



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Álgebras de Explosão e Birracionalidade

Liliane Silva Batista Vasconcelos

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2022.



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Álgebras de Explosão e Birracionalidade

Dissertação apresentada ao PROMAT da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Liliane Silva Batista Vasconcelos

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2022.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

B333a Vasconcelos, Liliane Silva Batista
Álgebras de explosão e birracionalidade / Liliane Silva Batista
Vasconcelos ; orientador Zaqueu Alves Ramos. – São Cristóvão,
2021.
57 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2021.

1. Matemática. 2. Álgebra. I. Ramos, Zaqueu Alves orient. II.
Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Álgebras de Explosão e Birracionalidade

por

Liliane Silva Batista Vasconcelos

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador

Prof. Dr. Thiago Henrique de Freitas - UTFPR
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB
Segundo Examinador

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Terceiro Examinador

São Cristóvão, 24 de Janeiro de 2022

Sumário

1	Álgebras Graduadas	7
1.1	Definições básicas	7
1.2	Álgebras bi-graduadas	11
2	Sizígias	13
2.1	Sequências exatas	13
2.2	Apresentação livre	14
2.3	Resolução livre	18
3	Álgebras de explosão	21
3.1	A álgebra de Rees	21
3.2	A fibra especial	25
3.3	Álgebra de Rees bi-graduada	26
4	Principais resultados	28
4.1	Matriz jacobiana dual	28
4.2	Matriz jacobiana Dual versus birracionalidade	29
4.3	Ideais de altura 2 com matriz de sizígias linear	34
5	Apêndice	38
5.1	Primos associados e decomposição primária	38
5.2	Dimensão de Krull	42
5.3	Grau de Transcendência	43
5.4	Sequência regular e módulos Cohen-Macaulay	44
5.4.1	Sequência regular	44
5.4.2	Módulos e anéis Cohen-Macaulay	46
5.5	Anéis normais	47

5.6	O critério de Normalidade de Serre	48
5.7	Critério jacobiano	49

Agradecimentos

À Deus por me permitir chegar até aqui, sem Ele nada seria possível. Agradeço à minha mãe Gilvanete por sempre me incentivar e acreditar no meu potencial e aos meus irmãos Lucas e Junior, vocês são minha base. Ao meu esposo Ronildo e ao meu filho Felipe por entenderem a minha ausência e me acolherem em meus momentos de angústia, amo vocês. Ao meu orientador Zaqueu Ramos pela paciência e dedicação na concretização desse trabalho, além de todo conhecimento ao longo dessa jornada. Aos professores do PROMAT, em especial ao professor Arlúcio, e aos colegas com quem puder trocar experiências e aprendizados durante esses dois anos de mestrado, em especial Ariane, minha parceira desde o início. Aos meus colegas de trabalho, em especial minha diretora Sara, pela compreensão nos momentos que precisei me ausentar. À todos meus familiares e amigos que contribuíram de alguma forma para a realização desse sonho, meu muito obrigada!

Resumo

A presente dissertação versa sobre a relação existente entre as equações dos ideais de apresentação das álgebras de explosão e o conceito de birracionalidade. Para atingir esse propósito fazemos dois capítulos de preliminares introduzindo as noções que atuam de maneira central no enunciado dos principais resultados do trabalho. Estes resultados consistem em uma versão fraca de um critério de birracionalidade devido a Dória-Hassanzadeh-Simis e Dória-Ramos-Simis e na aplicação deste critério para certos ideais de altura dois em um anel de polinômios em três variáveis.

Palavras Chave: Álgebra de Rees, fibra especial, birracionalidade, sizígias, álgebra graduada.

Abstract

This dissertation deals with the relationship between the equations of ideals for the presentation of explosion algebras and the concept of birationality. To achieve this purpose, we make two preliminary chapters introducing the notions that play a central role in the statement of the main results of the work. These results consist of a weak version of a birationality criterion due to Dória-Hassanzadeh-Simis and the application of this criterion to certain ideals of height two in a ring of polynomials in three variables.

Keywords: Rees algebra, special fiber, birationality, syzygy, graduated algebra.

Lista de símbolos

Símbolo	Descrição
$\ker \varphi$	núcleo de um homomorfismo φ
$\operatorname{Im} \varphi$	imagem de um homomorfismo φ
$\mathcal{R}(I)$	álgebra de Rees de um ideal I
$\mathcal{F}(I)$	fibra especial de um ideal I
$\operatorname{ht} I$	altura do ideal I
$\ell(I)$	analytic spread de um ideal I
$I_t(M)$	ideal gerado pelos menores de ordem t de uma matriz M
$\dim A$	dimensão de Krull de um anel A
$\deg \alpha$	grau de um elemento homogêneo α
$\operatorname{ann} M$	anulador do módulo M
$\dim M$	dimensão de Krull do módulo M
$\operatorname{grade}(I, M)$	grade do ideal I sobre o módulo M
$\operatorname{depth} M$	profundidade do módulo M
$\mu(M)$	número mínimo de geradores do módulo M

Introdução

Seja A um anel graduado standard com ideal maximal homogêneo $\mathfrak{m}$ e I um ideal homogêneo de A . Associado a esses dados, podemos considerar as seguintes álgebras:

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus I^i t^i \subset A[t] \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(I) = \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I), \quad (1)$$

onde t é uma indeterminada sobre A . Essas álgebras são chamadas, respectivamente, de *álgebra de Rees* e *fibra especial* do ideal I . Elas aparecem como realizações algébricas de certos objetos geométricos associados à explosão de uma variedade V ao longo de uma subvariedade U e, por essa razão, são chamadas comumente de *álgebras de explosão*.

Diversas informações sobre o ideal I e suas potências são codificadas nessas álgebras, como exemplo: número mínimo de geradores, sizíguas, normalidade, primos associados, etc. A origem dessas álgebras remontam a um artigo de David Rees (ver [14]) onde um dos objetivos foi provar o que hoje conhecemos como Lema de Artin-Rees. Desde a publicação desse artigo, o tema tem atraído a atenção de diversos pesquisadores. Algumas das questões que tem sido investigadas são

1. Quando estas álgebras são Cohen-Macaulay?
2. Como propriedades dessas álgebras, como Cohen-Macaulicidade, estão relacionadas.
3. Quais são as equações de definição dessas álgebras?
4. Dado formas $f_1, \dots, f_m$ de mesmo grau d em um anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, com $\mathbb{K}$ corpo, como as álgebras de explosão do ideal $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ atuam na birracionalidade da extensão $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m] \subset \mathbb{K}[x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d]$?

Nessa dissertação nos ocupamos de um modo particular nessa última questão. Precisamente, discutiremos uma versão fraca de [8, Theorem 2.18] que revela como a birracionalidade

lidade pode ser lida em termos das equações dos ideais de apresentação das álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$.

Descrevemos brevemente o roteiro seguido nesse trabalho.

Um fato básico sobre as álgebras de explosão é que elas são definidas acompanhadas de uma estrutura natural de *álgebra graduada*. Sob hipóteses adicionais no anel A e no ideal I , estas álgebras podem ser vistas também como *álgebras bi-graduadas*. O propósito do primeiro capítulo é explicar conceitos e propriedades básicas em torno da noção de álgebras graduadas e bi-graduadas.

Outro ingrediente fundamental no estudo das álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$ são as *sizígias* do ideal I . Assim, o objetivo no capítulo 2 é explicar sobre esse conceito. Enfatizamos de um modo especial o teorema de Hilbert-Burch, que determina por exemplo como são as sizígias de um ideal gerado pelos menores de uma matriz de ordem $(n + 1) \times n$. A aplicação que faremos do principal resultado dessa dissertação são em ideais desse tipo.

No capítulo 3 chegamos a definição das álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$. Mostramos como os conceitos apresentados nos capítulos anteriores se acomodam no estudo dessas álgebras.

No quarto e último capítulo enunciamos e provamos o principal resultado do trabalho. Além disso, o aplicamos para dizer sobre a birracionalidade de ideais gerados pelos menores máximos de uma matriz de ordem $(n + 1) \times n$ cujas entradas são formas lineares em um anel de polinômios em três variáveis.

Capítulo 1

Álgebras Graduadas

Os principais objetos de estudo nessa dissertação são as *álgebra de explosão* de um ideal. Elas são álgebras produzidas a partir de um par (A, I) , onde A é um anel e I é um ideal de A . Para qualquer par (A, I) estas álgebras são concebidas com uma estrutura de *álgebra graduada*. Essa característica intrínseca das álgebras de explosão são vitais em seus estudos. O objetivo dessa seção é fornecer alguns preliminares sobre os conceitos de álgebras graduadas e bi-graduadas que serão pertinentes para a discussão que faremos em torno das álgebras de explosão.

1.1 Definições básicas

Seja A um anel. Uma A -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada é uma A -álgebra S com uma decomposição em soma direta de grupos aditivos

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i \quad (1.1)$$

tal que $S_0 = A$ e $S_i S_j \subset S_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Observe, em particular, que cada S_i é um A -módulo. Cada A -módulo S_i é chamado de *componente* ou *parte homogênea de grau i* de S . A decomposição (1.1) é chamada de uma $\mathbb{Z}$ -graduação de S . Cada elemento $a \in S_i$ é chamado de *elemento homogêneo de grau i* (usaremos a notação $\deg a := i$ para dizer que a é elemento homogêneo de grau i). Segue por definição que cada elemento $b \in S$ se escreve de forma única como soma finita de elementos homogêneos, ou seja,

$$b = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

onde cada α_i é homogêneo de grau i e cada α_i é unicamente determinado.

Exemplo 1.1.1. Seja A um anel e S o anel de polinômios $A[x_1, \dots, x_n]$. Fixemos uma n -upla de números inteiros $(d_1, \dots, d_n)$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ defina S_i sendo o A -módulo gerado por todos os monômios $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ tais que $\alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_n d_n = i$. Temos que

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$$

é uma S_0 álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada tal que $A \subset S_0$ e $\deg x_i = d_i$ ($1 \leq i \leq n$). Pode ser demonstrado que esta é a única $\mathbb{Z}$ -gradação do anel de polinômios S com essa propriedade. Observe que quando $d_1, \dots, d_n \geq 0$ então $A = S_0$. Além disso, quando $d_1 = \dots = d_n = 1$ temos a gradação usual do anel de polinômios $S = A[x_1, \dots, x_n]$.

Exemplo 1.1.2. Seja A um anel. Considere o anel de polinômios $S = A[x_1, x_2, x_3]$ equipado com a gradação usual. Seja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 + x_2 x_3^3 + x_2^2 + 4$ um polinômio de S . A decomposição de f como soma de elementos homogêneos é:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

onde $f_0 = 4$, $f_1 = x_1$, $f_2 = x_2^2$, $f_3 = 0$ e $f_4 = x_1^2 x_2 x_3 + x_2 x_3^3$.

Entre as álgebras graduadas, são de interesse especial as da seguinte definição.

Definição 1.1.3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma $\mathbb{K}$ -álgebra

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$$

é chamada de $\mathbb{K}$ -álgebra graduada standard se $S_i = 0$ para $i < 0$ e S é gerada como $\mathbb{K}$ -álgebra pela parte homogênea de grau 1 (i.e., $S = \mathbb{K}[S_1]$).

Dada uma A -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$, diremos que um ideal I de S é um *ideal homogêneo* (ou *ideal graduado*) se $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (I \cap S_i)$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, chamaremos o A -módulo $I \cap S_i$ de componente homogênea (ou parte homogênea) de grau i do ideal I e a denotaremos por I_i .

Uma caracterização muito útil para saber quando um ideal de uma anel graduado é homogêneo é fornecida pela seguinte proposição.

Proposição 1.1.4. Seja A um anel e $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ uma A -álgebra $\mathbb{N}$ -graduada. Se I é um ideal de S então as seguintes condições são equivalentes:

(a) I é um ideal homogêneo;

(b) I contém um conjunto de geradores formado por elementos homogêneos.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Fazendo $B = \bigcup S_i \cap I$ segue que B é um conjunto formado por elementos homogêneos e que gera I .

