícil se tratássemos de superfícies M mais gerais que a esfera unitária. O professor Thomas Wolff faz uma conta semelhante no capítulo 6 de (WOLFF, 2003) que foi a principal referência usada nesta seção.

Proposição 23. Seja $d\sigma$ uma medida sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ induzida de uma primeira forma fundamental do $\mathbb{R}^n$. Então

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}), \quad (4.21)$$

Demonstração. Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, rotacione de forma que tenhamos este ponto paralelo ao n -ésimo eixo do $\mathbb{R}^n$, isto é, de forma que ξ fique na forma λe_n . Coloquemos agora coordenadas locais na esfera. Considere a primeira coordenada local dada por

$$\begin{aligned} \alpha^1 : B(0, 1/2) &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x' &\mapsto (x', \sqrt{1 - \|x'\|^2}), \end{aligned}$$

e a segunda coordenada local dada por

$$\begin{aligned} \alpha^2 : B(0, 1/2) &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x' &\mapsto (x', -\sqrt{1 - \|x'\|^2}), \end{aligned}$$

onde $B(0, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Escolha as outras coordenadas locais α^i tais que na coordenada i substituimos por $\pm\sqrt{1 - \|x'\|^2}$. Note que a união das imagens de todas as coordenadas locais de $\mathbb{S}^{n-1}$ em cada p forma uma cobertura aberta para a esfera, a qual denotaremos por $\mathcal{V}$. O Lema 11 garante a existência de uma partição da unidade $\{\psi_j\}$ subordinada a $\mathcal{V}$. Logo

$$\widehat{d\sigma}(\lambda e_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \lambda e_n \cdot x} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \lambda e_n \cdot x} \sum_j \psi_j d\sigma.$$

A compacidade da esfera garante que podemos extrair uma cobertura finita de $\mathcal{V}$. Desta forma, usando a linearidade da integral, podemos reescrever a transformada de Fourier da medida $d\sigma$ sobre a esfera por

$$\widehat{d\sigma}(\lambda e_n) = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \lambda e_n \cdot x} \psi_j d\sigma. \quad (4.22)$$

Defina $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(x) = e_n \cdot x$. É fácil ver que $\nabla \phi = e_n$ e, portanto, o gradiente de ϕ é normal a esfera apenas nos pontos $\pm e_n$. Considere a função $\rho(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$ e note que, localmente, $\mathbb{S}^{n-1}$ é o gráfico de ρ . Além disso $\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$, para $i = 1, \dots, n-1$. Desta forma,

$$\nabla \rho = -\frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

e

$$1 + \|\nabla \rho\|^2 = 1 + \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2} = \frac{1}{1 - \|x\|^2}.$$

Agora, usando a Proposição 10, podemos reescrever (4.22) como

$$\begin{aligned} \widehat{d\sigma}(\lambda e_n) &= \int_{B(0, \frac{1}{2})} e^{-2\pi i \lambda \sqrt{1 - \|x\|^2}} \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} dx \\ &\quad + \int_{B(0, \frac{1}{2})} e^{2\pi i \lambda \sqrt{1 - \|x\|^2}} \frac{\psi_2(x)}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} dx \\ &\quad + \sum_{k=3}^N \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \lambda \phi_k(x)} \varphi_k(x) dx := I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Na terceira parcela da soma, obtemos uma estimativa via método da fase não-estacionária, visto que podemos escolher um aberto do $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que o gradiente de ϕ_k não se anula, pois $\mathbb{S}^{n-1}$ é uma hipersfície. A função fase da primeira e na segunda parcela soma da direita em (4.23) são, respectivamente, dadas por $-2\rho(x)$ e $2\rho(x)$. Como as curvaturas principais de $\mathbb{S}^{n-1}$ são constantes e igual a $k_j(p) = 1$, pelo Teorema 8 temos que $\det \text{Hess}_\rho(x) \neq 0$ em todos os pontos do $\text{supp}(\Psi_k)$, onde $\Psi_k = \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$. Portanto, podemos aplicar o Teorema 28 para as integrais I_1 e I_2 e aplicar a Proposição 19 para a integral I_3 , pois $\nabla \phi_k \neq 0$ para todo $x \in \text{supp}(\varphi_k)$, ou seja, temos a estimativa

$$|\widehat{d\sigma}(\lambda e_n)| \lesssim |\lambda|^{-\frac{n-1}{2}} + |\lambda|^{-\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=3}^N |\lambda|^{-L},$$

para qualquer $L \in \mathbb{N}$. Escolhendo $L = \frac{n-1}{2}$,

$$|\widehat{d\sigma}(\lambda e_n)| \leq C |\lambda|^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \text{sempre que } \lambda \rightarrow \infty.$$

Portanto, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$, obtemos a estimativa

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| \leq C |\xi|^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \text{com } |\xi| \rightarrow \infty.$$

□

4.2.2 Decaimento de $\widehat{d\mu}$ sobre superfícies

Suponha que M é uma superfície regular com ℓ curvaturas principais não-nulas em cada ponto p . Nosso objetivo é obter o decaimento

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\ell}{2}}, \quad |\xi| > 1 \quad (4.24)$$

usando o método da fase estacionária. Este resultado é devido a Walter Littman em seu artigo (LITTMAN, 1963).

Lema 17. Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ e M é uma superfície regular.

- (i) Seja $\{U, \alpha\}$ uma coordenada local de M no ponto p . Então $\phi \circ \alpha$ tem um ponto crítico em $q = \alpha^{-1}(p)$ se, e somente se $\nabla \phi(p)$ é ortogonal a $T_p M$.
- (ii) Seja $d\sigma$ uma medida superficial sobre M , então $\widehat{d\sigma}$ é invariante por transformações ortogonais.

Demonstração. Prova (i): Usando a regra da cadeia, $D(\phi \circ \alpha)(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(q)$, para $i = 1, \dots, n-1$. Como $\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(q) \right\}_{i=1, \dots, n-1}$ é uma base de $T_p M$, então q é um ponto crítico de $\phi \circ \alpha$ se, e somente se $\nabla \phi(p) \cdot X_p = 0$, onde $X_p = \sum_j c_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(q)$.

Prova (ii): Combinando o Corolário 4 e a Proposição 16, então a transformada de Fourier de $d\sigma$ é invariante por transformações ortogonais. $\square$

Lema 18. Seja M uma superfície compacta e $d\mu = \psi d\sigma$ uma medida superficial com densidade $\psi \in C_c^\infty(M)$. Se $\left| \int_{\text{supp}(\psi)} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \psi(x) d\sigma \right| \leq C|\xi|^{-\frac{\ell}{2}}$ para $|\xi| > 1$, então

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\ell}{2}}, \text{ para } |\xi| > 1.$$

Demonstração. Seja $M \subset \bigcup_{p \in M} V_p$ uma cobertura aberta de M . Como M é compacta, então existe uma subcobertura finita $\{V_j\}_{j=1}^N$ tal que $M \subset \bigcup_j V_j$. Usando o Lema 11, seja $\{\psi_j\}_j$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{V_j\}_{j=1}^N$, isto é, $\psi_j \in C_c^\infty(M)$, $\text{supp}(\psi_j) \subset V_j$ e $\sum_{j=1}^N \psi_j(p) = 1$. Portanto, podemos escrever

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_M e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu = \sum_{j=1}^N \int_{\text{supp}(\psi_j)} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \psi_j(x) d\sigma$$

e, claramente, obtemos o resultado desejado. $\square$

Observação 5. Dado $p \in M$, a Proposição 9 nos permite localmente escolher uma vizinhança V_p de M contendo p tal que

$$V_p = \{(x', \phi_p(x')) : x' \in U\} \quad (4.25)$$

onde $\phi_p \in C^k(U)$ sobre um aberto U de $\mathbb{R}^{n-1}$. Portanto, $M \subset \bigcup_{p \in M} V_p$ e a prova do Lema 18 em conjunto com a Proposição 10 nos permite escrever

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\text{supp}(\tilde{\psi}_j)} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \phi_j(x')\xi_n)} \tilde{\psi}_j(x') dx', \quad (4.26)$$

onde $\xi = (\xi', \xi_n)$ e $\tilde{\psi}_j(x') = \psi(x', \phi_j(x')) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} \phi_j|^2}$. Note que $\psi_j \in C_c^\infty$ e $\phi_j \in C^k$, portanto $\tilde{\psi}_j \in C_c^k(U)$.

Podemos obter uma estimativa semelhante a (4.17). Precisamos lembrar que localmente M é o gráfico de uma função $\phi \in C^k$. Portanto, dado $p \in M$ existe uma vizinhança de p tal que a matriz Hess_ϕ hessiana de ϕ é igual a matriz da aplicação de Weingarten, ou seja, as curvaturas principais da superfície M no ponto p são auto-valores da matriz Hess_ϕ hessiana de ϕ .

Teorema 29. Seja M uma superfície regular compacta e suponha que curvatura Gaussiana $K(p) \neq 0$, para todo $p \in M$. Se $d\mu$ é uma medida cujo suporte esta contido em M , então

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \text{quando } |\xi| > 1. \quad (4.27)$$

Demonstração. Pelo Lema 18 e a Observação 5, sem perda de generalidade, podemos supor que $d\mu$ é uma medida de superfície com densidade $\psi \in C_c^\infty(M)$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \widehat{\psi d\mu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n)} \tilde{\psi}(x') dx' \\ &= \int_{|\xi_n| \geq \delta|\xi'|} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n)} \tilde{\psi}(x') dx' + \int_{|\xi_n| < \delta|\xi'|} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n)} \tilde{\psi}(x') dx' \end{aligned}$$

para algum $\delta > 0$ adequado, onde denotamos $\tilde{\psi}(x') = \psi(x', \phi(x')) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} \phi|^2}$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\xi_n > 0$ caso contrário tomamos o conjugado da integral acima.

Na região $\xi_n \geq \delta|\xi'|$ escreva

$$\int_{\xi_n \geq \delta|\xi'|} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n)} \tilde{\psi}(x') dx' = \int_{\xi_n \geq \delta|\xi'|} e^{i\lambda\Phi(x')} \tilde{\psi}(x') dx',$$

onde tomamos $\lambda = 2\pi\xi_n$ e $\Phi(x') = -\phi(x') - \frac{x' \cdot \xi'}{\xi_n}$. Como $\text{Hess}_\Phi(x') = -\text{Hess}_\phi(x')$, então $\det \text{Hess}_\Phi(x') = (-1)^n \det \text{Hess}_\phi(x') = (-1)^n K(x') \neq 0$, pois a Proposição 8 garante que o $\det \text{Hess}_\phi(x')$ é igual a curvatura Gaussiana de M no ponto $x' \in \text{supp}(\tilde{\psi})$. Além disso, sobre o suporte de ψ a função Φ tem derivadas limitadas

$$|\nabla_{x'} \Phi(x')| \leq |\nabla \phi(x')| + \frac{|\xi'|}{|\xi_n|} \leq |\nabla \phi(x')| + \frac{1}{\delta},$$

uma vez que temos $\frac{|\xi'|}{\xi_n} \leq \frac{1}{\delta}$. Portanto, usando o Teorema 28, obtemos

$$\left| \int_{\xi_n \geq \delta|\xi'|} e^{i\lambda\Phi(x')} \tilde{\psi}(x') dx' \right| = O(\lambda^{-\frac{n-1}{2}}) = O(|\xi_n|^{-\frac{n-1}{2}}) = O(|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}), \quad (4.28)$$

pois $|\xi| \leq |\xi'| + |\xi_n| \leq \frac{|\xi_n|}{\delta} + |\xi_n| = (1 + \frac{1}{\delta})|\xi_n|$. Já na região $|\xi_n| < \delta|\xi'|$ escreva

$$\int_{|\xi_n| < \delta|\xi'|} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n)} \tilde{\psi}(x') dx' = \int_{|\xi_n| < \delta|\xi'|} e^{i\lambda\Phi(x')} \tilde{\psi}(x') dx',$$

onde $\lambda = 2\pi|\xi'|$ e $\Phi(x') = -\phi(x') \frac{\xi_n}{|\xi'|} - \frac{x' \cdot \xi'}{|\xi'|}$. Queremos mostrar que $|\nabla_{x'} \Phi(x')| > 0$ sobre o suporte de $\tilde{\psi}$. De fato, note que

$$|\nabla_{x'} \Phi(x')| \geq \left| 1 - \frac{\xi_n}{|\xi'|} |\nabla_{x'} \phi(x')| \right| > \frac{1}{2}$$

pois

$$\left| \nabla_{x'} \left(\frac{x' \cdot \xi'}{|\xi'|} \right) \right| = 1 \quad \text{e} \quad \left| \nabla_{x'} \left(\phi(x') \frac{\xi_n}{|\xi'|} \right) \right| = \frac{\xi_n}{|\xi'|} |\nabla_{x'} \phi(x')| < \delta |\nabla_{x'} \phi(x')| \leq \frac{1}{2}$$

quando δ é suficientemente pequeno. Portanto, pela Proposição 19 obtemos

$$\left| \int_{|\xi_n| < \delta|\xi'|} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n)} \tilde{\psi}(x') dx' \right| = O(\lambda^{-N}) = O(|\xi'|^{-N}) = O(|\xi|^{-N}), \quad (4.29)$$

uma vez que nesta região, temos $|\xi| \leq |\xi'| + |\xi_n| < (1 + \delta)|\xi'|$. Escolhendo $N \geq \frac{n-1}{2}$, obtemos (4.27) e concluímos a prova do teorema. $\square$

Teorema 30 (Teorema de Littman (LITTMAN, 1963)). Seja M uma superfície regular compacta munida de uma segunda forma fundamental não-negativa e com $\ell \geq 1$ curvaturas principais não-nulas. Seja $d\mu$ uma medida finita suportada em M . Então

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\ell}{2}}, \quad |\xi| > 1.$$

Demonstração. A prova é a mesma do Teorema 29, porém precisamos usar o decaimento do Corolário 12. $\square$

Observação 6. Cabe fazermos duas observações sobre o resultado obtido no Teorema 30.

- (i) O fato de M possuir uma segunda forma fundamental não-negativa é crucial para garantir que as ℓ curvaturas principais não-nulas tenham sinais fixos.
- (ii) Se substituirmos a hipótese de compacidade por localmente finita o teorema continua válido. Isto se deve ao fato da série que aparece na prova ser, na verdade, uma soma finita.

O decaimento de $\widehat{d\sigma}$ para a esfera é sharp, pois quando λ é suficientemente grande temos somente oscilações. Não exibiremos a prova deste resultado, para uma demonstração veja (WOLFF, 2003, pág. 43).

Corolário 13. Para λ suficientemente grande, temos

$$\widehat{d\sigma}(\lambda e_n) = 2|\lambda|^{-\frac{n-1}{2}} \cos(2\pi(\lambda - (n-1)/8)) + O(\lambda^{-\frac{n-1}{2}}).$$

RESTRIÇÃO DE FOURIER SOBRE SUPERFÍCIES

Neste capítulo iremos estudar o problema da restrição de Fourier sobre superfícies de codimensão 1. Grosseiramente, este problema consiste em determinar quando é possível restringir a transformada de Fourier de uma função a um subconjunto imerso no $\mathbb{R}^n$ tendo medida nula. Neste capítulo, vamos nos concentrar naqueles subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são superfícies M com curvatura Gaussiana $K_M(p) \geq 0$. Este capítulo é baseado nas referências, Muscalu-Schlag ([MUSCALU; SCHLAG, 2013](#), Cap.11), Thomas Wolff ([WOLFF, 2003](#)), Stein-Shakarchi ([STEIN; SHAKARCHI, 2011](#)), Stein ([STEIN, 1993](#), Cap.8) e nos artigos([STRICHARTZ, 1977](#); [BRANDOLINI; IOSEVICH; TRAVAGLINI, 2003](#)).

5.1 Noção da restrição de Fourier em subconjuntos

Suponha $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, usando o Teorema de Riemann-Lebesgue temos que $\hat{f}$ é contínua em ξ , limitada e decai a zero no infinito. Em particular, podemos pontualmente restringir a transformada de Fourier $\mathcal{R}(f) = \hat{f}|_M$ a qualquer subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Como podemos notar a restrição $\mathcal{R}(f)$ continua sendo uma função limitada e contínua. No entanto, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então a identidade de Plancherel no máximo garante que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e a restrição de Fourier pode ser definida nos pontos de Lebesgue usando o Teorema da diferenciação de Lebesgue [15](#), conforme a fórmula

$$(\mathcal{R}f)(\xi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_r(\xi) \cap M)} \int_{B_r(\xi) \cap M} \hat{f}(y) dm(y), \quad \xi\text{-q.t.p em } M \quad (5.1)$$

se a medida de Lebesgue sobre M for positiva. Note que a definição [\(5.1\)](#) coincide com $\hat{f}(\xi)$ pontualmente em M , se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, pelo Teorema de Riemann-Lebesgue e a Proposição [2](#) temos que

$$(\mathcal{R}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad \text{para todo } \xi \in M. \quad (5.2)$$

Interpolando as desigualdades $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, pelo Teorema de Riesz-Thorin concluímos que $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$. Novamente, a restrição de Fourier pode ser definida por (5.1), se a medida de Lebesgue $m(B_r \cap M) > 0$.

Pergunta 2. Suponha que M tem medida nula e seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$. A restrição de Fourier $\mathcal{R}(f)$ é sempre bem definida?

Veremos no exemplo a seguir que $\mathcal{R}(f)$ não existe em geral, mesmo se f for uma função contínua.

Exemplo 21 (Restrição sobre hiperplanos). Considere o hiperplano $E = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ de $\mathbb{R}^n$ e note que E tem medida de Lebesgue n -dimensional nula.

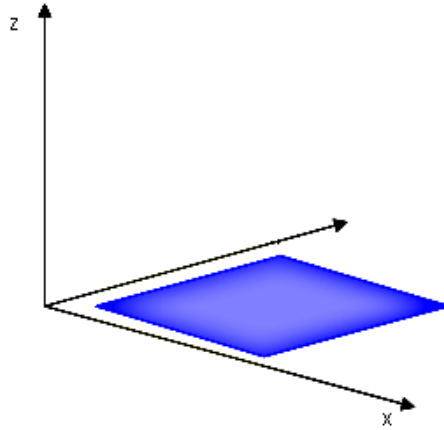


Figura 7 – Hiperplano em $\mathbb{R}^3$.

Seja $K \subset E$ um conjunto compacto. Pelo Teorema 10, sobre a existência de funções de corte, seja $\psi \in C_c^\infty$ tal que $\text{supp}(\psi) \subset E$, $0 \leq \psi(x') \leq 1$ e $\psi(x') = 1$ numa vizinhança de K , e defina a função

$$f(x) = \frac{\psi(x')}{1 + x_n}.$$

Note que f está bem definida, uma vez que o suporte de ψ não intersecta o hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = -1\}$ e, além disso, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, usando o Teorema de Fubini para separar as integrais, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_K |\psi(x')|^p dx' \int_{\text{supp}(f)} \frac{dx_n}{(1 + x_n)^p} < \infty,$$

para todo $p > 1$. Seja $\xi \neq 0$ e note que

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} \psi(x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi_n x_n} \frac{dx_n}{1 + x_n} \\ &= \hat{\psi}(\xi') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi_n x_n} \frac{1}{1 + x_n} dx_n \\ &= \hat{\psi}(\xi') i\pi e^{2\pi i \xi_n} \text{sgn}(\xi_n), \end{aligned}$$

veja o Exemplo 24 no Apêndice A. No entanto, a restrição $\mathcal{R}_E(f)$ ao hiperplano E não é bem definida, pois

$$(\mathcal{R}f)(\xi', 0) = \hat{\psi}(\xi') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{1 + x_n} = +\infty.$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hausdorff-Young segue que $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ quando $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Assim, a restrição $\hat{f}|_M$ pode ser definida via a equação (5.1) para todo conjunto M com medida positiva. Resta uma questão em aberto para conjuntos M com medida nula e que não sejam subconjuntos de hiperplanos do $\mathbb{R}^n$ ou contenha hiperplanos. Isto nos leva ao seguinte problema de restrição de Fourier:

Pergunta 3. Seja E um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ e $M \subsetneq E$ um subconjunto qualquer de medida nula. A transformada de Fourier de $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, tem restrição “bem definida” em M ?

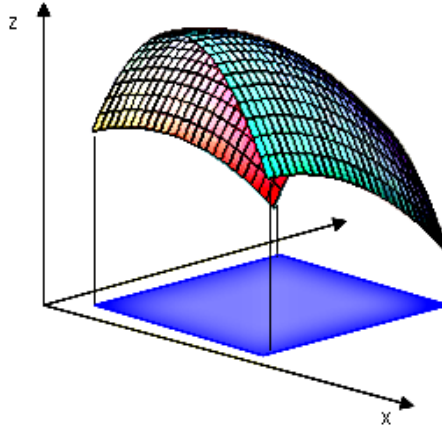


Figura 8 – Superfície em $\mathbb{R}^3$ não contida inteiramente num hiperplano.

Em outras palavras, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $1 < p < 2$ então usando a desigualdade de Hausdorff-Young temos que $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier $\hat{f}$ tem alguma regularidade em $L^q(M)$ quando restrita a uma superfície M tal que $M \not\subseteq E$?

Nesta dissertação concentraremos nosso estudo em problema da restrição em subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que sejam superfícies quadráticas ou superfícies compactas em dimensões mais altas $n \geq 3$. Em particular, estamos interessados em estudar o problema da restrição de Fourier em superfícies modeladas por paraboloides $\mathbb{P}^{n-1} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = Q'(x')\}$, cones $\text{Cone}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 0\}$ e esfera $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 1\}$ descritas na Seção 5.6.

