



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

A Equação do Calor com o Operador de Grushin

Geronimo Carvalho Oliveira

SÃO CRISTÓVÃO – SE
JULHO DE 2023

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

A Equação do Calor com o Operador de Grushin

por

Geronimo Carvalho Oliveira

sob a orientação do

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Cristóvão – SE
Julho de 2023

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

O48e Oliveira, Geronimo Carvalho
A equação do calor com o operador de Grushin / Geronimo
Carvalho Oliveira ; orientador Arlúcio da Cruz Viana. - São
Cristóvão, 2023.
105 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2023.

1. Equação de calor. 2. Equações diferenciais. 3. Cauchy,
Problemas de. I. Viana, Arlúcio da Cruz orient. II. Título.

CDU 517.9



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A Equação do Calor com o Operador de Grushin.

por

Geronimo Carvalho Oliveira

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana - UFS
Orientador

Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos - UFS
Primeiro Examinador

Profª. Drª. Joelma Azevedo De Moura - UPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Julho de 2023

Aos meus.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a DEUS por me permitir conquistar esse sonho e por me dar forças todas as vezes que precisei. Não foram poucas. À minha mãe, Maria de Fátima, pela dedicação de mãe, por me guiar na construção do meu caráter e por sempre me incentivar. À minha noiva e futura esposa, Letícia Carvalho, pela paciência, apoio e incentivo irrestrito e por sempre estar presente nos meus momentos maus e bons. Às minhas irmãs: Géssica (Keka), Bárbara (Baby) e Vitória (Vivi), por tudo que representam para mim. Ao meu orientador, Arlúcio Viana, que me acompanha desde a graduação, por ser professor e psicólogo, pela dedicação, paciência e amizade. Aos meu amigo José Lucas e Egler Nilson, pelas conversas, desabafos e conselhos. Ao grupo de amigos “idiotas” formado por mim, Denison, Mateus Nunes, Vanessa e Rafael Carvalho. Bons momentos tivemos. Aos amigos presenteados pelo PROMAT: Alexandre, Thyago, Carol, Jeverson e Júnior pelos cafés, risadas e discussões a respeito da mais bela das ciências: a Matemática. Aos demais professores que tive: Zaqueu, Almir, Disson, Maria, Fábio, Gilvana e Wilberclay. Aprendi bastante com cada um. Aos professores Bruno de Andrade — que também foi meu professor — e Joelma Azevedo, por aceitarem participar da banca examinadora. Agradeço também a CAPES, pelo apoio financeiro, importante durante todo o período de estudo.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a equação do calor com o operador de Grushin. Exibimos uma expressão para o núcleo do calor do operador de Grushin e obtemos propriedades de regularidade e decaimento em espaços L^p tanto para o núcleo quanto para o semigrupo associado ao operador de Grushin. Em seguida, utilizamos os resultados encontrados para provar existência, unicidade, dependência contínua e uma alternativa de blowup para soluções brandas para um problema de Cauchy não linear associado à equação do calor com o operador de Grushin.

Palavras-chave: Equação do Calor, Operador de Grushin, Núcleo do Calor, Estimativas em L^p , Soluções locais, Blowup.

Abstract

In this work, we study the heat equation with Grushin's operator. We present an expression for its heat kernel and get regularity properties and decay on L^p spaces for both heat Kernel and semigroup associated to Grushin's operator. Next, we use the results to prove the existence, uniqueness, continuous dependence and blowup alternative of mild solutions of a nonlinear Cauchy's problem associated to Grushin's operator.

Keywords: Heat Equation, Grushin's Operator, Heat Kernel, Estimates in L^p , Local Solutions, Blowup.

Sumário

Introdução e Motivação para o Estudo do Problema	9
1 Preliminares	14
1.1 Espaços Métricos	14
1.1.1 Espaços de Funções	15
1.2 Teoria de Medida	16
1.2.1 Espaços L^p	18
1.3 Convoluções	23
1.3.1 Aproximações da Identidade	24
1.4 Transformada de Fourier	28
1.5 Operadores Lineares	30
2 Cálculo Variacional e o Método Geométrico	32
2.1 Núcleo do Calor para Operadores com Potencial	32
2.1.1 Mecânica Lagrangiana	33
2.1.2 Mecânica Hamiltoniana	34
2.1.3 Equação de Hamilton-Jacobi	35
2.1.4 Método Geométrico	36
2.1.5 Operadores com Potenciais	39
2.2 A Solução Fundamental da Equação do Calor com Potencial Qua- drático	42
3 A Equação Linear do Calor com o Operador de Grushin	56
3.1 O Núcleo do Calor do Operador de Grushin	56
3.2 O Problema de Cauchy	66
3.3 Semigrupo do Calor	69

4	A Equação do Calor Não Linear com Operador de Grushin	72
4.1	O Teorema de Existência para $p > \frac{3}{2}(\rho - 1)$	73
4.1.1	Continuação das Soluções e Alternativa de Blow-Up	83
4.2	O Teorema de Existência para $p = \frac{3}{2}(\rho - 1)$	88
5	Apêndice	95

Introdução e Motivação para o Estudo do Problema

A equação do calor é utilizada para modelar diversas categorias de fenômenos, pois ajuda a descrever a evolução no tempo da densidade u de alguma quantidade como, por exemplo, calor, concentração química, dispersão de gases, velocidade de fluidos, etc. A modelagem é feita da seguinte maneira (ver [9]): se $\Omega \subset U$ é uma sub-região suave, então a taxa de variação da quantidade de calor em Ω é igual ao fluxo negativo através de $\partial\Omega$. Então,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (1)$$

em que \mathbf{F} é a densidade de fluxo. Daí,

$$u_t = -\operatorname{div}(\mathbf{F}). \quad (2)$$

Quando \mathbf{F} é proporcional ao gradiente de u , digamos $\mathbf{F} = -a\nabla u$ (pela lei de Fourier, o fluxo de calor vai dos pontos mais quentes para os mais frios), $a > 0$, obtemos a equação:

$$u_t = a \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = a\Delta u. \quad (3)$$

Em particular, quando $a = 1$ temos a *equação do calor*, cujo núcleo do calor (ou solução fundamental) é dado por meio de uma gaussiana para $t > 0$ e uma distribuição delta de Dirac em $t = 0$; ver Figura 1.

O principal uso da equação do calor é poder determinar a evolução da temperatura em Ω a partir de uma condição inicial dada u_0 . Neste caso, sabe-se que a solução do problema de Cauchy é dado pela convolução entre a gaussiana e a condição inicial u_0 . Com o objetivo de obter modelos mais realísticos, generalizações da equação do calor surgem quando o fluxo é um campo de vetores diferente do gradiente, isto é, a direção do fluxo de calor não é a de maior crescimento em toda

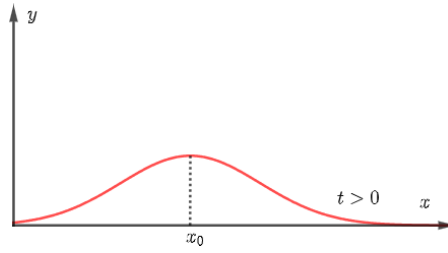


Figura 1: gaussiana unidimensional $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$

parte. Um caso particular é a equação do calor com o operador de Grushin, que é obtida a partir do campo de vetores $\mathbf{G}(x, y) = -(\frac{u_x}{2}, \frac{x^2 u_y}{2})$. Neste caso, a direção de \mathbf{G} coincide com a de \mathbf{F} quando $|x| = 1$ e tende à direção do eixo y para os demais vetores (x, y) ; ver Figura 2. A título de exemplo, sendo $u(x, y; t) = \frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$ o núcleo do calor clássico e fixando $t = 1$, os campos de vetores \mathbf{F} e \mathbf{G} aplicados em u têm as seguintes formas:

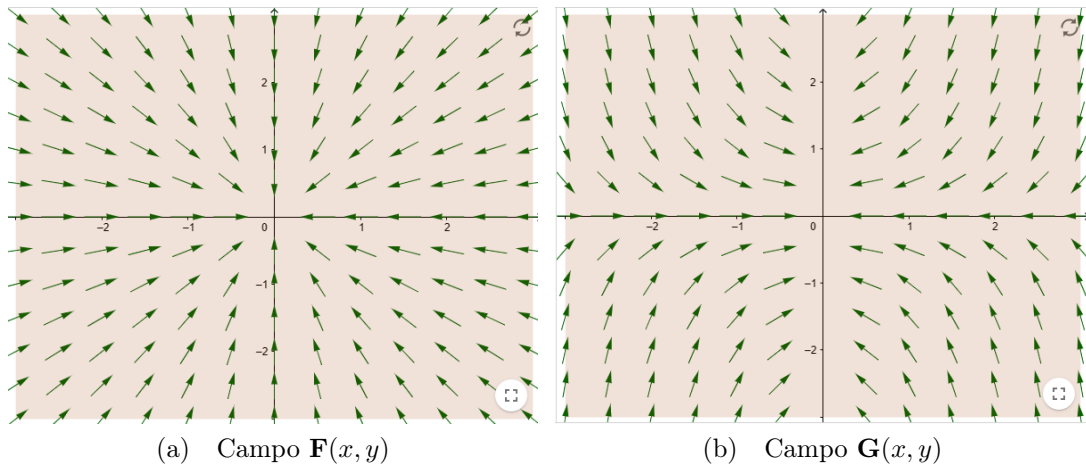


Figura 2: Comparação entre os campos de vetores.

Considerando as situações em que o fluxo é dado pelo campo \mathbf{G} , o resultado de (2) é a equação:

$$u_t = -\text{div}(\mathbf{G}) = \Delta_{\mathcal{G}}u, \quad (4)$$

em que $\Delta_{\mathcal{G}}$ é o operador bidimensional de Grushin dado por:

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}(\partial_x^2 + x^2 \partial_y^2). \quad (5)$$

Nosso objetivo principal é buscar resultados semelhantes ao que há de disponível na literatura sobre o núcleo do calor clássico. Em particular, queremos determinar resultados envolvendo o problema de Cauchy não linear.

Inicialmente, em um projeto de iniciação científica (2019-2020) (ver [13]), buscamos uma representação explícita para o núcleo do calor associado ao operador de Grushin por meio do método de soluções autossimilares utilizado em [9] para o caso clássico. Estudando [16], Lv, Wei e Xei apresentam uma solução dada por

$$K(x, y; t) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{y^2}{t^2}}. \quad (6)$$

No entanto, esta função não é solução da equação de (4). De fato, verificamos que (6) é solução da equação

$$\partial_t u = \frac{1}{2}(\partial_x^2 u + t\partial_y^2 u).$$

Este acontecido nos levou a buscar determinar o núcleo do calor. O livro do Calin *et al* (ver [5]) apresenta métodos para determinar núcleos do calor para operadores elípticos e subelípticos, dentre eles, o operador de Grushin. Por esse motivo, ele foi então adotado como referência base para o estudo da equação (4).

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos resultados básicos necessários para os capítulos posteriores, como os lemas de Gronwall, os teoremas clássicos de teoria da medida, dos espaços métricos além de resultados da teoria de Fourier. No Capítulo 2, estudamos conceitos do cálculo variacional e o método geométrico. Esta foi a ferramenta chave para exibirmos uma expressão para o núcleo do calor e consiste em determinar a geodésica que minimiza o funcional ação clássica (2.3). Além disso, estudamos a equação do calor com potencial do tipo quadrático apresentando resultados importantes para capítulo seguinte. O Capítulo 3 tem como principal objetivo estudar o núcleo do calor com o operador de Grushin:

$$K(x, y; t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{i\xi y - \frac{\xi}{2} x^2 \coth(\xi t)} d\xi. \quad (7)$$

Adicionalmente, neste capítulo estudamos o problema de Cauchy linear associado ao operador de Grushin

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\mathcal{G}} u = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

em que estudamos sua solução, regularidade, unicidade e a geração de um semi-grupo.

No estudo do calor para o caso clássico, Fujita estudou a existência de

soluções clássicas para problema não linear:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{\rho-1}u, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (8)$$

Em seus resultados, ele obteve que: se $n(\rho - 1)/2 < 1$, então não existe solução global para qualquer condição inicial não trivial. Se $n(\rho - 1)/2 > 1$, então soluções globais existem para qualquer condição inicial não trivial dominada por uma gaussiana suficientemente pequena (ver [11]). Para $n(\rho - 1)/2 = 1$, não existe solução global não negativa para qualquer condição inicial não identicamente nula e não negativa (ver [17]). Brezis e Cazenáve em [3] consideraram o problema de existência local do problema (8) em domínio suave e limitado Ω com $u = 0$ em $(0, T) \times \partial\Omega$. Neste caso, para $p > n(\rho - 1)/2$ (respectivamente $p = n(\rho - 1)/2$) e $u_0 \in L^p(\Omega)$, existe $T > 0$ e uma única solução clássica u de modo que $u(0) = u_0$ em $(0, T) \times \bar{\Omega}$. Tendo estes resultados como referência, gostaríamos de obter respostas alinhadas com o que foi discutido acima. O Capítulo 4 tem como principal objetivo investigar o problema de Cauchy não linear associado ao operador de Grushin

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\mathcal{G}}u = |u|^{\rho-1}u, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (9)$$

em que $\rho > 1$, buscando mostrar a existência e unicidade de soluções de modo análogo ao que foi discutido sobre o caso clássico. Mais precisamente, provamos que, se $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 3(\rho - 1)/2$, $\rho > 1$, ou $1 < p = 3(\rho - 1)/2$, a equação (9) possui uma solução definida em um intervalo maximal $(0, T_m)$, tal que $T_m = +\infty$ ou $T_m < \infty$ e $\lim_{t \rightarrow T_m^-} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = +\infty$.

Os resultados envolvendo homogeneidade do núcleo do calor, existência de solução dos problemas de Cauchy homogêneo e o não linear, regularidade, unicidade e a geração de um semigrupo em L^p não foram encontrados outras bibliografias, exceto o Teorema 3.1 que está, com menos detalhes, no livro [5], e o Teorema 3.4, que está implícito na mesma referência.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo apresentar as ferramentas básicas e necessárias para a compreensão dos resultados principais desta dissertação. Inicialmente, apresentamos algumas integrais úteis e desigualdades bastante presentes nas demonstrações de resultados envolvendo a equação do Grushin não linear. Tendo o livro do Folland [10] como referência base, reunimos resultados da teoria de medida que tiveram relevância em nosso trabalho, muitos deles acompanhados de sua demonstração. Por exemplo: resultados envolvendo estimativas em espaços L^p e aproximações do operador identidade. Além disso, este capítulo contém também generalizações de resultados apresentados no livro. Por fim, finalizamos este capítulo com o Teorema de Hille que nos possibilita permutar o operador linear fechado e o funcional integral.