(b) $\Rightarrow$ (a) Digamos que B é um conjunto de geradores homogêneos de I . Precisamos provar que $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (I \cap S_i)$. A inclusão $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (I \cap S_i) \subset I$ é imediata. Para a inclusão contrária, considere $\alpha \in I$. Temos que α se escreve de forma única como $\alpha = \alpha_m + \alpha_{m-1} + \dots + \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, onde m, n são certos número inteiros e $\alpha_i \in S_i$ para cada $m \leq i \leq n$. Por outro lado, usando o fato de que B gera I temos

$$\alpha = a_m b_m + \dots + a_n b_n \quad (1.2)$$

onde $a_i \in S$ e $b_i \in B$ para cada $m \leq i \leq n$. Como podemos inserir em (1.2) parcelas da forma $a \cdot 0$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que cada b_i é elemento homogêneo de grau i . Escrevamos cada coeficiente a_i de (1.2) da seguinte maneira

$$a_i = \sum_{j=r_i}^{s_i} a_{ij}$$

onde $a_{ij} \in S_j$. Então,

$$\alpha = \left(\sum_{j=0}^{s_1} a_{0j} \right) b_0 + \dots + \left(\sum_{j=0}^{s_m} a_{mj} \right) b_m = \left(\sum_{i+j=0} a_{ij} b_i \right) + \left(\sum_{i+j=1} a_{ij} b_i \right) + \dots$$

Pela unicidade da escrita de α como soma de elementos homogêneos segue que

$$\alpha_m = \sum_{i+j=m} a_{ij} b_i, \dots, \alpha_n = \sum_{i+j=n} a_{ij} b_i.$$

Em particular, cada $\alpha_i \in I \cap S_i$. Logo, $\alpha \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} I \cap S_i$. Portanto, $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} I \cap S_i$ como queríamos provar. $\square$

Observe que dados uma A -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada S e um ideal homogêneo I de S temos que o anel quociente S/I tem estrutura natural de A -álgebra graduada dada pela decomposição:

$$S/I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i/I_i.$$

Sejam $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ e $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ duas álgebras $\mathbb{Z}$ -graduadas. Um homomorfismo de A -álgebras $\varphi : S \rightarrow R$ é chamado um homomorfismo de A -álgebras graduadas se preserva grau, ou seja, se $\varphi(S_i) \subset R_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.5. Seja $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ uma A -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada. Dada uma A -subálgebra S' de S , denotemos $S'_i = S_i \cap S'$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Dizemos que S' é uma A -subálgebra $\mathbb{Z}$ -graduada se $S' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S'_i$.

Naturalmente, uma A -subálgebra $\mathbb{Z}$ -graduada é em si uma A -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada.

Exemplo 1.1.6. Seja $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ uma A -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada. Suponha $b_1, \dots, b_n$ elementos homogêneos de S de grau d . A A -subálgebra $S' = A[b_1, \dots, b_n]$ de S é um A -subálgebra $\mathbb{Z}$ -graduada de S . De fato, seja $g \in A[b_1, \dots, b_n]$. Então, $g = f(b_1, \dots, b_n)$ para algum $f \in A[x_1, \dots, x_n]$. Escrevamos f como soma de polinômios homogêneos

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_r.$$

Avaliando f nos geradores $b_1, \dots, b_n$ temos que

$$f(b_1, \dots, b_n) = f_0(b_1, \dots, b_n) + f_1(b_1, \dots, b_n) + f_2(b_1, \dots, b_n) + \dots + f_r(b_1, \dots, b_n).$$

Notadamente, $f_i(b_1, \dots, b_n) \in S_{id} \cap A[b_1, \dots, b_n]$ para cada $1 \leq i \leq r$ e isso nos permite concluir a igualdade $S' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S'_i$.

Proposição 1.1.7. Sejam $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ e $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ duas A -álgebras $\mathbb{Z}$ -graduadas e $\varphi : S \rightarrow R$ um homomorfismo de A -álgebras graduadas. Então:

(a) $\text{Im} \varphi$ é A -subálgebra $\mathbb{Z}$ -graduada de R .

(b) $\ker \varphi$ é um ideal homogêneo de S .

Demonstração. (a) A inclusão $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R_i \cap \text{Im} \varphi) \subset \text{Im} \varphi$ é imediata. Assim, resta-nos mostrar a inclusão contrária. Para isso, considere x um elemento na imagem de φ . Então, $x = \varphi(r)$ para algum r em S . Como S é A -álgebra graduada, podemos escrever r da seguinte maneira:

$$r = r_0 + r_1 + \dots + r_s$$

onde, $r_i \in S_i$ para cada $1 \leq i \leq s$. Em particular,

$$x = \varphi(r) = \varphi(r_0) + \varphi(r_1) + \dots + \varphi(r_s),$$

pois φ é homomorfismo. Além disso, como φ é homomorfismo de A -álgebras $\mathbb{Z}$ -graduadas, temos $\varphi(r_i) \in R_i$ para cada $1 \leq i \leq s$. Logo, $x \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R_i \cap \text{Im } \varphi)$. Portanto, também temos a inclusão $\text{Im } \varphi \subset \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R_i \cap \text{Im } \varphi)$, o que nos permite concluir a afirmação desejada.

(b) Seja $r = r_0 + r_1 + \cdots + r_s \in \ker \varphi$, com $r_i \in S_i$. Então:

$$\varphi(r) = \varphi(r_0 + r_1 + \cdots + r_s) = 0.$$

Como φ é homomorfismo de A -álgebras graduadas temos que:

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + \varphi(r_1) + \cdots + \varphi(r_s) = 0.$$

Assim, $\varphi(r_i) = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, pois a soma é direta. Desse modo, concluímos o desejado. $\square$

1.2 Álgebras bi-graduadas

Seja A um anel. Uma A -álgebra bi-graduada é uma A -álgebra S com uma decomposição em soma direta de grupos aditivos

$$S = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} S_{(i,j)} \quad (1.3)$$

tal que $S_{(0,0)} = A$ e $S_{(i,j)} S_{(i',j')} \subset S_{(i+i',j+j')}$ para cada $(i,j), (i',j') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.2.1. Seja A um anel e S o anel de polinômios $A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ (onde $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_m\}$ são dois conjuntos de variáveis disjuntos). Dados

$$(d_1, d'_1), \dots, (d_n, d'_n), (e_1, e'_1), \dots, (e_m, e'_m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

defina $S_{(i,j)}$ sendo o A -módulo gerado por todos os monômios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}$ tais que

$$\alpha_1(d_1, d'_1) + \cdots + \alpha_n(d_n, d'_n) + \beta_1(e_1, e'_1) + \cdots + \beta_m(e_m, e'_m) = (i, j).$$

Temos que

$$S = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} S_{(i,j)}$$

é uma S_0 álgebra bi-graduada tal que (i) $A \subset S_{(0,0)}$, (ii) $\deg x_i = (d_i, d'_i)$ ($1 \leq i \leq n$) e (iii) $\deg y_i = (e_i, e'_i)$ ($1 \leq i \leq m$). Pode ser demonstrado que esta é a única bi-graduação do anel de polinômios S satisfazendo (i), (ii) e (iii). Quando $\deg x_i = (1, 0)$ ($1 \leq i \leq n$) e $\deg y_i = (0, 1)$ ($1 \leq i \leq m$) temos a bi-graduação usual do anel de polinômios S .

Os conceitos e resultados sobre álgebras bi-graduadas se assemelham aos que tínhamos para álgebras graduadas. Podemos falar por exemplo de: componente bi-homogênea, elemento bi-homogêneo, ideais bi-homogêneos, homomorfismos de álgebras bi-graduadas, etc.

Para efeito de citação, enunciamos a seguinte proposição cuja demonstração é uma simples adaptação da prova da Proposição 1.1.7.

Proposição 1.2.2. *Sejam $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} S_i$ e $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} R_i$ duas A -álgebras bi-graduadas e $\varphi : S \rightarrow R$ um homomorfismo de A -álgebras bi-graduadas. Então:*

- (a) $\text{Im} \varphi$ é A -subálgebra bi-graduada de R .
- (b) $\ker \varphi$ é um ideal bi-homogêneo de S .

Capítulo 2

Sizígias

No estudo das álgebras de explosão um conceito muito importante é o de *sizígia*. É através da matriz de sizígias que obtemos uma primeira aproximação para o ideal de definição da álgebra de Rees. Nesse capítulo apresentaremos diversos conceitos e resultados relacionados a noção de sizígia com ênfase especial ao *teorema de Hilbert-Burch*. Esse é um resultado central nesse trabalho pois fornece a estrutura dos ideais que iremos abordar.

2.1 Sequências exatas

Seja A um anel. Uma sequência finita ou infinita de homomorfismos de A -módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots$$

é chamada de *sequência exata* se $\text{Im} \varphi_{i+1} = \ker \varphi_i$ para cada i .

Alguns fatos básicos sobre sequências exatas estão contidos na seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *Sejam M e N módulos sobre um anel A . Então:*

- (a) *A sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ é exata se, e somente se, φ é homomorfismo injetor.*
- (b) *A sequência $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, φ é homomorfismo sobrejetor.*
- (c) *A sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, φ é isomorfismo.*

Demonstração. (a) Suponhamos que a sequência $0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ é exata. Então $\ker \varphi = \text{Im}(0 \rightarrow M) = 0$. Logo, φ é um homomorfismo injetor. Reciprocamente, suponhamos que

φ seja um homomorfismo injetor. Então $\ker \varphi = 0 = \text{Im}(0 \rightarrow M)$. Portanto, a sequência $0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ é exata.

(b) Suponhamos que a sequência $M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$ é exata. Então $\text{Im} \varphi = \ker(N \rightarrow 0) = N$. Portanto, φ é um homomorfismo sobrejetor. Reciprocamente, suponhamos que φ seja um homomorfismo sobrejetor. Então $\text{Im} \varphi = N = \ker(N \rightarrow 0)$. Portanto, a sequência $M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$ é exata.

(c) Pelos itens (a) e (b) acima, φ é um homomorfismo injetor e sobrejetor. Logo, φ é um isomorfismo. $\square$

2.2 Apresentação livre

Definição 2.2.1. Seja M um A -módulo. Uma *apresentação livre* de M é uma sequência exata

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde F_1 e F_0 são A -módulos livres.

Uma pergunta óbvia é se todo módulo admite uma apresentação livre. A resposta para essa questão é o conteúdo do seguinte resultado:

Proposição 2.2.2. *Todo A -módulo possui uma apresentação livre.*

Demonstração. Sejam M um A -módulo e S um conjunto de geradores para M . Defina F_0 sendo o A -módulo livre cujos elementos da base são indexados pelos elementos de S . Digamos que $\{e_s\}_{s \in S}$ seja uma base para F_0 . Então, podemos considerar o seguinte homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_0 : F_0 \twoheadrightarrow M, e_s \mapsto s$$

Assim, pela Proposição 2.1.1(b), temos estabelecido a seguinte sequência exata:

$$F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

Agora consideremos $Z := \ker \varphi_0 \subset F_0$. Repetindo o argumento anterior, substituindo M por Z , podemos encontrar um homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_1 : F_1 \twoheadrightarrow Z \subset F_0$$

onde F_1 é um A -módulo livre com base indexada por um conjunto de geradores de Z . Com isso, temos que a sequência

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é exata com F_1 e F_0 sendo A -módulos livres. Portanto, o resultado segue. $\square$

Nesse trabalho estamos particularmente interessados na situação em que A é um anel Noetheriano e M é A -módulo finitamente gerado (portanto, também Noetheriano). Nesse contexto, na prova da proposição acima poderíamos ter suposto M e Z gerados por conjuntos finitos $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $S' = \{u_1, \dots, u_m\}$, respectivamente. Assim, a apresentação livre de M se escreve como:

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

Portanto, para módulos finitamente gerados sobre anéis Noetherianos sempre teremos uma apresentação em que os módulos livres são de posto finito.

Notação: Doravante, utilizaremos e_i para denotar o i -ésimo vetor da base canônica de um módulo livre de posto finito. Mesmo quando estivermos lidando com dois A -módulos livres não faremos distinção de letra. Tipicamente, ficará bem entendido pelo contexto qual módulo livre e_i pertence.

Na sequência exibiremos dois exemplos para explicar na prática como apresentações livres podem ser obtidas.