Seja M uma superfície regular e seja $d\mu$ uma medida intrínseca a M ou extrínseca (pull-back da distribuição de Dirac restrita a hiperfície $\Sigma_f \subset M$). Dada uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, estamos interessados em provar estimativas para *restrição de Fourier* da forma

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^q(M, d\mu)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.3)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq q \leq \infty$. Via o Corolário 10 podemos estender a estimativa da restrição de Fourier para $f \in L^p$, quando $1 \leq p < \infty$. Usaremos a notação $\mathcal{R}_M(p \mapsto q)$ quando a estimativa (5.3) for verdadeira para todo $f \in \mathcal{S}$. O operador adjunto $\mathcal{R}^* : L^{q'}(M, d\mu) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (ou operador de extensão para $\mathbb{R}^n$) do operador restrição de Fourier $\mathcal{R}_M$ é definido por

$$(\mathcal{R}^* f)(x) = \int_M e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) d\mu(\xi) = \widehat{f d\mu}(-x)$$

tal que

$$\langle \mathcal{R}(f), g \rangle_M = \int_M \mathcal{R}(f)(\xi) \overline{g(\xi)} d\sigma(\xi) = \int f(x) \overline{\mathcal{R}^*(g)} dx = \langle f, \mathcal{R}^*(g) \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Na Seção 5.3 mostraremos que a estimativa $\mathcal{R}_M(p \rightarrow q)$ é equivalente a estimativa $\mathcal{R}_M^*(q' \rightarrow p')$, isto é,

$$\|\widehat{g d\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^{q'}(M, d\mu)}. \quad (5.4)$$

5.2 A conjectura da restrição

Queremos encontrar condições necessárias para que $\mathcal{R}_M^*(q' \rightarrow p')$ seja verdadeira. Definindo a função constante $g(x) = 1$, segue que $(d\mu)^\vee \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ é uma condição necessária. Se M é uma superfície regular cuja a curvatura Gaussiana é não nula, então a transformada de Fourier $\widehat{d\mu}(-x)$ tem o decaimento $|(d\mu)^\vee(x)| \lesssim |x|^{-\frac{n-1}{2}}$, veja o Teorema 29. Consequentemente a condição $p' > 2n/(n-1)$ é necessária ou equivalentemente $p < 2n/(n+1)$. Caso a superfície M tenha $\ell \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ curvaturas principais não-nulas ou $k = (n-1) - \ell$ curvaturas principais nulas, pelo Teorema 30 obtemos o decaimento $|(d\mu)^\vee(x)| \lesssim |x|^{-\frac{\ell}{2}}$ para $|x| > 1$. Removendo as direções principais de M que têm curvatura principal nula, basta garantir que

$$\int_{\mathbb{R}^{\ell+1}} |(d\mu)^\vee(x)|^{p'} dx \lesssim \int_1^\infty r^{-\frac{\ell}{2}p' + \ell} dr < \infty \quad (5.5)$$

se, e somente se $p' > \frac{2(\ell+1)}{\ell}$. Em particular, quando $M = \text{Cone}^{n-1}$ é um cone ou quando $M = \mathbb{P}^{n-1}$ é um paraboloide contidos em $\mathbb{R}^n$, respectivamente, as condições $p' > \frac{2(n-1)}{n-2}$ e $p' > \frac{2n}{n-1}$ são necessárias. Na Seção 5.7, dedicada a exemplos de Knapp, mostramos que a condição

$$\frac{n+1}{p'} \leq \frac{n-1}{q} \quad (5.6)$$

é necessária, se M for uma esfera unitária ou qualquer superfície com curvatura Gaussiana não-nula. É natural nos perguntarmos se estas condições são suficientes. Conteúdo da seguinte conjectura

Conjectura 2 (Conjectura da restrição para $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$). Seja $n \geq 2$. As restrições de Fourier $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \mapsto q)$ e $\mathcal{R}_{\mathbb{P}^{n-1}}(p \mapsto q)$ são verdadeiras se e somente se

$$1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1} p' \quad \text{e} \quad p' > \frac{2n}{n-1}. \quad (5.7)$$

A área (“range”) esperada para o problema da restrição de Fourier na esfera e no parabolóide é descrita na Figura 9, usando o sistema de coordenadas $(1/p, 1/q)$. Esta área é limitada por um trapézio com vértices

$$A_1 = \left(\frac{n+1}{2n}, \frac{n+1}{2n} \right), \quad A_2 = \left(\frac{n+1}{2n}, 1 \right), \quad A_3 = (1, 1) \quad \text{e} \quad Q_2 = (1, 0)$$

menos o segmento de reta $[A_1, A_2]$.

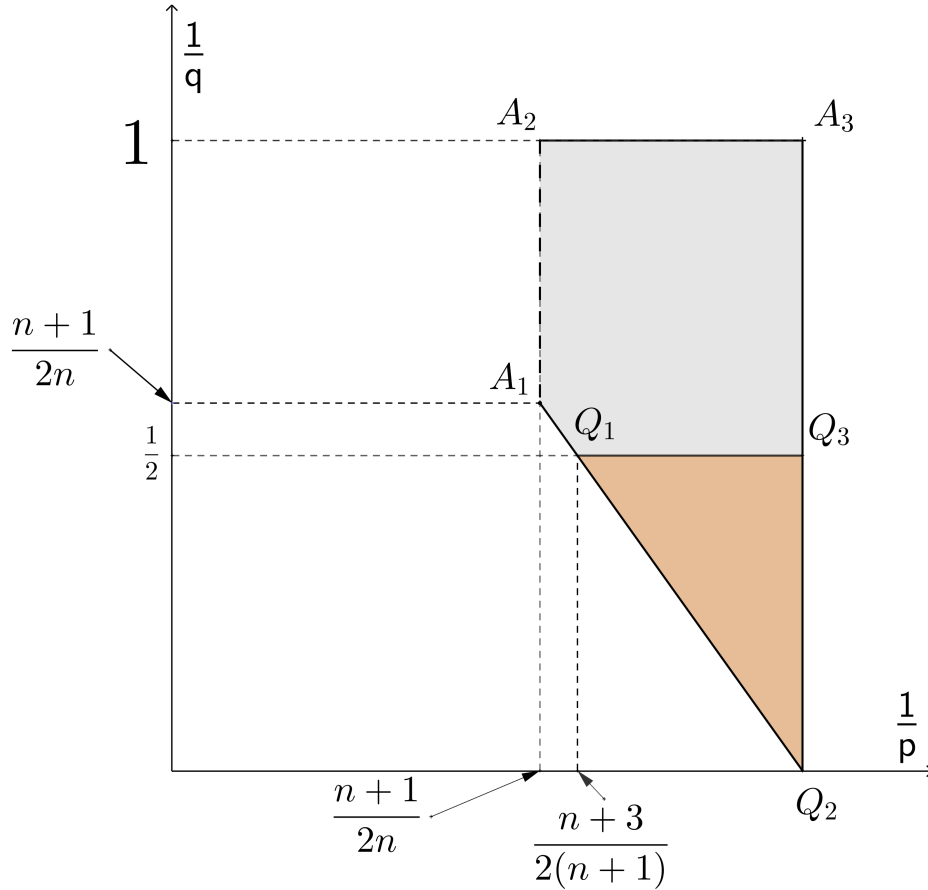


Figura 9 – A área do trapézio $T_{A_1 A_2 A_3 Q_2} \setminus [A_1, A_2]$ para conjectura da restrição de Fourier em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$. A região limitada pelo triângulo $\Delta_{Q_1 Q_2 Q_3}$ corresponde ao Teorema de Tomas-Stein e Strichartz para $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$, $n = 3$.

É possível obter uma figura similar a Figura 9 para superfícies com ℓ curvaturas principais não nulas. Neste caso, a área esperada para o problema de restrição é limitada por um trapézio com vértices

$$A_1 = \left(\frac{\ell+2}{2(\ell+1)}, \frac{\ell+2}{2(\ell+1)} \right), \quad A_2 = \left(\frac{\ell+2}{2(\ell+1)}, 1 \right), \quad A_3 = (1, 1) \quad \text{e} \quad Q_2 = (1, 0)$$

menos o segmento de reta $[A_1, A_2]$, descrita na Figura 10.

Naturalmente, é possível enunciar a conjectura da restrição para superfícies M com ℓ curvaturas principais não-nulas em um ponto $p \in M$. Note que estas superfícies não incluem, por exemplo, parabolóides hiperbólicos, onde o problema da restrição é bem mais delicado de ser tratado (BUSCHENHENKE; MÜLLER; VARGAS, 2020).

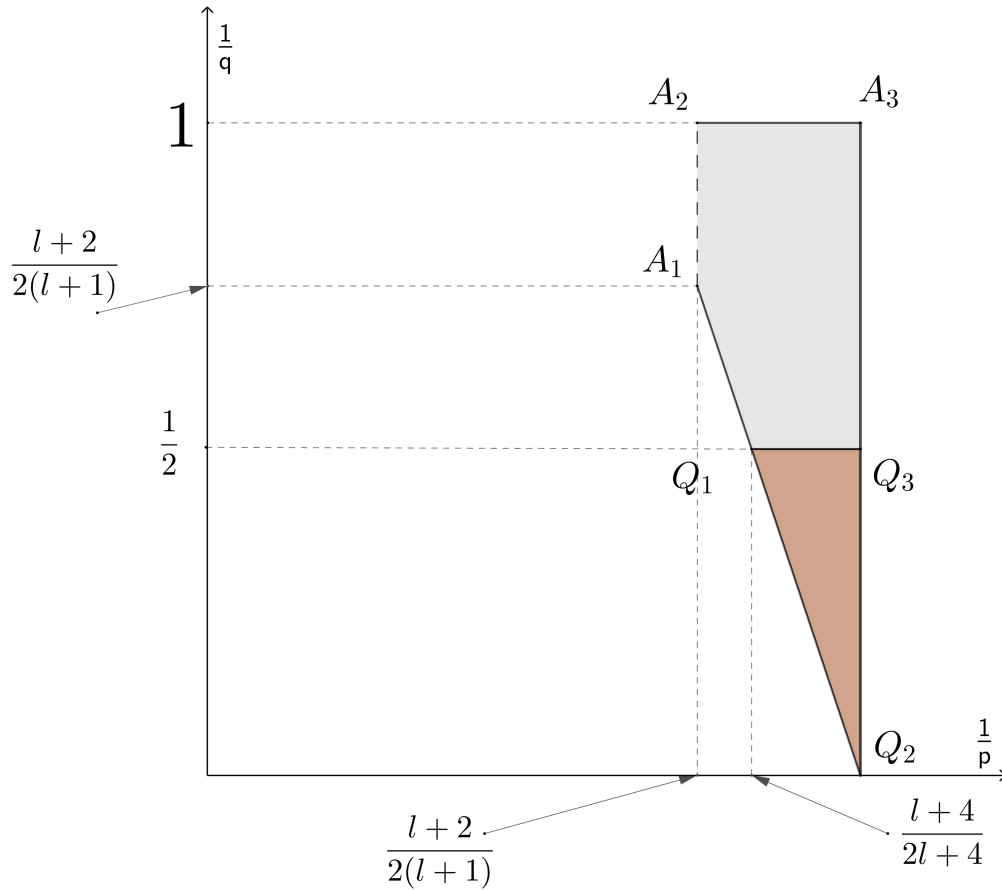


Figura 10 – A área do trapézio $T_{A_1 A_2 A_3 Q_2} \setminus [A_1, A_2]$ para conjectura da restrição de Fourier em superfícies M com $\ell \neq 0$ curvaturas principais não-nulas. A região limitada pelo triângulo $\Delta_{Q_1 Q_2 Q_3}$ corresponde ao Teorema de Tomas-Stein-Littman 31 para superfícies compactas, onde tomamos $n = 3$ e $\ell = 1$. <https://www.geogebra.org/classic/tdqhue3p>

A Conjectura 2 tem uma formulação equivalente usando o operador adjunto $\mathcal{R}^*$ chamado de operador extensão de Fourier, como veremos usando o método TT^* .

Conjectura 3 (Conjectura da restrição para $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$). As estimativas de extensão de Fourier

$$\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}^*(\infty \mapsto p') \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{\mathbb{P}^{n-1}}^*(\infty \mapsto p')$$

são verdadeiras se e somente se $p' > 2n/(n-1)$

Esta conjectura foi provada por Zygmund (ZYGMUND, 1974) e Fefferman (FEFFERMAN, 1970) para $n = 2$, no entanto para $n \geq 3$ o problema está em aberto. Neste capítulo estamos interessados em provar a estimativa $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \mapsto 2)$ conhecida como Teorema de Tomas-Stein e provar estimativas do tipo $\mathcal{R}_M(p \mapsto 2)$, quando M é uma superfície regular compacta ou não-compacta, conteúdos das Seções 5.4 e 5.5 respectivamente. Resultados similares para $\mathcal{R}_{\text{Cone}^{n-1}}(p \mapsto 2)$ e $\mathcal{R}_{\mathbb{P}^{n-1}}(p \mapsto 2)$ foram provados por Strichartz (STRICHARTZ, 1977). Estes resultados entre outros mais gerais estão descritos na Seção 5.6.

5.3 Método TT^*

Em trabalhos que se propõe a apresentar o problema de restrição, frequentemente é apresentado o *argumento de dualidade* usando o operador dual $\mathcal{R}^*$ do operador de restrição $\mathcal{R}$. Desta forma, naturalmente nos perguntamos se existe algum tipo de relação de limitação destes operadores. O objetivo principal desta seção é apresentar este argumento.

Lema 19. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\mu(\xi) = \int f(x) (\bar{g} * \widehat{\mu})(x) dx.$$

Demonstração. Usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\mu(\xi) = \int f(x) \left(\int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \widehat{g}(\xi) d\mu(\xi) \right) dx = \int f(x) \mathcal{F}(\bar{g}\mu)(x) dx.$$

Agora usando a Proposição 13-(iv) e o Lema 18,

$$\int f(x) \mathcal{F}(\bar{g}\mu) dx = \int f(x) \mathcal{F}(\bar{g}^\vee \mu) dx = \int f(x) (\bar{g} * \widehat{\mu}) dx$$

como desejado. □

Observações relevantes.

Observação 7.

(i) Tomando $\bar{g} = \widehat{h}$ no Lema 19 e usando a Proposição 13-(iv) podemos escrever

$$\int \widehat{f}(\xi) h(\xi) d\mu(\xi) = \int f(x) (\widehat{h} * \widehat{\mu})(x) dx,$$

para todo $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Seja $d\mu = d\sigma$ uma medida tal que $\text{supp}(d\sigma) \subseteq M$ e seja $g = f$ no Lema 19, então

$$\begin{aligned} \int_M |\widehat{f}(\xi)|^2 d\sigma &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\bar{f} * \widehat{d\sigma})(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (f * \widehat{d\sigma}(-\cdot))(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\mathcal{R}^* \mathcal{R})(f)(x) dx, \end{aligned}$$

pois usando o Teorema de Fubini e a mudança de variável $z \mapsto x - y$, obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}^*\mathcal{R})(f)(x) &= \int \left(\int_M e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} d\sigma \right) f(y) dy \\ &= \int \left(\int_M e^{2\pi iz\cdot\xi} d\sigma \right) f(x-z) dz \\ &= \int \widehat{d\sigma}(-z) f(x-z) dz = f * \widehat{d\sigma}(-x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Portanto, pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_M |\widehat{f}(\xi)|^2 d\sigma \leq \|f\|_{L^p} \|\mathcal{R}^*\mathcal{R}f\|_{L^{p'}},$$

ou seja, basta verificar que

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R} : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

é um operador linear limitado para garantirmos que a restrição de Fourier $\mathcal{R} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(M, d\mu)$ seja um operador linear limitado. Este método é conhecido por argumento TT^* .

Lema 20 (Método TT^*). Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $n \geq 2$. Então são equivalentes,

$$(i) \quad \|\widehat{f d\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{q'}(\mu)}$$

$$(ii) \quad \|\widehat{g}\|_{L^q(\mu)} \leq C \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $q = 2$ então o item (ii) é equivalente a

$$(iii) \quad \|\widehat{d\mu} * g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C^2 \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Relembre que o espaço dual de $L^p(\mu)$ é isomorfo a $L^{p'}(\mu)$, quando $1 < p < \infty$ e p' satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, veja o Teorema 8. Portanto, usando dualidade em $L^2(\mu)$ e o Lema 19, respectivamente, obtemos

$$\|\widehat{g}\|_{L^q(\mu)} = \sup \left| \int \widehat{g}(\xi) f(\xi) d\mu(\xi) \right| = \sup \left| \int g(x) (\widehat{f} * \widehat{\mu})(x) dx \right| = \sup \left| \int g(x) \widehat{f\mu}(x) dx \right|, \quad (5.9)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f\|_{L^{q'}(\mu)} = 1$. Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int g(x) \widehat{f\mu}(x) dx \right| \leq \int |g(x) \widehat{f\mu}(x)| dx \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{f\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

e, portanto,

$$\|\widehat{g}\|_{L^q(\mu)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sup_{\|f\|_{L^{q'}(\mu)}=1} \|\widehat{f\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Desta forma, assumindo (i) obtemos (ii) para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Reciprocamente, usando o Teorema da multiplicação 22 e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \|\widehat{f\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} &= \sup \left| \int \widehat{f\mu}(\xi) g(\xi) d\xi \right| = \sup \left| \int (f\mu)(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi \right| \\ &= \sup \left| \int \widehat{g}(\xi) f(\xi) d\mu(\xi) \right| \leq \|f\|_{L^{q'}(\mu)} \sup \|\widehat{g}\|_{L^q(\mu)}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

sempre que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e o supremo é tomado sobre todas g tais que $\|g\|_{L^p} = 1$. Portanto, (ii) implica (i).

Para a equivalência restante ($q = 2$), mostraremos a equivalência entre os itens (ii) e (iii). A prova que (ii) $\Rightarrow$ (iii) é imediata. De fato, usando a Proposição 13-(iii), o item (i) e finalmente o item (ii), respectivamente, obtemos

$$\|g * \widehat{\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{g^\vee \mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|g^\vee\|_{L^2(\mu)} \leq C^2 \|g\|_{L^p(\mu)}, \text{ para } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Reciprocamente, pela Observação 7-(i), a desigualdade de Hölder e o item (iii),

$$\left| \int \widehat{f}(\xi) g^\vee(\xi) d\mu(\xi) \right| = \left| \int f(x) (g * \widehat{\mu})(x) dx \right| \leq \|\widehat{\mu} * g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Fazendo $g(x) = f(-x)$, obtemos

$$\int |\widehat{g}(\xi)|^2 d\mu(\xi) \leq C^2 \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2,$$

para qualquer $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Com isso concluímos a prova do lema. $\square$

5.4 Restrição de Fourier em superfícies compactas

Nesta seção vamos provar, parcialmente, a conjectura da Restrição para superfícies compactas. Mais precisamente, provaremos que existe $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}\|_M \|_{L^2(M, d\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad n \geq 2 \quad (5.11)$$

quando $1 \leq p \leq p_\ell = \frac{2\ell+4}{\ell+4}$, onde ℓ denota o número de curvaturas principais $k(x)$ em um ponto x de uma superfície M , regular e compacta em $\mathbb{R}^n$.

5.4.1 Teorema de Thomas-Stein e Littman

O objetivo desta seção é provar os Teoremas de Thomas-Stein e de Littman. Enunciaremos estes teoremas numa única sentença pois, claramente, o Teorema de Littman implica diretamente o Teorema de Thomas-Stein.

Teorema 31. Seja M uma superfície compacta de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $d\sigma$ uma medida com suporte nesta superfície.

- **(Teorema de Littman)** Suponha que M tem $\ell \neq 0$ curvaturas principais $k_j(x)$ não-nulas no ponto $x \in M$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}|_M\|_{L^2(M, d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.12)$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 \leq p \leq \frac{2\ell+4}{\ell+4}$.

- **(Teorema de Thomas-Stein)** Em particular, se M denota a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ obtemos

$$\|\widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.13)$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 \leq p \leq \frac{2n+2}{n+3}$.

Observação 8. Na Seção 5.7, que contém os exemplos de Knapp, mostraremos que os expoentes $p_\ell = \frac{2\ell+4}{\ell+4}$ e $p_n = \frac{2n+2}{n+3}$ são ótimos.

Demonstração. Quando $p = 1$, usando a compacidade de M obtemos

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(M)} = \left(\int_M |\widehat{f}(\xi)|^2 d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu(M)^{\frac{1}{2}} \sup_{\xi \in M} |\widehat{f}(\xi)| \leq C\|f\|_1$$

Portanto, basta mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(M)} \leq C\|f\|_{L^{\frac{2\ell+4}{\ell+4}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.14)$$

De fato, usando o Teorema de Riesz-Thorin 12 concluímos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(M)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $1 < p < \frac{2\ell+4}{\ell+4}$. Pelo método TT^* , a estimativa (5.14) é equivalente

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^n)},$$

com $p_\ell = \frac{2\ell+4}{\ell+4}$. Para provar esta desigualdade, seja $\{U_j, \alpha_j\}_{j \in I}$ um sistema de coordenadas locais de M no ponto p_j , então $\{\alpha_j(U_j)\}_{j \in I}$ é uma cobertura aberta de M . Seja $\{\varphi_\alpha\}$ uma partição da unidade 11 subordinada a esta cobertura, isto é, $0 \leq \varphi_j(p) \leq 1$, $\text{supp}(\varphi_j) \subset \alpha_j(U_j)$ e $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(p) = 1$, para todo $p \in M$. Portanto, podemos escrever

$$f * \widehat{d\sigma} = \sum_{j \geq 1} f * (\varphi_j \widehat{d\sigma}) \quad (5.15)$$

Portanto a medida $\widehat{d\mu}_j(-x) = \varphi_j(x) \widehat{d\sigma}(-x)$ esta suportada numa vizinhança coordenada $\alpha_j(U_j)$. Ora, usando a Proposição 9 sabemos que $\alpha_j(U_j)$ contém um aberto $\alpha_j(V) \ni p$ tal que $\alpha_j(V)$ é o gráfico de uma função ϕ de classe C^k . Desta forma, pela Proposição 8, os auto-valores da matriz Hessiana $\text{Hess}_\phi(q)$ coincide com as curvaturas principais de M no ponto $p = \alpha(q)$. Supondo que

em cada vizinhança coordenada $\alpha_j(U_j)$ o número de curvaturas principais não-nulas no ponto p é dado por ℓ , pelo Teorema de Littman 30 segue que

$$|\widehat{d\mu_j}(-x', -t)| \leq C|t|^{-\frac{\ell}{2}}.$$

Decompondo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e tomando $x = (x', t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, podemos escrever

$$(f * \widehat{d\mu_j})(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x' - y', t - s) f(y', s) dy' ds,$$

onde $K_j(x) = \widehat{d\mu_j}(-x)$. Defina o *operador de evolução* $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ pela equação

$$(U(t)g)(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x' - y', t) g(y') dy',$$

para todo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Então obtemos a seguinte estimativa dispersiva,

$$\|U(t)g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \sup_{x'} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |K_j(x' - y', t)| |g(y')| dy' \leq C|t|^{-\frac{\ell}{2}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (\text{Dispersão})$$

Agora, usando a identidade de Plancherel 27, obtemos

$$\|U(t)g\|_{L^2} = \|\widehat{K_j * g}\|_{L^2} = \|\widehat{K_j} \widehat{g}\|_{L^2} \leq \|\widehat{K_j}\|_{L^\infty} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}, \quad (\text{Energia})$$

pois φ_j tem suporte compacto. Agora usando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin 12 podemos interpolar as desigualdades (Dispersão) e (Energia) para obter

$$\|U(t)g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C|t|^{-\alpha(\ell)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}, \quad (5.16)$$

com $\alpha(\ell) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{1}{p_\ell} - \frac{1}{p'_\ell} \right) = \frac{2\ell}{2\ell+4}$, onde escolhemos $\theta = 2/p'_\ell$ no Teorema de Riesz-Thorin. Note que $\theta \in (0, 1)$ visto que $p'_\ell = \frac{2\ell+4}{\ell} > 2$ e, além disso, $0 < \alpha(\ell) < 1$. Agora, pela desigualdade de Minkowski para integrais (2.9), a desigualdade (5.16) e o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev 16, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|f * \widehat{d\mu_j}\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} U(t-s) f(y', s) ds \right\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \|U(t-s) f(\cdot, s)\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^{n-1})} ds \right\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R})} \\ &\leq C \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |t-s|^{-\alpha(\ell)} \|f(\cdot, s)\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^{n-1})} ds \right\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R})} \\ &\leq C \left\| \|f(\cdot, s)\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R})} \\ &= C \|f\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Como a família de suportes $\{\text{supp}(\varphi_j)\}_j$ é localmente finita, a série em (5.15) é somente uma soma parcial, consequentemente

$$\|f * \widehat{d\mu_j}\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=1}^N \|f * \widehat{d\mu_j}\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.18)$$

Quando M for uma esfera basta tomar $\ell = n - 1$. Desta forma, $p_\ell = \frac{2n+2}{n+3}$, $p'_\ell = \frac{2n+2}{n-1}$ e $\alpha(\ell) = \frac{n-1}{n+1}$. Isto conclui a demonstração. $\square$

5.5 Restrição de Fourier em superfícies não-compactas

Nosso objetivo agora é estender os teoremas de restrição da Seção 5.4 para superfícies não-compactas. De forma resumida, nossa ideia é “cortar” em pedaços compactos cada superfície não-compacta e aplicar os resultados obtidos da Seção 5.4. A decomposição de Littlewood-Paley será importante para que possamos contornar a falta de compacidade das superfícies e/ou as singularidades das superfícies quando houver.