1.1 Espaços Métricos

Nesta seção apresentamos resultados a respeito de uma classe especial de espaços: aqueles que são munidos de uma função especial chamada de *métrica* (daí o nome de espaços métricos). Em tais conjuntos, com a propriedade adicional de completude, é possível utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, ferramenta essencial para mostrar unicidade de soluções na teoria de equações diferenciais. Os resultados desta seção foram retirados de [12].

Definição 1.1. Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- i) $d(x, x) = 0$;
- ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

$$\text{iii) } d(x, y) = d(y, x);$$

$$\text{iv) } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Um *espaço métrico* é um par (M, d) , em que M é um conjunto e d é uma métrica em M . Um espaço métrico é dito ser *completo* se toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Definição 1.2. Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado de espaço vetorial normado. Quando este é equipado com uma métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, dizemos que a métrica d é proveniente da norma $\|\cdot\|$. Um espaço normado E é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Definição 1.3. Seja (M, d) um espaço métrico. Um ponto fixo de uma aplicação $F : M \rightarrow M$ é um ponto $x \in M$ tal que $F(x) = x$.

Definição 1.4. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é chamada de contração se existe uma constante $0 \leq K < 1$ tal que

$$d_2(F(x), F(y)) \leq K d_1(x, y), \forall x, y \in M.$$

Teorema 1.1. (Ponto Fixo de Banach) Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.

1.1.1 Espaços de Funções

Seja X um conjunto qualquer. Denotamos por $B(X) = B(X, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) o conjunto de todas as \mathbb{K} -funções limitadas X . Se $f \in B(X)$, a *norma uniforme* é definida por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Se X é um espaço topológico, também temos o espaço $C(X, \mathbb{K})$ das funções contínuas em X e defini-se

$$BC(X, \mathbb{K}) = B(X, \mathbb{K}) \cap C(X, \mathbb{K}).$$

Por simplicidade, omitimos o termo “ \mathbb{K} ” quando não for possível confundir os espaços. Adotemos algumas terminologias: considere X um espaço topológico e $f \in C(X)$. O *suporte* de f , denotado por $\text{supp}(f)$, é o menor conjunto fechado

fora do qual f se anula. Em símbolos: $\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Dizemos que f tem suporte compacto se $\text{supp}(f)$ é compacto e definimos

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}.$$

Além disso, dizemos que f anula no infinito se dado $\epsilon > 0$ o conjunto $\{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto e definimos

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ anula no infinito}\}.$$

Lema 1.1. (Lema da Colagem) Sejam $X = A \cup B$, em que A e B são fechados em X , e $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ são contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para $x \in A \cap B$, então a função $h : X \rightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Definição 1.5. Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \rightarrow M$ uma aplicação. A notação $B_\alpha(X; M)$ representa o conjunto das aplicações $f : X \rightarrow M$ tais que $d(f, \alpha) = \sup_{x \in X} d(f(x), \alpha(x)) < +\infty$, com a métrica da convergência uniforme.

Proposição 1.1. Se o espaço M é completo, então $B_\alpha(X; M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \rightarrow M$.

Proposição 1.2. $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

1.2 Teoria de Medida

Nessa seção apresentamos alguns teoremas importante da Teoria de Medida obtidos de [10] e que foram importantes na obtenção dos nossos resultados.

Teorema 1.2. (Teorema da Convergência Dominada) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis tal que

- a) $f_n \rightarrow f$ q.t.p;
- b) existe uma função não negativa e integrável tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então f é integrável e $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

O teorema a seguir nos dá um critério para passagem do limite ou derivada sob o sinal da integral e funciona como uma generalização do teorema anterior. Posto isso, ao longo do texto nos referiremos a ele também como Teorema da Convergência Dominada (TCD).

Teorema 1.3. Seja $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($-\infty < a < b < \infty$) e suponha que $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável para cada $t \in [a, b]$. Seja $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$.

- a) Suponha que existe g integrável tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo x, t . Se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ para todo x , então $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$; em particular, se $f(x, \cdot)$ é contínua para cada x , então F é contínua.
- b) Suponha que existem $\partial f / \partial t$ e g integrável tal que $|(\partial f / \partial t)(x, t)| \leq g(x)$ para todo x, t . Então F é diferenciável e $F'(t) = \int (\partial f / \partial t)(x, t) d\mu(x)$.

Teorema 1.4. (Teorema de Egoroff) Suponha que $\mu(X) < \infty$ e que f_1, f_2, \dots e f são funções complexas mensuráveis em X tais que $f_n \rightarrow f$ a.e. Então para cada $\epsilon > 0$ existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \epsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em E^c .

Demonstração. Ver [10], p. 62. □

Observação 1. A hipótese “ $\mu(X) < \infty$ ” pode ser substituída por “ $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $g \in L^1(\mu)$ ”.

Observação 2. Quando a integração for feita sobre um conjunto definido por meio de um produto cartesiano $X \times Y$, em vez de escrevermos $dx dy$ utilizamos também o termo $d(x, y)$.

Teorema 1.5. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) espaços de medida σ -finitos.

- (a) (*Tonelli*) Se $f \in L^+ X \times Y$, então a função $g(x) = \int f_x d\nu$ e $h(y) = \int f^y d\mu$ pertencem a $L^+ X$ e $L^+ Y$, respectivamente, e

$$\begin{aligned} \int f d(\mu \times \nu) &= \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y). \end{aligned}$$

- (b) (*Fubini*) Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$, então $f_x \in L^1(\nu)$ para quase todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para quase todo $y \in Y$; as funções definidas em quase todo ponto $g(x) = \int f_x d\nu$ e $h(y) = \int f^y d\mu$ pertencem a $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$, respectivamente, e a igualdade no item anterior é válida.

1.2.1 Espaços L^p

Uma classe de espaços importantes para o desenvolvimento deste trabalho são os denominados espaços L^p - também chamados de espaços de Lebesgue - (ver [10], para mais detalhes). Vejamos sua definição e suas principais propriedades: fixemos um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) , ou seja, X é um conjunto não vazio, \mathcal{M} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ uma medida em X .

Definição 1.6. Se f é uma função mensurável sobre X e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_X |f(x)|^p dx \right]^{1/p}. \quad (1.1)$$

Também, para $p = \infty$, estabelecemos a seguinte norma:

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{a \geq 0; \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}, \quad (1.2)$$

com a convenção de que $\inf \emptyset = \infty$. Em alguns casos $\|f\|_{L^\infty}$ é chamada supremo essencial de f e escrevemos

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{supess}\{|f(x)| : x \in X\}. \quad (1.3)$$

Definimos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty\}. \quad (1.4)$$

Definição 1.7. Sejam $1 \leq p < \infty$ e Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Diremos que f é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denotaremos isso por $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty. \quad (1.5)$$

Definição 1.8. Assuma que $(X, \|\cdot\|)$ seja um espaço vetorial normado e $T > 0$. O espaço $L^p([0, T]; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, contém todas as funções mensuráveis $f : [0, T] \rightarrow X$ para as quais as seguintes normas são finitas

$$\|f\|_{L^p([0, T]; X)} := \left[\int_0^T |f(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p < \infty \quad (1.6)$$

e também

$$\|f\|_{L^\infty([0, T]; X)} = \text{supess}\{|f(t)| : t \in [0, T]\}. \quad (1.7)$$

Analogamente, $C([0, T]; X) = \{f : [0, T] \rightarrow X \text{ contínua}\}$ munido com a norma do supremo essencial $\|\cdot\|_{L^\infty([0, T]; X)}$.