Exemplo 2.2.3. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y]$. Considere o ideal $I = \langle x, y \rangle \subset A$. De acordo com o que vimos acima, para obter uma apresentação livre de I consideramos inicialmente o homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_0 : A^2 \twoheadrightarrow I, \quad e_1 \mapsto x, \quad e_2 \mapsto y$$

Em seguida calculamos geradores para $Z := \ker \varphi_0$. No caso presente, afirmamos que $Z = \langle (y, -x) \rangle$. Observamos que a inclusão $Z \supset \langle (y, -x) \rangle$ é imediata. Para, mostrar a inclusão contrária, considere $u = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z$. Então, $\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$. Equivalentemente, $\alpha_1 x = -\alpha_2 y$. Dessa igualdade e do fato que y é elemento primo em A segue que $\alpha_1 = py$ para algum $p \in A$. Fazendo a substituição de $\alpha_1 = py$ na igualdade $\alpha_1 x = -\alpha_2 y$ e efetuando os devidos cancelamentos obtemos $\alpha_2 = -px$. Logo, $u = p \cdot (y, -x)$, ou seja,

$u \in \langle (y, -x) \rangle$. Como consequência, $Z = \langle (y, -x) \rangle$ conforme afirmado. Em particular,

$$\varphi_1 : A^1 \longrightarrow A^2, \quad 1 \longmapsto (y, -x)$$

é um homomorfismo cuja imagem é $\ker \varphi_0$. Portanto, uma apresentação livre de I é

$$A^1 \xrightarrow{\varphi_1} A^2 \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0.$$

Exemplo 2.2.4. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle \subset A$. Assim como no exemplo anterior, iniciamos considerando o homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_0 : A^3 \twoheadrightarrow I, \quad e_1 \mapsto xy, \quad e_2 \mapsto xz, \quad e_3 \mapsto yz.$$

Nesse caso, dado $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in A^3$ temos $\varphi_0(u) = \alpha xy + \beta xz + \gamma yz$. Afirmamos que $Z := \ker \varphi_0$ é gerado pelos vetores $v_1 = (0, y, -x)$ e $v_2 = (z, 0, -x)$. A inclusão $\langle v_1, v_2 \rangle \subset Z$ é um cálculo direto. Para a inclusão contrária considere $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in Z$. Então $\alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$. Equivalentemente, $\alpha xy = -z(\beta x + \gamma y)$. Como z é elemento primo de A segue que $\alpha = pz$ para algum $p \in A$. Substituindo essa expressão de α na igualdade $\alpha xy = -z(\beta x + \gamma y)$ e efetuando os devidos cancelamentos obtemos $pxy = -\beta x - \gamma y$. Por conseguinte, essa igualdade pode ser reescrita como $\beta x = -y(px + \gamma)$. Agora, dessa igualdade e da primalidade de y em A segue que $\beta = qy$ para algum $q \in A$. Substituindo essa expressão de β em $\beta x = -y(px + \gamma)$ e efetuando cancelamentos obtemos $qx = -px - \gamma$, ou seja, $\gamma = -(q + p)x$. Assim, temos

$$u = (\alpha, \beta, \gamma) = (pz, qy, -(q + p)x) = q \cdot (0, y, -x) + p \cdot (z, 0, -x) = qv_1 + pv_2.$$

Logo, $u \in \langle v_1, v_2 \rangle$. Consequentemente, $Z = \langle v_1, v_2 \rangle$. Finalmente, considerando o homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_1 : A^2 \twoheadrightarrow A^3, \quad e_1 \mapsto v_1, \quad e_2 \mapsto v_2$$

cujas imagens são v_1 e v_2 segue que uma apresentação livre de I é

$$A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0.$$

Definição 2.2.5. Sejam A um anel e M um A -módulo finitamente gerado. Considere

$\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ um conjunto de geradores de M . O núcleo Z do homomorfismo sobrejetor

$$\varphi : A^n \twoheadrightarrow M, \quad e_i \mapsto u_i$$

é chamado de *módulo de sizígias* do módulo M com respeito ao conjunto de geradores $\mathbf{u}$. Em resumo:

$$Z = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n \mid \alpha u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0\}. \quad (2.2)$$

Cada elemento em Z é chamado uma *sizígia* de M com respeito ao conjunto de geradores $\mathbf{u}$.

Digamos que o módulo de sizígias Z é finitamente gerado e $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_m\}$ é um conjunto de geradores de Z . Como visto acima, ao considerarmos o homomorfismo sobrejetor

$$\psi : A^m \twoheadrightarrow Z, \quad e_i \mapsto v_i$$

temos a apresentação livre

$$A^m \xrightarrow{\psi} A^n \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0.$$

Em particular, como ψ é um homomorfismo de A -módulos livres, podemos considerar sua representação matricial com respeito as bases canônicas de A^m e A^n . É usual, e assim o faremos aqui, identificar essa matriz com o próprio homomorfismo ψ . Essa matriz é chamada uma *matriz de sizígias* do módulo M com respeito ao conjunto de geradores $\mathbf{u}$. Notadamente, ψ é uma matriz de ordem $n \times m$ onde a j -ésima coluna corresponde à transposta do vetor $v_j = \psi(e_j)$.

Exemplo 2.2.6. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. No Exemplo 2.2.4 vimos que um conjunto de geradores para o módulo de sizígias Z do ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle \subset A$ (com respeito ao conjunto de geradores xy, xz, yz) é $\{(0, y, -x), (z, 0, -x)\}$. Nesse caso, uma matriz de sizígias para o ideal I (com respeito ao conjunto de geradores xy, xz, yz) é:

$$\begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \\ -x & -x \end{pmatrix}$$

Observação 2.2.7. (a) Seja A um anel e I um ideal de A . Considere $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ um conjunto de geradores de I . Um conjunto óbvio de sizígias do ideal I com respeito ao conjunto de geradores $\mathbf{f}$ é: $\mathcal{K}(\mathbf{f}) = \{f_i e_j - f_j e_i \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Cada elemento de $\mathcal{K}(\mathbf{f})$ é

chamado de *sizígia de Koszul* do ideal I com respeito ao conjunto de geradores $\mathbf{f}$. Tipicamente, as sizíguas de Koszul não são suficientes para gerar todo o módulo de sizíguas (esse fenômeno pode ser observado no Exemplo 2.2.6). Contudo, existem alguns ideais importantes que admitem conjuntos de geradores cujas sizíguas de Koszul são suficientes para gerar todo o módulo de sizíguas. Esse é o caso dos ideais que são gerados por sequências regulares¹. Precisamente, pode-se verificar que se I é gerado por uma sequência regular $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ então o módulo de sizíguas de I com respeito ao conjunto de geradores $\mathbf{f}$ é $\mathcal{K}(\mathbf{f})$ (ver [16, Corollary 6.3.9]).

(b) Seja $\varphi = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $(m+1) \times m$ com entradas em um anel A . Nesse trabalho estaremos interessados de um modo particular no ideal $I = I_m(\varphi)$. Considere $c = (a_{1,j} \cdots a_{m+1,j})^t$ a j -ésima coluna da matriz φ . A concatenação $[c \mid \varphi]$ é uma matriz quadrada de ordem $m+1$ com duas colunas iguais. Assim, $\det[c \mid \varphi] = 0$. Desenvolvendo esse determinante por Laplace ao longo da primeira coluna obtemos a seguinte relação:

$$a_{1j}\Delta_1 + \cdots + a_{(m+1)j}\Delta_{m+1} = 0$$

onde Δ_i é o m -menor da matriz φ obtido pela omissão da i -ésima linha multiplicado por $(-1)^{i+1}$. Essa relação nos diz que as colunas de φ são sizíguas do ideal $I = I_{n-1}(\varphi)$ com respeito ao conjunto de geradores $\Delta_1, \dots, \Delta_{m+1}$. Cabe aqui a pergunta de quando é o caso de φ já ser a matriz de sizíguas. Veremos a resposta para essa pergunta na próxima seção.

2.3 Resolução livre

Definição 2.3.1. Sejam A um anel e M um A -módulo. Uma *resolução livre* de M é uma sequência exata da forma

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

onde F_i é um A -módulo livre para cada $i \geq 0$.

A resolução livre $F_\bullet$ é chamada *finita* se existe um número natural n tal que $F_i = 0$ para cada $i > n$. Em tal caso escrevemos a resolução $F_\bullet$ como

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0.$$

¹ver definição de sequência regular em Definição 5.4.1

Uma resolução livre que não é finita é chamada de resolução livre *infinita*.

A seguir apresentamos exemplos ilustrando resoluções livres dos dois tipos, finita e infinita.

Exemplo 2.3.2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$ considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Pelo Exercício 2.2.4 temos a seguinte sequência exata:

$$A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0.$$

onde $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2 z, \alpha_1 y, -(\alpha_1 + \alpha_2)x)$ para cada $(\alpha_1, \alpha_2) \in A^2$. Em particular,

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \ker \varphi_1 \Leftrightarrow \alpha_2 z = \alpha_1 y = -(\alpha_1 + \alpha_2)x = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Logo, $\ker \varphi_1 = 0$. Desse modo, temos a resolução livre finita de I

$$0 \rightarrow A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0.$$

Exemplo 2.3.3. Seja $A = \mathbb{K}[x]/\langle x^2 \rangle$ e $I = \langle \bar{x} \rangle \subset A$. Considere o seguinte homomorfismo de A -módulos:

$$\varphi : A \rightarrow A, \quad \varphi(x) = \bar{\alpha}\bar{x}$$

Observe que $\text{Im}(\varphi) = I$. Além disso,

$$\bar{\alpha} \in \ker \varphi \Leftrightarrow \bar{\alpha}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha x \in \langle x^2 \rangle \Leftrightarrow \alpha \in \langle x \rangle \Leftrightarrow \bar{\alpha} \in \langle \bar{x} \rangle.$$

Assim, $\ker \varphi = I$. Por fim, usando o fato de que $\text{Im}(\varphi) = \ker \varphi = I$ segue que

$$\cdots \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} I \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre infinita do A -módulo I .

A seguir enunciamos uma versão fraca de um celebrado resultado em álgebra comutativa, o *teorema de Hilbert-Burch*. Esse é um resultado que caracteriza resolução livre de uma classe de ideais muito especial. Tais ideais são os principais objetos desse trabalho.

Teorema 2.3.4 (Hilbert-Burch). *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Se I é ideal de A com uma resolução livre*

$$0 \rightarrow A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \rightarrow I \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

então existe um elemento $a \in A$, regular em A , tal que $I = aI_n(\varphi)$. Se $I_n(\varphi) \neq A$ então $I_n(\varphi)$ é Cohen-Macaulay de altura 2. Reciprocamente, se $\varphi : A^n \rightarrow A^{n+1}$ é um homomorfismo de A -módulos com $\text{ht } I_n(\varphi) \geq 2$ então $I = I_n(\varphi)$ tem (2.4) como resolução livre.

Demonstração. Ver [16, Theorem 6.2.32]. □

Revisitaremos agora o Exemplo 2.3.2 à luz do teorema de Hilbert-Burch.

Exemplo 2.3.5. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Consideremos mais uma vez o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Observe que os geradores de I são os 2-menores ordenados e com sinal da matriz

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \\ -x & -x \end{pmatrix},$$

ou seja, $I = I_2(\varphi)$. Além disso, $\text{ht } I = 2$. Assim, de acordo com a recíproca do teorema de Hilbert-Burch segue que a resolução do ideal I é

$$0 \rightarrow A^2 \xrightarrow{\varphi} A^3 \rightarrow I \rightarrow 0.$$

Capítulo 3

Álgebras de explosão

Nesse capítulo apresentamos finalmente a definição das álgebras de explosão. Mostraremos como os conceitos trabalhados nos capítulos anteriores se acomodam no contexto dessas álgebras.

3.1 A álgebra de Rees

Sejam A um anel e $I \subseteq A$ um ideal. Associado ao par (A, I) podemos considerar o seguinte A -submódulo do anel de polinômios $A[t]$:

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n = A + It + \cdots + I^n t^n + \cdots \subseteq A[t].$$

Segue das propriedades de potências de ideais que $(I^i t^i)(I^j t^j) = I^{i+j} t^{i+j}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Em particular, $\mathcal{R}(I)$ tem estrutura A -subálgebra $\mathbb{Z}$ -graduada de $A[t]$ onde a i -ésima componente homogênea $\mathcal{R}(I)_i$ é o A -módulo $I^i t^i$. Chamamos $\mathcal{R}(I)$ de *álgebra de Rees* do ideal I .

Observação 3.1.1. Observe que se o anel base A é um domínio então $\mathcal{R}(I)$ é um subanel do domínio $A[t]$. Portanto, $\mathcal{R}(I)$ é domínio sempre que A for domínio.

Um primeiro fato importante da álgebra de Rees tem a ver com sua dimensão. Ela é determinada de acordo com o seguinte teorema

Teorema 3.1.2. *Seja A um anel Noetheriano cuja dimensão de Krull é finita. Se I é um*

ideal de A então

$$\dim \mathcal{R}_A(I) = \begin{cases} \dim A + 1, & \text{se } I \not\subseteq P \text{ para algum ideal primo } P \\ & \text{com } \dim A/P = \dim A. \\ \dim A, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova. Ver [10, Theorem 5.1.4]. □

Notemos que se I é finitamente gerado, digamos por $f_1, \dots, f_m$, então cada elemento de $I^i t^i$ se escreve da forma

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = i} \alpha_\alpha (f_1 t)^{\alpha_1} \dots (f_m t)^{\alpha_m}$$

com cada α_α em A . Em particular, segue que $f_1 t, \dots, f_m t$ é um conjunto de geradores de $\mathcal{R}(I)$ como A -álgebra, ou seja, a seguinte igualdade tem lugar:

$$\mathcal{R}(I) = A[f_1 t, \dots, f_m t]. \quad (3.1)$$

Desse modo, podemos considerar o seguinte homomorfismo sobrejetor de A -álgebras graduadas

$$\zeta : A[t_1, \dots, t_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}(I), \quad t_i \mapsto f_i t \quad (1 \leq i \leq m). \quad (3.2)$$

Segue da Proposição 1.1.7 o seguinte fato:

Fato 2. O núcleo $\mathcal{J}$ do homomorfismo ζ é um ideal homogêneo de $A[t_1, \dots, t_m]$.