A decomposição de Littlewood-Paley será importante para a extensão do nosso estudo para superfícies não-compactas.

Lema 21. Existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $0 \notin \text{supp}(\psi)$ tal que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}x) = 1, \quad \forall x \neq 0. \quad (5.19)$$

Para qualquer $x \neq 0$, no máximo dois termos desta soma é diferente de zero. Além disso, ψ pode ser escolhida como uma função radial não negativa.

Demonstração. Pelo Teorema 10, existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função radial suportada na bola $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 2\}$ que satisfaz $\phi(x) \equiv 1$, para $|x| \leq 1$ e $0 \leq \phi \leq 1$. Defina $\psi(x) := \phi(x) - \phi(2x)$. Observe que $\psi(2x) = \psi(x) = 1$ se $|x| < 1/2$ e também que $\psi(2x) = \psi(x) = 0$ se $|x| \geq 2$. Isto implica que $\text{supp}(\psi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |x| < 2\}$, portanto $\text{supp}(\psi)$ é limitado e fechado, logo, é compacto. Para qualquer positivo k tem-se

$$\sum_{-k}^k \psi(2^{-j}x) = \phi(2^{-k}x) - \phi(2^{k+1}x).$$

Para cada $x \neq 0$, podemos escolher k suficientemente grande, tal que $|2^{-k}x| \leq 1$ e $|2^{k+1}x| \geq 2$. Daí obtemos $\phi(2^{-k}x) = 1$ e $\phi(2^{k+1}x) = 0$, isto nos dá (5.19). $\square$

No Lema 21 observe por construção, que o suporte de cada função $\psi_j(x) = \psi(x/2^j)$ está contido no anel $\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| < 2^{j+1}\}$. Desta forma, dado $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, existe apenas finitos termos diferentes de zero na soma (5.19). A sequência de funções $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma *partição da unidade*.

5.5.1 Teorema de Tomas-Stein-Strichartz

Utilizaremos as ideias de Tomas (TOMAS, 1975) para provar o teorema de restrição em superfícies regulares não-compactas com $\ell \neq 0$ curvaturas principais não-nulas para o range $1 \leq p < \frac{2\ell+4}{\ell+4}$.

Teorema 32 (Teorema de Tomas). Seja M uma superfície regular e não-compacta em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$ e seja $d\mu$ uma medida do $\mathbb{R}^n$ cuja o suporte $\text{supp}(\mu) \subseteq M$. Suponha que M tem $\ell > 0$

curvaturas principais $k_j(x)$ não-nulas em cada ponto $x \in M$, então

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^2(M, d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.20)$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq p < \frac{2\ell+4}{\ell+4}$.

Demonstração. Usando a densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e o Lema 20 é suficiente mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{d\mu} * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (5.21)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ a partição da unidade de Littlewood-Paley obtida no Lema 21 e defina a função

$$\varphi(x) = 1 - \sum_{j \geq 0} \psi_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Claro que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto e $1 = \varphi(x) + \sum_{j \geq 0} \psi_j(x)$. Então, pela desigualdade triangular em $L^{p'}$ tem-se

$$\|\widehat{d\mu} * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\varphi \widehat{d\mu}) * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j \geq 0} \|K_j * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.22)$$

onde tomamos $K_j(x) = \psi(2^{-j}x)\widehat{d\mu}(-x)$. Como $\varphi \widehat{d\mu} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade de Young (2.18) implica que

$$\|\varphi \widehat{d\mu} * f\|_{p'} \leq \|\varphi \widehat{d\mu}\|_r \|f\|_p \leq C\|f\|_p. \quad (5.23)$$

De fato, usando o decaimento $|\widehat{d\mu}(-x)| \leq C|x|^{-\ell/2}$ para todo $|x| > 1$ no suporte $\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\mu)$ e usando coordenadas polares estimamos

$$\begin{aligned} \|\varphi \widehat{d\mu}\|_r &= \left(\int_{\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\mu)} |\widehat{d\mu}(-x)|^r dx \right)^{1/r} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_1^L t^{n-1-\frac{r\ell}{2}} dt \right) d\sigma_{\mathbb{S}^{n-1}} \right)^{1/r} \\ &= CL^{\frac{2n}{p'} - \frac{\ell}{2}}, \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{p'} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ se e somente se $\frac{2}{p'} = \frac{1}{r}$. Agora precisamos mostrar que existe uma constante positiva C , uniforme em j , e uma constante $\varepsilon(\theta) > 0$ tal que

$$\|K_j * f\|_{p'} \leq C2^{-j\varepsilon(\theta)}\|f\|_p, \quad (5.24)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para isto, segundo o Teorema de Riesz-Thorin, é suficiente mostrar que o operador $T_j f = K_j * f$ satisfaz as desigualdades

$$(a) \quad \|T_j f\|_\infty \leq 2^{-\frac{j\ell}{2}}\|f\|_1 \quad \text{e} \quad (b) \quad \|T_j f\|_2 \leq 2^j\|f\|_2.$$

De fato, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1},$$

basta tomar $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$. Note que $\theta \in (0, 1)$ se e somente se $p < p'$ e $p > 1$. Interpolando, via o Teorema 12, as desigualdades (a) e (b) obtemos

$$\|T_j f\|_{p'} \leq C 2^{j(1-\theta)} 2^{-\frac{j\ell}{2}\theta} \|f\|_p = C 2^{-j(\frac{\ell\theta}{2} - (1-\theta))} \|f\|_p, \quad (5.25)$$

note que $\varepsilon(\theta) = \frac{\ell\theta}{2} - (1-\theta) > 0$ se e somente se $p < \frac{2\ell+4}{\ell+4}$. Assim,

$$\|K * f\|_{p'} \leq C \|f\|_p + C \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-j\varepsilon(\theta)} \right) \|f\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Nos resta mostrar as desigualdades (a) e (b). Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\|K_j * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|K_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-\frac{j\ell}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

pois sobre o suporte de ψ_j temos que $|\hat{\mu}(-x)| \leq C 2^{-\frac{j\ell}{2}}$. Agora usando a identidade de Plancherel,

$$\|f * K_j\|_2 = \|\widehat{f K_j}\|_2 = \|\widehat{K_j}\|_\infty \|f\|_2 \leq C 2^j \|f\|_2$$

pois usando a Proposição 13-(iii) e que **supp** $[\widehat{\psi}(2^j \cdot)] \subset \{|\xi| \leq 2^{-j}\}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \|\widehat{K_j}\|_\infty &= \|2^{jn} \widehat{\psi}(2^j \cdot) * \mu\|_\infty \\ &\leq 2^{jn} \int |\widehat{\psi}(2^j \xi)| d\mu \\ &\leq C 2^{jn} \int_{|\xi| \leq 2^{-j}} |\widehat{\psi}(2^j \xi)| d\mu \\ &\leq C 2^{jn} \int_{|\xi| \leq 2^{-j}} d\mu = C 2^{jn} 2^{-j(n-1)}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

visto que $\widehat{\psi}$ é limitada e $\mu(B(x, r)) \leq C r^{n-1}$, para todo $r > 0$. $\square$

No Teorema 32 o expoente $p_\ell = \frac{2\ell+4}{\ell+4}$ não foi atingido em razão do expoente $\varepsilon(\theta)$, obtido usando o Teorema de Riesz-Thorin, precisar ser necessariamente positivo para garantir que a série $\sum_{j \geq 0} 2^{-j\varepsilon(\theta)}$ seja convergente.

Teorema 33 (Teorema de Tomas-Stein-Strichartz). Assumindo as hipóteses do Teorema 32 obtemos

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^2(M, d\mu)} \leq C \|f\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.27)$$

para todo $f \in L^{p_\ell}(\mathbb{R}^n)$ com $p_\ell = \frac{2\ell+4}{\ell+4}$.

Demonstração. Basta provar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{d\mu} * f\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando a partição da unidade de Littlewood-Paley, escrevemos

$$\|\widehat{d\mu} * f\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\varphi \widehat{d\mu}) * f\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j \geq 0} \|K_j * f\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $K_j(x) = \psi_j(x)\widehat{d\mu}(-x)$, $\varphi \in C_c^\infty$ e $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é a partição da unidade de Littlewood-Paley. Pela desigualdade (5.23) segue que

$$\|\varphi\widehat{d\mu} * f\|_{p'_\ell} \leq C\|f\|_{p_\ell}.$$

Usando o mesmo espírito da prova do Teorema 31 escreva

$$K_j * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x' - y', t - s) f(y', s) dy' ds := \int_{-\infty}^{+\infty} U_j(t - s) f(\cdot, s) ds,$$

o operador de evolução $\{U_j(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é definido por

$$U_j(t)g(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x' - y', t) g(y') dy',$$

para todo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. É suficiente mostrar que existe $\theta \in (0, 1)$ e $C > 0$ (uniforme em j) tal que

$$\|U_j(t)g\|_{p'_\ell} \leq C 2^{-\frac{j\ell}{2}(1-\theta)} |t|^{-\frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{p_\ell} - \frac{1}{p'_\ell}\right)} \|g\|_{p_\ell} \quad (5.28)$$

para todo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. De fato, relembre que

$$\alpha(\ell) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{1}{p_\ell} - \frac{1}{p'_\ell} \right) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{\ell + 4}{2\ell + 4} - \frac{\ell}{2\ell + 4} \right) = \frac{2\ell}{2\ell + 4}.$$

Agora, usando a desigualdade de Minkowski para integrais (2.9), a desigualdade (5.16) e o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev 16, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|K_j * f\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} U_j(t - s) f(y', s) ds \right\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \|U_j(t - s) f(\cdot, s)\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R}^{n-1})} ds \right\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R})} \\ &\leq C 2^{-\frac{j\ell}{2}(1-\theta)} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |t - s|^{-\alpha(\ell)} \|f(\cdot, s)\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^{n-1})} ds \right\|_{L^{p'_\ell}(\mathbb{R})} \\ &\leq C 2^{-\frac{j\ell}{2}(1-\theta)} \left\| \|f(\cdot, s)\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R})} \\ &= C 2^{-\frac{j\ell}{2}(1-\theta)} \|f\|_{L^{p_\ell}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Assim,

$$\|\widehat{d\mu} * f\|_{p'_\ell} \leq C\|f\|_{p_\ell} + C \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-\frac{j\ell}{2}(1-\theta)} \right) \|f\|_{p_\ell} \leq C\|f\|_{p_\ell}.$$

Nos resta mostrar a estimativa (5.28), para isto é suficiente garantir que existem constantes $C_i > 0$ tais que

$$\begin{cases} \|U_j(t)g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_1 |t|^{-\frac{\ell}{2}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} & \textbf{(Dispersiva)} \\ \|U_j(t)g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_2 2^{-\frac{j\ell}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} & \textbf{(Energia)} \end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, escolha $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{p'_\ell} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p_\ell} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}.$$

Note que $\theta = \frac{1}{p_\ell} - \frac{1}{p'_\ell} = \frac{4}{2\ell+4} \in (0, 1)$ e o Teorema de Riesz-Thorin garante que

$$\|U_j(t)g\|_{p'_\ell} \leq C 2^{-\frac{j\ell}{2}(1-\theta)} |t|^{-\frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{p_\ell} - \frac{1}{p'_\ell}\right)} \|g\|_{p_\ell}.$$

A estimativa (**Dispersiva**) já provamos. A única novidade é o novo decaimento da estimativa de Energia

$$\|U_j(t)g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_2 2^{-\frac{j\ell}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Usando a identidade de Plancherel na variável x' e o decaimento

$$|\widehat{d\mu}(-x', -t)| \leq C |t|^{-\frac{\ell}{2}}$$

sobre o suporte de ψ_j contido no anel $|x| \sim 2^j$, temos que

$$\|U_j(t)g\|_2 \leq \|\widehat{K_j}(\cdot, t)\|_\infty \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C 2^{-\frac{j\ell}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})},$$

como desejamos. □

5.6 Restrição de Fourier em superfícies quadráticas

Uma forma quadrática real em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação bilinear $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j,$$

cujas matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma matriz simétrica. Dizemos que a forma quadrática Q é *degenerada*, se $\det A = 0$. Caso contrário, dizemos que a forma quadrática é *não-degenerada*. O posto, denotado por $\mathbf{rank}(Q)$, de uma forma quadrática Q é o posto da matriz A associada a Q .

Teorema 34 (Lei da inércia de Sylvester ([SHAFAREVICH; REMIZOV, 2013](#))). Seja Q uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ e seja $r = \mathbf{rank}(Q)$.

(i) Se Q for degenerada, então existe uma base β de $\mathbb{R}^n$ e um número $a \leq r$ tal que

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \dots - x_r^2, \quad (5.30)$$

onde $x_1, \dots, x_r$ são as r primeiras coordenadas do vetor $[x]_\beta$.

(ii) Se Q for não-degenerada, então

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

(iii) Se a forma quadrática Q for definida positiva, então

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

O número a de $+1$'s independe da base β . Se b denota o número de -1 's da equação quadrática (5.30) então $b = r - a$, isto é, os números a e b são invariantes por mudanças de base e conhecidos por *índices de inercia* da forma quadrática Q . A *assinatura* de Q denotaremos por (a, b) . Note que o índice positivo e negativo de uma matriz simétrica A é o número de autovalores positivos e negativos de A , respectivamente.

Definição 16 (Superfícies quadráticas). Uma superfície quadrática M de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n - 1$ ou codimensão 1 é uma superfície tal que após uma rotação e translação pode ser expressada por

$$M = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, Q(x_1, \dots, x_{n-1})) : x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\},$$

onde Q é uma forma quadrática real em $\mathbb{R}^{n-1}$.

Considere as superfícies quadráticas,

1. $\mathbb{P}^{n-1} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = Q'(x')\}$, onde Q' é uma forma quadrática não-degenerada em $\mathbb{R}^{n-1}$ da forma

$$Q'(x') = x_1^2 + \cdots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \cdots - x_{n-1}^2, \quad (\text{i})$$

cuja assinatura (a, b) satisfaz $a + b = n - 1$, com a e b inteiros não-negativos.

2. $\text{Cone}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 0\}$, onde Q é uma forma quadrática não-degenerada em $\mathbb{R}^n$

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \cdots - x_n^2, \quad (\text{ii})$$

cuja assinatura (a, b) satisfaz $a + b = n$, com a e b inteiros positivos.

3. $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 1\}$, onde Q é uma forma quadrática não-degenerada em $\mathbb{R}^n$

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \cdots - x_n^2, \quad (\text{iii})$$

cuja assinatura (a, b) satisfaz $a + b = n$, com $a \neq 0$.

Da álgebra linear podemos mostrar que qualquer superfície quadrática que não esteja contida em um hiperplano afim pode ser transformada em uma das três superfícies $\mathbb{P}^{n-1}$, Cone^{n-1} e $\mathbb{S}^{n-1}$ módulo uma transformação afim, pois uma transformação afim $Tx = Lx + v$ com $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertível e $v \in \mathbb{R}^n$ não influencia o problema da restrição de Fourier. De fato, seja M uma superfície e $T(M)$ sua imagem derivada da transformação T , então o “push-forward” $T_*(d\mu)$ de uma medida $d\mu$ sobre M ,

$$\int_{T(M)} f(\xi) T_*(d\mu)(\xi) = \int_M f(T\xi) d\mu(\xi). \quad (5.31)$$

define uma medida em $T(M)$. Assim, a restrição de Fourier $\mathcal{R}_{T(M)}(p \rightarrow q)$ é equivalente a restrição $\mathcal{R}_M(p \rightarrow q)$. Em razão deste comentário, basta estudar estes três casos onde a medida $d\mu$ denota a medida canônica a qual é o “pull-back” da distribuição de Dirac (veja (A.7) no Apêndice A) sobre superfícies $\Sigma = \{f(x) = 0\}$ dada por

$$d\mu_\Sigma = \delta_0(f(x)) \frac{dx_1 \cdots d\hat{x}_j \cdots dx_n}{|\partial f / \partial x_j|}. \quad (5.32)$$

Note que superfícies quadráticas não são necessariamente uma superfície suave em todos os pontos, por exemplo o $\text{Cone}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 0\}$ tem uma singularidade na origem. Para contornar este problema, precisaremos introduzir a noção de *projeção de Littlewood-Paley* de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 17. Seja $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ uma partição da unidade de Littlewood-Paley. O operador projeção de Littlewood-Paley de f sobre o anel $D_j = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$ é definido por

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \psi_j(\xi) \widehat{f}(\xi),$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Em outras palavras, o operador de Littlewood-Paley localiza funções em anéis D_j . Além disso, apesar do nome, P_j não é um operador de projeção no sentido mais convencional dado a esse termo. A decomposição de Littlewood-Paley de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é definida por $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j f$.

Um resultado conhecido como desigualdades de Littlewood-Paley, estabelece a equivalência entre $\|f\|_{L^p} \sim \|Sf\|_{L^p}$, onde

$$Sf = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |P_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A prova deste resultado é consequência do Teorema de Mihlin-Hörmander (MUSCALU; SCHLAG, 2013, Teorema 8.2) e da desigualdade de Khinchine (MUSCALU; SCHLAG, 2013, Lemma 5.5). Não provaremos esta equivalência.

Lema 22 (Desigualdades de Littlewood-Paley). Para todo $1 < p < \infty$ existe uma constante $C = C(p, n)$ tal que

$$C^{-1} \|f\|_{L^p} \leq \|Sf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p},$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sabemos que as superfícies quadráticas podem ser escritas na forma

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = r\},$$

onde $Q(x)$ é uma forma quadrática e r uma constante real. A menos que mencionemos contrário, $d\mu_\Sigma$ denota a medida canônica definida em (5.32) com $x_j = x_n$, isto é,

$$d\mu_\Sigma = \delta(r - Q(x)) \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{|\partial Q / \partial x_n|}. \quad (5.33)$$

Teorema 35 (Strichartz (STRICHARTZ, 1977) Teorema 1. Caso I). Considere um parabolóide $\mathbb{P}^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_n = Q'(\xi')\}$, onde $Q'(\xi')$ a forma quadrática não-degenerada em $\mathbb{R}^{n-1}$ definida por $Q'(x') = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(d\mu)} = \left(\int_{\mathbb{P}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.34)$$

para $p = \frac{2n+2}{n+3}$, $n \geq 2$.

Demonstração. Note que $\mathbb{P}^{n-1} = \{\xi : Q(\xi) = 0\}$ é uma superfície regular, onde $Q(\xi) = \xi_n - Q'(\xi')$. Então

$$d\mu = \left| \frac{\partial Q}{\partial \xi_n} \right|^{-1} d\xi' = d\xi'.$$

Pela definição de $d\mu$, segue a igualdade

$$\left(\int_{\mathbb{P}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', Q'(\xi'))|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Truncando o parabolóide pela função de corte $\varphi(\xi', \xi_n) = 1$ no retângulo $|\xi'| + |\xi_n| \leq 1$, segue que a superfície regular obtida é compacta e via Teorema de Littman 31 obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{P}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', Q'(\xi'))|^2 \varphi d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{|\xi'| \leq 1} |\widehat{f}(\xi', Q(\xi'))|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.35)$$

para todo $1 \leq p \leq p_n := \frac{2n+2}{n+3}$, pois o parabolóide possui todas as curvaturas principais não-nulas. Como Q' é uma função homogênea de grau 2, para que o parabolóide seja invariante por dilatações somos motivados a escolher o seguinte “parabolic scaling”

$$f_\lambda(\xi', \xi_n) = f\left(\frac{\xi'}{\lambda}, \frac{\xi_n}{\lambda^2}\right)$$

que é o scaling natural para o parabolóide $\mathbb{P}$, pois $Q'(\xi'/\lambda) = Q'(\xi')/\lambda^2 = \xi_n/\lambda^2$. Fazendo a mudança de variável $\xi' \mapsto \xi'/\lambda$, relembrando $\widehat{f}_\lambda(\xi', \xi_n) = \lambda^{-(n-1)} \lambda^{-2} \widehat{f}(\xi'/\lambda, \xi_n/\lambda^2)$ e usando a desigualdade (5.35), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{|\xi'| \leq \lambda} |\widehat{f}(\xi', Q(\xi'))|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{|\xi'| \leq 1} |\widehat{f}(\lambda\xi', Q(\lambda\xi'))|^2 d(\lambda\xi') \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{n-1}{2}} \left(\int_{|\xi'| \leq 1} |\widehat{f}(\lambda\xi', \lambda^2 Q(\xi'))|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{n-1}{2}} \left(\int_{|\xi'| \leq 1} |\lambda^{-(n-1)-2} \widehat{f}(\lambda^{-1}\xi', \lambda^{-2}\xi_n)|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \lambda^{\frac{n-1}{2}-n-1} \|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \lambda^{\frac{n-1}{2}-n-1+\frac{n-1}{p}+\frac{2}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

para a desigualdade acima ser uniforme em λ precisamos que o expoente

$$\frac{n-1}{2} - n - 1 + \frac{n-1}{p} + \frac{2}{p} = 0,$$

isto é, $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$. Portanto, fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\hat{f}(\xi', Q'(\xi'))|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 36 (Strichartz ([STRICHARTZ, 1977](#)) Teorema 1. Caso II). Considere o cone $\mathbb{C}one^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : Q(\xi) = 0\}$, onde Q é uma forma quadrática não degenerada do $\mathbb{R}^n$. Então, para qualquer $\xi \neq 0$, existe uma contante $C_p > 0$, dependendo somente de p , tal que

$$\|\hat{f}\|_{L^2(d\mu)} = \left(\int_{\mathbb{C}one^{n-1}} |\hat{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p \|f\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.36)$$

quando a dimensão $n \geq 3$.