Uma observação interessante ocorre no caso em que f é limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$, para todo $x \in X$. Ocorre que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$ e, portanto, $\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_\infty$. Por outro lado, $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$, para todo $x \in X$. Logo, podemos concluir que as duas normas coincidem e $\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty$. Abaixo listamos alguns resultados importantes sobre a teoria dos espaços de Lebesgue que serão utilizados neste documento. Os próximos resultados podem ser encontrados em [10].

Teorema 1.6 (Desigualdade de Hölder). Suponha que $1 \leq p \leq \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se f e g são funções mensuráveis sobre X , então

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.8)$$

Teorema 1.7 (Desigualdade de Hölder Generalizada). Suponha que $1 \leq p \leq \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Se f e g são funções mensuráveis sobre X , então

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.9)$$

Teorema 1.8 (Desigualdade de Minkowski). Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p$, então

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \quad (1.10)$$

Teorema 1.9. Para $1 \leq p \leq \infty$, L^p é um espaço de Banach.

Teorema 1.10. Sejam p e q expoentes conjugados. Suponha que g é uma função mensurável em X tal que $fg \in L^1$ para todas as funções f no espaço Σ das funções simples que se anulam fora de um conjunto de medida finita, e a quantidade

$$M_q(g) = \sup \left\{ \left| \int_X fg dx \right| : f \in \Sigma \text{ e } \|f\|_p = 1 \right\}$$

é finita. Também suponha que $S_g = \{x : g(x) \neq 0\}$ é σ -finita ou que μ é semifinita. Então $g \in L^q$ e $M_q(g) = \|g\|_{L^q}$.

Outra desigualdade de Minkowski importante neste trabalho relaciona informações sobre integrais e as normas dos espaços de Lebesgue usuais:

Teorema 1.11 (Desigualdade de Minkowski para Integrais). Suponha que (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) sejam espaços de medida σ -finito, e seja f uma função mensurável em $X \times Y$.

a) Se $f \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, então

$$\left[\int \left(\int f(x, y) dy \right)^p dx \right]^{1/p} \leq \int \left[\int f(x, y)^p dx \right]^{1/p} dy. \quad (1.11)$$

b) Se $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ em quase todo ponto y , e a função $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ está em $L^1(\nu)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ em quase todo ponto x , a função $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ está em $L^p(\mu)$, e

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^p} \leq \int \|f(\cdot, y)\|_{L^p} d\nu(y). \quad (1.12)$$

Demonstração. a) Se $p = 1$, pelo Teorema 1.5 (Tonelli) a desigualdade é imediata. Se $1 < p < \infty$, considerando q expoente conjugado de p e $g \in L^q(\mu)$, pelos teoremas 1.5 e 1.9 segue-se que

$$\begin{aligned} \int_X \left[\int_X f(x, y) d\nu(y) \right] |g(x)| d\mu(x) &= \int_X \left(\int_X f(x, y) |g(x)| d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &\leq \int_X \|g\|_{L^q} \left(\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y). \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema 1.10, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^p} \left[\int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{1/p} \\ \leq \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{1/p} d\nu(y). \end{aligned}$$

b) Se $p < \infty$, segue do item anterior que

$$\begin{aligned} \left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^p} &= \left(\int \left| \int f(x, y) d\nu(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int \left(\int |f(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leq \int \left[\int |f(x, y)|^p d\mu(x) \right]^{1/p} d\nu(y) \\ &= \int \|f(\cdot, y)\|_{L^p} d\nu(y). \end{aligned}$$

O caso $p = \infty$ segue da seguinte desigualdade das integrais:

$$\left| \int f(x, y) d\nu(y) \right| \leq \int |f(x, y)| d\nu(y),$$

para todo $x \in X$. Portanto,

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^\infty} \leq \int |f(x, y)| d\nu(y) \leq \int \|f(\cdot, y)\|_{L^\infty} d\nu(y),$$

como queríamos demonstrar. \square

Proposição 1.3. Se $0 < p < q < r \leq \infty$, então $L^p \cap L^r \subset L^q$ e $\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}^\lambda \|f\|_{L^r}^{1-\lambda}$, em que $0 < \lambda < 1$ é definida por:

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}. \quad (1.13)$$

Proposição 1.4. Sejam $u, v \in L^r(X)$, com $r \geq \rho > 1$. Então,

$$\|u^\rho(\cdot, s) - v^\rho(\cdot, s)\|_{L^{r/\rho}} \leq C \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{L^r} (\|u(\cdot, s)\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v(\cdot, s)\|_{L^r}^{\rho-1}), C > 0.$$

Demonstração. Usando a Proposição 5.3, temos

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, s)^\rho - v(\cdot, s)^\rho\|_{L^{r/\rho}} &\leq C \| |u(\cdot, s) - v(\cdot, s)| (|u(\cdot, s)|^{\rho-1} + |v(\cdot, s)|^{\rho-1}) \|_{L^{r/\rho}} \\ &= \left(\int_X |(u-v)(x, s)|^{r/\rho} (|u(x, s)|^{\rho-1} + |v(x, s)|^{\rho-1})^{r/\rho} dx \right)^{\rho/r}. \end{aligned}$$

Observe que $u, v \in L^r$ implica $|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)|^{r/\rho} \in L^\rho$ e $(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})^{r/\rho} \in L^{\rho/\rho-1}$, em que ρ e $\rho/\rho-1$ são expoentes conjugados. Assim sendo, pela desigualdade de Hölder em (1.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \|u^\rho(\cdot, s) - v^\rho(\cdot, s)\|_{L^{r/\rho}} &\leq (\| |u-v|^{r/\rho} \|_{L^\rho})^{\rho/r} (\| (|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})^{r/\rho} \|_{L^{\rho/\rho-1}})^{\rho/r} \\ &\leq \| |u-v| \|_{L^r} (\|u(\cdot, s)\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v(\cdot, s)\|_{L^r}^{\rho-1}). \end{aligned}$$

\square

Definição 1.9. Seja f uma função em \mathbb{R}^n e $y \in \mathbb{R}^n$. Definimos a translação de f por $\tau_y f(x) := f(x-y)$.

Observe que $\|\tau_y f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$. Considerando a definição acima, dizemos que uma função é dita ser *uniformemente contínua* se $\|\tau_y f - f\|_u \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow 0$.

Lema 1.2. Se $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, então f é uniformemente contínua.

Demonstração. Por hipótese, f está definida em um compacto. O resultado segue do fato que funções contínuas são uniformemente contínuas em compactos. \square

Proposição 1.5. Se μ é uma medida de Radon em X , $C_c(X)$ é denso em $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.6. Se $1 \leq p < \infty$, a translação é contínua na norma L^p , ou seja, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $z \in \mathbb{R}^n$, então $\lim_{y \rightarrow 0} \|\tau_{y+z}f - \tau_zf\|_{L^p} = 0$.