Este ideal homogêneo $\mathcal{J}$ é chamado de *ideal de apresentação* (ou *ideal de definição*) da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ com respeito ao conjunto de geradores $f_1, \dots, f_m$. Através do primeiro teorema dos isomorfismos temos a seguinte forma de expressar a álgebra de Rees de I :

$$\mathcal{R}(I) \simeq A[t_1, \dots, t_m]/\mathcal{J}. \quad (3.3)$$

Observação 3.1.3. Segue do isomorfismo (3.3) e da Observação 3.1.1 que o ideal de apresentação da álgebra de Rees é um ideal primo sempre que o anel base A for um domínio.

Um problema muito importante no estudo da álgebra de Rees diz respeito a determinação de geradores para o ideal $\mathcal{J}$. Encontramos na literatura diversos trabalhos dedicados a esse tipo de problema (ver por exemplo [15], [11], [1], [9], [4]).

Um ponto de partida usual para abordar o problema de encontrar geradores para o ideal $\mathcal{J}$ se baseia na análise de certos elementos de $\mathcal{J}$ que surgem a partir da matriz de sizígias do ideal I . Na proposição a seguir explicamos de forma precisa como esses elementos de $\mathcal{J}$ são obtidos.

Proposição 3.1.4. *Seja $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ um ideal em um anel Noetheriano A . Seja φ a matriz de sizígias de I com respeito ao conjunto de geradores $f_1, \dots, f_m$. Denote por $\mathbf{t}$ a matriz $[t_1 \cdots t_m]$. Então $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi)$ está contido no ideal de apresentação $\mathcal{J}$ da álgebra de Rees de I com respeito ao conjunto de geradores $f_1, \dots, f_m$.*

Prova. Digamos que $\varphi = (a_{ij})_{m \times n}$. Então, da definição de matriz de sizígias segue que

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i t = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} t_i \in \mathcal{J} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Assim, $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi) = \langle \sum_{i=1}^m a_{i,1} t_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{i,n} t_i \rangle \subset \mathcal{J}$ como desejado. $\square$

A seguir fazemos em detalhes um exemplo onde a inclusão mencionada na Proposição 3.1.4 é uma igualdade.

Exemplo 3.1.5. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Como visto no Exemplo 2.2.6, uma matriz de sizígias para o ideal I é

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \\ -x & -x \end{pmatrix}.$$

Assim, pela Proposição 3.1.4 segue que

$$I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi) = \langle t_2 y - t_3 x, t_1 z - t_3 x \rangle \subset \mathcal{J}. \quad (3.4)$$

Afirmamos que esta inclusão é uma igualdade. Pelo Teorema 3.1.2,

$$\dim \mathcal{R}(I) = \dim A + 1 = 4.$$

Como $\mathcal{R}(I) \simeq A[t_1, t_2, t_3]/\mathcal{J}$ então, pelo Teorema 5.4.8(c), segue que

$$\text{ht } \mathcal{J} = \dim A[t_1, t_2, t_3] - \dim \mathcal{R}(I) = 6 - 4 = 2.$$

Por outro lado $G_1 := t_2y - t_3x$, $G_2 := t_1z - t_3x$ são elementos irredutíveis e distintos de $A[t_1, t_2, t_3]$, logo $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi) = \langle G_1, G_2 \rangle$ é um ideal de altura 2. Assim, (3.4) é uma inclusão de ideais de mesma altura. Além disso, $\mathcal{J}$ é ideal primo (ver Observação 3.1.3). Dessa forma, para concluir a igualdade afirmada é suficiente provar que $\langle G_1, G_2 \rangle$ é ideal primo, ou equivalentemente, que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é um domínio. Como G_1, G_2 é sequência regular em $A[t_1, t_2, t_3]$ e $A[t_1, t_2, t_3]$ é Cohen-Macaulay segue pelo Teorema 5.4.8(a) que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ também é Cohen-Macaulay. Em particular, $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ satisfaz a condição S_2 de Serre. A matriz Jacobiana de $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ sobre $\mathbb{K}$ é:

$$\Theta = \begin{bmatrix} -t_3 & t_2 & 0 & 0 & y & -x \\ -t_3 & 0 & t_1 & z & 0 & -x \end{bmatrix}$$

Assim, o ideal Jacobiano de $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ sobre $\mathbb{K}$ é:

$$\begin{aligned} J &= \langle I_2(\Theta), G_1, G_2 \rangle / \langle G_1, G_2 \rangle \\ &= \langle t_2t_3, t_1t_3, zt_3, yt_3, t_1t_2, t_2z, t_2x, t_1y, t_1x, I, G_1, G_2 \rangle / \langle G_1, G_2 \rangle \end{aligned}$$

Logo, $\langle t_1t_2, t_2t_3, t_1t_3, I \rangle / \langle G_1, G_2 \rangle \subset J$ é um ideal de altura dois contido em J . Desse modo, $\text{ht } J \geq 2$. Com isso, segue da Observação 5.7.4 que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ também satisfaz a condição R_1 de Serre. Consequentemente, $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é um anel normal. Como $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é anel graduado normal segue pela Observação 5.5.5 que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é domínio. Concluimos com isso a prova da afirmação.

Exemplos como esse são muito especiais e são o conteúdo da seguinte definição.

Definição 3.1.6. Considere as notações e hipóteses da Proposição 3.1.4. Dizemos que o ideal I é de *tipo linear* se $\mathcal{J} = I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi)$.

3.2 A fibra especial

Denotemos por $(A, \mathfrak{m})$ um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ ou um anel graduado standard com ideal maximal homogêneo $\mathfrak{m}$. Considere $I \subset \mathfrak{m}$ um ideal de A (quando A for uma $\mathbb{K}$ -álgebra graduada standard iremos supor I um ideal homogêneo). A *fibra especial* de I , é a seguinte álgebra residual da álgebra de Rees:

$$\mathcal{F}(I) := \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) = (A/\mathfrak{m}) \oplus (I/\mathfrak{m}I) \oplus (I^2/\mathfrak{m}I^2) \oplus \cdots \quad (3.5)$$

Segue da definição que a fibra especial $\mathcal{F}(I)$ é uma $\mathbb{K}$ -álgebra graduada, onde $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$. Observe que se $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ então $\mathcal{F}(I)$ é gerado como $\mathbb{K}$ -álgebra pelas classes $f_1^*, \dots, f_m^* \in I/\mathfrak{m}I$ de $f_1, \dots, f_m$, respectivamente. Além disso o ideal $\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ é imagem do ideal $\mathfrak{m}A[t_1, \dots, t_m]$ pelo homomorfismo ζ em (3.2). Desse modo, também temos a seguinte forma de apresentar a fibra especial.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I) &= \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \\ &\simeq (A[t_1, \dots, t_m]/\mathcal{J})/((\mathfrak{m}A[t_1, \dots, t_m], \mathcal{J})/\mathcal{J}) \\ &\simeq A[t_1, \dots, t_m]/(\mathfrak{m}A[t_1, \dots, t_m], \mathcal{J}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vejamos essa apresentação em um exemplo.

Exemplo 3.2.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Nesse caso, temos

$$\mathcal{J} = \langle t_2y - t_3x, t_1z - t_3x \rangle \text{ (ver Exemplo 3.1.5) e } \mathfrak{m}A[t_1, t_2, t_3] = \langle x, y, z \rangle \quad (3.7)$$

Assim, $\langle \mathcal{J}, \mathfrak{m}A[t_1, t_2, t_3] \rangle = \langle t_2y - t_3x, t_1z - t_3x, x, y, z \rangle = \langle x, y, z \rangle$. Portanto,

$$\mathcal{F}(I) \simeq A[t_1, t_2, t_3]/\langle \mathcal{J}, \mathfrak{m}A[t_1, t_2, t_3] \rangle = \mathbb{K}[x, y, z, t_1, t_2, t_3]/\langle x, y, z \rangle \simeq \mathbb{K}[t_1, t_2, t_3].$$

A dimensão de Krull da fibra especial é chamada de *analytic spread* do ideal I e a denotamos por $\ell(I)$. O cálculo do analytic spread de um ideal é um problema que pode ser muito intrigante. O tipo de informação geral que temos sobre esse invariante é dado pelas seguintes estimativas:

$$\text{ht } I \leq \ell(I) \leq \dim A. \quad (3.8)$$

3.3 Álgebra de Rees bi-graduada

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ com a graduação usual. Nessa seção particularizamos o estudo da álgebra de Rees ao caso em que os geradores $f_1, \dots, f_m$ do ideal I são polinômios homogêneos em A de grau fixo d . Nesse caso, podemos decompor a álgebra de Rees como uma soma de $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus \mathcal{R}_{(i,j)}$$

onde $\mathcal{R}_{(i,j)} = [I^j]_j t^i$. Naturalmente, $\mathcal{R}_{(i,j)} \cdot \mathcal{R}_{(i',j')} \subset \mathcal{R}_{(i+i',j+j')}$ para cada $(i,j), (i',j') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Em particular, $\mathcal{R}(I)$ com essa decomposição de $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais é uma $\mathbb{K}$ -álgebra bi-graduada.

Consideremos agora o anel de polinômios $A[t_1, \dots, t_m] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m]$ equipado com sua bi-graduação usual (ver Exemplo 1.2.1). Para que o homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras

$$\zeta : A[t_1, \dots, t_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}(I), \quad x_i \mapsto x_i, t_i \mapsto f_i t \quad (3.9)$$

possa ser visto como um homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras bi-graduadas fazemos $\deg t = (-d, 1)$. Com isso, segue da Proposição 1.2.2 que o ideal de apresentação $\mathcal{J}$ da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é um ideal bi-homogêneo e podemos decompô-lo da seguinte maneira:

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(i,j)}.$$

Observe ainda que, para $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$, temos:

$$\langle \mathcal{J}, \mathfrak{m}A[t_1, \dots, t_m] \rangle = \langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)}, \mathfrak{m} \rangle;$$

logo, por (3.6), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I) &\simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m] / \langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)}, \mathfrak{m} \rangle \\ &\simeq (\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m] / \mathfrak{m}) / (\langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)}, \mathfrak{m} \rangle / \mathfrak{m}) \\ &\simeq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m] / Q \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $Q := \langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)} \rangle \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$. Note ainda que Q é o núcleo do seguinte homomo-

morfismo sobrejetor de $\mathbb{K}$ -álgebras

$$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_m] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m] \quad (t_i \mapsto f_i).$$

Assim,

$$\mathcal{F}(I) \simeq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]/Q \simeq \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]. \quad (3.11)$$

Alternativamente, temos:

$$Q = \{F(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m] \mid F(f_1, \dots, f_m) = 0\}. \quad (3.12)$$

Observação 3.3.1. Como $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]$ é subanel de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ segue que $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]$ é domínio. Em particular, por (3.11) segue que $\mathcal{F}(I)$ é domínio.

Capítulo 4

Principais resultados

Nesse capítulo apresentamos o principal resultado dessa dissertação. Esse é um teorema que explora fortemente a natureza bi-graduada da álgebra de Rees para extrair informação sobre birracionalidade. Como aplicação, discutiremos o que acontece no contexto do ideais perfeitos de altura 2 com matriz de sizígias linear em um anel de polinômios em 3 variáveis.