Demonstração. A medida $d\mu$ do cone $\mathbb{C}one^{n-1} \cap D_j$ é definida por

$$d\mu(\xi', \xi_n) = \left| \frac{\partial Q}{\partial \xi_n} \right|^{-1} d\xi' = \frac{d\xi'}{2|\xi'|}.$$

Além disso, este caso tem uma particularidade: o cone é singular na origem! A essência do nosso procedimento é similar ao que fizemos para o paraboloide, porém tomando o devido cuidado para não tocar o ponto problemático $\xi = 0$. Outra diferença importante é que o range do Teorema de Littman [31](#) é diferente, pois o cone possui uma curvatura principal nula. Considere o cone truncado, veja Figura [11](#),

$$\mathbb{C}one_0^{n-1} = \mathbb{C}one^{n-1} \cap D_0,$$

onde D_0 é um anel definido por $D_0 = \{\xi : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$. Como $\mathbb{C}one_0^{n-1}$ é compacto e

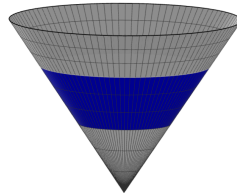


Figura 11 – A parte azul representa o $\mathbb{C}one^2$ do $\mathbb{R}^3$ intersectado com um dos anéis de Littlewood-Paley.

suave, pelo Teorema de Littman [31](#) obtemos a desigualdade

$$\|\hat{f}\|_{L^2(d\mu)} = \left(\int_{\mathbb{C}one_0^{n-1}} |\hat{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.37)$$

para todo $1 \leq p \leq p_n := \frac{2n}{n+2}$. Queremos verificar para qual valor de p esta desigualdade se estende para toda superfície. Considere o seguinte “scaling” natural para o $\mathbb{C}one^{n-1}$,

$$f_\lambda(\xi', \xi_n) = f\left(\frac{\xi'}{\lambda}, \frac{\xi_n}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0$$

e considere o truncamento $\mathbb{C}one_j^{n-1} = \mathbb{C}one^{n-1} \cap D_j$, onde D_j são os anéis de $\mathbb{R}^n$ definidos por $D_j = \{\xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$. Fazendo $\lambda = 2^j$ e usando $d\mu(\lambda\xi', \lambda\xi_n) = \lambda^{n-2}d\mu(\xi', \xi_n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{C}one_j^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{C}one_0^{n-1}} |\widehat{f}(\lambda\xi', \lambda\xi_n)|^2 d\mu(\lambda\xi', \lambda\xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{C}one_0^{n-1}} |\widehat{f}(\lambda\xi', \lambda\xi_n)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{n-2}{2}} \left(\int_{\mathbb{C}one_0^{n-1}} |\lambda^{-(n-1)-1} \widehat{f}\left(\frac{\xi'}{\lambda}, \frac{\xi_n}{\lambda}\right)|^2 d\mu(\xi', \xi_n) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \lambda^{\frac{n-2}{2}-(n-1)-1} \|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \lambda^{\frac{n-2}{2}-n} \lambda^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{5.38}$$

pois $\frac{n-2}{2} - n + \frac{n}{p} = 0$ se, e somente se $p = \frac{2n}{n+2}$. Considere a decomposição de Littlewood-Paley

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j f$$

na variável ξ' . Relembre que todas $\widehat{P_j f}$ são suportadas em anéis $\{\xi' : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$. Substituindo f por $P_j f$ em (5.38), obtemos a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{C}one_j^{n-1}} |\widehat{P_j f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|P_j f\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.39}$$

onde a constante implícita é uniforme em $j \in \mathbb{Z}$. Tomando a soma $\sum_{j \in \mathbb{Z}}$ em (5.39) e notando que $p_n = \frac{2n}{n+2} \leq 2$, pelo Lema 3 e o Lema de Littlewood-Paley 22, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{C}one^{n-1}, d\mu)} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{C}one_j^{n-1}} |\widehat{P_j f}(\xi', \xi_n)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|P_j f\|_{L^{p_n}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_j |P_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p_n}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{p_n}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 14 (Stein (STEIN, 1993), pag. 367). Seja $\phi \in C^2(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\})$ uma função homogênea de grau $k \in \mathbb{R}$. Assuma que **posto** $\text{Hess}_\phi(\xi') = \ell$ para todo $\xi' \neq 0$. Se $\ell > \frac{2n-2}{k}$, então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \frac{d\xi'}{|\xi'|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.40)$$

onde $p = \frac{2n-2+2k}{n-1+2k+2\alpha}$ para $0 \leq \alpha < \frac{n-1}{2}$.

Demonstração. A prova deste corolário é similar a prova do Teorema 36. No entanto, existem pequenas mudanças. Como ϕ é homogênea de grau k e a superfície implícita seja um paraboloide, então o scaling natural deve ser

$$f_\lambda(\xi', \xi_n) = f(\xi'/\lambda, \xi_n/\lambda^k).$$

Restringindo o $\mathbb{R}^{n-1}$ ao anel $D_0 = \{\xi' : \frac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2\}$ obtemos, via Teorema de Littman 31, a desigualdade

$$\left(\int_{D_0} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \frac{d\xi'}{|\xi'|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{D_0} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para $1 \leq p \leq \frac{2\ell+4}{\ell+4}$, pois a condição **posto** $\text{Hess}_\phi = \ell$ é equivalente a quantidade de curvaturas principais não-nulas da superfície descrita pelo gráfico de ϕ . Considere o subconjunto $D_j = \{\xi' : 2^{j-1} \leq |\xi'| \leq 2^{j+1}\}$, logo

$$\begin{aligned} \left(\int_{D_j} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \frac{d\xi'}{|\xi'|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{D_0} |\widehat{f}(\lambda \xi', \lambda^k \phi(\xi'))|^2 \frac{d(\lambda \xi')}{|\lambda \xi'|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{n-1}{2} - \alpha - (n-1) - k} \left(\int_{D_0} |\widehat{f}(\lambda^{-1} \xi', \lambda^{-k} \phi(\xi'))|^2 \frac{d\xi'}{|\xi'|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \lambda^{\frac{n-1}{2} - \alpha - (n-1) - k} \|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \lambda^{\frac{n-1}{2} - \alpha - (n-1) - k + \frac{n-1+k}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A desigualdade obtida acima é independente de $\lambda = 2^j$ apenas quando $p = \frac{2n-2+2k}{n-1+2k+2\alpha}$. O resultado é estendido para todo $\mathbb{R}^{n-1}$ usando a decomposição de Littlewood-Paley assim como fizemos na prova do Teorema 36. A condição sobre α surge para garantir que o valor de p seja adequado no sentido de pertencer ao range do Teorema de Littman. Note que $\alpha = 0$ implica $p > 1$ e $\alpha = \frac{n-1}{2}$ implica em $p = 1$. $\square$

Corolário 15 (Stein (STEIN, 1993) pag. 367). Seja $\phi \in C^2(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\})$ uma função homogênea de grau 1 tal que **posto** $\text{Hess}_\phi(\xi') = \ell$ para $\xi' \neq 0$ e suponha que $\ell \geq 1$. Considere o cone $\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_n = \phi(\xi')\}$ e seja $d\mu(\xi) = d\xi'/|\xi'|$. Então,

$$\left(\int_{\Sigma} |\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{d\mu(\xi)}{|\xi'|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.42)$$

quando $p = \frac{2n}{n+2+2\alpha}$ e $\alpha_0 \leq \alpha < \frac{\ell}{2}$, onde $\alpha_0 = \frac{2n}{2\ell+4} - 1$.

Demonstração. Note que a integral em (5.42) pode ser reescrita por

$$\int_{\Sigma} |\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{d\mu(\xi)}{|\xi'|^{2\alpha}} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \frac{d\xi'}{|\xi'|^{1+2\alpha}}.$$

Seja D_0 o anel de $\mathbb{R}^{n-1}$ definido por $D_0 = \{\xi' : 1 \leq |\xi'| \leq 2\}$, pelo Teorema de Littman 31 obtemos

$$\int_{D_0} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \frac{d\xi'}{|\xi'|^{1+2\alpha}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $1 \leq p \leq \frac{2\ell+4}{\ell+4}$. Procedendo de maneira análoga ao Teorema 36, considere o scaling $f_{2^j}(x) = f(x/2^j)$ e como fizemos para obter a estimativa (5.41), obtemos

$$\left(\int_{D_j} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \frac{d\xi'}{|\xi'|^{1+2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 2^{j(\frac{n-2}{2} - n - \alpha + \frac{n}{p})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C \|f\|_{L^{\frac{2n}{n+2+2\alpha}}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $D_j = \{\xi' : 2^{j-1} \leq |\xi'| \leq 2^{j+1}\}$. A extensão desta estimativa para $\mathbb{R}^{n-1}$ se dá da mesma forma que fizemos no Corolário 14. A condição $\alpha_0 \leq \alpha$ é necessária para garantir que $\frac{2n}{n+2+2\alpha} = p \leq \frac{2\ell+4}{\ell+4}$. Com efeito, note que

$$\frac{2n}{n+2+2\alpha} \leq \frac{2n}{n+\frac{2n}{\ell+2}} = \frac{2n(\ell+2)}{n(\ell+2)+2n} = \frac{2\ell+4}{\ell+4}.$$

Isto é, a condição é necessária para garantir que p pertence ao intervalo obtido no Teorema de Littman 31. Além disso, precisamos que $\alpha < \frac{\ell}{2}$, caso contrário teríamos $p < 1$. $\square$

5.7 Contra-exemplos de Knapp

Esta seção tem como objetivo mostrar que as condições dos Teoremas da restrição de Fourier são ótimas.

5.7.1 Contra-exemplo de Knapp na $\mathbb{S}^{n-1}$

Proposição 24. O expoente $p_n = (2n+2)/(n+3)$ da restrição de Fourier na esfera

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo } 1 \leq p \leq p_n, \quad (5.43)$$

é o expoente ótimo. Isto é, a estimativa de restrição de Fourier $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \mapsto 2)$ é falsa, se $p > 2(n+1)/(n+3)$.

Demonstração. Usando o método TT^* , precisamos mostrar que o expoente $p'_n = (2n+2)/(n-1)$ da restrição de Fourier adjunta

$$\|\widehat{g d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|g\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})},$$

é ótimo. Considere as parametrizações $\alpha_i^{\pm} : B(0, 1/2) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$

$$\alpha_i^{\pm}(x') = (y_1, \dots, \pm \sqrt{1 - |\widehat{x}|^2}, \dots, x_{n-1})$$

onde $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, y_i, \dots, x_{n-1})$. Dado $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ e $\epsilon > 0$, considere a bola $B_\epsilon = B(e_n, \epsilon\sqrt{2})$ fechada da esfera

$$B_\epsilon = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : |x - e_n| \leq \sqrt{2}\epsilon\} = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : 1 - x \cdot e_n \leq \epsilon^2\}$$

pois $|x - e_n|^2 = 2(1 - x \cdot e_n)$. Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que $B_\epsilon \subset \alpha_n^+(B(0, 1/2))$, portanto podemos escrever para $g = \mathcal{X}_{B_\epsilon}$

$$\begin{aligned} \widehat{gd\sigma}(\xi) &= \int_{B_\epsilon} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\sigma(x) = \int_{B(0, 1/2)} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \rho(x')\xi_n)} \sqrt{1 + |\nabla \rho|^2} dx' \\ &= \int_{B(0, 1/2)} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \rho(x')\xi_n)} \frac{1}{\sqrt{1 - |x'|^2}} dx' \\ &= e^{2\pi i \xi_n} \int_{B(0, 1/2)} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + \xi_n(1 - x \cdot e_n))} \frac{1}{\sqrt{1 - |x'|^2}} dx', \end{aligned}$$

onde $x_n = \rho(x') = \sqrt{1 - |x'|^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} |\widehat{gd\sigma}(\xi)| &= \operatorname{Re} \left(e^{-2\pi i \xi_n} \widehat{gd\sigma}(\xi) \right) \\ &= \int_{B(0, 1/2)} \cos [2\pi(x' \cdot \xi' + \xi_n(1 - x \cdot e_n))] \frac{1}{\sqrt{1 - |x'|^2}} dx' \\ &= \int_{B_\epsilon} \cos [2\pi(x' \cdot \xi' + \xi_n(1 - x \cdot e_n))] d\sigma(x), \end{aligned} \quad (5.44)$$

pois $|z| = \operatorname{Re}(e^{-i\theta}z)$. O suporte de $gd\sigma$ esta contido na faixa retangular

$$R'_\epsilon = \{x : |x'| \leq \epsilon\sqrt{2} \quad \text{e} \quad 1 - x \cdot e_n \leq \epsilon^2\}$$

então no retângulo dual $R_\epsilon = \{\xi : |\xi'| \leq \frac{1}{12\sqrt{2}}\epsilon^{-1} \quad \text{e} \quad |\xi_n| \leq \frac{1}{12}\epsilon^{-2}\}$ obtemos

$$|2\pi(x' \cdot \xi' + \xi_n(1 - x \cdot e_n))| \leq \frac{\pi}{3}.$$

Portanto, $|\widehat{gd\sigma}(\xi)| \geq \frac{1}{2}\sigma(B_\epsilon) = C_n\epsilon^{n-1}$. Nosso retângulo R_ϵ tem volume aproximadamente $\epsilon^{-(n-1)}\epsilon^{-2} = \epsilon^{-(n+1)}$, concluímos que

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \gtrsim \epsilon^{n-1} \left(\int_{R_\epsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \gtrsim \epsilon^{n-1} \epsilon^{-\frac{n+1}{p'}}.$$

Comparando com a norma $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ de $g = \mathcal{X}_{B_\epsilon}$ obtemos

$$\epsilon^{n-1} \epsilon^{-\frac{n+1}{p'}} \lesssim \|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \approx \epsilon^{\frac{n-1}{2}},$$

uniforme sobre $\epsilon \in (0, 1)$. Assim, $(n-1) - \frac{n+1}{p'} \geq \frac{n-1}{2}$, isto é, $p' \geq \frac{2n+2}{n-1}$. $\square$

Observação 9. Na prova da Proposição 24, se assumirmos que a estimativa de restrição $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}^*(q' \mapsto p')$ é verdadeira, isto é,

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{S}^{n-1})}$$

concluiremos que $\epsilon^{n-1} \epsilon^{-\frac{n+1}{p'}} \lesssim \epsilon^{\frac{n-1}{q'}}$ para todo $\epsilon \in (0, 1)$. Assim, obtemos a condição $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$.

5.7.2 Contra-exemplo de Knapp em superfícies com com segunda forma fundamental definida positiva

Proposição 25. Seja M uma $(n - 1)$ -dimensional superfície regular de $\mathbb{R}^n$ com codimensão 1 e com curvatura Gaussiana constante e não-nula. Seja $d\mu$ uma medida com suporte em M . Então a estimativa de restrição de Fourier $\mathcal{R}_M(p \mapsto 2)$,

$$\left(\int_M |\widehat{f}(\xi)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.45)$$

é falsa, se $p > 2(n + 1)/(n + 3)$.

Demonstração. Seja $x \in M$ e $\epsilon > 0$. Considere uma região retangular R_ϵ de $\mathbb{R}^n$, centrada no ponto x , cujo um lado tem comprimento ϵ e os outros $(n - 1)$ -lados têm comprimento $\sqrt{\epsilon}$. Rotacione esta região de forma que o lado de comprimento ϵ seja paralelo ao vetor normal a M .

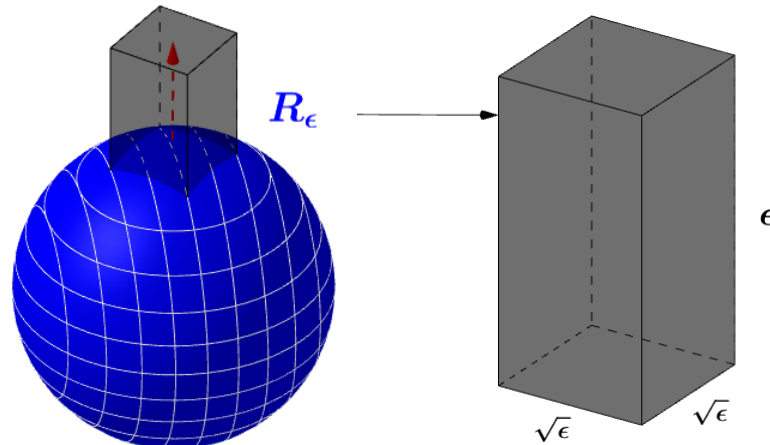


Figura 12 – Retângulo em $\mathbb{R}^3$ intersectando a superfície $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Em branco, as direções principais da superfície. Na figura a direita, a configuração do retângulo R_ϵ . Em vermelho o vetor normal N_x no ponto x que se encontra centralizado na intersecção de $\mathbb{S}^{n-1}$ com o retângulo R_ϵ .

Então, M intersecta R_ϵ num conjunto que é aproximadamente um quadrado contido em $\mathbb{R}^{n-1}$ cujo os lados têm comprimento $\sqrt{\epsilon}$. Considere uma função f tal que $\widehat{f} = \chi_{R_\epsilon}$. Logo

$$\int_M |\widehat{f}(\xi)|^2 d\sigma = \int_{M \cap R_\epsilon} d\sigma = \sigma(M \cap R_\epsilon) = C\epsilon^{\frac{n-1}{2}},$$

quando ϵ é suficientemente pequeno. Por outro lado, ignorando as constantes obtemos pelo Exemplo 19

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\sqrt{\epsilon}x_1)}{x_1} \dots \frac{\text{sen}(\sqrt{\epsilon}x_{n-1})}{x_{n-1}} \frac{\text{sen}(\epsilon x_n)}{x_n}.$$

Relembre que, veja Exemplo 23 no Apêndice A,

$$\int_0^\infty \left| \frac{\text{sen}(ax)}{x} \right|^p dx = ca^{p-1}, \quad a > 0 \text{ e } p > 1.$$

Usando a fórmula acima, temos que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = c\epsilon^{p-1} \cdot \epsilon^{\frac{(n-1)(p-1)}{2}}$. Portanto, se a estimativa de restrição (5.45) for verdadeira, segue que

$$\epsilon^{\frac{n-1}{4}} \lesssim \epsilon^{\frac{p-1}{p}(1+\frac{n-1}{2})} = \epsilon^{\frac{n+1}{2p'}}, \quad (5.46)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$, onde p' é o expoente conjugado de p . Para que a desigualdade (5.46) seja verdadeira para todo $\epsilon \in (0, 1)$, precisamos que

$$\frac{n-1}{4} \geq \frac{n+1}{2p'} \iff p' \geq \frac{2(n+1)}{n-1} \iff p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$$

como desejamos. $\square$

Observação 10. Note que o parabolóide $\mathbb{P}^{n-1}$ se encaixa no Exemplo 25. Além disso, na prova desta proposição, se assumirmos que $\mathcal{R}_M(p \mapsto q)$ é verdadeira, concluiremos que

$$\epsilon^{\frac{n-1}{2q}} \lesssim \epsilon^{\frac{n+1}{2p'}}, \quad (5.47)$$

para todo $\epsilon \in (0, 1)$, isto é, $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$.

5.7.3 Contra-exemplo de Knapp em superfícies com segunda forma fundamental não-negativa

Proposição 26 (Exemplo de Knapp para $\mathbb{C}one^{n-1}$). Seja $\mathbb{C}one^{n-1}$ o cone do $\mathbb{R}^n$ e seja $d\mu$ qualquer medida não-nula sobre $\mathbb{C}one^{n-1}$. Então, a restrição de Fourier $\mathcal{R}_{\mathbb{C}one^{n-1}}(p \mapsto 2)$ dada por

$$\left(\int_{\mathbb{C}one^{n-1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.48)$$

é falsa, a menos que $p \leq 2n/(n+2)$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{C}one^{n-1}$. Considere a região retangular $R_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ centrado em x com as características:

- Os lados paralelos ao vetor normal N_x de $\mathbb{C}one^{n-1}$ no ponto x medem ϵ^2 ;
- Os lados paralelos a direção em que o cone tem curvatura principal nula medem 1;
- Todos os outros lados medem ϵ .

Observe que as arestas que não são paralelos a direção em que o cone tem curvatura principal nula sofrem distorção em suas medidas quando intersectadas com o cone, enquanto as arestas paralelas a esta direção, permanecem com suas medidas inalteradas, visto que o cone é um plano nesta direção. Logo, denotando $\mathbb{C}one^{n-1} \cap R_\epsilon = B_\epsilon$, temos

$$C\epsilon^{\frac{n-2}{2}} \lesssim (\mu(B_\epsilon))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{B_\epsilon} d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{C}one^{n-1}} |\chi_{R_\epsilon}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

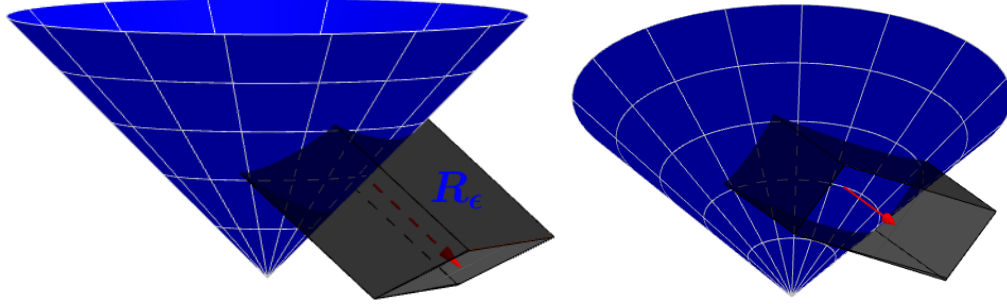


Figura 13 – Retângulo em $\mathbb{R}^3$ intersectando o Cone^{n-1} . Em branco as direções principais da superfície, note que as linhas em “vertical” possuem curvatura nula. Na figura à direita, em vermelho, o vetor normal N_x no ponto x no centro da interseção do Cone^{n-1} e R_ϵ .

Além disso, sabemos que modulo constantes,

$$f(x) = (\chi_{R_\epsilon})^\vee(x) = \frac{\text{sen}(\epsilon x_1)}{x_1} \dots \frac{\text{sen}(\epsilon x_{n-2})}{x_{n-2}} \frac{\text{sen}(1x_{n-1})}{x_{n-1}} \frac{\text{sen}(\epsilon^2 x_n)}{x_n}.$$

Daí, temos que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = c\epsilon^{2(p-1)}\epsilon^{(n-2)(p-1)}$. Note que

$$\frac{2p-2+(n-2)(p-1)}{p} = \frac{p-1}{p}n = \frac{n}{p'}.$$

Assumindo que (5.48) é válido obtemos

$$\epsilon^{\frac{n-2}{2}} \lesssim \epsilon^{\frac{2p-2+(n-2)(p-1)}{p}},$$

e escolhendo $0 < \epsilon < 1$ segue que

$$\frac{n-2}{2} \geq \frac{n}{p'} \iff \frac{1}{p'} \leq \frac{n-2}{2n} \iff p \leq \frac{2n}{n-2}.$$

□

Observação 11. O argumento do cone pode ser generalizado para q não necessariamente igual a 2 e outras superfícies com $\ell \neq 0$ curvaturas principais não-nulas.

(i) Se assumirmos

$$\left(\int_{\text{Cone}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

é válido, então, procedendo de maneira análoga, obtemos a condição necessária

$$\frac{n-2}{q} \geq \frac{n}{p'},$$

isto é

$$1 \leq q \leq \frac{n-2}{n}p'.$$

(ii) Se M é uma superfície com $\ell \neq 0$ curvaturas principais não-nulas, podemos proceder de maneira similar. Escolhendo todos os lados paralelos a direções em que a curvatura principal é nula medindo 1. Neste caso, vamos obter

$$\frac{\ell}{q} \geq \frac{2+\ell}{p'}.$$

Quando $q = 2$, obtemos a condição esperada $p \leq \frac{2\ell+4}{\ell+4}$ e $q \leq \frac{\ell}{\ell+2}p'$.