Demonstração. Como $\tau_{y+z}f = f(x - (y + z)) = f((x - y) - z) = \tau_zf(x - y) = \tau_y\tau_zf(x)$, ao substituirmos f por τ_zf é suficiente assumir $z = 0$. Considere $f \in L^p$. Dado $\epsilon > 0$, segue da densidade de $C_c(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (Proposição 1.5) que existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g - f\|_{L^p} < \epsilon/3$. Daí,

$$\|\tau_yf - f\|_{L^p} \leq \|\tau_y(f - g)\|_{L^p} + \|\tau_yg - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p}.$$

Por um lado existe $R > 0$ tal que g se anula fora de $B(0, R)$. Daí, para $|x| \geq R + 1$ e $|y| \leq 1$, temos que $|x - y| \geq |x| - |y| \geq R$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_yg(x) - g(x)|^p &= \int_{B(0, R+1)} |\tau_yg(x) - g(x)|^p + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, R+1)} |\tau_yg(x) - g(x)|^p \\ &= \int_{B(0, R+1)} |\tau_yg(x) - g(x)|^p, \end{aligned}$$

pois $|\tau_yg(x) - g(x)| = |g(x - y) - g(x)| \leq 2 \max\{|g(x - y)|, |g(x)|\} = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B(0, R + 1)$. Como $|\tau_yg(x) - g(x)|^p \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow 0$ (pela continuidade de g) e

$$|\tau_yg(x) - g(x)|^p \leq 2^p \sup_{x \in B(0, R+1)} |g(x)|^p \in L^1(B(0, R + 1)),$$

pois g é contínua. Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada: $\|\tau_yg - g\|_{L^p} < \epsilon/3$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \|\tau_yf - f\|_{L^p} &\leq \|\tau_y(f - g)\|_{L^p} + \|\tau_yg - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= \|f - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} + \|\tau_yg - g\|_{L^p} < \epsilon. \end{aligned}$$

\square

Teorema 1.12. (Teorema de Lusin) Suponha que μ seja uma medida de Radon em X e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função que se anula fora de um conjunto de medida finita. Então para todo $\epsilon > 0$ existe $\phi \in C_c(X)$ tal que $\phi = f$ exceto em um conjunto com medida menor que ϵ . Se f é limitada, então ϕ pode ser escolhida de modo que $\|\phi\| \leq \|f\|_\infty$.

1.3 Convoluções

Definição 1.10. Sejam f e g funções mensuráveis sobre \mathbb{R}^n . A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy, \quad (1.14)$$

para todo x tal que a integral acima exista.

As propriedades elementares da convolução estão apresentadas na proposição a seguir:

Proposição 1.7. Desde que as integrais em questão existam, temos:

- i) $f * g = g * f$;
- ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
- iii) Para $z \in \mathbb{R}^n$, $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$;
- iv) Se A é o fecho de $\{x + y : x \in \text{supp}(f), y \in \text{supp}(g)\}$, então $\text{supp}(f * g) \subset A$.

Demonstração. i) Fazendo a substituição $z = x - y$, temos:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z)dz = (g * f)(x).$$

ii) Fazendo uso do Teorema de Fubini 1.5, temos:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x - y)h(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - y - z)h(y)dzdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - y - z)h(y)dydz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x - z)dz \\ &= f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

iii) Dado $z \in \mathbb{R}^n$, temos que $\tau_z(f * g)(x) = (f * g)(x - z)$ e

$$\begin{aligned} (f * g)(x - z) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z - y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_z f(x - y)g(y)dy \\ &= (\tau_z f) * g(x). \end{aligned}$$

Daí, pelo item (a), obtemos $\tau_z(f * g) = \tau_z(g * f) = (\tau_z f) * g = (\tau_z g) * f = f * (\tau_z g)$.

iv) Se $x \notin A$, então para todo $y \in \text{supp}(g)$, segue que $z = x - y \notin \text{supp}(f)$. Isso nos diz que $f(x - y)g(y) = 0$, para todo $x \in A^c$. Consequentemente, $(f * g)(x) = 0$. O resultado segue pela contrapositiva. \square

Teorema 1.13. Se $f \in L^1, g \in C^k$ e $\partial^\alpha g$ é limitada para $|\alpha| \leq k$, então $f * g \in C^k$ e $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g)$, para $|\alpha| \leq k$.

1.3.1 Aproximações da Identidade

O núcleo do calor clássico satisfaz a propriedade conhecida como aproximação da identidade. Nesta seção apresentaremos uma generalização desse conceito de modo que o núcleo do calor com o operador de Grushin possa se valer dessa propriedade. Com efeito, seja Φ uma função em \mathbb{R}^n e $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, com cada $\epsilon_i > 0$ e defina

$$\Phi_\epsilon(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{\prod_{i=1}^n \epsilon_i} \Phi\left(\frac{x_1}{\epsilon_1}, \dots, \frac{x_n}{\epsilon_n}\right).$$

Observação 3. Dizemos que $\epsilon \rightarrow 0$ se, e somente se, $\epsilon_i \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n$. Além disso, se $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\epsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)dx,$$

pois, ao substituir $y_i = \epsilon_i w_i$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\epsilon(y)dy &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \epsilon_i} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{y_1}{\epsilon_1}, \dots, \frac{y_n}{\epsilon_n}\right) d(y_1, \dots, y_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(w_1, \dots, w_n) d(w_1, \dots, w_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(w) dw. \end{aligned}$$

A ideia da discussão anterior é que a massa de Φ_ϵ torna-se mais concentrada na origem. Heuristicamente, Φ_ϵ está convergindo para um múltiplo do delta de Dirac [6].

Lema 1.3. Seja $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)dx = A$. Então valem as seguintes propriedades:

- i) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$), então $f * \Phi_\epsilon \rightarrow Af$ na norma L^p , quando $\epsilon \rightarrow 0$.
- ii) Se f é limitada e uniformemente contínua, então $f * \Phi_\epsilon \rightarrow Af$ uniformemente quando $\epsilon \rightarrow 0$.
- iii) Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e f é contínua em um aberto U , então $f * \Phi_\epsilon \rightarrow Af$ uniformemente em subconjuntos compactos de U , quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. i) Dado $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} f * \Phi_\epsilon(x) - Af(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Phi_\epsilon(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Phi_\epsilon(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\Phi_\epsilon(y)dy \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \epsilon_i} \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\Phi\left(\frac{y_1}{\epsilon_1}, \dots, \frac{y_n}{\epsilon_n}\right) d(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Fazendo $y_i = \epsilon_i w_i$, o jacobiano da mudança de variáveis é

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(w_1, \dots, w_n)} = \prod_{i=1}^n \epsilon_i.$$

Escrevendo $y = \epsilon w$, temos

$$f * \Phi_\epsilon(x) - Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x - \epsilon w) - f(x)]\Phi(w) dw \quad (1.15)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{\epsilon w} f(x) - f(x)]\Phi(w)dw, \quad (1.16)$$

em que τ é a aplicação translação definida em 1.9. Daí, pela desigualdade de Minkowski (1.12), segue que

$$\|f * \Phi_\epsilon - Af\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{\epsilon w} f - f\|_{L^p} |\Phi(w)|dw.$$

Note que $\|\tau_{\epsilon w}f - f\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}$ e pelo Lema 1.6, temos que $\|\tau_{\epsilon w}f - f\|_{L^p} \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, o limite $\epsilon \rightarrow 0$ pode passar sob o sinal da integral e assim $\|f * \Phi_\epsilon - Af\|_{L^p} \rightarrow 0$.