4.1 Matriz jacobiana dual

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ com a graduação usual. Sejam $f_1, \dots, f_m \in A$ geradores homogêneos mínimos de mesmo grau d de um ideal $I \subset A$. Como mostrado na Seção 3.3, o ideal de definição $\mathcal{J} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m]$ da álgebra de Rees de I é um ideal bi-homogêneo. Nesse caso, podemos selecionar de um conjunto mínimo de geradores bi-homogêneos todos os polinômios que tem bi-grau da forma $(1, *)$. Digamos que $F_1, \dots, F_r$ sejam todos estes geradores de bi-grau da forma $(1, *)$. A partir desses elementos podemos formar a seguinte matriz de ordem $r \times n$

$$\Theta_I = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right).$$

Como cada F_i ($1 \leq i \leq r$) tem grau 1 nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ então cada derivada parcial $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ é um polinômio homogêneo com coeficientes em $\mathbb{K}$ que depende apenas das variáveis $t_1, \dots, t_m$. Assim, Θ_I é uma matriz de ordem $r \times n$ cujas entradas pertencem ao anel de polinômios $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$. Chamamos uma tal matriz Θ_I de *matriz jacobiana dual* do ideal I . Para fixar ideias, vejamos um exemplo:

Exemplo 4.1.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Seja I o ideal

gerado pelos menores de ordem 4 da seguinte matriz de ordem 5×4 :

$$\varphi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0 & x_4 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}$$

Por [15] pode ser constatado que o ideal de definição de álgebra de Rees $\mathcal{J}$ de I é gerado minimalmente pelos seguintes polinômios bi-homogêneos

$$F_1 = x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 + x_4 t_4, \quad F_2 = x_1 t_2 + x_2 t_3 + x_3 t_4 + x_4 t_5, \quad F_3 = x_1 t_3 + x_2 t_4 + x_3 t_5,$$

$$F_4 = x_1 t_4 + x_2 t_5 \quad \text{e} \quad G = \det \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ t_3 & t_4 & t_5 & 0 \\ t_4 & t_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste exemplo, um cálculo direto das derivadas parciais $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ($1 \leq i, j \leq 4$) nos dá

$$\Theta_I = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ t_3 & t_4 & t_5 & 0 \\ t_4 & t_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 Matriz jacobiana Dual versus birracionalidade

O seguinte lema será importante na discussão a seguir:

Lemma 4.2.1. *Seja*

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} \end{pmatrix}$$

uma matriz de ordem $(m+1) \times m$ com entradas em um anel R . Denote por N a matriz quadrada de ordem m da parte superior de M e por L a última linha de M . Dado $1 \leq$

$t \leq m$, considere M_t sendo a matriz obtida de M pela omissão da t -ésima linha, ou seja,

$$M_t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t-1,1} & \dots & a_{t-1,m} \\ a_{t+1,1} & \dots & a_{t+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} \end{pmatrix}$$

Então:

$$M \cdot \text{adj } N = \begin{pmatrix} \det N & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \det N \\ \hline (-1)^{(m+1)} \det M_1 & \dots & (-1)^{m+m} \det M_m \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Demonstração. Desenvolvendo $\det M_t$ por Laplace ao longo na última linha obtemos:

$$\det M_t = (-1)^{m+1} a_{m+1,1} \delta(N)_{t,1} + \dots + (-1)^{m+m} a_{m+1,m} \delta_{t,m} \quad (4.2)$$

onde $\delta(N)_{i,j}$ é o $(m-1)$ -menor de N obtido pela omissão a i -ésima linha e j -ésima coluna. Segue dessa igualdade então que

$$M \cdot \text{adj } N = \begin{pmatrix} \det N & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \det N \\ \hline (-1)^{(m+1)} \det M_1 & \dots & (-1)^{m+m} \det M_m \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

como desejado. $\square$

Seja $R \subset S$ uma inclusão de domínios de integridade e $\kappa(R) \subset \kappa(S)$ a extensão dos respectivos corpos de frações. Dizemos que $R \subset S$ é extensão birracional se $\kappa(R) \subset \kappa(S)$ for uma igualdade.

Proposição 4.2.2. *Seja $R \subset S$ duas álgebras finitamente geradas sobre um corpo $\mathbb{K}$ que são domínios de integridade. Se $R \subset S$ é uma extensão birracional então $\dim R = \dim S$.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.3.5, $\dim R = \text{tr.deg}_{\mathbb{K}}(\kappa(R))$ e $\dim S = \text{tr.deg}_{\mathbb{K}}(\kappa(S))$. Como $\kappa(R) = \kappa(S)$ pois a extensão $R \subset S$ é birracional, segue que $\dim R = \dim S$ como desejado. $\square$

Dado um anel de polinômios $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$ e um número inteiro positivo d , denotaremos por $A^{(d)}$ a $\mathbb{K}$ -subálgebra de A gerada por todos os monômios de grau d . Dados polinômios $f_1, \dots, f_m \in A$ homogêneos de grau d temos a seguinte inclusão de $\mathbb{K}$ -álgebras

$$\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m] \subset A^{(d)}. \quad (4.4)$$

O problema que queremos tratar é sobre a birracionalidade de uma extensão desse tipo.

Exemplo 4.2.3. Considere a extensão $\mathbb{K}[x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n] \subset A^{(d)}$. Dado um monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ de grau d podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \frac{(x_1^d)^{\alpha_1} (x_1^{d-1}x_2)^{\alpha_2} \cdots (x_1^{d-1}x_n)^{\alpha_n}}{(x_1^d)^{d-1}}.$$

Essa igualdade nos diz que cada gerador de $\kappa(A^{(d)})$ pertence a $\kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m])$. Logo, $\kappa(A^{(d)}) \subset \kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m])$. A inclusão contrária é imediata. Desse modo, a extensão $\mathbb{K}[x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n] \subset A^{(d)}$ é birracional.

O exemplo acima é suficientemente simples de modo a admitir uma prova direta da igualdade entre os corpos de frações. Todavia, em uma situação mais geral pode não ser tão fácil assim. Desse modo, faz-se necessário estratégias alternativas de poder tratar o problema. O próximo teorema mostra uma dessas estratégias. Nele veremos a conexão entre os conceitos de matriz jacobiana dual e de extensão birracional.

Teorema 4.2.4. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ com sua graduação usual. Considere $f_1, \dots, f_m$ polinômios homogêneos do mesmo grau d formando um conjunto linearmente independente. Defina $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ e Q o ideal de apresentação da fibra especial de I , ou seja,*

$$\mathcal{F}(I) \simeq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]/Q.$$

Se o posto da matriz jacobiana dual Θ_I módulo Q for $n - 1$ então $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m] \subset A^{(d)}$ é uma extensão birracional.

Demonstração. Nosso objetivo será demonstrar que $\kappa(A^{(d)}) \subset \kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m])$. Para isso, será suficiente provar que cada monômio de grau d pertence a $\kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m])$.

Sejam $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m]$ os geradores de bigrau $(1, *)$ do ideal de definição da álgebra de Rees de I . Então, para cada $1 \leq i \leq r$ podemos escrever

$$F_i = x_1 G_{i,1} + \dots + x_n G_{i,n}$$

para certos polinômios homogêneos $G_{i,j} \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$ ($1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq n$). Em particular,

$$\Theta_I = \begin{pmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r,1} & \cdots & G_{r,n} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

e

$$I_1(\Theta_I \cdot \mathbf{x}) \subset \mathcal{J} \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{x} := [x_1 \dots x_n]^t$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a seguinte submatriz de ordem $(n-1) \times n$ de Θ_I tem posto $n-1$ módulo Q :

$$\Psi = \begin{pmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n-1,1} & \cdots & G_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Seja Δ_i o $(n-1)$ -menor obtido de Ψ pela omissão da i -ésima coluna. Definindo Ψ_n como a matriz obtida de Ψ pela omissão da n -ésima coluna temos

$$\text{adj } \Psi_n \cdot \Psi \cdot \mathbf{x} = \left(\begin{array}{ccc|c} \Delta_n & \cdots & 0 & (-1)^{n-1+1} \Delta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_n & (-1)^{n-1+n-1} \Delta_{n-1} \end{array} \right) \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta_n x_1 + (-1)^n \Delta_1 x_n \\ \vdots \\ \Delta_n x_{n-1} + (-1)^{2n-2} \Delta_{n-1} x_n \end{bmatrix}$$

onde a primeira igualdade é consequência do Lema 4.2.1. Da igualdade (4.6) segue que

$$I_1(\text{adj } \Psi_n \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}) = \langle \Delta_n x_1 + (-1)^n \Delta_1 x_n, \dots, \Delta_n x_{n-1} + (-1)^{2n-2} \Delta_{n-1} x_n \rangle \subset \mathcal{J}.$$

Assim,

$$(-1)^{n-1+i} x_n \Delta_i(f_1, \dots, f_m) = x_i \Delta_n(f_1, \dots, f_m) \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Dessas igualdades e do fato que o posto de Ψ módulo Q é $n-1$ segue que $(-1)^{n-1+i} \Delta_i(f_1, \dots, f_m) = D x_i$ para cada $1 \leq i \leq n-1$ e $D x_n = \Delta_n(f_1, \dots, f_n)$ com $D \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ não nulo.

Com isso, segue que

$$Dx_i \in \kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]) \quad (4.7)$$

para cada $1 \leq i \leq n - 1$. Em particular,

$$D^d = \frac{f_1(Dx_1, \dots, Dx_n)}{f_1(x_1, \dots, x_n)} \in \kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]). \quad (4.8)$$

Agora, considere $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ um monômio de grau d . Temos,

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \frac{(Dx_1)^{\alpha_1} \dots (Dx_n)^{\alpha_n}}{D^d}.$$

De (4.7) e (4.8) segue que $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m])$. Portanto, $\kappa(\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]) = \kappa(A^d)$ como desejávamos. $\square$

O exemplo a seguir nos mostra como o teorema acima pode ser aplicado.

Exemplo 4.2.5. Considere $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{K}[x, y, z]$ os menores máximos da seguinte matriz:

$$\varphi = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ x & z & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.3.4 segue que φ é a matriz de sizígias do ideal gerado por f_1, f_2, f_3, f_4 . Assim, pela Proposição 3.1.4,

$$I_1([t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4] \cdot \varphi) = \langle t_1 z + t_2 x, t_2 z + t_3 x, t_3 z + t_4 y \rangle \in \mathcal{J}.$$

Desse modo, $F_1 = t_1 z + t_2 x$ e $F_2 = t_3 z + t_4 y$ são elementos de bi-grau $(1, *)$ de $\mathcal{J}$. Em particular,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2 & 0 & t_1 \\ 0 & t_4 & t_3 \end{bmatrix}$$

é uma submatriz da matriz jacobiana dual de I . Um 2-menor dessa matriz é $t_2 t_4$. Observe que esse 2-menor não pertence a Q pois $f_2 f_4 \neq 0$. Assim, posto $\Theta_I = 2$. Portanto, pelo Teorema 4.2.4 a extensão $\mathbb{K}[f_1, f_2, f_3, f_4] \subset A^{(3)}$ é birracional.

Corolário 4.2.6. *Notações e hipóteses como no Teorema 4.2.4. Então o analytic spread de $\ell(I)$ de I é n .*

Demonstração. O corolário segue das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 \ell(I) &= \dim \mathcal{F}(I) && \text{(por definição)} \\
 &= \dim \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m] && \text{(pois } \mathcal{F}(I) \simeq \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]) \\
 &= \dim A^{(d)} && \text{(Teorema 4.2.4 e Proposição 4.2.2)} \\
 &= \dim \mathbb{K}[x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n] && \text{(Exemplo 4.2.3 e Proposição 4.2.2)} \\
 &= n && \text{(Exemplo 5.3.4 e Proposição 5.3.5).}
 \end{aligned}$$

□

4.3 Ideais de altura 2 com matriz de sizígias linear

Nessa seção iremos supor:

- (A) $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero.
- (B) $A = \mathbb{K}[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com a graduação usual.
- (C) $I \subset A$ um ideal de altura dois gerado pelos menores máximos de uma matriz φ de ordem $n \times (n-1)$ ($n \geq 3$) cujas entradas são formas lineares em A .
- (D) $\dim_{\mathbb{K}}(I_{n-1}) = n$ (ou seja, os menores máximos de φ formam uma base para o espaço vetorial I_{n-1}).
- (E) $\text{ht } I_1(\varphi) = 3$.

Nesse contexto, temos as seguintes observações:

Observação 4.3.1. (a) Os ideais primos de A de altura dois são da forma $P = (\ell_1, \ell_2)$ onde ℓ_1 e ℓ_2 são formas lineares em A linearmente independentes (ver [7, Projective Nullstellensatz]).

(b) Se $\eta_1 \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ e $\eta_2 \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ então $I_t(\varphi) = I_t(\eta_1 \varphi \eta_2)$ para cada $1 \leq t \leq n-1$ (ver [3]).

(c) Se $\varphi = (\ell_{ij})$ e $\Psi : \mathbb{K}[x, y, z] \rightarrow \mathbb{K}[x, y, z]$ então $\Psi(I_t(\varphi)) = I_t((\Psi(\ell_{ij})))$ para cada $1 \leq t \leq n-1$.

Consideremos a seguinte cadeia de ideais:

$$I_1(\varphi) \supset I_2(\varphi) \supset \dots \supset I_{n-1}(\varphi) = I.$$

Dessas inclusões e do fato que $\text{ht } I_1(\varphi) = 3$ e $\text{ht } I = 2$ podemos considerar o maior índice $1 \leq u \leq n-2$ tal que $\text{ht } I_u(\varphi) = 3$.