ESTIMATIVAS DE STRICHARTZ

Neste capítulo estamos interessados em obter estimativas lineares e bilineares de Strichartz para uma família de operadores de evolução $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de natureza dispersiva. Como veremos, a principal elemento nesta abordagem é conectar estes operadores de evolução a um problema de restrição de Fourier em superfícies adequadas. Esta conexão ficará clara, quando reduzirmos os grupos de Schrödinger $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e o grupo da onda $\{\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ a um problema de restrição de Fourier no *paraboloide* e no *cone de luz*, respectivamente.

No capítulo anterior vimos que o espaço de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^{n+1})$ pode ser visto como

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_{L^q}^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

o que nos motiva a definir

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} := \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (6.1)$$

quando a função $u(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável sobre o espaço de medida $(X, d\mu)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado e $1 \leq p \leq \infty$. Adotaremos a notação

$$L_t^p L_x^q(\mathbb{R}^{n+1}) = L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^n)),$$

para todo $1 \leq p, q \leq \infty$.

Seja $U(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ um operador linear tal que

- Para todo $t \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\|U(t)f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \quad (\text{Energia})$$

e para algum $\sigma \geq \frac{1}{2}$, temos a seguinte estimativa de decaimento:

- Para todo $t \in \mathbb{R}$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\|U(t)g\|_{L^\infty} \lesssim |t|^{-\sigma} \|g\|_{L^1}. \quad (\text{Dispersão})$$

Se $U(t)U(s) = U(t+s)$ e $U(0) = I$, dizemos que a família de operadores $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo de evolução dispersivo com relação a operação composição. No decorrer deste capítulo, veremos que o valor σ está associado ao número de curvaturas principais da superfície característica deste grupo, portanto é natural assumirmos a condição $\sigma \geq 1/2$.

Lema 23. Suponha que o grupo de evolução $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz (Energia) e (Dispersão). Então

$$\|U(t)f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C|t|^{-\sigma\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.2)$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq 2$ e $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

Demonstração. Para interpolar as desigualdades (Energia) e (Dispersão) considere

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}.$$

Então $\theta = 2/p' \in (0, 1)$, pois $1 \leq p \leq 2$. Para esta escolha de θ , temos

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} \iff 1-\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}.$$

Logo, pelo Teorema de Riesz-Thorin com $M_0 = C|t|^{-\sigma}$ e $M_1 = C$ obtemos o resultado desejado. $\square$

As duas propriedades do grupo de evolução dispersivo $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ nos permite explicitar o grupo adjunto $\{U^*(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ em L^2 e a composição $U(t)U^*(s)$. De fato, note que

$$I = U(0) = U(t)U(-t) \implies U(-t) = (U(t))^{-1},$$

isto nos motiva a definir o operador adjunto de $U(t)$ por

$$U^*(t) = U(-t).$$

Lema 24 (Dualidade para operadores de evolução). Assuma que $U(t)$ satisfaz as estimativas de (Energia) e (Dispersão). São equivalentes:

$$\|U(t)f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2}, \quad (6.3)$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(s)h(\cdot, s)ds \right\|_{L_x^2} \lesssim \|h\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \quad (6.4)$$

e

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(t)U^*(s)h(\cdot, s)ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|h\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}}. \quad (6.5)$$

Além disso, temos

$$\left\| \int_{s < t} U(t)U^*(s)h(\cdot, s)ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|h\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \quad (6.6)$$

onde (p, q) e $(\tilde{p}, \tilde{q})$ são pares sharp σ -admissível, veja Definição 1.

Demonstração. Utilizando o Teorema de Fubini, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} U(t) f(x) g(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} U(t) g(x, t) dt \right) dx.$$

Sendo assim, usando dualidade,

$$\|g(\cdot, t)\|_{L_t^p L_x^q} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x, t) w(x, t) dx dt \right| : \|w(\cdot, t)\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} = 1 \right\}.$$

Agora, procedendo de maneira análoga ao Lema 20 com o uso da desigualdade de Hölder, obtemos uma equivalência entre (6.3) e (6.4). Notando que $\|f\|_{L_x^2}^2 = \langle f, f \rangle_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(x)} dx$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(s) h(\cdot, s) ds \right\|_{L_x^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} U^*(s) h(\cdot, s) ds \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} U^*(t) h(\cdot, t) dt \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} h(x, t) \left(\int_{\mathbb{R}} U(t-s) \overline{h(\cdot, t)} dt \right) ds dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} h(x, t) \left(\int_{\mathbb{R}} U(t) U^*(s) \overline{h(\cdot, t)} dt \right) ds dx. \end{aligned}$$

Recorrendo novamente ao uso da dualidade e a desigualdade de Hölder, obtemos uma equivalência entre (6.4) e (6.5).

Nosso próximo passo é provar (6.5) para obter (6.6). Pela desigualdade de Minkowski (2.9) e o Lema 23, respectivamente, obtemos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(t) U^*(s) h(\cdot, s) ds \right\|_{L_x^q} \leq \int_{\mathbb{R}} \|U(t-s) h(\cdot, s)\|_{L_x^q} ds \lesssim \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\sigma(1/q'-1/q)} \|h(\cdot, s)\|_{L_x^{q'}} ds. \quad (6.7)$$

Defina $\alpha = \sigma(1/q' - 1/q)$. Note que $0 < \alpha < 1$, uma vez que $q \geq 2$. A desigualdade (6.7) e o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev 16 implicam

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|U(t) U^*(s) h(\cdot, s)\|_{L_x^q}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\alpha} \|h(\cdot, s)\|_{L_x^{q'}} ds \right\|_{L_t^p} \lesssim \|h\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}},$$

com $0 < 1 - \alpha < 1$ e $1/p' = 1/p + (1 - \alpha)$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} &= \frac{1}{p} + 1 - \frac{\sigma}{q'} + \frac{\sigma}{q} \iff \frac{1}{p'} + \frac{\sigma}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} + 1 = \frac{\sigma}{2} + 1 \\ &\iff \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\sigma}{\tilde{q}} + \frac{\sigma}{q'} = \sigma \\ &\iff \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{p'} + \frac{\sigma}{\tilde{q}} + \frac{\sigma}{q'} = 1 + \sigma \\ &\iff \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{\sigma}{\tilde{q}} + \frac{\sigma}{2} + 1 = \sigma + 1 \\ &\iff \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{\sigma}{\tilde{q}} = \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente (6.6) é uma consequência de (6.5) em conjunto com o resultado obtido por Christ-Kiselev (CHRIST; KISELEV, 2001, Teorema 1.2.). $\square$

Na última seção deste capítulo, trataremos do caso críticos para estimativas de Strichartz. Faremos uso de operadores bilineares, mas procederemos de maneira análoga ao caso em que não atingimos o ponto crítico. Portanto, o próximo resultado será crucial para que possamos utilizar o Lema 24.

Lema 25. As desigualdades (6.3), (6.4) e (6.5) são válidas se, e somente se, a forma bilinear $T : L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle U^*(t)f(t), U^*(s)g(s) \rangle ds dt,$$

satisfaz $|T(f, g)| \lesssim \|f\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \|g\|_{L_t^p L_x^q}$.

Demonstração. Assuma que a desigualdade (6.4) é válida. Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e o Teorema de Fubini, temos

$$|T(f, g)| \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(t)f(t) dt \right\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(s)g(s) ds \right\|_{L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \|g\|_{L_t^p L_x^q}.$$

A recíproca é trivial. □

6.1 Invariância por “scaling”

Consideremos primeiro o caso do problema de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (6.8)$$

Seja $u(x, t)$ uma solução de (6.8), queremos encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $u_\lambda(x, t) = u(x/\lambda^a, t/\lambda^b)$ seja uma solução do problema (6.8) com dado inicial $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$.

Note que $i(u_t)_\lambda = \frac{i}{\lambda^b} u_t$ e $\Delta_x u_\lambda = \frac{1}{\lambda^{2a}} \Delta_x u$. Substituindo no problema (6.8), obtemos que u_λ e f_λ satisfazem o problema de Schrödinger se, e somente se, $b = 2a$. Tomando $a = 1$, obtemos o scaling

$$u_\lambda(x, t) = u(x/\lambda, t/\lambda^2). \quad (6.9)$$

Na próxima seção queremos obter estimativas lineares do tipo,

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (6.10)$$

para $p, q \geq 1$ adequados. Queremos que a estimativa (6.10) seja invariante pelo scaling (6.9). Isto é, $\|u_\lambda\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ seja verificada para todo $\lambda > 0$. No entanto, sabemos que $\|f_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}$ e $\|u_\lambda\|_{L_t^p L_x^q} = \lambda^{\frac{n}{q} + \frac{2}{p}} \|u\|_{L_t^p L_x^q}$. Logo, a estimativa (6.10) é invariante pelo scaling (6.9) se, e somente se $\lambda^{\frac{n}{q} + \frac{2}{p}} = \lambda^{\frac{n}{2}}$. Portanto, devemos ter a igualdade

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}$$

para garantir invariância pelo scaling (6.9) da estimativa linear (6.10).

No caso da equação da onda, veremos que o scaling escolhido deve ser diferente. Considere a equação da onda $u_{tt} - \Delta_x u = 0$ e seja $u(x, t)$ uma solução de desta equação. Defina $u_\lambda(x, t) = u(x/\lambda^a, t/\lambda^b)$. Note que $(u_{tt})_\lambda = \frac{1}{\lambda^{2b}} u_{tt}$ e $\Delta u_\lambda = \frac{1}{\lambda^{2a}} \Delta u$. Para que estas funções satisfaçam a equação da onda é necessário e suficiente que $2a = 2b$. Tomando $a = b = 1$ obtemos o scaling $u_\lambda(x, t) = u(x/\lambda, t/\lambda)$.

Dizemos que um par (p, q) é *Schrödinger-admissível*, se $n \geq 1$ e (p, q) é sharp $\frac{n}{2}$ -admissível e dizemos que um par (p, q) é *onda-admissível*, se $n \geq 2$ e (p, q) é $\frac{n-1}{2}$ -admissível (ver Definição 1). Em particular, $P = (2, \frac{2n}{n-2})$ é sharp $\frac{n}{2}$ -admissível se $n > 2$ (veja Figura 14) e $P = (2, \frac{2n-2}{n-3})$ é sharp $\frac{n-1}{2}$ -admissível (veja Figura 15).

Os gráficos das regiões de pontos σ -admissíveis para a equação de Schrödinger e a equação da onda são as seguintes. Tratemos primeiramente o caso da região de Schrödinger. Neste caso, o “end-point” é dado por $P_{Sch} = (2, \frac{2n}{n-2})$. Quando $q = \infty$, obtemos $\frac{1}{p} \leq \frac{n}{4}$ se $p \geq 2$. Quando $p = \infty$, obtemos $q \geq 2$.

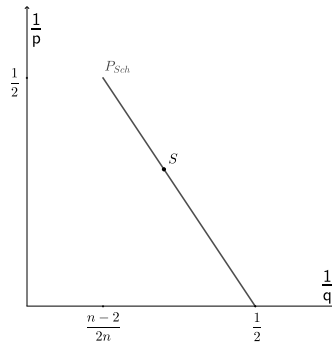


Figura 14 – O segmento de reta fechado é Schrödinger admissível. O ponto $S = (\frac{2n+4}{n}, \frac{2n+4}{n})$ é a estimativa pioneira de Strichartz obtida em (STRICHARTZ, 1977).

No caso da onda, o “end-point” é $P_{onda} = (2, \frac{2n-2}{n-3})$. Quando $q = \infty$, obtemos $\frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{4}$, se $p \geq 2$. Quando $p = \infty$, obtemos $q \geq 2$.

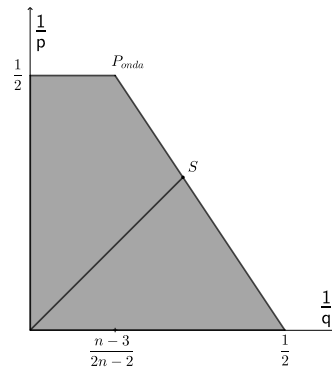


Figura 15 – A região fechada é wave admissível. O ponto $S = (\frac{2n+2}{n-1}, \frac{2n+2}{n-1})$ é a estimativa pioneira de Strichartz obtida em (STRICHARTZ, 1977), que provamos no Corolário 16.

6.2 Estimativas de Strichartz para equação de Schrödinger

Vamos considerar o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger em $\mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u = h(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (6.11)$$

Aqui t representa o tempo e $f = f(\cdot, 0)$ nos dá valores iniciais da solução. Nosso objetivo é obter uma estimativa de Strichartz para a solução do problema (6.11). O primeiro passo, é esboçar a solução do problema.

Aplicando a transformada de Fourier no espaço, obtemos o problema auxiliar de Cauchy

$$\begin{cases} i\hat{u}_t - 4\pi^2|\xi|^2\hat{u} = \hat{h}(\xi, t), \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

para uma equação diferencial ordinária dependendo do parâmetro $\xi \in \mathbb{R}^n$. Para $\xi \neq 0$, via método de *variação de parâmetros* de EDOs, obtemos a solução clássica para o problema de Cauchy é da forma

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{4\pi^2 i t |\xi|^2} \hat{f} + \int_0^t e^{4\pi^2 i (t-s) |\xi|^2} \hat{h}(\xi, s) ds.$$

Se $f, h(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar a inversa da transformada de Fourier para obter a solução clássica da equação de Schrödinger não-homogênea

$$u(x, t) = S(t)f(x) + \int_0^t S(t-s)h(x, s)ds, \quad (6.12)$$

onde $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ denota o grupo de Schrödinger e é definido por

$$S(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{4\pi^2 i t |\xi|^2} \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x \cdot \xi + 2\pi t |\xi|^2)} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Vamos reduzir este grupo a um problema de restrição na superfície característica $\mathbb{P}^n$ dada pelo *parabolóide*

$$\mathbb{P}^n = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau = 2\pi|\xi|^2\}.$$

Considere a medida canônica $d\mu_{\mathbb{P}^n}(\xi, \tau)$ sobre $\mathbb{P}^n$,

$$d\mu(\xi, \tau) = 2\pi\delta_0(\tau - 2\pi|\xi|^2)d\xi d\tau.$$

Pontanto, podemos reescrever

$$\begin{aligned} (S(t)f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x \cdot \xi + 2\pi t |\xi|^2)} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\tau - 2\pi|\xi|^2) e^{2\pi i (x \cdot \xi + 2\pi t |\xi|^2)} \hat{f}(\xi) d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{P}^n} e^{2\pi i (x \cdot \xi + t\tau)} \hat{f}(\xi) d\mu(\xi, \tau) \\ &= (\hat{f}d\mu)(x, t). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Vamos mostrar que o grupo de Schrödinger $\{S(t)\}$ satisfaz as estimativas ([Energia](#)) e ([Dispersão](#)). A primeira segue diretamente do Teorema de Plancherel e para mostrar a segunda comece escrevendo

$$S(t)f(x) = (\widehat{f}d\mu)^\vee(x, t) = (f * \check{d}\mu)(x, t).$$

Portanto, pelo Teorema [29](#), obtemos o decaimento

$$\|(\widehat{f}d\mu)^\vee\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_x \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi d\mu}(-(x-y), -t)| |f(x)| dx \lesssim |t|^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Obtida as estimativas de energia e dispersão, podemos aplicar o Teorema [31](#) no paraboloide truncado $\mathbb{P}_0^n$ e estimar

$$\|(\widehat{f}d\mu)^\vee\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{L^2(\varphi d\mu)},$$

quando $q' = \frac{2n+4}{n} = 2 + \frac{4}{n}$. Consequentemente, pela versão dual do Teorema [35](#), obtemos

$$\|u\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.14)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade (6.14) é verdadeira para todo $f \in L^2$. Este foi o resultado obtido por Strichartz ([STRICHARTZ, 1977](#), Corolário 1)).

No próximo resultado vamos supor os espaços de Lebesgue com relação tempo $L_t^p(\mathbb{R} \rightarrow X)$ e espaço $X = L_x^q(\mathbb{R}^n)$ não têm os mesmos expoentes, mas que o par (p, q) seja Schrödinger admissível.

Teorema 37. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u(x, t)$ a solução de (6.11). Se (p, q) e (a, b) são Schrödinger admissíveis, então existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L^2} + \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}},$$

para todo $2 < a, p < \infty$. Em particular, quando $p = q$ e $a' = b'$, obtemos

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{L^2} + \|h\|_{L^{a'}(\mathbb{R}^{n+1})}$$

para $q = 2(n+2)/n$ e $a' = 2(n+2)/(n+4)$, como obtido por ([STRICHARTZ, 1977](#), Corolário 1).

Demonstração.

Caso homogêneo: Seja $S(t)$ o grupo do Schrödinger, queremos mostrar que

$$\|S(t)f\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

para todo par (p, q) Schrödinger admissível tal que $p > 2$. Pelo comentário que fizemos acima, basta reduzir o problema ao paraboloide truncado $\mathbb{P}_0^n$,

$$S(t)f(x) = (\widehat{f}d\mu)^\vee(x, t).$$

Portanto, o operador $S(t)$ satisfaz as hipóteses do Lema 24 sobre este paraboloide truncado $\mathbb{P}_0^n$ e podemos escolher uma das três desigualdades deste Lema e obter o resultado desejado. Notando que $S(t)S^*(s)h = S(t-s)h$, pelo Lema 23 com $\sigma = n/2$ obtemos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(t)S^*(s)h(s)ds \right\|_{L_x^q} \leq C \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q}\right)} \|h(s)\|_{L_x^{q'}} ds.$$

Para aplicar o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev 16 (na variável s), precisaremos que

$$\begin{cases} 0 < \alpha(n) = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right) < 1 & (a) \\ \frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{p'} + \alpha(n). & (b) \end{cases}$$

Note que (b) é verdade se, e somente se

$$\frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{p'} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right) \iff \frac{1}{p} + 1 = 1 - \frac{1}{p} + \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{q} \right) \iff \frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}.$$

Além disso, a restrição (a) é verificada se, e somente se $p > 2$. Portanto,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(t)S^*(s)h(s)ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|h\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}, \quad (6.15)$$

ou equivalentemente, veja o Lema 24, podemos escrever

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} = \|Sf\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

como queríamos demonstrar.

Caso não homogêneo: Suponha que $f = 0$, então a solução do problema (6.11) é descrita por

$$u(x, t) = \int_0^t S(t-s)h(x, s)ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi + 2\pi(t-s)|\xi|^2)} \widehat{h}(\xi, s) d\xi ds, \quad (6.16)$$

para todo $h(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Precisaremos provar as estimativas

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C_0 \|h\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}, \\ (ii) \quad & \|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C_1 \|h\|_{L_t^1 L_x^2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

A prova de (i) é análoga a prova de (6.15). De fato, usando a desigualdade de Minkowski (2.9) e o Lema 23 obtemos

$$\|u\|_{L_x^q} \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|S(t-s)h(s)\|_{L_x^q} ds \lesssim \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q}\right)} \|h(s)\|_{L_x^{q'}} ds,$$

usando o Teorema de integração fracionária obtemos a desigualdade desejada. Para provar o item (ii), basta usarmos a desigualdade (6.3) do Lema 24 para estimar

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|S(t-s)h(s)\|_{L_t^p L_x^q} ds \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|h(s)\|_{L_x^2} ds = \|h\|_{L_t^1 L_x^2}.$$

Interpolando (i) e (ii), tem-se

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}},$$

para quaisquer pares (p, q) e (a, b) Schrödinger admissíveis. De fato, note que

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = (1 - \theta) \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) + \theta \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right).$$

para todo $0 < \theta < 1$. Nos resta garantir que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\left(\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}\right) = (1 - \theta) \left(\frac{1}{p'}, \frac{1}{q'}\right) + \theta \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right). \quad (6.18)$$

Para isto, primeiro note que

$$\frac{1}{a'} = \frac{1 - \theta}{p'} + \frac{\theta}{1} \iff \theta(p' - 1) = \frac{p'}{a'} - 1 \iff \theta = \frac{p' - a'}{a'} \frac{1}{p' - 1} = \frac{1}{a'} \frac{p' - a'}{p' - 1}.$$

Então $\theta > 0$, se $p' > a'$. E, além disso, temos também que

$$\theta < 1 \iff \frac{p' - a'}{p' - 1} < a' \iff p' < a' p' \iff a' > 1.$$

A hipótese $p > 2$ implica $1 < a' < p' < 2$, isto é, $a > 2$. Analogamente,

$$\frac{1}{b'} = \frac{1 - \theta}{q'} + \frac{\theta}{2} \iff \theta = \frac{q' - b' \cdot 2}{q' - 2} \frac{1}{b'}.$$

Então, $\theta > 0$ quando $q' > b'$ e $q' > 2$. Por outro lado,

$$\theta < 1 \iff \frac{q' - b'}{q' - 2} < \frac{b'}{2} \iff q' < \frac{b'}{2} q' \iff b' > 2.$$

Assim, $2 < b' < q'$ e concluímos que $b < 2$ e $q < 2$.