ii) Dado $\eta > 0$, como $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue do Teorema de Lusin e Egoroff que existe um compacto E tal que $\int_{E^c} |\Phi| < \eta$. Como f é uniformemente contínua (em cada variável), existe $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\delta_i > 0$ tal que se $\epsilon_i < \delta_i$ então $|\tau_{\epsilon w}f(x_i) - f(x_i)| < \eta/n$, $1 \leq i \leq n$, para todo $w \in E$ e todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Assim, pela equivalência das métricas em \mathbb{R}^n :

$$|\tau_{\epsilon w}f(x) - f(x)| = |\tau_{\epsilon w}f(x_1) - f(x_1)| + \dots + |\tau_{\epsilon w}f(x_n) - f(x_n)| < \eta.$$

Portanto, de (1.17) segue que

$$|f * \Phi_\epsilon(x) - Af(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{\epsilon w}f(x) - f(x)| \Phi(w) dw \quad (1.17)$$

$$= \int_E |\tau_{\epsilon w}f(x) - f(x)| \Phi(w) dw + \int_{E^c} |\tau_{\epsilon w}f(x) - f(x)| \Phi(w) dw \quad (1.18)$$

$$< \eta \|\Phi\|_{L^1} + 2\eta \|f\|_{L^\infty}, \quad (1.19)$$

para $|\epsilon| < |\delta|$, uniformemente em x .

iii) Dado $\eta > 0$, mantenha a escolha do conjunto compacto E do item anterior tal que $\int_{E^c} |\Phi| < \eta$. Seja K um subconjunto compacto de U e escolha um aberto V e um compacto K_1 tais que $K \subset V \subset K_1 \subset U$. Para $|\epsilon_i|$ suficientemente pequeno, temos que $x - \epsilon w = (x_1 - \epsilon_1 w_1, \dots, x_n - \epsilon_n w_n) \in V$, para $x \in K$ e $w \in E$. Pela continuidade de f em U , segue que f é uniformemente contínua em K_1 e portanto

$$\sup_{x \in K, w \in E} |f(x - \epsilon w) - f(x)| < \eta,$$

para $|\epsilon| < |\delta|$. A estimativa (1.19) agora vale uniformemente em K . \square

O teorema a seguir é importante para demonstrar a desigualdade de Young que relaciona convoluções e os espaços L^p 's:

Teorema 1.14. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) espaços de medida σ -finitos e K uma função $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável em $X \times Y$. Suponha que existe $C > 0$ tal que $\int |K(x, y)| d\mu(x) \leq C$ para quase todo $y \in Y$ e $\int |K(x, y)| d\nu(y) \leq C$ para quase

todo $x \in X$, e $q \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(\nu)$, então a integral

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y)d\nu(y)$$

converge absolutamente para quase todo $x \in X$, $Tf \in L^p(\mu)$ e $\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$.

Demonstração. Se $p = 1$, então

$$\begin{aligned} \int \left| \int K(x, y)f(y)d\nu(y) \right| d\mu(x) &\leq \int \int |K(x, y)f(y)|d\nu(y)d\mu(x) \\ &= \int \int |K(x, y)f(y)|d\mu(x)d\nu(y) \\ &\leq C \int |f(y)|d\nu(y) \\ &= C\|f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

para quase todo $x \in X$. Em particular, temos que $Kf \in L^1(\mu \times \nu)$. Daí, pelo Teorema de Fubini (1.5), $K(x, \cdot)f \in L^1(\nu)$ e, portanto, Tf está bem definida. Para o caso $p = \infty$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int K(x, y)f(y)d\nu(y) \right| &\leq \int |K(x, y)||f(y)|d\nu(y) \\ &\leq \|f\|_{\infty} \int |K(x, y)|d\nu(y) \\ &\leq C\|f\|_{L^{\infty}}. \end{aligned}$$

Finalmente, considere $1 < p < \infty$. Como

$$|K(x, y)f(y)| = |K(x, y)|^{1/q} (|K(x, y)||f(y)|^p)^{1/p},$$

segue da desigualdade de Hölder em (1.6) que

$$\begin{aligned} \int |K(x, y)f(y)|d\nu(y) &= \left[\int |K(x, y)|d\nu(y) \right]^{1/p} \left[\int |K(x, y)||f(y)|^p d\nu(y) \right]^{1/p} \\ &\leq C^{1/p} \left[\int |K(x, y)||f(y)|^p d\nu(y) \right]^{1/p}, \end{aligned}$$

para quase todo $x \in X$. Consequentemente, pelo Teorema 1.5,

$$\begin{aligned} \int \left[\int |K(x, y)f(y)|d\nu(y) \right]^p d\mu(x) &\leq C^{p/q} \int \int |K(x, y)||f(y)|^p d\nu(y)d\mu(x) \\ &\leq C^{(p/q)+1} \int |f(y)|^p d\nu(y) \\ &\leq C^{(p/q)+1} \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Como a integral acima é finita, pois $f \in L^p(\nu)$, temos que $\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$. \square

Teorema 1.15 (Desigualdade de Young). Se $f \in L^1$ e $g \in L^p$ ($1 \leq p \leq \infty$), então $f * g$ existe para quase todo x , $f * g \in L^p$ e $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Demonstração. Considerando o teorema 1.14 com $K(x, y) = f(x - y)$, segue da desigualdade de Minkowski em 1.11 temos que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left\| \int f(y)g(\cdot - y)dy \right\|_{L^p} \\ &\leq \left[\int \left(\int |f(y)g(x - y)|dy \right)^p dx \right]^{1/p} \\ &\leq \int \left[\int |f(y)g(x - y)|^p dx \right]^{1/p} dy \\ &\leq \int |f(y)| \|\tau_y g\|_{L^p} dy \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_{L^p}, \end{aligned}$$

em que $\tau_y g(x) = g(x - y)$ é a translação e $\|\tau_y g\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$. \square

Teorema 1.16 (Forma Geral da Desigualdade de Young). Suponha que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$ e $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Demonstração. Ver [10], p. 241. \square

1.4 Transformada de Fourier

O conceito da transformada de Fourier é de suma importância nesse trabalho, pois o núcleo do calor do operador de Grushin é escrito em termos de uma transformada inversa.

Definição 1.11. Definimos a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.20)$$

em que i é a unidade imaginária e $\xi \cdot x$ é o produto interno canônico de \mathbb{R}^n , e sua transformada de Fourier inversa por

$$\check{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} f(x) dx. \quad (1.21)$$

Uma vez que $|e^{\pm i x \cdot \xi}| = 1$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, as integrais acima convergem para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir nos dá condições para que a transformada de Fourier de uma função f seja valorada nos reais. Uma aplicação imediata dessa propriedade é a verificação de que o núcleo do calor com o operador de Grushin é, de fato, real, uma vez que este não tem forma explícita em termos de funções elementares.

Proposição 1.8. Se f é par, então \hat{f} é par; Além disso, se f é par, então \hat{f} é real.

Demonstração. A demonstração é feita por meio de cálculo direto. É utilizado o fato de que o produto de funções pares é também uma função par e o produto de função par por uma função ímpar é, por sua vez, uma função ímpar. Além disso, se g é uma função ímpar: $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$. Com esses resultados em mente, pela fórmula de Euler, temos:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(x\xi) dx \quad (1.22)$$

e

$$\hat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(-x) e^{-ix\xi} dx = \hat{f}(\xi). \quad (1.23)$$

□

O resultado a seguir apresenta fórmulas importantes envolvendo a transformada de Fourier.