Exemplo 4.3.2. Considere

$$\varphi = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ x & z & 0 & 0 \\ 0 & y & z & 0 \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Nesse exemplo temos $I_2(\varphi) = \langle x, y, z \rangle^2$, $I_3(\varphi) = \langle z^3, yz^2, xz^2, y^2z, xyz, xy^2, x^2y \rangle$ e $I = I_4 = \langle z^4, yz^3, xyz^2, xy^2z, x^2y^2 \rangle$. As inclusões

$$\langle z^4, x^2y^2 \rangle \subset I \subset I_3(\varphi) \subset \langle z, y \rangle$$

nos mostram que $\text{ht } I = \text{ht } I_3(\varphi) = 2$. Obviamente, $\text{ht } I_2(\varphi) = 3$. Assim, esse é um exemplo que satisfaz as hipóteses (A)-(E) e que o valor u nesse caso é igual a 2.

A importância desse número u está no seguinte Teorema.

Teorema 4.3.3. *A menos de operações elementares invertíveis linha/coluna e mudança invertível de variáveis a matriz φ tem o seguinte formato:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x + a_1 & & & & \\ & x + a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x + a_u & \\ \hline & & & & \end{array} \right)$$

onde $a_1, \dots, a_u$ e as entradas omitidas dependem apenas das variáveis y, z .

Prova. Pela definição de u segue que o ideal $I_{u+1}(\varphi)$ tem altura 2. Assim, os primos mínimos de $I_{u+1}(\varphi)$ tem altura 2. A menos de mudança de coordenadas, podemos supor que $P = (y, z)$ é um primo mínimo de $I_{u+1}(\varphi)$. Como $\text{ht } I_u(\varphi) = 3$ então $I_u(\varphi) \not\subset P$. Desse modo, existe um u -menor de φ que não está contido em P , ou seja, o posto de φ em

A/P é pelo menos u . Por outro lado, como $I_{u+1}(\varphi) \subset P$. Assim, todo $(u+1)$ -menor de φ em A/P é zero. Logo, o posto de φ em A/P é realmente u .

Como o posto de φ em A/P é u segue que a menos de operações elementares linha/columna a matriz φ em A/P tem o seguinte formato:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \\ \hline & & & \end{array} \right).$$

Finalmente, fazendo o levantamento dessa matriz ao anel A obtemos o formato desejado. $\square$

Podemos agora aplicar o Teorema 4.2.4 para concluir o seguinte

Teorema 4.3.4. *Sejam $f_1, \dots, f_n$ os menores máximos da matriz φ . Então a extensão $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_n] \subset A^{(n-1)}$ é birracional. Em particular, $\ell(I) = 3$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.4, sabemos que é suficiente provar que o posto da matriz Jacobiana dual Θ_I do ideal $I = (f_1, \dots, f_n)$ módulo o ideal de apresentação Q da fibra especial $\mathcal{F}(I)$ é 2. Pelo Teorema anterior podemos supor que

$$\varphi = \left(\begin{array}{ccc|c} x + a_1 & & & \\ & x + a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x + a_u \\ \hline & & & \end{array} \right).$$

Pela proposição 3.1.4, temos que $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi) \subset \mathcal{J}$. Como φ é matriz com entradas lineares então os geradores de $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi)$ são formas de bigrau $(1, 1)$. Assim, podemos usar os geradores de $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi)$ para obter uma submatriz Ψ da matriz Jacobiana dual de $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Devido o formato de φ , a matriz Ψ terá a seguinte estrutura:

$$\Psi = \begin{bmatrix} t_1 & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} \\ t_2 & \ell_{2,1} & \ell_{2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_u & \ell_{u,2} & \ell_{u,3} \\ 0 & \ell_{u+1,2} & \ell_{u+1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ell_{n-1,2} & \ell_{n-1,3} \end{bmatrix}.$$

Observe por exemplo que $\ell_{n-1,2}$ não é zero, pois caso contrário a $(n-1)$ -ésima coluna de φ dependeria apenas da variável z e isso contrariaria o fato de que $\text{ht } I = 2$. Assim, $t_1 \ell_{n-1,2}$ é um 2-menor não nulo de Ψ . Afirmamos que $t_1 \ell_{n-1,2}$ não pertence a Q . Caso contrário, t_1 ou $\ell_{n-1,2}$ pertenceria a Q (pois Q é ideal primo). Assim, $f_1 = 0$ ou $\ell_{n-1,2}(f_1, \dots, f_n) = 0$. Mas isso contraria a hipótese (D). Portanto, o posto de Θ_I é dois como queríamos mostrar. $\square$

Em algumas situações podemos usar o teorema acima para poder deduzir os geradores do ideal de definição da fibra especial. Com o propósito de ilustrar, vejamos um exemplo.

Exemplo 4.3.5. Seja $I = \langle z^4, yz^3, xyz^2, xy^2z, x^2y^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z]$ o ideal do Exemplo 4.3.2.

É de imediata verificação que $I_2 \left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_3 & t_4 & t_5 \end{smallmatrix} \right)$ está contido no ideal de apresentação Q

da fibra especial $\mathcal{F}(I)$. É conhecido, ver [6], que $I_2 \left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_3 & t_4 & t_5 \end{smallmatrix} \right)$ é ideal primo de altura 2. Também temos:

$$\begin{aligned} \text{ht } Q &= \dim \mathbb{K}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5] - \dim \mathcal{F}(I) \\ &= 5 - 3 \\ &= 2. \end{aligned} \quad (\text{Teorema 4.3.4})$$

Logo, $I_2 \left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_3 & t_4 & t_5 \end{smallmatrix} \right) \subset Q$ é uma inclusão de ideais primos de altura 2. Portanto,

$$I_2 \left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_3 & t_4 & t_5 \end{smallmatrix} \right) = Q.$$

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Primos associados e decomposição primária

Sejam M um módulo sobre um anel A . Um ideal primo P de A é dito *primo associado* de M se existe um elemento x de M tal que $P = 0 :_A x$. O conjunto de todos os primos associados de M será denotado por $\text{Ass}_A(M)$. Os elementos minimais de $\text{Ass}_A(M)$, com respeito a relação de inclusão, são chamados de *primos associados mínimos* de M . Denotaremos a coleção dos primos associados mínimos de M por $\text{Min}_A(M)$. Os primos associados de M que não pertencem a $\text{Min}_A(M)$ serão chamados de *primos associados imersos* de M .

Na proposição a seguir, bem como no resto do Apêndice, usaremos $Z_A(M)$ para denotar o conjunto dos divisores de zero de um A -módulo M (recordemos que, por definição, $Z_A(M)$ é o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tal que $ax = 0$ para algum $x \in M$ não nulo).

Proposição 5.1.1. *Sejam A um anel noetheriano e M um A -módulo finitamente gerado. Então:*

- (a) $\text{Ass}_A(M)$ é vazio se, e somente se, $M = 0$.
- (b) $\text{Ass}_A(M)$ é um conjunto finito.
- (c) $Z_A(M) = \bigcup_{P \in \text{Ass}_A(M)} P$.
- (d) Se N é um submódulo de M então $\text{Ass}_A(N) \subset \text{Ass}_A(M) \subset \text{Ass}_A(N) \cup \text{Ass}_A(M/N)$.

Prova. Ver [13, Theorem 6.1, 6.3, 6.5 (i)]

□

Sejam M um módulo sobre um anel A e N um submódulo de M . É verificável que as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $\text{Ass}_A(M/N)$ tem um único elemento.
- (b) $Z_A(M/N) = \sqrt{N : M}$.
- (c) Dados $\alpha \in A$ e $x \in M$ tais que $\alpha x \in N$ então $\alpha \in \sqrt{N : M}$ ou $x \in N$.

Se N satisfaz uma (e portanto todas) dessas condições dizemos que N é um *submódulo primário* de M . Além disso, se P é o único primo de $\text{Ass}_A(M/N)$, também dizemos que N é submódulo *P-primário* de M .

Observação 5.1.2. Seja I um ideal de um anel A . Dizer que I é um *ideal primário* de A significa que I é um submódulo primário de A . Observe que $I : A = I$. Assim, I é ideal primário se satisfaz as seguintes condições:

- (a) $\text{Ass}_A(A/I)$ tem um único elemento.
- (b) $Z_A(A/I) = \sqrt{I}$.
- (c) Dados $\alpha, x \in A$ tais que $\alpha x \in I$ então $\alpha \in \sqrt{I}$ ou $x \in I$.

Exemplo 5.1.3. Seja P um ideal primo de um anel A . Notemos que nesse caso a condição (c) da Observação 5.1.2 é automática. Assim, todo ideal primo é primário.

Exemplo 5.1.4. Seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de um anel A . Afirmamos que para qualquer inteiro positivo n o ideal $\mathfrak{m}^n$ é primário. Para provar essa afirmação iniciamos observando que $Z_A(A/\mathfrak{m}^n)$ é não vazio pois $A/\mathfrak{m}^n \neq \{0\}$. Dito isso, suponhamos P sendo um primo associado de $A/\mathfrak{m}^n$. Então, $P = 0 : x$ para algum $x \in A/\mathfrak{m}^n$ não nulo. Em particular, temos $\mathfrak{m}^n x = \{0\}$, ou seja, $\mathfrak{m}^n \subset P$. Como P é primo, segue dessa inclusão que $\mathfrak{m} \subset P$. Pela maximalidade de $\mathfrak{m}$ segue que $P = \mathfrak{m}$. Dessa forma, $\text{Ass}_A(A/\mathfrak{m}^n) = \{\mathfrak{m}\}$. Portanto, da Observação 5.1.2(a) segue o afirmado.

Definição 5.1.5. Seja N um submódulo de um A -módulo M . Uma *decomposição primária* de N em M é uma interseção $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ onde cada Q_i é submódulo P_i -primário de M . A decomposição primária $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ é dita *reduzida* se $\text{Ass}_A(M/Q_i) \neq \text{Ass}_A(M/Q_j)$ sempre que $i \neq j$ e N não pode ser expresso como interseção de uma subcoleção própria dos Q_i .

Exemplo 5.1.6. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Claramente, cada gerador do ideal I pertence a interseção $\langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$. Agora, suponhamos que f é um elemento arbitrário da interseção $\langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$. Em particular, existem $a_i, b_i \in A$, com $1 \leq i \leq 3$, tais que

$$f = a_1x + b_1y = a_2x + b_2z = a_3y + b_3z.$$

Dessas igualdades segue, por exemplo, que:

$$a_1x = (a_3 - b_1)y + b_3z \quad \text{e} \quad b_1y = (a_2 - a_1)x + b_2z.$$

Logo, $a_1x \in \langle y, z \rangle$ e $b_1y \in \langle x, z \rangle$. Como $\langle y, z \rangle$ e $\langle x, z \rangle$ são ideais primos de A com $x \notin \langle y, z \rangle$ e $y \notin \langle x, z \rangle$ então $a_1 \in \langle y, z \rangle$ e $b_1 \in \langle x, z \rangle$. Assim, existem $\alpha_i, \beta_i \in A$, com $i = 1$ ou 2 , tais que $a_1 = \alpha_1y + \alpha_2z$ e $b_1 = \beta_1x + \beta_2z$. Desse modo, $f = (\alpha_1 + \beta_1)xy + \alpha_2xz + \beta_2yz$, ou seja, $f \in I$. Com isso segue que a interseção $\langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$ está contida no ideal I . Portanto, temos a igualdade

$$I = \langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle.$$

Como cada membro dessa interseção é ideal primo, segue que esta é uma decomposição primária para o ideal I .

Exemplo 5.1.7. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y]$ um anel de polinômios em duas variáveis sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $I = \langle x^2, xy \rangle$. Considere a interseção $\langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2$. Claramente, os geradores de I pertencem a interseção citada. Além disso, seja $f \in \langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2$. Observe que $\langle x, y \rangle^2 = \langle x^2, y^2, xy \rangle$, assim, existem $a, b, c, d \in A$, tais que

$$f = ax = bx^2 + cy^2 + dxy.$$

Desse modo:

$$cy^2 = ax - bx^2 - dxy.$$

Então, $cy^2 \in \langle x \rangle$. Como $\langle x \rangle$ é primo e $y^2 \notin \langle x \rangle$, temos que $c \in \langle x \rangle$. Logo, existe $p \in A$, tal que $c = px$. Então, $f = bx^2 + cy^2 + dxy = bx^2 + pxy^2 + dxy \in \langle x^2, xy \rangle = I$. Desse modo,

$$I = \langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2.$$

Pelo Exemplo 5.1.3 segue que $\langle x \rangle$ é primário e pela Observação 5.1.2 segue que $\langle x, y \rangle^2$

também é primário. Portanto, $I = \langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2$ é uma decomposição primária de I .