Para garantir que $\theta \in (0, 1)$ satisfaz (6.18) simultaneamente em cada coordenada, primeiro observe que o par (p, q) ser sharp $\frac{n}{2}$ -admissível ($2/p + n/q = n/2$) é equivalente a $\frac{2}{p'} + \frac{n}{q'} = \frac{n+2}{2}$. Usaremos esta equivalência para garantir a existência de $\theta \in (0, 1)$ satisfazendo (6.18). De fato, assumindo que (p, q) é sharp $\frac{n}{2}$ -admissível, então a equação (6.18) é verdadeira se, e somente se

$$\begin{aligned} \frac{2}{a'} + \frac{n}{b'} &= (1 - \theta) \left(\frac{2}{p'} + \frac{n}{q'}\right) + 2\theta + \frac{n\theta}{2} \\ &= (1 - \theta) \left(\frac{2}{p'} + \frac{n}{q'}\right) + \theta \left(\frac{n+4}{2}\right) \\ &= (1 - \theta) \left(\frac{n+4}{2}\right) + \theta \left(\frac{n+4}{2}\right) \\ &= \frac{n+4}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, precisamos que o par (a, b) também seja sharp $\frac{n}{2}$ -admissível. Como isto é uma hipótese de nosso Teorema, podemos utilizar o Teorema de Riesz-Thorin para obter a estimativa

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}},$$

como queríamos demonstrar. □

6.3 Estimativas de Strichartz para equação da onda

Nesta seção utilizaremos o espaço de **Sobolev homogêneo** $\dot{H}^s$, definido pelo espaço das distribuições temperadas f tais que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Note que usando o scaling $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$, a norma de $\dot{H}^s$ da função f_λ satisfaz

$$\|f_\lambda\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{\frac{n}{2}-s} \|f\|_{\dot{H}^s}.$$

Se substituirmos a norma $\|\cdot\|_{L^2}$ pela norma $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ na desigualdade (6.10), então usando o scaling da equação de onda, temos que

$$\|u_\lambda\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}$$

é invariante pelo scaling natural da onda se, e somente se,

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - s.$$

Nosso objetivo é obter estimativas em $L_t^p L_x^q$ para a solução do problema da onda,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = h & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (u(x, 0), u_t(x, 0)) = (f, g) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (6.19)$$

quando $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para isto, vamos reescrever a problema (6.19) na forma integral com fizemos para a equação de Schrödinger. Passando a transformada de Fourier $\mathcal{F}_x$ em (6.19), obtemos uma

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} + 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u} = \widehat{h}(\xi, t), \\ \widehat{u}_t(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi), \quad \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \end{cases} \quad (6.20)$$

equação diferencial ordinária na frequência ξ . Portanto, a solução geral é dada por

$$\widehat{u}(\xi, t) = c_1(\xi) e^{-2\pi i t |\xi|} + c_2(\xi) e^{2\pi i t |\xi|},$$

quando $h = 0$. Usando as condições iniciais do problema, obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1(\xi) + c_2(\xi) = \widehat{f}(\xi) \\ -2\pi i |\xi| c_1(\xi) + 2\pi i |\xi| c_2(\xi) = \widehat{g}(\xi). \end{cases}$$

Explicitando os valores de c_1 e c_2 , a solução do problema homogêneo é dada por

$$\widehat{u}(\xi, t) = \cos(2\pi |\xi| t) \widehat{f}(\xi) + \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \widehat{g}(\xi).$$

para todo $\xi \neq 0$. Novamente, via método de *variação de parâmetros* de EDOs, podemos escrever

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos(2\pi|\xi|t)\hat{f} + \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\hat{g} + \int_0^t \frac{\sin((t-s)2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}\hat{h}(s)ds, \quad (6.21)$$

sempre que $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tomando a inversa da transformada de Fourier em (6.21), obtemos a fórmula integral para a equação o problema da onda não-homogêneo

$$u(x, t) = \dot{\omega}(t)f(x) + \omega(t)g(x) + \int_0^t \omega(t-s)h(x, s)ds, \quad (6.22)$$

onde o grupo da onda $\{\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é definido por

$$(\omega(t)g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \hat{g}(\xi) d\xi$$

e o grupo $\{\dot{\omega}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é definido por

$$(\dot{\omega}(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \cos(2\pi|\xi|t) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Podemos re-interpretar o operador $\omega(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\omega(t)g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i t|\xi|} - e^{-2\pi i t|\xi|}}{4\pi i |\xi|} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi + t|\xi|)} \hat{g}(\xi) \frac{d\xi}{2|\xi|} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi - t|\xi|)} \hat{g}(\xi) \frac{d\xi}{2|\xi|} \end{aligned} \quad (6.23)$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} (\dot{\omega}(t)f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i t|\xi|} + e^{-2\pi i t|\xi|}}{2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \sum_{\pm} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} |\widehat{\nabla f}(\xi)| \frac{d\xi}{2|\xi|}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

O *cone de luz* $\Sigma = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\tau| = |\xi|\}$ não é uma superfície compacta e não é regular, no entanto $\Sigma_0 = \Sigma \cap D_0$ é compacta e suave. Portanto, considerando a medida canônica $d\mu_0 = \psi_0 d\mu_\Sigma$ (veja Exemplo 22 no Apêndice)

$$d\mu_\Sigma(\xi, \tau) = \delta(\tau^2 - |\xi|^2) \frac{d\xi}{2|\xi|}$$

podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} \psi_0(\xi) \hat{g}(\xi) \frac{d\xi}{2|\xi|} = \int_{\Sigma} e^{2\pi i(x \cdot \xi + t\tau)} \psi_0(\xi) \hat{g}(\xi) d\mu_\Sigma(\xi, \tau) = (\psi_0(\xi) \hat{g} d\mu_\Sigma)^\vee(x, t),$$

ou seja, como fizemos para o grupo $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, após uma localização reduzimos os grupos $\{\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\dot{\omega}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ a um problema *restrição de Fourier* no cone Σ_0 , a saber,

$$(\omega(t)\psi_0^\vee g)(x) = C(\hat{g} d\mu_0)^\vee(x, t) \quad (6.25)$$

e

$$(\dot{\omega}(t)\psi_0^\vee f)(x) = (|\xi| \hat{f} d\mu_0)^\vee(x, t), \quad (6.26)$$

onde $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é a partição da unidade de Littlewood-Paley obtida no Lema 21. Usando o Teorema 30, a transformada de Fourier da medida $d\mu_0$ satisfaz o decaimento

$$|\widehat{d\mu_0}(-x, -t)| \lesssim |(x, t)|^{-\frac{n-1}{2}} \lesssim |t|^{-\frac{n-1}{2}},$$

pois o cone Σ tem $(n-1)$ -curvaturas principais não-nulas. Consequentemente, os grupos $\{\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\dot{\omega}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfazem a estimativa de (Dispersão) em Σ_0 . Para obter as estimativas de (Energia) em Σ_0 , basta observar

$$\|\dot{\omega}(t)\psi_0^\vee f\|_{L_x^2} = \|\cos(2\pi|\xi|)\psi_0 \widehat{f}\|_{L_x^2} \lesssim \|\widehat{f}\|_{L_x^2} = \|f\|_{L_x^2}$$

e

$$\|\omega(t)\psi_0^\vee g\|_{L_x^2} = \|\sin(2\pi|\xi|)|\xi|^{-1}\psi_0 \widehat{g}\|_{L_x^2} \lesssim \|\widehat{g}\|_{L_x^2} = \|g\|_{L_x^2}.$$

Não há nada de especial em Σ_0 (além do fato de ser compacto e regular), isto é, poderíamos escolher qualquer outro cone truncado $\Sigma_j = \Sigma \cap D_j$. Para isto, basta utilizar a partição de Littlewood-Paley ψ_j e definir a medida

$$d\mu_j(\xi, \tau) = \psi_j(\xi) d\mu(\xi, \tau)$$

sobre a seção Σ_j do cone Σ . Com estas observações obtemos o seguinte corolário.

Corolário 16. Seja $u(\cdot, t) = \dot{\omega}(t)f + \omega(t)g$ solução do problema (6.19) homogêneo com dados iniciais $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\|u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{1/2}} + \|g\|_{\dot{H}^{-1/2}},$$

com $p' = \frac{2n+2}{n-1}$, para todo $n \geq 2$.

Demonstração. Esta estimativa é somente uma releitura da versão adjunta do Teorema 36 para a equação da onda. Como vimos acima, basta observar que

$$\omega_\pm(t)\psi_j^\vee g = C(\widehat{g}d\mu_j)^\vee \quad \text{e} \quad \dot{\omega}_\pm(t)\psi_j^\vee f = (|\xi|\widehat{f}d\mu_j)^\vee, \quad (6.27)$$

e aplicar a versão adjunta do Teorema 36 em $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Strichartz (STRICHARTZ, 1977, Corolário 2) obteve o Corolário 16 com adição da parte não-homogênea da equação da onda. Mais precisamente, ele provou a seguinte estimativa

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{1/2}} + \|g\|_{\dot{H}^{-1/2}} + \|h\|_{L^p}, \quad (6.28)$$

onde $q = \frac{2(n+1)}{n-1}$ e $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$. Apresentaremos um resultado que generaliza (6.28) para índices diferentes no espaço e tempo. Provaremos a seguinte estimativa

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} + \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}}, \quad (6.29)$$

quando os pares (p, q) e (a, b) são onda-admissíveis e satisfazem a condição de “gap”

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \gamma = \frac{1}{a'} + \frac{n}{b'} - 2.$$

Em particular, se $p = q$ e $a' = b'$ então

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} + \|h\|_{L^{a'}(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad (6.30)$$

onde $q = 2(n+1)/(n-2\gamma)$ e $a' = 2(n+1)/(n+4-2\gamma)$, com $0 \leq \gamma < n/2$ e $n \geq 2$. Esta estimativa está contida em (STRICHARTZ, 1977, Observação, pag. 713).

Para obter estimativas de Strichartz no espaço-tempo com $p \neq q$ para a equação da onda, precisaremos localizar o operador da onda, poi, neste caso, obtemos as estimativas de dispersão e energia. No entanto, é necessário buscar resultados que nos proporcione esta possibilidade. O próximo Lema é a versão da desigualdade de Littlewood-Paley com normas mistas.

Lema 26. Seja $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ uma partição da unidade de Littlewood-Paley e defina o operador de Littlewood-Paley

$$G_j(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \psi_j(\xi) \widehat{G}(t, \xi) d\xi,$$

onde $\widehat{G}(t, \xi)$ é a transformada de Fourier de $G(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para cada t fixado. Então

$$\|G\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}} \lesssim \sum_j \|G_j\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}}, \quad \text{se } 2 \leq q_1 < \infty \text{ e } 2 \leq p_1 \leq \infty \quad (6.31)$$

e

$$\sum_j \|G_j\|_{L_t^{p_2} L_x^{q_2}} \lesssim \|G\|_{L_t^{p_2} L_x^{q_2}}, \quad \text{se } 1 < q_2 \leq 2 \text{ e } 1 \leq p_2 \leq 2, \quad (6.32)$$

as constantes implícitas não dependem de $j \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Usando o Lema 22, temos que existe uma constante $C = C(p, n)$ tal que

$$C^{-1} \|G(t, \cdot)\|_{L_x^p}^2 \leq \left\| \left(\sum_j |G_j(t, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_x^p}^2 \leq C \|G(t, \cdot)\|_{L_x^p}^2,$$

para todo $1 < p < \infty$. Vamos provar primeiramente a desigualdade (6.31). Usando a primeira desigualdade de Littlewood-Paley acima, temos que

$$\|G(t, \cdot)\|_{L_x^{q_1}}^2 \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j |G_j(t, x)|^2 \right)^{q_1/2} dx \right)^{2/q_1}.$$

No entanto, como $q_1/2 \geq 1$, a desigualdade de Minkowski (2.9) implica

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j |G_j(t, x)|^2 \right)^{q_1/2} dx \right)^{2/q_1} \leq C \sum_j \|G_j(t, \cdot)\|_{L_x^{q_1}}^2.$$

Usando esta desigualdade e que $p_1/2 \geq 1$, similarmente, obtemos

$$\begin{aligned} \|G\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}} &= \left(\int \|G(t, \cdot)\|_{L_x^{q_1}}^{2 \cdot \frac{s}{2}} dt \right)^{2/p_1} \\ &\leq C \left(\int \left(\sum_j \|G_j(t, \cdot)\|_{L_x^{q_1}}^2 \right)^{p_1/2} dt \right)^{2/p_1} \\ &= C \sum_j \|G_j\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}}^2. \end{aligned}$$

Para provar (6.32) usamos a segunda desigualdade de Littlewood-Paley e procedemos de maneira similar. $\square$

Antes de provarmos a estimativa de Strichartz (6.29) para o problema da onda, vamos justificar a necessidade da condição de “gap”. Ignorando constantes, considere o operador solução

$$(Nh)(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi + (t-s)|\xi|)} \mathcal{F}_\xi(h)(\xi, s) \frac{d\xi}{2|\xi|} ds,$$

para o problema da onda não-homogêneo (6.19) com dado inicial nulo $(u(x, 0), u_t(x, 0)) = (0, 0)$. Seja $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ a partição de Littlewood-Paley e considere a seguinte localização do operador N ,

$$(N_j h)(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi + (t-s)|\xi|)} \psi_j(\xi) \hat{h}(\xi, s) \frac{d\xi}{2|\xi|} ds. \quad (6.33)$$

Assumindo que os pares (p, q) e (a, b) são *onda-admissíveis*, para provar a estimativa não-homogênea

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}},$$

segundo o Lema 26 é suficiente obter a estimativa localizada

$$\|N_j h\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}}. \quad (6.34)$$

No entanto, precisamos garantir que constante implícita da desigualdade (6.34) seja uniforme em j . Como veremos, esta uniformidade em j da constante implícita implica a condição de “gap”

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{a'} + \frac{n}{b'} - 2.$$

De fato, lembre que a medida canônica $d\mu(\xi, \tau)$ sobre um cone truncado $\mathbb{C}one_j^n = \mathbb{C}one^n \cap D_j$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$d\mu(\xi, \tau) = \frac{d\xi}{2|\xi|}$$

Fazendo $\lambda = 2^j$ e lembrando do scaling natural do $\mathbb{C}one^n$,

$$f_\lambda(\xi, \tau) = f\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0 \quad (6.35)$$

obtemos a relação de escala $d\mu(\lambda\xi, \lambda\tau) = \lambda^{n-1}d\mu(\xi, \tau)$. Então, lembrando que $\widehat{h}(\lambda\xi, s) = \lambda^{-n}\widehat{h}(\xi/\lambda, s)$ podemos re-escrever

$$\begin{aligned} (N_j h)(x, t) &= \int_0^t \int_{\text{Cone}_j^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi + (t-s)\tau)} \mathcal{F}_\xi(h)(\xi, s) d\mu(\xi, \tau) ds \\ &= \int_0^t \int_{\text{Cone}_0^n} e^{2\pi i(x \cdot \lambda\xi + (t-s)\lambda\tau)} \widehat{h}(\lambda\xi, s) d\mu(\lambda\xi, \lambda\tau) ds \\ &= \lambda^{n-1} \int_0^t \int_{\text{Cone}_0^n} e^{2\pi i(\lambda x \cdot \xi + (\lambda t - \lambda s)\tau)} \widehat{h}(\lambda\xi, s) d\mu(\xi, \tau) ds \\ &= \lambda^{-2} \int_0^{\lambda t} \int_{\text{Cone}_0^n} e^{2\pi i(\lambda x \cdot \xi + (\lambda t - s)\tau)} \widehat{h}\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{s}{\lambda}\right) d\mu(\xi, \tau) ds \\ &= \lambda^{-2} (N_0 h_\lambda)(\lambda x, \lambda t). \end{aligned}$$

Portanto, usando a relação de escala do espaço de Lebesgue L^p obtemos

$$\|N_j h\|_{L_t^p L_x^q} = \lambda^{-2-\frac{1}{p}-\frac{n}{2}} \|N_0 h_\lambda\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \lambda^{-2-\frac{1}{p}-\frac{n}{2}+\frac{1}{a'}+\frac{n}{b'}} \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}}.$$

em outras palavras, a constante implícita da desigualdade (6.34) é uniforme em j se, e somente se, $\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{a'} + \frac{n}{b'} - 2$.

Teorema 38. Suponha que $n \geq 2$ e que os pares (p, q) e (a, b) são wave-admissíveis com $2 < q, b < \infty$. Se u é uma solução do problema (6.19) com $f, g, h(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} + \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}}, \quad (6.36)$$

se, e somente se $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfaz a “gap condition”

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \gamma = \frac{1}{a'} + \frac{n}{b'} - 2.$$

Demonstração. Caso homogêneo. Relembre que a desigualdade

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\gamma} \quad (6.37)$$

é invariante pelo “scaling” da equação da onda se, e somente se $\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \gamma$. E a estimativa

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}},$$

é invariante pelo “scaling” da onda se, e somente se $\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{a'} + \frac{n}{b'} - 2$. Portanto, a condição de “gap” é uma condição necessária. Queremos mostrar que esta condição é suficiente. Para isto, lembre que os grupos $\{\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\dot{\omega}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, veja as equações (6.23) e (6.24), podem ser re-escritos na forma

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t)f + \omega(t)g &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} \widehat{f}(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} \widehat{g}(\xi) d\xi / |\xi| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} [|\xi|^\gamma \widehat{f}(\xi)] \frac{d\xi}{|\xi|^\gamma} + \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} [|\xi|^{\gamma-1} \widehat{g}(\xi)] \frac{d\xi}{|\xi|^\gamma} \end{aligned}$$

Portanto, para mostrar a estimativa de Strichartz homogênea,

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}$$

é suficiente mostrar que o operador integral de Fourier

$$\begin{aligned} (R^\gamma F)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} \widehat{F}(\xi) \frac{d\xi}{|\xi|^\gamma} \\ &= \int_{\text{Cone}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t\tau)} \widehat{F}(\xi) d\mu_\gamma(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (6.38)$$

satisfaz a estimativa

$$\|R^\gamma F\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|F\|_{L_x^2}. \quad (6.39)$$

Para provar a estimativa (6.39) é suficiente, pelo Lema 26, considerar a localização

$$(R_j^\gamma F)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} \psi_j(\xi) \widehat{F}(\xi) \frac{d\xi}{|\xi|^\gamma},$$

onde $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é a partição de Littlewood-Paley, e mostrar que

$$\|R_j^\gamma F\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|F\|_{L_x^2}.$$

Por um argumento de scaling, basta mostrar a desigualdade

$$\|R_0^\gamma F\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|F\|_{L_x^2}. \quad (6.40)$$

Para provar a estimativa (6.40) vamos usar um argumento de dualidade. Para isto, considere o operador adjunto $(R^\gamma)^*$ do operador integral de Fourier localizado R_0^γ ,

$$(R_0^{\gamma*} H)(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi \pm s|\xi|)} \psi_0(\xi) \widehat{H}(\xi, s) \frac{d\xi}{|\xi|^\gamma} ds.$$

Como o operador localizado $R_j^\gamma F$ satisfaz as desigualdades de *energia e dispersão*, com $\sigma = (n-1)/2$, pois a medida $d\mu_\gamma$ suportada no Cone truncado Cone_j^n satisfaz o decaimento

$$|\widehat{d\mu_\gamma}(-x, -t)| \lesssim |(x, t)|^{-\frac{n-1}{2}} \lesssim |t|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Portanto, pelo Lema 23 obtemos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} R_0^\gamma(s) R_0^{\gamma*}(s) H(s) ds \right\|_{L_x^q} \lesssim \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right)} \|H(s)\|_{L_x^{q'}} ds. \quad (6.41)$$

Novamente, para aplicar o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev 16 (na variável s), precisaremos que

$$\begin{cases} 0 < \alpha(n) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right) < 1 & (a) \\ \frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{p'} + \alpha(n). & (b) \end{cases}$$

A igualdade (b) é verdade se, e somente se

$$\frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{p'} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right) \iff \frac{1}{p} + 1 = 1 - \frac{1}{p} + \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{2}{q} \right) \iff \frac{2}{p} = \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{q}.$$

Além disso, a restrição (a) é verificada se, e somente se $p > 2$ o que é verdade pois o par (p, q) é *wave-admissível*. Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} R_0^\gamma(s) R_0^{\gamma*}(s) H(s) ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|H\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}. \quad (6.42)$$

Agora usando o Lema 24, podemos verificar que a desigualdade (6.42) é equivalente a (6.40).

Caso não-homogêneo. Procederemos como fizemos para provar o Teorema 37 interpolando as desigualdades.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|h\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}, \\ (ii) \quad & \|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|h\|_{L_t^1 L_x^2}. \end{aligned}$$

No entanto, precisamos mostrar que (i) e (ii) também são verdadeiras para a equação da onda. Mas estas desigualdades são obtidas de modo similar ao caso da equação de Schrödinger. A desigualdade (i) é análoga a prova da estimativa (6.17)-(i) com $\alpha(n) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right)$. E para verificar (ii) basta notar que $u(t) = \int_0^t \omega(t-s) h(s) ds$ e proceder como fizemos em (6.17)-(ii). Interpolando (i) e (ii), obtemos

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}},$$

para quaisquer pares wave-admissíveis (p, q) e (a, b) com $p, a > 2$. □

6.4 Estimativas de Strichartz para grupos de evolução

Nesta seção generalizaremos os resultados obtidos nas Seções 6.2 e 6.3. Para isto, seja $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ um grupo de evolução que satisfaz as estimativas (Energia) e (Dispersão). Como nos casos do problema de Schrödinger e do problema da onda, assuma que $U(t)$ pode ser reinterpretado por

$$(U(t)f)(x) = (\hat{f} d\mu)^\vee(x, t),$$

onde $d\mu$ é uma medida canônica sobre a superfície característica associada ao grupo de evolução dispersivo $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Sabemos, pelo Lema 23, que

$$\|U(t)f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C |t|^{-\sigma(1/p-1/p')} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.43)$$

para $1 \leq p \leq 2$.

Teorema 39. Seja $2 \leq p, q \leq \infty$ um par sharp σ -admissíveis, com $\sigma \geq 1/2$, e $(p, q) \neq (2, \infty)$. Então

$$\|U(t)f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2}. \quad (6.44)$$

Demonstração. Notaremos na prova que seremos repetitivos com os argumentos já usados na prova dos Teoremas 37 e 38. Pelo Lema 24 para provar (6.44), basta provar

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(t) U^*(s) h(s) \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|h\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}.$$

Relembre que a composição UU^* é definida por

$$U(t)U(s)h = U(t-s)h.$$

Por (6.43), temos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(t)U^*(s)h(s) \right\|_{L_x^q} \leq \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\sigma(1/q'-1/q)} \|h(s)\|_{L_x^{q'}} ds.$$

Usando o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev 16 no tempo, obtemos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(t)U^*(s)h(s) \right\|_{L_t^p L_x^q} \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\sigma(1/q'-1/q)} \|h(s)\|_{L_x^{q'}} ds \right\|_{L_t^p} \lesssim \|h\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}},$$

sempre que $1 < p < p' < \infty$ e $2 < q < \infty$ tal que

$$\begin{cases} 0 < \alpha(n) = \sigma \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right) = \sigma \left(1 - \frac{2}{q} \right) < 1 & (a) \\ \frac{1}{p'} + 1 = \frac{1}{p} + \alpha(q). & (b) \end{cases}$$

Note que, de fato, temos $0 < \alpha(q) < 1$, uma vez que $q > 2$. Além disso,

$$1 - \alpha(r) = 1 - \frac{2}{p} \iff \sigma - \frac{2\sigma}{q} = \frac{2}{p} \iff \frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} = \frac{\sigma}{2}.$$

□

Se tivermos a estimativa dispersiva na forma

$$\|U(t)f\|_{L^\infty} \lesssim (1+|t|)^{-\sigma} \|f\|_{L^1}, \quad (6.45)$$

obtemos a seguinte proposição.