Teorema 1.17. (Propriedades da Transformada de Fourier) Suponha que $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então

- i) $\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \check{\hat{g}} d\xi$;
- ii) $\widehat{D^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \hat{f}$;

$$\text{iii) } \widehat{(f * g)} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \hat{g};$$

$$\text{iv) } f = (\hat{f})^\vee.$$

Demonstração. Ver [9], pg. 184. □

Teorema 1.18 (Desigualdade de Hausdorff-Young). Suponha que $1 \leq p \leq 2$ e seja q o expoente conjugado de p . Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e $\|\hat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}$.

Demonstração. Ver [10], pg. 248. □

1.5 Operadores Lineares

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados da teoria de operadores lineares. Em particular, o semigrupo de operadores. Os resultados desta seção serão utilizados no Capítulo 3 para o semigrupo do calor decorrentes do operador de Grushin. Dado um espaço de Banach X com norma $\|\cdot\|$ e um operador linear T , definimos o conjunto $(B(X), \|\cdot\|_{B(X)})$ como o espaço dos operadores lineares em X com norma dada por

$$\|T\|_{B(X)} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Definição 1.12. Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores limitados de X é um semigrupo de operadores lineares se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) $T(0) = I$, em que I é o operador identidade em X ;
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para quaisquer $t, s \geq 0$.

Teorema 1.19. (Teorema do Gráfico Fechado) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então, T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$, em que $G(T)$ é o gráfico de T .

O teorema a seguir nos possibilita permutar a integral e um operador linear Fechado (ver [15]).

Teorema 1.20. (Hille) Sejam Ω um conjunto qualquer, $T : X \rightarrow Y$ um operador linear fechado e Y um espaço de Banach. Suponha que $f : \Omega \rightarrow X$ e $Tf : \Omega \rightarrow Y$ sejam integráveis. Então $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \in X$ e

$$\int_{\Omega} Tf(x) d\mu(x) = T \left(\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right), \quad (1.24)$$

sempre que ambos os lados da igualdade acima estejam bem definidos.

Demonstração. Como T é fechado, $G(T) = \{(y, Ty); y \in X\}$ é fechado em $X \times Y$. Defina $g : \Omega \rightarrow X \times Y$ por $g(x) := (f(x), Tf(x))$. Temos que g é integrável e sua imagem pertence a $G(T)$, gráfico de T . Além disso,

$$\int_{\Omega} g(x) d\mu(x) = \left(\int_{\Omega} f(x) d\mu(x), \int_{\Omega} Tf(x) d\mu(x) \right).$$

Por outro lado, $\int_{\Omega} g(x) d\mu(x) \in G(T)$. Assim,

$$\int_{\Omega} g(x) d\mu(x) = \left(\int_{\Omega} f(x) d\mu(x), \int_{\Omega} Tf(x) d\mu(x) \right) = (y, Ty), y \in X.$$

Da igualdade acima podemos concluir que

$$T \left(\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right) = \int_{\Omega} Tf(x) d\mu(x).$$

□

Corolário 1.21. Sejam T um operador linear fechado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\int_0^t Tf(x) d\mu(x) = T \left(\int_0^t f(x) d\mu(x) \right), \quad (1.25)$$

sempre que ambos os lados da igualdade acima estejam bem definidos.

Demonstração. Seja $\Omega = [0, t], t > 0, T$ um operador linear fechado e considere uma partição \mathcal{P} de $[0, t]$. Então, a integral de Riemman coincide então com a de Lebesgue e

$$\int_0^t f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Assim, como T é fechado e ambos os lados de (1.25) estão bem definidos, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t Tf(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Tf(x_i^*) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} T \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right) \\ &= T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right) = T \left(\int_0^t f(x) dx \right). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Cálculo Variacional e o Método Geométrico

Neste capítulo apresentamos os resultados necessários para determinar o núcleo do calor do operador de Grushin por meio do método da transformada de Fourier. Na seção a seguir apresentaremos o formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano presentes no Cálculo Variacional e Mecânica Clássica, tópicos importantes na teoria do método geométrico. Esta é a ferramenta chave para determinar os núcleos do calor das mais variadas categorias de operadores.

2.1 Núcleo do Calor para Operadores com Potencial

Nesta seção apresentamos os resultados base para determinar o núcleo do calor de operadores da forma

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} - U(x). \quad (2.1)$$

Quando $U \neq 0$ dizemos que o operador \mathbb{L} tem potencial U . Exemplos particulares e importantes em nosso propósito são o Laplaciano $\Delta = \sum_i \partial_{x_i}^2$ e o operador com potencial quadrático $\mathbb{L} = \frac{1}{2} (\partial_x^2 - a^2 x^2)$. Inicialmente, apresentaremos conceitos básicos da Mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana que são necessários na seção seguinte que trata sobre o método geométrico. Este, por sua vez, é utilizado para determinar núcleos do calor de operadores do tipo (2.1) a partir do conhecimento de geodésicas. Com estes conceitos estaremos aptos a determinar o núcleo do calor do operador de Grushin (ver Capítulo 3).

2.1.1 Mecânica Lagrangiana

Em Mecânica Clássica, o movimento de uma partícula é totalmente descrito em qualquer instante t pela sua posição x e sua velocidade \dot{x} . Considere a função suave $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, conhecida por Lagrangiana, com regra dada pela diferença entre a energia cinética e energia potencial da partícula:

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - U(x), \quad (2.2)$$

em que $K(\dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2$ e $U(x)$ geralmente uma função polinomial de x (ver [5]). A Lagrangiana descreve a dinâmica de uma partícula com trajetória $x(t)$ tal que

$$S(x_0, x, \tau) = \int_0^\tau L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.3)$$

seja estacionária, ou seja, possui variação local mínima. Nosso objetivo então é determinar a trajetória x . Para isso, suponha que x é uma solução, ou seja, $S(x_0, x, \tau)$ é estacionária. Isso significa que para qualquer outro caminho entre $x_0 = x(0)$ e $x(\tau)$, S assumirá um valor maior. Assim, dado $\alpha \geq 0$, ponha $y(\alpha, t) = x(t) + \alpha\eta(t)$ com $\eta(0) = \eta(\tau) = 0$. Temos, por hipótese, que $S(y_0, y, \tau)$ possui valor mínimo quando $\alpha = 0$. Isso significa que a derivada de S com relação a α é nula:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} (\alpha, \tau) = 0.$$

Então pela regra da cadeia, segue que

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} = \eta(t) \frac{\partial L}{\partial y} + \dot{\eta}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}.$$

Assim, derivando (2.3) com relação a α , temos que

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_0^\tau \eta(t) \frac{\partial L}{\partial y} dt + \underbrace{\int_0^\tau \dot{\eta}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} dt}_J.$$

Integrando J por partes, em que

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad dv = \dot{\eta} d\eta, \\ du = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) dt, \quad v = \eta, \end{array} \right.$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \int_0^\tau \eta(t) \frac{\partial L}{\partial y} dt + \eta(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \Big|_{t=0}^{t=\tau} - \int_0^\tau \eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) dt \\ &= \int_0^\tau \eta(t) \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \right] dt,\end{aligned}$$

pois $\eta(0) = \eta(\tau) = 0$. Pondo $\alpha = 0$, temos que $y(0, t) = x(t)$, ou seja:

$$\int_0^\tau \eta(t) \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0,$$

isso acontece para qualquer η . Ora, escolhendo

$$\eta(t) = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right),$$

obtemos que

$$\int_0^\tau \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right]^2}_{\geq 0} dt = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Esta última é conhecida como *Equação de Euler-Lagrange* e o funcional S é a *ação clássica*, denotada por S_{cl} .