Teorema 5.1.8. *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e N um submódulo de M . Então N admite uma decomposição primária reduzida $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$. Além disso,*

- (i) $\text{Ass}_A(M/N) = \{\sqrt{Q_1 : M}, \dots, \sqrt{Q_r : M}\}$. Em particular, os radicais $\sqrt{Q_i : M}$ em uma decomposição primária reduzida de N em M são unicamente determinados pelo quociente M/N .
- (ii) Os submódulos primários Q_i que correspondem aos primos associados mínimos de M/N são unicamente determinados pelo quociente M/N .

Prova. Ver [12, Theorem 3.2]. □

Exemplo 5.1.9. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. No Exemplo 5.1.6 vimos que uma decomposição primária de I é:

$$I = \langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle.$$

É imediato observar que essa é de fato uma decomposição primária reduzida. Segue do teorema da decomposição primária que para esse exemplo temos:

$$\text{Ass}_A(A/I) = \text{Min}_A(A/I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}.$$

Observação 5.1.10. Seja A um anel noetheriano e I um ideal de A . Afirmamos que um ideal primo P é primo associado mínimo de A/I se, e somente se, P é mínimo (com respeito a ordem de inclusão) entre os ideais primos de A que contém I . Com efeito, suponhamos que $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ seja uma decomposição primária de I . Se P é um elemento mínimo na coleção dos ideais que contem I então, em particular, $P \supset \bigcap_{i=1}^r Q_i$. Como P é ideal primo, P contém um certo Q_i . Logo, $P = \sqrt{P} \supset \sqrt{Q_i}$. Como $\sqrt{Q_i}$ é ideal primo e contém I segue da minimalidade de P que $P = \sqrt{Q_i}$. Obviamente, $\sqrt{Q_i}$ é primo associado mínimo, pois caso contrário, isso contrariaria a minimalidade de P . Por outro lado, consideremos $P = \sqrt{Q_i}$ sendo um primo associado mínimo de A/I . Seja P_1 um ideal primo tal que $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i \subset P_1 \subset \sqrt{Q_i}$. Da primalidade de P_1 segue que $Q_j \subset P_1$ para algum j . Logo, $\sqrt{Q_j} \subset P_1 \subset \sqrt{Q_i}$. Como $\sqrt{Q_i}$ é primo associado mínimo devemos ter $\sqrt{Q_i} = \sqrt{Q_j}$, ou seja, $P_1 = \sqrt{Q_i}$. Sendo assim, $\sqrt{Q_i}$ é mínimo entre os ideais primos que contém I .

5.2 Dimensão de Krull

Seja A um ideal. Dizemos que uma cadeia de ideais primos de A da forma $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ tem comprimento n . A *dimensão de Krull* de A , denotada $\dim A$, é o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ em A . Se não existe uma cota superior para os comprimentos das cadeias de ideais primos de A então dizemos que $\dim A = \infty$.

A *altura* de um ideal primo P de A , denotada $\text{ht}(P)$, é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P$. Segue das definições de altura e dimensão e das propriedades de localização que

$$\text{ht}(P) = \dim A_P. \quad (5.1)$$

A definição de altura para um ideal arbitrário $I \subsetneq A$ é realizada através da igualdade

$$\text{ht}(I) := \min\{\text{ht}(P) \mid P \in \text{Min}_A(A/I)\}. \quad (5.2)$$

Enunciamos agora um dos principais resultados da teoria da dimensão

Teorema 5.2.1 (Teorema do ideal principal de Krull Generalizado). *Sejam $x_1, \dots, x_r$ elementos de um anel noetheriano A e $I = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$. Então para cada $P \in \text{Min}(A/I)$ tem-se $\text{ht}(P) \leq r$. Em particular, $\text{ht}(I) \leq r$.*

Prova. Ver [5, Theorem 10.2]. □

Exemplo 5.2.2. Seja $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis com coeficientes sobre um corpo $\mathbb{K}$. Para cada $1 \leq i \leq n$, consideremos o ideal primo $P_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$. A cadeia de ideais primos $\langle 0 \rangle \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_i$ implica que $\text{ht}(P_i) \geq i$. Por outro lado, pelo teorema do ideal principal de Krull generalizado segue que $\text{ht}(P_i) \leq i$. Portanto, segue dessas desigualdades que $\text{ht}(P_i) = i$.

Exemplo 5.2.3. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. No Exemplo 5.1.9 obtemos que

$$\text{Min}_A(A/I) = \{\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle\}.$$

Assim, por definição,

$$\text{ht}(I) = \min\{\text{ht}(\langle x, y \rangle), \text{ht}(\langle x, z \rangle), \text{ht}(\langle y, z \rangle)\}. \quad (5.3)$$

Mas, pelo exemplo anterior, $\text{ht } \langle x, y \rangle = \text{ht } \langle x, z \rangle = \text{ht } \langle y, z \rangle = 2$. Logo, $\text{ht } (I) = 2$.

Exemplo 5.2.4. Sejam $A = k[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle t_1z - t_2y, t_2y - t_3x \rangle$. Podemos olhar $t_1z - t_2y$ como um polinômio de grau 1 na variável z com coeficientes em $k[x, y, t_1, t_2, t_3]$. Aplicando o critério de Eisenstein neste polinômio concluímos que ele é irredutível. Observe que o ideal $\langle t_1z - t_2y \rangle$ está propriamente contido em I pois, $t_2y - t_3x$ não pode ser múltiplo de $t_1z - t_2y$, uma vez que $t_2y - t_3x$ tem grau zero na variável t_1 . Assim, se $P \in \text{Min}_A(A/I)$ então temos a seguinte cadeia de ideais primos:

$$\{0\} \subsetneq \langle t_1z - t_2y \rangle \subsetneq P.$$

Logo, $\text{ht } (P) \geq 2$. Com isso, segue que $\text{ht } (I) \geq 2$. Por outro lado, pelo Teorema 5.2.1 segue que $\text{ht } (I) \leq 2$. Portanto, dessas duas desigualdades segue $\text{ht } (I) = 2$.

5.3 Grau de Transcendência

Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ uma extensão de corpos finitamente gerada. Um subconjunto $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{L}$ é chamado de *algebricamente independente* sobre $\mathbb{K}$ se o homomorfismo

$$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathbb{L}, \quad t_i \mapsto \alpha_i$$

é injetor. Equivalentemente, B é algebricamente independente sobre $\mathbb{K}$ se, dado $F \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ tal que $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ então $F = 0$.

Exemplo 5.3.1. Seja d um inteiro positivo. Considere o seguinte conjunto de monômios

$$B = \{x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n\}$$

no anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Defina $\mathbb{L} = \mathbb{K}(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n)$. Suponha $F \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ tal que $F(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n) = 0$. Escrevamos

$$F = F_m + F_{m-1} + \dots + F_0,$$

onde cada F_i é polinômios homogêneo de grau i . Temos:

$$x_1^{(d-1)m}F_m(x_1, \dots, x_n) + x_1^{(d-1)(m-1)}F_{m-1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + F_0 = 0.$$

Esta é uma soma de polinômios homogêneos de graus distintos no anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Logo, $x_1^{(d-1)i} F_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Em particular, $F_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Assim, $F = 0$. Com isso podemos concluir que $B = \{x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n\}$ é um conjunto algebricamente independente sobre $\mathbb{K}$.

Uma subconjunto $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{L}$ é chamado uma *base de transcendência* da extensão $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ se a extensão $\mathbb{K}(B) \subset \mathbb{L}$ é algébrica.

Exemplo 5.3.2. No Exemplo 5.3.1, $B = \{x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n\}$ é um subconjunto de $\mathbb{L}$ que é algebricamente independente sobre $\mathbb{K}$. Além disso, $L = \mathbb{K}(B) \subset \mathbb{L}$ é obviamente uma extensão algébrica. Portanto, $B = \{x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n\}$ é uma base de transcendência de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$.

Teorema 5.3.3. *Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ uma extensão de corpos finitamente gerada. Então quaisquer duas bases de transcendência da extensão $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ tem a mesma quantidade de elementos.*

Prova. Ver [16, Theorem 1.2.6]. □

O *grau de transcendência* de uma extensão de corpos finitamente gerada $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, denotado $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ é a cardinalidade comum a todas as bases de transcendência dessa extensão. Se A é uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada que é um domínio definimos o grau de transcendência dessa $\mathbb{K}$ -álgebra, denotado $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} A$, como o grau de transcendência da extensão $\mathbb{K} \subset \kappa(A)$, onde $\kappa(A)$ representa o corpo de frações de A .

Exemplo 5.3.4. Pelo que foi discutido nos exemplos 5.3.1 e 5.3.2 segue que para $\mathbb{L} = \mathbb{K}(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_n)$ tem-se $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = n$.

Teorema 5.3.5. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada que é um domínio. Então:*

$$\dim A = \text{tr.deg}_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$$

Demonstração. Ver [16, Theorem 2.3.7]. □

5.4 Sequência regular e módulos Cohen-Macaulay

5.4.1 Sequência regular

Sejam M um A -módulo e a um elemento de A . Dizemos que a é *divisor de zero* de M se existe um elemento $m \in M$ diferente de zero tal que $am = 0$. Lembrando que o conjunto

de todos os divisores de zero de M por $\mathcal{Z}_A(M)$. Os elementos de A que não são divisores de M são chamados elementos *regulares* de M (ou elementos M -regulares).

Definição 5.4.1. Seja M um módulo sobre um anel A . Dizemos que $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ é uma *sequência regular* de M (ou uma M -*sequência*) se as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) $\mathbf{a}M \neq M$.
- (b) a_1 é elemento M -regular e a_i é elemento $M/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle M$ -regular para cada $2 \leq i \leq n$.

Exemplo 5.4.2. O protótipo mais básico de sequência regular ocorre na situação em que A é um anel de polinômios em n variáveis $x_1, \dots, x_n$ com coeficientes sobre um anel S . Uma vez que

$$A/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle A \simeq S[x_i, \dots, x_n]$$

segue facilmente que x_i é $A/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$ -regular para qualquer $1 \leq i \leq n$.

Sejam I um ideal de um anel noetheriano A e M um A -módulo finitamente gerado com $IM \neq M$. Uma M -*sequência maximal* em I é uma M -sequência $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset I$ tal que não pode ser aumentada, isto é, para qualquer $y \in I$, $\mathbf{a}' = \{a_1, \dots, a_n, y\}$ não é M -sequência.

Observe que se $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ é uma M -sequência então temos a cadeia de ideais $\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ onde cada inclusão é própria. Assim, se A é anel noetheriano toda M -sequência pode ser estendida para uma M -sequência maximal. Em particular, toda M -sequência contida em um ideal I se estende para uma M -sequência maximal em I .

Teorema 5.4.3. *Sejam A um anel noetheriano, M um A -módulo finitamente gerado e I um ideal de A tal que $IM \neq M$. Então duas M -sequências maximais em M tem o mesmo número de elementos.*

Prova. Ver [2, Theorem 1.2.5]. □

Utilizamos esse teorema para definir o *grade* de I em M como o número de uma M -sequência maximal em I . Denotaremos esse número por $\text{grade}(I, M)$. Em algumas situações especiais, costumamos empregar notações e terminologias distintas para o número $\text{grade}(I, M)$. Por exemplo:

- (1) Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ então chamamos o grade de $\mathfrak{m}$ em M de *profundidade* de M e denotaremos esse número por $\text{prof}_A(M)$.
- (2) Se $I = 0 :_A M$ então chamamos o grade de I em A de grade de M e denotamos esse número por $\text{grade}(M)$.
- (3) O grade de I em A é chamado de grade de I e denotado por $\text{grade}(I)$.

Proposição 5.4.4. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um módulo finitamente gerado. Então $\text{prof}_A(M) \leq \dim M$.*

5.4.2 Módulos e anéis Cohen-Macaulay

Definição 5.4.5. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um módulo finitamente gerado não nulo. Dizemos que M é um *módulo Cohen-Macaulay* se $\text{prof}_A(M) = \dim M$. O anel A é dito um *anel Cohen-Macaulay* se o for como A -módulo.

Em geral, se A é um anel noetheriano arbitrário então um A -módulo M é *Cohen-Macaulay* se $M_{\mathfrak{m}}$ é $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo Cohen-Macaulay para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \in \text{Supp}(M)$.¹

Exemplo 5.4.6. Seja A um anel noetheriano de dimensão zero. Por razões óbvias temos nesse caso que A é Cohen-Macaulay.

Exemplo 5.4.7. Seja A um anel Cohen-Macaulay. Então o anel de polinômios $A[x_1, \dots, x_n]$ também é Cohen-Macaulay (ver [13, Theorem 17.7]). Em particular, se k é um corpo então $k[x_1, \dots, x_n]$ é Cohen-Macaulay.