Proposição 27. Seja $q \geq 2$ e assumamos que $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz (Energia) e (6.45). Então

$$\|U(t)f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+|t|)^{-\sigma(1/p-1/p')} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \sigma \geq \frac{1}{2}. \quad (6.46)$$

Demonstração. Para provar esta proposição, proceda de maneira análoga ao Lema 23 e note que a constante M_0 das desigualdades a serem interpoladas sofre uma pequena mudança. □

Se utilizarmos a estimativa dispersiva (6.45) obtemos uma versão do Teorema 39 para o par (p, q) de pontos σ -admissíveis. Mais precisamente,

Teorema 40. Assuma que $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz (Energia) e (6.45). Se $p, q \geq 2$ são tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} < \frac{\sigma}{2} \quad e \quad (p, q) \neq (2, \infty).$$

Então

$$\|U(f)f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2}. \quad (6.47)$$

Demonstração. A prova é semelhante ao Teorema 39. Pela Proposição 27, temos que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(t)U^*(s)g(s)ds \right\|_{L_x^q} \lesssim \int_{\mathbb{R}} (1+|t-s|)^{-\sigma(1/q'-1/q)} \|g(s)\|_{L_x^{q'}} ds = \|K * \|g(s)\|_{L_x^{q'}}\|_{L_t^p},$$

onde $K(t) := (1+|t|)^{-\sigma(1/q'-1/q)}$. Pela desigualdade de Young 2.18 na reta

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(t)U^*(s)g(s)ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|K * \|g(s)\|_{L_x^{q'}}\|_{L_t^p} \leq \|K\|_{L_t^r} \|g\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}},$$

onde $1 + 1/p = 1/r + 1/p'$ e $1 \leq p', r \leq \infty$. Nos resta mostrar que $\|K\|_{L_t^r}$ é finito. Mas, note que

$$\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{p},$$

logo

$$\sigma r \left(1 - \frac{2}{q}\right) = \sigma \frac{p}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right) = p \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{q}\right).$$

Portanto

$$\|K\|_{L_t^r}^r = \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{-p(\sigma/2-\sigma/q)} dt < \infty$$

quando $-p(\sigma/2 - \sigma/q) + 1 < 0$, isto é, $\|K\|_{L_t^r}$ é finito se, e somente se,

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} < \frac{\sigma}{2}.$$

□

6.5 Estimativas bilineares de Strichartz

Esta seção esta destinada a obter estimativas de Strichartz para o ponto crítico sharp σ -admissível

$$\mathbf{P} = \left(2, \frac{2\sigma}{\sigma-1}\right).$$

Tomaremos um caminho diferente dos casos sharp σ -admissível e usaremos formas bilineares.

Como consequência do Lema 24, é possível provar completamente o caso *end-point* das estimativas de Strichartz homogênea de Schrödinger e da onda em dimensões mais altas. Em dimensões mais baixas, este problema está em aberto. A condição sobre σ na Definição 1 para o caso end-point é crucial, uma vez que se $\sigma = 1$ o ponto $\mathbf{P}$ é inadmissível e estimativas para Schrödinger ($n = 2$) e onda ($n = 3$) são falsas. Encontrar um substituto para o ponto P neste caso para estas estimativas também é um problema em aberto.

A generalidade do Lema 24 nos dá algumas vantagens. Por exemplo, podemos tratar as estimativas da equação de Schrödinger e da equação da onda de maneira unificada, um indício disto está presente na Seção 6.4. Existe um scaling natural para estas estimativas. Mais precisamente, a estimativa (Dispersão) é invariante pelo scaling

$$\begin{cases} U_\lambda(t) \rightarrow U(t/\lambda), & U_\lambda^*(s) \rightarrow U^*(s/\lambda) \\ dx \rightarrow \lambda^\sigma dx, & \|f_\lambda\|_{L_x^2} \rightarrow \lambda^\sigma \|f\|_{L_x^2}. \end{cases} \quad (6.48)$$

Em outras palavras, o tempo se comporta como $\mathbb{R}$, o espaço como $\mathbb{R}^\sigma$ e $U(t)$ é adimensional. Na prática, a dimensão de escala σ difere da dimensão euclidiana.

6.5.1 Estimativas homogêneas: caso no end-point

O Teorema 39 da Seção 6.4 não inclui o caso end point $P = (p, q) = (2, \frac{2\sigma}{\sigma-1})$. Usaremos a versão bilinear de estimativas de Strichartz para cobrir este caso. De início trataremos o caso $(p, q) \neq \mathbf{P}$ usando uma abordagem diferente da versão linear de estimativas de Strichartz. Esta seção é baseada no artigo de Keel e Tao (KEEL; TAO, 1998).

- Para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $F(x, \cdot), G(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ suponha que

$$|\langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle_{L^2}| \lesssim \|F(s)\|_{L_x^2} \|G(t)\|_{L_x^2}. \quad (\text{Energia Bilinear})$$

- Para algum $\sigma \in \mathbb{R}$ e $F(x, \cdot), G(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ suponha que

$$|\langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle_{L^2}| \lesssim |t-s|^{-\sigma} \|F(s)\|_{L_x^1} \|G(t)\|_{L_x^1}. \quad (\text{Dispersão Bilinear})$$

Provaremos as desigualdades (6.3) e (6.4) do Lema 24. Sabemos pelo método TT^* que estas desigualdades são equivalentes, mesmo em sua forma bilinear. Portanto, nosso objetivo é provar (6.4) e o Lema 25 garantirá a limitação da forma bilinear $T : L_t^p L_x^q \times L_t^p L_x^q \rightarrow \mathbb{R}$, para algum par de índices (p, q) , definida por

$$T(F, G) = \int_{\mathbb{R}} \int_{s < t} \langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle ds dt.$$

Em sua forma bilinear, a desigualdade (6.4) é equivalente a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle_{L^2} ds dt \right| \lesssim \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \|G\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}.$$

Por simetria do tempo, é suficiente verificar a *estimativa retardada*

$$|T(F, G)| \lesssim \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \|G\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}. \quad (6.49)$$

Interpolando a (Energia Bilinear) e a (Dispersão Bilinear) obtemos

$$|\langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle_{L^2}| \lesssim |t-s|^{-1-\beta(q,q)} \|F(s)\|_{L_x^{q'}} \|G(t)\|_{L_x^{q'}}, \quad (6.50)$$

onde

$$\beta(q, b) = \sigma - 1 - \frac{\sigma}{q} - \frac{\sigma}{b}. \quad (6.51)$$

Como (p, q) é sharp σ -admissível, temos que

$$\beta(q, q) = \sigma - 1 - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} - 1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \leq 0.$$

Usando a versão bilinear do Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev 16 na desigualdade (6.50), obtemos (6.49), quando $p > p'$, isto é $(p, q) \neq \mathbf{P}$.

Se assumirmos a desigualdade (6.45), a desigualdade do tipo (6.49) é da seguinte forma

$$|\langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle| \lesssim (1 + |t - s|)^{-1-\beta(q,q)} \|F(s)\|_{L_x^{q'}} \|G(t)\|_{L_x^{q'}}$$

e a desigualdade de Young (2.18) nos dá (6.49) quando

$$-\beta(q, q) + \frac{1}{q} > \frac{1}{q'},$$

ou seja, quando (p, q) não é sharp σ -admissível. Desta forma, concluímos a prova do caso no end-point.

6.5.2 Estimativas homogêneas: caso end-point

Nesta seção estamos interessados em tratar do caso end-point, isto é, queremos provar resultados semelhantes aos provados na Seção 6.5.1 para o ponto

$$\mathbf{P} = \left(2, \frac{2\sigma}{\sigma - 1}\right).$$

Mais precisamente, provaremos

$$\|U(t)f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2}$$

ou, equivalentemente

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(t)F(s)ds \right\|_{L_x^2} \lesssim \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \quad (6.52)$$

quando $(p, q) = \mathbf{P}$, com $\sigma > 1$.

Relembre que $\mathbf{P}$ é sharp σ -admissível e estamos assumindo a estimativa (Dispersão Bilinear) e isto nos permite usar o scaling (6.48), pois esta estimativa é invariante sob esta escala. Como no caso *noend-point*, é suficiente provar a desigualdade retardada

$$|T(F, G)| \lesssim \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \|G\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}. \quad (6.53)$$

Usando a invariância por scaling, podemos decompor $T(F, G)$ em uma soma diádica sobre o tempo, isto é, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j(F, G)$, onde

$$T_j(F, G) = \int_{\mathbb{R}} \int_{t-2^{j+1} < s \leq t-2^j} \langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle ds dt. \quad (6.54)$$

Ou seja, é suficiente provar a desigualdade

$$\sum_j |T_j(F, G)| \lesssim \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \|G\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}. \quad (6.55)$$

Precisaremos dos dois lemas para provar nossos resultados. No primeiro, obtemos uma decomposição especial para $f \in L^p$, $0 < p < \infty$. No segundo, obtemos uma desigualdade

similar a (6.55). Para o primeiro resultado, é necessário o conceito de função de distribuição. Seja f uma função mensurável sobre $(X, \mathcal{A}, \mu)$, definimos uma **função de distribuição** $\lambda_f : (0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ por

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

O próximo lema resolve nossa questão.

Lema 27 (Decomposição atômica de L^p). Seja $0 < p < \infty$. Então existe uma sequência de número reais não-negativos $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e uma sequência de funções não-negativas $(\chi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (os átomos) tal que qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ não-negativa pode ser escrita na forma

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \chi_k, \quad (6.56)$$

onde cada χ_k satisfaz

$$\|\chi_k\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{k}{p}}, \quad \mu(\text{supp} \chi_k) \lesssim 2^k \quad e \quad \|c_k\|_{\ell^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Seja $\lambda_f(\alpha) = \lambda(\alpha)$ uma função de distribuição. Para cada k , defina

$$\alpha_k = \inf_{\lambda(\alpha) < 2^k} \alpha, \quad c_k = 2^{\frac{k}{p}} \alpha_k \quad e \quad \chi_k = c_k^{-1} \chi_{(\alpha_{k+1}, \alpha_k]}(f) f.$$

A função χ_k está bem definida, pois $\alpha_{k+1} < \alpha_k$. De fato, note que $\{\alpha : \lambda(\alpha) < 2^k\} \subset \{\alpha : \lambda(\alpha) < 2^{k+1}\}$, o que implica

$$\alpha_{k+1} = \inf_{\lambda(\alpha) < 2^{k+1}} \alpha \leq \inf_{\lambda(\alpha) < 2^k} \alpha = \alpha_k.$$

Além disso, quando $k \rightarrow -\infty$, $\alpha_k = 0$ e quando $k \rightarrow \infty$, $\alpha_k = \infty$, logo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \chi_k = \sum_k \chi_{(\alpha_{k+1}, \alpha_k]}(|f|) f = f.$$

Obviamente, $\|\chi_k\|_{L^\infty} \lesssim 2^{\frac{k}{p}}$. Pela definição de α_k , temos que $\mu(\{f > \alpha\}) \leq 2^k$ e, portanto, $\mu(\text{supp} \chi_k) \lesssim 2^k$. Resta provar a desigualdade $\|c_k\|_{\ell^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$. Para isto, note que

$$\sum_k c_k^p = \sum_k 2^k \alpha_k^p = p \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \chi_{(0 < \alpha < \alpha_k)}(\alpha) \alpha^{p-1} d\alpha. \quad (6.57)$$

Usando o Teorema de Fubini, temos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\sum_{k: \alpha_k > \alpha} 2^k \right) d\alpha.$$

Pela definição de α_k , $\alpha < \alpha_k$ implica que $\mu(\{\alpha : |f(x)| > \alpha\}) \geq 2^k$. Portanto,

$$\sum_k c_k^p \leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\sum_{k: \mu(\{\alpha : |f(x)| > \alpha\}) \geq 2^k} 2^k \right) d\alpha \leq 2p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \mu(\{\alpha : |f(x)| > \alpha\}) d\alpha.$$

A prova está completa, pois segundo a Proposição 6.24 de (FOLLAND, 1999) temos a igualdade

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \mu(\{\alpha : |f(x)| > \alpha\}) d\alpha.$$

□

A decomposição atômica de funções não-negativas $f \in L^p$ se estende para qualquer $f \in L^p$ uma vez que temos a decomposição

$$f = f^+ - f^-$$

de qualquer $f \in L^p$, onde f^+ e f^- são funções não-negativas.

Lema 28. A desigualdade

$$|T_j(F, G)| \lesssim 2^{-j\beta(r,b)} \|F\|_{L_t^2 L_x^{r'}} \|G\|_{L_t^2 L_x^{b'}} \quad (6.58)$$

é válida para todo $j \in \mathbb{Z}$ e todo $(\frac{1}{r}, \frac{1}{b})$ em uma vizinhança de $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$

Demonstração. Iremos dividir a prova em alguns passos.

Invariância pelo scaling (6.48). Note, por (6.51), que

$$\beta\left(\frac{2\sigma}{\sigma-1}, \frac{2\sigma}{\sigma-1}\right) = 0.$$

Além disso,

$$\|F_\lambda(x, \cdot)\|_{L_t^2}^2 = \langle F_\lambda, F_\lambda \rangle = \lambda^\sigma \langle F, F \rangle = \lambda^\sigma \|F(x, \cdot)\|_{L_t^2}^2$$

e, analogamente,

$$\|G_\lambda(x, \cdot)\|_{L_t^2}^2 = \lambda^\sigma \|G(x, \cdot)\|_{L_t^2}^2.$$

Logo, o lado esquerdo de (6.58) é multiplicado por valor absoluto de $\lambda^{2\sigma}$. Para o lado esquerdo, veja que

$$\begin{aligned} |T_j(F_\lambda, G_\lambda)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{t-2^{j+1} < s \leq t-2^j} \langle (UF)^*(\cdot, s/\lambda), (UG)^*(\cdot, t/\lambda) \rangle ds dt \right|^2 \\ &= \left| \lambda^\sigma \int_{\mathbb{R}} \int_{t-2^{j+1} < s \leq t-2^j} \langle (UF)^*(\cdot, s), (UG)^*(\cdot, t) \rangle ds dt \right|^2 \\ &= \lambda^{2\sigma} |T_j(F, G)|^2. \end{aligned}$$

Ou seja, o lado direito de (6.58) também é multiplicado pelo mesmo valor absoluto.

Portanto, é suficiente provar (6.58) para $j = 0$. Como o operador está localizado em intervalos de tempo de comprimento 1, podemos supor que F e G estão suportados num intervalo de tempo de comprimento da ordem $O(1)$. Finalmente, provaremos (6.58) para os expoentes:

- (i) $r = b = \infty$;
- (ii) $2 \leq r < q$ e $b = 2$;
- (iii) $2 \leq b < q$ e $r = 2$.

E o resultado seguirá por interpolação e o fato que $2 < q < \infty$ (ver Figura 16). Vale lembrar que quando $\sigma = 1$, $q = \infty$ e o lema não vale neste caso.

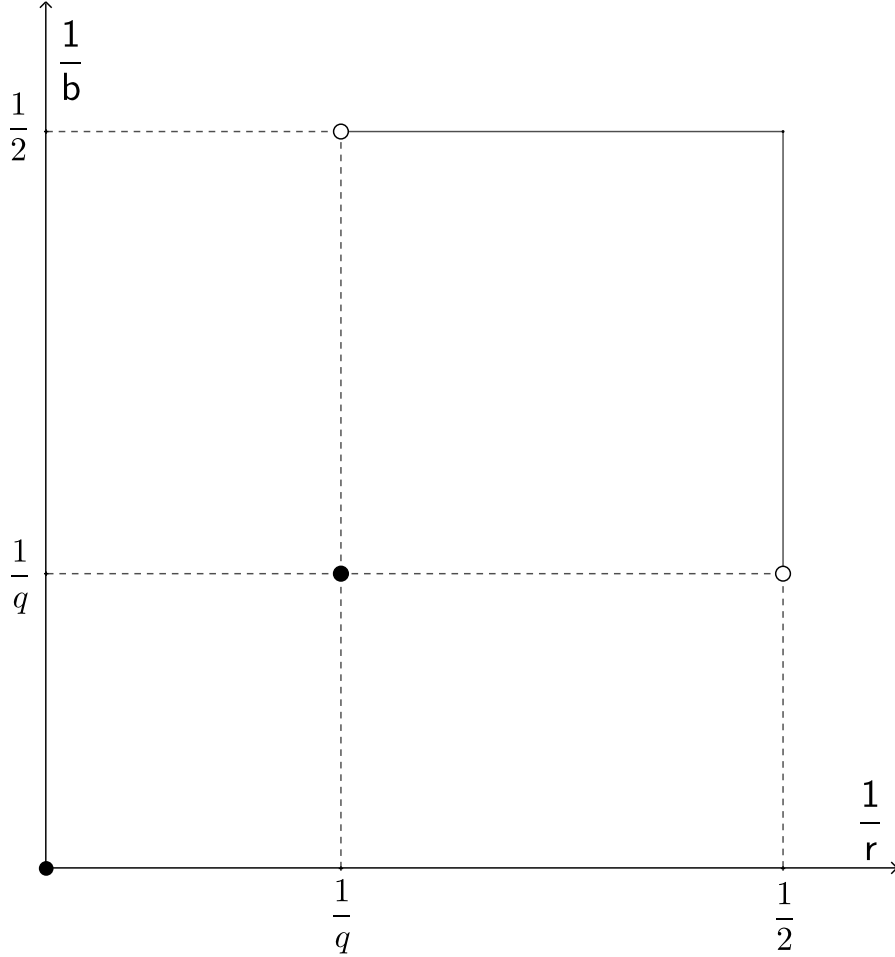


Figura 16 – Para $\sigma > 1$, $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$ está no interior do polígono convexo das estimativas (i) – (iii).

Passo 1: caso $r = b = \infty$. Neste caso, temos $r' = b' = 1$. Integrando (Dispersão Bilinear) em t e s , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle U^*(s)F(s), U^*(t)G(t) \rangle ds dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\sigma} \|F(s)\|_{L_x^1} \|G(t)\|_{L_x^1} ds dt \\ &\lesssim \|F\|_{L_t^1 L_x^1} \|G\|_{L_t^1 L_x^1} \\ &\lesssim \|F\|_{L_t^2 L_x^1} \|G\|_{L_t^2 L_x^1}, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder (2.3) na variável t para obter a última desigualdade.

Passo 2: caso $2 \leq r < q$ e $b = 2$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a estimativa de

(Energia Bilinear), obtemos

$$\begin{aligned}
 |T_j(F, G)| &\lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(t)G(t)dt \right\|_{L_x^2} \left(\sup_t \left\| \int_{t-2^{j+1} < s \leq t-2^j} U^*(s)F(s)ds \right\|_{L_x^2} \right) \\
 &\lesssim \left(\sup_t \left\| \int_{t-2^{j+1} < s \leq t-2^j} U^*(s)F(s)ds \right\|_{L_x^2} \right) \int_{\mathbb{R}} \|U^*(t)G(t)\|_{L_x^2} dt \\
 &\lesssim \left(\sup_t \left\| \int_{t-2^{j+1} < s \leq t-2^j} U^*(s)F(s)ds \right\|_{L_x^2} \right) \|G\|_{L_t^1 L_x^2}.
 \end{aligned}$$

Defina $p(r)$ de forma que $(p(r), r)$ seja sharp σ -admissível. Usando (6.4), que é válida para $(p(r), r)$, segue que

$$|T_0(F, G)| \lesssim \|F\|_{L_t^{p(r)'} L_x^{r'}} \|G\|_{L_t^1 L_x^2}.$$

Usando a desigualdade de Hölder no tempo novamente, obtemos o resultado. O caso (iii) é análogo ao caso (ii). Isto completa a prova do lema. $\square$

Para finalizar a prova de estimativas homogêneas de Strichartz no caso end-point, temos que mostrar que o Lema 28 implica (6.55). Trivialmente, este lema implica

$$|T_j(F, G)| \lesssim \|F\|_{L_t^2 L_x^{q'}} \|G\|_{L_t^2 L_x^{q'}}, \quad (6.59)$$

quando $r = q = b$. É claro que ainda não obtivemos a desigualdade desejada, uma vez que (6.59) não nos dá a soma em (6.53). Porém a família de dois parâmetros $(T_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ têm vários fatores de decaimento exponencial e este fato nos permitirá conseguir nosso objetivo.

Primeiro, usando o Lema de decomposição atômica 27, escreva F e G como

$$F(t) = 2^{-\frac{k}{q'}} f(t) \chi_{E(t)} \quad e \quad G(s) = 2^{-\frac{\tilde{k}}{q'}} g(s) \chi_{\tilde{E}(s)},$$

onde $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}$ e $E(t), \tilde{E}(s)$ são conjuntos de medidas 2^k e $2^{\tilde{k}}$, respectivamente, para cada t, s . Neste caso, pelo Lema 28, teremos

$$|T_j(F, G)| \lesssim 2^{-\beta(r,b)j} 2^{-\frac{k}{q'}} \|f\|_{L_t^2} 2^{\frac{k}{r'}} 2^{-\frac{\tilde{k}}{q'}} \|g\|_{L_s^2} 2^{\frac{\tilde{k}}{b'}} := 2^A \|f\|_{L_t^2} \|g\|_{L_t^2}, \quad (6.60)$$

onde definimos o expoente em (6.60) por A . Usando (6.51) e o fato que $q = \frac{2\sigma}{\sigma-1}$, podemos reescrever A por

$$\begin{aligned}
 A &= j - j\sigma + j\sigma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} \right) - \frac{k}{q'} + \frac{k}{r'} - \frac{\tilde{k}}{q'} + \frac{\tilde{k}}{b'} = j - j\sigma + j\sigma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} \right) + k \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) + \tilde{k} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{b} \right) \\
 &= j - j\sigma + j\sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) + j\sigma \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{q} \right) + k \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) + \tilde{k} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{b} \right) - \frac{2j\sigma}{q} \\
 &= (k - j\sigma) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) + (\tilde{k} - j\sigma) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{b} \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$|T_j(F, G)| \lesssim 2^{(k-j\sigma)(1/q-1/r) + (\tilde{k}-j\sigma)(1/q-1/b)} \|f\|_{L_t^2} \|g\|_{L_t^2}. \quad (6.61)$$

Quando $r = b = q$, obtemos justamente (6.59). No entanto, o Lema 28 diz que este tipo de resultado é válido para todo ponto $(\frac{1}{r}, \frac{1}{b})$ numa vizinhança de $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$, portanto é possível melhorar (6.61). Note que

$$|(k - j\sigma)(1/q - 1/r) + (\tilde{k} - j\sigma)(1/q - 1/b)| \leq -\epsilon(|k - j\sigma| + |\tilde{k} - j\sigma|),$$

onde $\epsilon > 0$ é escolhido adequadamente, uma vez que $r, b < q$. Logo, podemos reescrever (6.61) como

$$|T_j(F, G)| \lesssim 2^{-\epsilon(|k-j\sigma|+|\tilde{k}-j\sigma|)} \|f\|_{L_t^2} \|g\|_{L_t^2}, \quad (6.62)$$

o que, tomando a soma em j , nos dá (6.55).

Aplicando o Lema 27 com $p = q'$ para $F(t)$ e $G(s)$ obtemos as decomposições

$$F(t) = \sum_k f_k(t) \chi_k(t) \quad e \quad G(s) = \sum_{\tilde{k}} g_{\tilde{k}}(s) \chi_{\tilde{k}}(s),$$

com as funções χ_k e $\chi_{\tilde{k}}$ satisfazem as teses do Lema. Além disso, as funções escalares $f_k(t)$ e $g_{\tilde{k}}(s)$ satisfazem as desigualdades

$$\left\| \left(\sum_k |f_k|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\|_{L_t^2} \lesssim \|F\|_{L_t^2 L_x^{q'}} \quad e \quad \left\| \left(\sum_{\tilde{k}} |g_{\tilde{k}}|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\|_{L_t^2} \lesssim \|G\|_{L_t^2 L_x^{q'}}. \quad (6.63)$$

Com estas informações, podemos, finalmente, provar (6.55). Decompondo F e G e usando a linearidade, obtemos

$$\sum_j |T_j(F, G)| \leq \sum_j \sum_k \sum_{\tilde{k}} |T_j(f_k \chi_k, g_{\tilde{k}} \chi_{\tilde{k}})|. \quad (6.64)$$

Por (6.62), temos

$$|T_j(f_k \chi_k, g_{\tilde{k}} \chi_{\tilde{k}})| \lesssim 2^{-\epsilon(|k-j\sigma|+|\tilde{k}-j\sigma|)} \|f_k\|_{L_t^2} \|g_{\tilde{k}}\|_{L_t^2}. \quad (6.65)$$

Para nos livrar da soma em j , façamos a seguinte manipulação algébrica:

$$|k - j\sigma| + |\tilde{k} - j\sigma| = |j\sigma - k| + |j\sigma - \tilde{k}| \geq 2|j\sigma| + |k - \tilde{k}|,$$

então

$$\sum_j |T_j(F, G)| \lesssim \sum_k \sum_{\tilde{k}} (1 + |k - \tilde{k}|) 2^{-\epsilon|k-\tilde{k}|} \|f_k\|_{L_t^2} \|g_{\tilde{k}}\|_{L_t^2}.$$

Não precisamos nos preocupar com o termo $1 + |k - \tilde{k}|$ uma vez que o mesmo é maior ou igual a 1. Como a série $\sum_k (1 + |k|)^{-\epsilon|k|}$ é absolutamente convergente, podemos aplicar a desigualdade de Young para obter

$$\sum_j |T_j(F, G)| \lesssim \left(\sum_k \|f_k\|_{L_t^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\tilde{k}} \|g_{\tilde{k}}\|_{L_t^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Trocando a ordem das normas L^2 e ℓ^2 e usando a inclusão $\ell^{q'} \subset \ell^2$, uma vez que $q' < 2$, tem-se

$$\sum_j |T_j(F, G)| \lesssim \left\| \left(\sum_k |f_k|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\|_{L_t^2} \left\| \left(\sum_{\tilde{k}} |g_{\tilde{k}}|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\|_{L_t^2},$$

e (6.55) segue de (6.63).

REFERÊNCIAS

- BRANDOLINI, L.; IOSEVICH, A.; TRAVAGLINI, G. Planar convex bodies, Fourier transform, lattice points, and irregularities of distribution. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 355, n. 9, p. 3513–3535, 2003. Citado na página [105](#).
- BUSCHENHENKE, S.; MÜLLER, D.; VARGAS, A. A Fourier restriction theorem for a perturbed hyperbolic paraboloid. **Proc. Lond. Math. Soc.** (3), v. 120, n. 1, p. 124–154, 2020. Citado na página [109](#).
- CARMO, M. P. do. **Differential geometry of curves and surfaces**. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. viii+503 p. Translated from the Portuguese. Citado na página [46](#).
- CHRIST, M.; KISELEV, A. Maximal functions associated to filtrations. **J. Funct. Anal.**, v. 179, n. 2, p. 409–425, 2001. Citado na página [135](#).
- FANG, D.; WANG, C. Weighted Strichartz estimates with angular regularity and their applications. **Forum Math.**, v. 23, n. 1, p. 181–205, 2011. Citado na página [26](#).
- FEFFERMAN, C. Inequalities for strongly singular convolution operators. **Acta Math.**, v. 124, p. 9–36, 1970. Citado nas páginas [23](#) e [111](#).
- FOLLAND, G. B. **Real analysis**. Second. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. xvi+386 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-31716-0. Citado nas páginas [29](#), [35](#), [66](#), [75](#) e [155](#).
- GINIBRE, J.; VELO, G. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire**, v. 2, n. 4, p. 309–327, 1985. Citado na página [26](#).
- _____. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. **J. Funct. Anal.**, v. 133, n. 1, p. 50–68, 1995. Citado na página [26](#).
- GRAFAKOS, L. **Classical Fourier analysis**. Third. [S.l.]: Springer, New York, 2014. v. 249. xviii+638 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 249). Citado nas páginas [29](#), [75](#), [91](#) e [98](#).
- GUO, Z.; WANG, Y. Improved Strichartz estimates for a class of dispersive equations in the radial case and their applications to nonlinear Schrödinger and wave equations. **J. Anal. Math.**, v. 124, p. 1–38, 2014. Citado na página [26](#).
- HÖRMANDER, L. **The analysis of linear partial differential operators. I**. Second. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1990. v. 256. xii+440 p. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], v. 256). Distribution theory and Fourier analysis. Citado na página [166](#).
- KEEL, M.; TAO, T. Endpoint Strichartz estimates. **Amer. J. Math.**, v. 120, n. 5, p. 955–980, 1998. Citado nas páginas [26](#) e [152](#).

- KLAINERMAN, S.; MACHEDON, M. Space-time estimates for null forms and the local existence theorem. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 46, n. 9, p. 1221–1268, 1993. Citado na página [27](#).
- LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. Second. [S.l.]: Springer, New York, 2013. v. 218. xvi+708 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218). ISBN 978-1-4419-9981-8. Citado nas páginas [29](#), [46](#) e [53](#).
- LINDBLAD, H.; SOGGE, C. D. On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations. **J. Funct. Anal.**, v. 130, n. 2, p. 357–426, 1995. Citado na página [26](#).
- LITTMAN, W. Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 69, p. 766–770, 1963. Citado nas páginas [23](#), [102](#) e [104](#).
- MATTILA, P. **Fourier analysis and Hausdorff dimension**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2015. v. 150. xiv+440 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 150). Citado na página [75](#).
- MONTGOMERY-SMITH, S. J. Time decay for the bounded mean oscillation of solutions of the Schrödinger and wave equations. **Duke Math. J.**, v. 91, n. 2, p. 393–408, 1998. Citado na página [27](#).
- MUSCALU, C.; SCHLAG, W. **Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. I**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2013. v. 137. xviii+370 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 137). Citado nas páginas [24](#), [105](#) e [122](#).
- SHAFAREVICH, I. R.; REMIZOV, A. O. **Linear algebra and geometry**. [S.l.]: Springer, Heidelberg, 2013. xxii+526 p. Citado na página [120](#).
- STEIN, E. M. **Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. v. 43. xiv+695 p. (Princeton Mathematical Series, v. 43). ISBN 0-691-03216-5. Citado nas páginas [22](#), [23](#), [24](#), [105](#) e [126](#).
- STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Functional analysis**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. v. 4. xviii+423 p. (Princeton Lectures in Analysis, v. 4). Introduction to further topics in analysis. Citado nas páginas [75](#), [91](#) e [105](#).
- STRICHARTZ, R. S. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. **Duke Math. J.**, v. 44, n. 3, p. 705–714, 1977. Citado nas páginas [15](#), [16](#), [22](#), [24](#), [26](#), [105](#), [111](#), [123](#), [124](#), [137](#), [139](#), [144](#) e [145](#).
- TAYLOR, M. E. **Measure theory and integration**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. v. 76. xiv+319 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 76). Citado nas páginas [29](#) e [66](#).
- THORPE, J. A. **Elementary topics in differential geometry**. [S.l.]: Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979. xiii+253 p. Undergraduate Texts in Mathematics. Citado na página [46](#).
- TOMAS, P. A. A restriction theorem for the Fourier transform. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 81, p. 477–478, 1975. Citado nas páginas [22](#) e [116](#).

WOLFF, T. H. **Lectures on harmonic analysis**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. v. 29. x+137 p. (University Lecture Series, v. 29). Citado nas páginas 75, 86, 91, 100, 104 e 105.

ZYGMUND, A. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables. **Studia Math.**, v. 50, p. 189–201, 1974. Citado nas páginas 23 e 111.

APÊNDICE

A.1 Pullback da distribuição de Dirac sobre superfícies

Seja χ uma função $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = 1$ e $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi(\frac{x}{\varepsilon})$, então a sequência de distribuições $T_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \int \chi_\varepsilon(x) \varphi(x) dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é uma regularização da distribuição delta de Dirac $\delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

De fato, seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset [-A, A]^n$. Usando o Teorema da convergência dominada, temos

$$\int \chi_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{[-A/\varepsilon, A/\varepsilon]^n} \chi(y) \varphi(y) dy \rightarrow \varphi(0), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\text{A.1})$$

Em outras palavras, χ_ε converge para δ_0 em sentido de distribuições. Nosso objetivo é encontrar o *pullback* $f^*\delta = \delta \circ f$ da distribuição δ_0 quando $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave tal que

$$\nabla f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in \Sigma_f = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}. \quad (\text{A.2})$$

Mais precisamente, queremos mostrar que

$$f^*\delta = \frac{d\sigma}{|\nabla f|}$$

onde $d\sigma$ denota uma medida intrínseca de superfície sobre Σ_f . Os dois lemas abaixo facilitarão a nossa prova.

Lema 29 (Gluing principle). Seja $\Omega = \cup_j \Omega_j$ uma família de abertos. Para cada j , seja T_j uma distribuição em Ω_j tal que

$$(T_j)|_{\Omega_j \cap \Omega_k} = (T_k)|_{\Omega_j \cap \Omega_k}, \text{ quando } \Omega_j \cap \Omega_k \neq \emptyset$$

Então, existe uma única distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T|_{\Omega_j} = T_j$.

Lema 30. Seja $\{T_n\}_n$ uma sequência de distribuições em $\Omega = \cup_j \Omega_j$, uma coleção aberta. Suponha $T_n|_{\Omega_j} \rightarrow T^j$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, então T_n converge em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema 41 ((HÖRMANDER, 1990) Theorem 6.1.5). Seja $\Sigma_f = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$ uma superfície suave e $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)dx = 1$ e $\chi(x) \geq 0$. Então existe uma distribuição $\delta(f)$ com suporte em Σ_f tal que

$$\langle f^* \delta, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_\varepsilon(f(x)) \varphi(x) dx, \quad (\text{A.3})$$

para todo $\varphi \in C_c(\Omega)$. Além disso, o limite acima converge para integral

$$\langle f^* \delta, \varphi \rangle = \int_{\Sigma_f} \varphi(x', x_n) \frac{dx'}{|\partial f / \partial x_n|} = \int_{\Sigma_f} \varphi(x) \frac{d\sigma}{|\nabla f|} \quad (\text{co-área})$$

onde $d\sigma$ é uma medida intrínseca sobre a superfície Σ_f .

Demonstração. Usando os dois lemas anteriores, basta mostrar que existe uma vizinhança de $a \in \Omega$ tal que a sequência $\{\chi_\varepsilon(f)\}$ converge em $\mathcal{D}'$ para uma distribuição $\delta(f)$ definida pela fórmula da (co-área) acima.

Caso $f(a) \neq 0$, pela continuidade de f existe uma bola $B(a, r)$ tal que $|f(x)| > 0$ para todo $x \in B(a, r)$. Como o suporte de χ é compacto, podemos escolher ε suficientemente pequeno tal que $\chi_\varepsilon(f(x)) = 0$ para todo $x \in B(a, r)$, isto é, $\chi_\varepsilon(f(x)) \rightarrow 0$ em $B(a, r)$.

Caso $f(a) = 0$, usando a hipótese $\nabla f(a) \neq 0$ então existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\partial_j f(a) \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos assumir

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$$

e escreva $a = (a', a_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto $W \times I$ de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ contendo (a', a_n) e uma função q de classe $C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que

$$f(x', q(x')) = 0,$$

para todo $(x', x_n) \in W \times I$. Nesta vizinhança de (a', a_n) , considere a expansão de Taylor¹ de $f(x', x_n)$ em torno do ponto $(x', q(x'))$

$$\begin{aligned} f(x', x_n) &= f(x', q(x')) + (x_n - q(x')) \int_0^1 \partial_{x_n} f(x', q(x') + t(x_n - q(x'))) dt \\ &= (x_n - q(x')) \int_0^1 \partial_{x_n} f(x', q(x') + t(x_n - q(x'))) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Tomando $\varphi \in C_c(W \times I)$ e usando Teorema Fubini, pela mudança de variáveis $x_n = q(x') + \varepsilon z$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{W \times I} \chi_\varepsilon(f(x)) \varphi(x) dx &= \int_W \int_{\mathbb{R}} \varphi(x', x_n) \frac{1}{\varepsilon} \chi\left(\frac{f(x', x_n)}{\varepsilon}\right) dx_n dx' \\ &= \int_W \int_{\mathbb{R}} \varphi(x', q(x') + \varepsilon z) \chi\left(\frac{f(x', q(x') + \varepsilon z)}{\varepsilon}\right) dz dx'. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

¹ Basta escrever $f(x+h) = f(x) + h \int_0^1 f'(x+th)dt$, com h escolhido apropriadamente

Substituindo (A.4) em (A.5) e notando que $\varepsilon = x_n - q(x')$,

$$\int_{W \times I} \chi_\varepsilon(f(x)) \varphi(x) dx = \int_W \int_{\mathbb{R}} \varphi(x', q(x') + \varepsilon z) \chi\left(z \int_0^1 \partial_{x_n} f(x', q(x') + t\varepsilon) dt\right) dz dx'$$

Portanto, usando o Teorema da convergência dominada, fazendo $z \mapsto z \partial_{x_n} f(x' q(x'))$ e lembrando que $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(z) dz = 1$, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{W \times I} \chi_\varepsilon(f(x)) \varphi(x) dx &= \int_W \int_{\mathbb{R}} \varphi(x', q(x')) \chi\left(z \frac{\partial}{\partial x_n} f(x', q(x'))\right) dz dx' \\ &= \int_W \frac{\varphi(x', q(x'))}{|\partial_{x_n} f(x', q(x'))|} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi(z) dz\right) dx' \\ &= \int_W \varphi(x', q(x')) \frac{dx'}{|\partial_{x_n} f(x', q(x'))|}, \end{aligned}$$

quando $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x', q(x')) \neq 0$. Em outras palavras, mostramos que existe uma vizinhança $W \times I$ de a tal que $\chi_\varepsilon(f)$ converge em $\mathcal{D}'$ para a distribuição $\delta(f)$ definida por

$$\langle \delta(f), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{W \times I} \chi_\varepsilon(f(x)) \varphi(x) dx = \int_W \varphi(x', q(x')) \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{|\partial f / \partial x_n|}. \quad (\text{A.6})$$

Além disso, derivando implicitamente a equação $f(x', q(x')) = 0$, obtemos

$$\nabla_{x'} f(x', q(x')) + \partial_{x_n} f(x', q(x')) \nabla q(x') = 0$$

e substituindo no gradiente de f aplicado ao ponto $(x', q(x'))$ tem-se

$$\nabla f(x', q(x')) = (\nabla_{x'} f(x', q(x')), \partial_{x_n} f(x', q(x'))) = \partial_{x_n} f(x', q(x')) (-\nabla q(x'), 1),$$

isto é,

$$|\nabla f(x', q(x'))| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', q(x')) \right| \sqrt{1 + |\nabla q(x')|^2}.$$

Localmente, a distribuição $\delta(f)$ pode ser reescrita por

$$\begin{aligned} \int_{W \times I} \delta(f(x)) \varphi(x) dx &= \int_W \varphi(x', q(x')) \frac{\sqrt{1 + |\nabla q(x')|^2}}{|\nabla f(x', q(x'))|} dx' \\ &= \int_{x_n = q(x')} \varphi \frac{d\sigma}{|\nabla f|} \end{aligned}$$

pois, pela Proposição 10, a medida intrínseca $d\sigma$ sobre a hipersuperfície $\{(x', x_n) : x_n = q(x')\}$ é dada por $d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla q(x')|^2}$.

□

Mostramos acima que hipersuperfícies $\Sigma_f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ suaves têm uma medida natural, não necessariamente uma medida intrínseca. De fato, para todo $x \in \Sigma_f$ o gradiente $\nabla f(x) \neq 0$, em particular $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \neq 0$ para algum $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Usando o Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança N de x e uma função $q_j \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que

$$x_j = q_j(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in N \cap \Sigma_f$. Aqui a notação $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ significa que omitimos a coordenada x_j . Procedendo como fizemos para obter (A.6), existe uma medida canônica $d\mu$ associada a f (esta medida não é necessariamente uma medida intrínseca de Σ_f) definida por

$$d\mu(\hat{x}, x_j) = \delta(f(x)) \frac{dx_1 \cdots d\hat{x}_j \cdots dx_n}{|\partial f / \partial x_j|} \quad (\text{A.7})$$

para todo $x \in N \cap \Sigma_f$, onde $\hat{x}$ denota $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$. Esta medida pode ser estendida globalmente para Σ_f e obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(\hat{x}, x_j) d\mu(\hat{x}, x_j) = \int_{\Sigma_f} h(x) \frac{dx_1 \cdots d\hat{x}_j \cdots dx_n}{|\partial f / \partial x_j|} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(\hat{x}, q_j(\hat{x})) \frac{dx_1 \cdots d\hat{x}_j \cdots dx_n}{|\partial f / \partial x_j|} \quad (\text{A.8})$$

para todo $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 22. A superfície característica da equação da onda $\square u = 0$ é dada hiperfície singular,

$$\Sigma = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\tau| = |\xi|\}.$$

Esta superfície tem uma singularidade na origem, podemos remove-la considerando $\tau > 0$ (“future lightcone”) e definindo o seguinte cone

$$\Sigma_0 = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\tau| = |\xi| > 0\}$$

e obtemos uma medida natural sobre Σ_0 definida por

$$d\mu_{\Sigma_0}(\xi, \tau) = \delta(\tau^2 - |\xi|^2) \frac{d\xi d\tau}{2|\xi|}. \quad (\text{A.9})$$

Além disso, para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ obtemos

$$\langle \delta_0(\tau^2 - |\xi|^2), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(\xi, \tau) d\mu_{\Sigma}(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} (\varphi(\xi, -|\xi|) + \varphi(\xi, |\xi|)) \frac{d\xi}{|\xi|}. \quad (\text{A.10})$$

A.2 Cálculo de Integrais

Esta seção está destinada a calcular e limitar determinadas integrais que foram utilizadas nesta dissertação.

Exemplo 23. Para $a > 0$ e $b > 1$, temos

$$\int_0^\infty \left| \frac{\text{sen}(ax)}{x} \right|^b dx = ca^{b-1}. \quad (\text{A.11})$$

Para verificar esta integral, considere a mudança de variável $y \mapsto ax$. Neste caso,

$$\int_0^\infty \left| \frac{\text{sen}(ax)}{x} \right|^b dx = a^{b-1} \int_0^\infty \left| \frac{\text{sen}(y)}{y} \right|^b dy. \quad (\text{A.12})$$

Para obter (A.11), basta garantir que a integral em (A.12) é finita. Para obter (A.11), basta garantir que a integral em (A.12) é finita. Para isso, divida a integral da seguinte maneira

$$\int_0^\infty \left| \frac{\text{sen}(y)}{y} \right|^b dy = \int_0^1 \left| \frac{\text{sen}(y)}{y} \right|^b dy + \int_1^\infty \left| \frac{\text{sen}(y)}{y} \right|^b dy := I_1 + I_2.$$

A integral I_2 converge, uma vez que ela é controlada por uma função integrável para todo $b > 1$, a saber

$$\left| \frac{\text{sen}(y)}{y} \right|^b \leq \frac{1}{y^b}.$$

A integral I_1 também converge, note que no intervalo $[0, 1]$ a função *seno* é não-negativa e temos a desigualdade $\text{sen}(y) \leq y$. Neste caso,

$$\left| \frac{\text{sen}(y)}{y} \right|^b = \frac{\text{sen}^b(y)}{y^b} \leq 1,$$

e, portanto, a integral I_1 é finita.

Exemplo 24. Para todo $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{1+x} dx = -i\pi e^{2\pi i \xi} \text{sgn}(\xi), \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\text{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi > 0, \\ -1, & \text{se } \xi < 0. \end{cases}$$

Considere a função complexa

$$f(z) = \frac{e^{-2\pi i z \xi}}{1+z}.$$

Sobre o eixo real, esta função é igual a função do integrando em (A.13). A função $f(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ exceto no ponto $z_0 = -1$ que, obviamente, é um polo simples, pois

$$f(z) = (z+1)^{-1} e^{-2\pi i \xi z} = (z+1)^{-1} h(z),$$

onde h é uma função holomorfa em todo $\mathbb{C}$, em particular, num disco centrado em $z_0 = -1$. Portanto

$$\text{res}_{-1} f = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} e^{-2\pi i \xi z} = e^{2\pi i \xi}. \quad (\text{A.14})$$

Considere o contorno Γ com a orientação adequada (ver Figura 17). Como f é holomorfa no interior de Γ , pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R-1}^{-1-\epsilon} f(x) dx \int_{C_{\epsilon}(-1)} f(z) dz + \int_{\epsilon-1}^{R-1} f(x) dx + \int_{C_R(-1)} f(z) dz. \quad (\text{A.15})$$

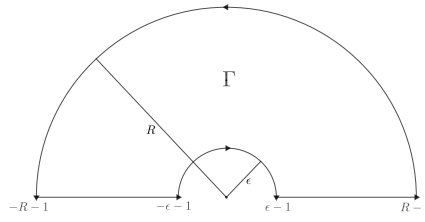


Figura 17 – Contorno Γ com orientação adequada e raio $R > 1$.

Os semi-círculos estão centrados em -1 , para simplificar a notação, denotaremos $C_R(-1)$ e $C_\epsilon(-1)$ simplesmente por C_R e C_ϵ , respectivamente. Assuma que $\xi < 0$ (o caso $\xi > 0$ é similar com o contorno na região negativa do eixo imaginário com a orientação adequada). Parametrizando C_R por $\gamma_{C_R}(\theta) = Re^{i\theta} - 1$, com $\theta \in [0, \pi]$, temos

$$\left| \int_{C_R} f(\gamma_{C_R}(\theta)) \gamma'_{C_R}(\theta) d\theta \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{-2\pi i \xi (Re^{i\theta} - 1)}}{1 + Re^{i\theta} - 1} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\pi \xi R \sin \theta} d\theta,$$

onde usamos a simetria $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$ na última desigualdade. Para $\theta \in [0, \pi/2]$, temos $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$, temos

$$\frac{2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\pi \xi R \sin \theta} d\theta \leq \frac{2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\pi \xi R \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{2}{R} \left[\frac{e^{4\xi R \theta}}{4\xi R} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{4\xi R^2} [e^{2\pi \xi R} - 1] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

pois $\xi < 0$. Pelo Teorema de resíduos, temos

$$\int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_{C_\epsilon} \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{1 + z} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{-1} f = 2\pi i e^{2\pi i \xi},$$

pois o polo $z_0 = -1$ está no interior de C_ϵ . Fazendo $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$ em (A.15), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{1 + x} dx = i\pi e^{2\pi i \xi}.$$

No contorno Γ' abaixo, note que a função seno é negativa, é necessário que $\xi > 0$ para que a integral sobre o semi-círculo se anule quando $R \rightarrow \infty$. Procedendo de forma análoga e usando o contorno da Figura 18 concluímos que

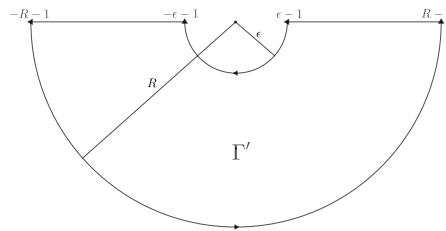


Figura 18 – Contorno Γ' com orientação adequada e raio $R > 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{1 + x} dx = -i\pi e^{2\pi i \xi}.$$