Teorema 5.4.8. *Sejam A um anel noetheriano e M um módulo finitamente gerado.*

- (a) *Se $\mathbf{x}$ é uma M -sequência e M é um módulo Cohen-Macaulay então $M/\langle \mathbf{x} \rangle M$ é Cohen-Macaulay (sobre A ou $A/\langle \mathbf{x} \rangle$). A recíproca também é verdadeira se A é um anel local.*
- (b) *Se M é Cohen-Macaulay e S é um conjunto multiplicativo de A então $S^{-1}M$ é Cohen-Macaulay.*
- (c) *Se A é Cohen-Macaulay e $I \subsetneq A$ é um ideal de A então $\text{ht}(I) + \dim A/I = \dim A$. Em particular, se $I \subset J$ são ideais de A e os anéis A e A/J são Cohen-Macaulay então $\text{ht}(J/I) = \text{ht}(J) - \text{ht}(I)$.*

- (d) *Se A é um anel Cohen-Macaulay $I \subsetneq A$ é um ideal de A então $\text{grade}(I) = \text{ht}(I)$.*

¹O suporte de um A -módulo M , denotado $\text{Supp}_A(M)$, é o conjunto de todos os ideais primos P de A tais que $M_P \neq 0$.

5.5 Anéis normais

Seja $A \subset B$ uma inclusão de anéis. Um elemento $x \in B$ é dito *integral* sobre B se existe um inteiro positivo n e elementos $r_1, \dots, r_n \in A$ tais que

$$x^n + r_1x^{n-1} + r_2x^{n-2} + \dots + r_{n-1}x + r_n = 0. \quad (5.4)$$

Chamamos (5.4) de *equação de dependência integral* de x sobre A . Pode ser verificado que o conjunto dos elementos de B que são integrais sobre A é um subanel de B que contém A . Chamamos este subanel de B de *fecho integral* de A em B . O anel A é *integralmente fechado* em B se seu fecho integral em B é o próprio A .

Quando B é o anel total de frações de A chamamos o fecho integral de A em B de *fecho integral*. Um anel reduzido A é *integralmente fechado* se seu fecho integral é igual a A .

Definição 5.5.1. Dizemos que um anel A é *normal* se A_P é domínio integralmente fechado para todo ideal primo P de A .

Observamos que todo anel normal A é reduzido. Com efeito, suponhamos $\alpha \in A$ tal que $\alpha^n = 0$ para algum número natural n . Devemos mostrar que, necessariamente, $\alpha = 0$. Para isso, é suficiente provar que $1 \in (0 : \alpha)$. Suponhamos que este não seja o caso. Então existe um ideal primo P de A que contém $(0 : \alpha)$. Em particular, $(\alpha/1)^n = 0/1$ em A_P . Como A_P é domínio, segue que $\alpha/1 = 0/1$ em A_P . Logo, existe $s \in A - P$ tal que $s\alpha = 0$. Desse modo, $s \in (A - P) \cap (0 : \alpha)$. Mas isso é um absurdo pois $(0 : \alpha) \subset P$.

Proposição 5.5.2. *Seja A um anel reduzido cujo anel total de frações é um produto direto finito de corpos. Então, A é normal se, e somente se, A é integralmente fechado.*

Prova. Ver [10, Lemma 2.1.15]. □

Notemos que a hipótese do anel total de frações ser um produto direto finito de corpos é imediata quando A é um domínio.

Exemplo 5.5.3. Seja A um domínio de fatoração única. Afirmamos que A é um anel normal. Com efeito, suponha p/q um elemento no corpo de frações de A . Como A é domínio de fatoração única, podemos supor que o máximo divisor comum de p e q é 1. Digamos que p/q satisfaz uma equação de dependência integral

$$(p/q)^n + r_1(p/q)^{n-1} + r_2(p/q)^{n-2} + \dots + r_{n-1}(p/q) + r_n = 0.$$

Multiplicando os dois lados dessa igualdade por q^n obtemos:

$$p^n + r_1 p^{n-1} q + r_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + r_{n-1} p q^{n-1} + r_n q^n = 0.$$

Logo,

$$p(p^{n-1} + r_1 p^{n-2} q + r_2 p^{n-3} q^2 + \cdots + r_{n-1} q^{n-1}) = r_n q^n.$$

Dessa igualdade e do fato do máximo divisor de p e q ser 1 segue que q divide

$$p^{n-1} + r_1 p^{n-2} q + r_2 p^{n-3} q^2 + \cdots + r_{n-1} q^{n-1}.$$

Mas isso força $n-1 = 0$, pois caso contrário q dividiria p . Assim, $p/q = -r_1 \in A$. Segue daí que o fecho integral de A em seu corpo de frações é de fato A . Portanto, A é normal como afirmado.

Proposição 5.5.4. *Sejam A um anel noetheriano normal e $P_1, \dots, P_n$ os primos mínimos de A . Então, $A/P_1, \dots, A/P_n$ são domínios normais e*

$$A \simeq A/P_1 \times \cdots \times A/P_r.$$

Prova. Ver [10, Corollary 2.1.13]. □

Esta proposição é bastante útil nesse trabalho em virtude da seguinte observação:

Observação 5.5.5. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada e Noetheriana. Então os primos mínimos de A são ideais homogêneos (ver [5, Proposition 3.12]). Afirmamos que se A é anel normal então A é domínio. Com efeito, sejam $P_1, \dots, P_r$ são os primos mínimos de A . Então $A/P_1, \dots, A/P_r$ são k -álgebras graduadas. Logo, $A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ é uma $(\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K})$ -álgebra graduada. Em particular, a parte homogênea de grau zero de $A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ é $\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$. Por outro lado, como $A \simeq A/P_1, \dots, A/P_r$ (Proposição 5.5.4) e a parte de grau zero de A é $\mathbb{K}$ segue que $\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$; isso implica que $r = 1$. Portanto, A é um domínio.

5.6 O critério de Normalidade de Serre

Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local. Denotemos por $\mu(\mathfrak{m})$ o número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$. Segue do Teorema 5.2.1 a seguinte desigualdade

$$\text{ht}(\mathfrak{m}) \leq \mu(\mathfrak{m}).$$

Na situação em que esta desigualdade é uma igualdade dizemos que o anel Noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$ é *regular*. De modo geral, diremos que um anel Noetheriano A é *regular* se A_P é regular para cada ideal primo P de A .

Definição 5.6.1. Seja A um anel Noetheriano e i um inteiro não-negativo.

- (i) Dizemos que o anel A satisfaz a *condição* (R_i) *de Serre* se para todo ideal primo P de A de altura $\leq i$ o anel local A_P é regular.
- (ii) Dizemos que o anel A satisfaz a *condição* (S_i) *de Serre* se para todo ideal primo P de A , $\text{prof } A_P \geq \min\{i, \text{ht}(P)\}$.

Observação 5.6.2. Suponhamos que A é um anel Cohen-Macaulay. Em particular, pelo item (b) do Teorema 5.4.8, A_P é Cohen-Macaulay para cada ideal primo P de A . Assim,

$$\begin{aligned} \text{prof}(A_P) &= \dim A_P && (\text{pois } A_P \text{ é Cohen-Macaulay}) \\ &= \text{ht}(P) && (\text{pela igualdade (5.1)}) \end{aligned}$$

para cada ideal primo P de A . Logo, $\text{prof}(A_P) \geq \min\{i, \text{ht}(P)\}$ para cada ideal primo P de A . Portanto, se A é anel Cohen-Macaulay então A satisfaz a condição (S_i) para qualquer inteiro não negativo i .

O teorema a seguir apresenta uma caracterização para a normalidade de um anel em termos das condições de Serre.

Teorema 5.6.3 (Critério de Normalidade de Serre). *Um anel Noetheriano A é normal se, e somente se, A satisfaz as condições (R_1) e (S_2) de Serre.*

Prova. Ver [10, Theorem 4.5.3]. □

5.7 Critério jacobiano

Seja $A = k[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis com coeficientes sobre um corpo k . Dados $f_1, \dots, f_m \in A$, consideremos a k -álgebra $R = A/I$ onde $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Uma matriz jacobiana de R sobre k é a seguinte matriz de ordem $m \times n$

$$\Theta = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right). \quad (5.5)$$

Digamos que $\text{ht}(I) = h$. O ideal jacobiano de R sobre k , denotado $J_{R/k}$, é o seguinte ideal de R :

$$J_{R/k} := (I_h(\Theta), I)/I. \quad (5.6)$$

Temos o seguinte resultado que garante que o ideal $J_{R/k}$ está bem definido.

Proposição 5.7.1. *Sejam R e R' $\mathbb{K}$ -álgebras finitamente geradas isomorfas. Então, o isomorfismo entre elas transforma o ideal jacobiano de uma no ideal jacobiano da outra.*

Prova. Ver [10, Proposition 4.4.4]. □

Exemplo 5.7.2. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle t_1z - t_2y, t_2y - t_3x \rangle$. Consideremos $R = A/I$. Uma matriz jacobiana de R sobre k é:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -t_2 & t_1 & z & -y & 0 \\ -t_3 & t_2 & 0 & 0 & y & -x \end{bmatrix}.$$

Como visto no Exemplo 5.2.4, $\text{ht}(I) = 2$. Assim

$$J_{R/k} := \langle I_2(\Theta), I \rangle / I.$$

Um cálculo direto nos dá

$$I_2(\Theta) = \langle t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, xy, xz, yz, t_1x, t_1y, t_2x, t_2y, t_2z, t_3y, t_3z \rangle.$$

Portanto,

$$J_{R/k} = \langle t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, xy, xz, yz, t_1x, t_1y, t_2x, t_2y, t_2z, t_3y, t_3z, I \rangle / I.$$

Teorema 5.7.3 (Critério Jacobiano). *Seja $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios com coeficiente sobre um corpo de característica zero k . Seja I um ideal puro de A e $R = A/I$. Suponha P sendo um ideal primo de R . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) R_P é anel regular.
- (b) P não está contido em $J_{R/k}$.

Prova. Ver [10, Theorem 4.4.9]. □

A observação a seguir será bastante importante nesse trabalho.

Observação 5.7.4. Seja $A = k[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo de característica zero k . Sejam I um ideal puro de A e $R = A/I$. Então R satisfaz a condição (R_1) de Serre se, e somente se, $\text{ht}(J_{R/k}) \geq 2$. Com efeito, suponhamos que R satisfaz a condição (R_1) . Então, R_P é regular para cada ideal primo de R de altura ≤ 1 . Assim, pelo critério Jacobiano, os primos contendo $J_{R/k}$ tem que ter altura pelo menos 2. Por outro lado, suponha que $\text{ht}(J_{R/k}) \geq 2$. Então, não existe primo de altura ≤ 1 contendo $J_{R/k}$. Logo, novamente pelo critério Jacobiano, R_P é regular para cada ideal primo de R de altura ≤ 1 .

Bibliografia

- [1] T. C. Benítez and C. D’Andrea, Minimal generators of the defining ideal of the Rees Algebra associated to monoid parametrizations, *Computer Aided Geometric Design* 27 (2010), 461–473.
- [2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **60**, Cambridge University Press, 1993.
- [3] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal Rings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1327 Springer-Verlag, 1988.
- [4] Ela Celikbas, Emilie Dufresne, Louiza Fouli, Elisa Gorla, Kuei-Nuan Lin, Claudia Polini, and Irena Swanson, Rees algebras of sparse determinantal ideals, Preprint (2021), 17 pages, arXiv:2101.03222.
- [5] D. Eisenbud, *Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150, New York, Springer-Verlag, 1995.
- [6] D. Eisenbud, Linear sections of determinantal varieties, *Amer. J. Math.* 110 (1988) 541–575.
- [7] W. Fulton, *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometry*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [8] A. Doria, H. Hassanzadeh, A. Simis, A characteristic free criterion of birationality, *Adv. Math.* **230** (2012), 390–413.
- [9] A. Conca, J. Herzog, and G. Valla, Sagbi bases with applications to blow-up algebras, *J. Reine Angew. Math.* 474 (1996), 113–138.
- [10] C. Huneke and I. Swanson, *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Math. Society, Lecture Notes Series **336**, Cambridge University Press (2006).

- [11] Andrew R. Kustin, Claudia Polini, and Bernd Ulrich, The equations defining blowup algebras of height three Gorenstein ideals, *Algebra Number Theory* 11 (2017), 1489–1525.
- [12] S. Lang, *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, 211 (Revised third ed.), New York, Springer-Verlag, 2002.
- [13] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [14] D. Rees, Two classical theorems of ideal theory, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 52 (1956), 155–157.
- [15] S. Morey and B. Ulrich, Rees algebras of ideals with low codimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), 3653–3661.
- [16] A. Simis, *Commutative Algebra*, De Gruyter Textbook, 2020.