2.1.2 Mecânica Hamiltoniana

Uma forma alternativa de descrever a dinâmica de uma partícula é utilizar o Hamiltoniano, uma função $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ que está relacionada com a Lagrangiana da seguinte maneira:

$$H(x, p) = p\dot{x} - L(x, \dot{x}), \quad (2.5)$$

em que p é o momento, que pode ser obtido pela solução da equação:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \quad (2.6)$$

Seguindo a referência [5], a dinâmica da partícula é descrita pelo sistema Hamiltoniano de equações:

$$H_p = \dot{x} \quad (2.7)$$

$$H_x = -\dot{p}. \quad (2.8)$$

A equação (2.7) é obtida de forma direta derivando-se (2.5) com relação a p . A equação (2.8) é obtida da seguinte forma:

$$H_x = p \frac{d\dot{x}}{dx} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dx} \right) = p \frac{d\dot{x}}{dx} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dx} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -\dot{p},$$

em que no último passo é usado a equação de Euler-Lagrange (2.4).

Um conceito bastante usual é o de conservatividade: se o Hamiltoniano H não depende de t explicitamente, o sistema é dito conservativo, ou seja, o Hamiltoniano é constante quando avaliado ao longo das soluções das equações (2.7) e (2.8). De fato, pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt}H(x, p) = H_x \dot{x} + H_p \dot{p} = -\dot{x}\dot{p} + \dot{p}\dot{x} = 0.$$

O valor do Hamiltoniano é dito *energia total da partícula*. Em símbolos $H(p, x) = E$, em que E é a constante de energia.

2.1.3 Equação de Hamilton-Jacobi

Nesta seção relacionaremos o Hamiltoniano com a ação clássica (2.3) apresentando uma maneira de obtê-la. Derivando (2.3) com relação a x , aplicando a equação de Euler-Lagrange em (2.4), o Teorema Fundamental do Cálculo e Teorema de derivação sob sinal de integral de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \int_0^\tau \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) dt \\ &= \int_0^\tau \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p. \tag{2.9}$$

Por outro lado, derivando (2.3) com relação a τ , pela regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^\tau L(x(s), \dot{x}(s), s) ds \right) \implies \frac{\partial S}{\partial \tau} = -H(x, p),$$

o que resulta em:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + H(x, p) = 0, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \tag{2.10}$$

Esta última é conhecida como equação de Hamilton-Jacobi e tem a ação clássica como sua solução. Um caso particular ocorre em sistemas conservativos em que $E = E(x_0, x; \tau) = H$ denota a energia do sistema, com as condições de fronteira $x_0 = x(0)$ e $x(\tau) = x$. Nesse caso, a equação de Hamilton-Jacobi se transforma em

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -E,$$

cujas solução é

$$S_{cl}(x_0, x; \tau) = -E(x_0, x; \tau)\tau + c(x_0, x),$$

em que $c(x_0, x) = S_{cl}(x_0, x, 0)$ denota a condição inicial. A ação clássica tem papel importante na aplicação do método geométrico que será discutido na seção a seguir.

Exemplo: Considere uma partícula livre, isto é, tem energia potencial $U(x)$ nula. Suponha que esta segue uma trajetória com pontos extremos $x(0)$ e $x(\tau)$. Neste caso, a Lagrangiana depende apenas da energia cinética da partícula, ou seja, $L(\dot{x}, x) = K(\dot{x}) - U(x) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2$. O Hamiltoniano associado é $H(p) = \frac{1}{2}p^2$. Assim, $\dot{x}(t) = \partial_p H = p$ e $\ddot{x}(t) = 0$. Consequentemente, por integração, temos que $\dot{x}(t) = a$ e $x(t) = at + b$. Como $x(0) = b = x_0$ e $x(\tau) = a\tau + x_0$, segue que a Lagrangiana pode ser reescrita como

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 = \frac{|x(\tau) - x_0|^2}{2\tau^2}.$$

Portanto, pela definição da ação clássica (2.3):

$$S(x_0, x, \tau) = \int_0^\tau \frac{|x(\tau) - x_0|^2}{2\tau^2} dt = \frac{|x(\tau) - x_0|^2}{2\tau}.$$

Também podemos obter a ação clássica resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi (2.10). Usando $\partial_x S = p = \dot{x}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau} + H = 0 &\iff \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 = 0 \iff \frac{\partial S}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\tau^2}|x(\tau) - x_0|^2. \\ &\iff \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2\tau^2}|x(\tau) - x_0|^2 \right) \iff S(x_0, x, \tau) = \frac{|x(\tau) - x_0|^2}{2\tau}. \end{aligned}$$

2.1.4 Método Geométrico

O método geométrico é uma técnica que expressa o núcleo de calor em termos da *ação clássica* e o *elemento de volume*. É um método que pode ser

aplicado com sucesso desde que sejamos capazes de encontrar a fórmula explícita para a ação clássica e resolver uma equação de transporte. Isto pode ser aplicado para operadores elípticos, isto é, aqueles que têm uma das formas

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_jx_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

para funções coeficientes a^{ij}, b^i, c ($i, j = 1, \dots, n$). O método geométrico tem como base a procura por geodésicas, uma vez que cada operador está associado a alguma geometria e o fluxo de calor propaga-se por geodésicas associadas à essa geometria. Por meio desse método, é possível obter o *núcleo do calor* de operadores elípticos. Uma das maneiras de determinar as geodésicas é considerar a Hamiltoniana obtida da parte principal do operador elíptico $\mathbb{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j}$:

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j. \quad (2.11)$$

Assim, a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p \\ \dot{p} = -H_x \end{cases},$$

com a condição $x(0) = x_0$ nos dá a geodésica desejada.

Considerando o *problema do calor*, o volume de calor $K(x_0, x; t)$, definido em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, é dito *solução fundamental* do operador do calor \mathbb{L} ou núcleo do calor, se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\frac{\partial}{\partial t} K(x_0, x; t) = \mathbb{L}K(x_0, x; t) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \quad (2.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} K(x_0, x; t) = \delta_{x_0}. \quad (2.13)$$

Quando nenhum calor é perdido, a quantidade total é preservada:

$$\int K(x_0, x; t) dx = \int \delta_{x_0}(x) dx = 1.$$

Por tal razão, $K(x_0, x; t)$ pode ser considerado uma distribuição de probabilidade para qualquer $t > 0$. O principal uso do núcleo do calor é determinar a evolução da temperatura em Ω a partir de uma condição inicial. Para qualquer função contínua

e limitada ϕ , o problema de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) &= \mathbb{L}u(x, t) \quad x \in \Omega, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= \phi(x),\end{aligned}$$

tem solução

$$u(x, t) = \int_{\Omega} K(x, y; t)\phi(y)dy.$$

Como $K(x, y; t)\phi(y)$ representa o volume de calor transferido de y para x em um tempo t , dado uma condição inicial $\phi(x)$, o núcleo do calor $K(x, y; t)$ recebe o nome de *propagador*. Considere o seguinte resultado.

Teorema 2.1. Considere o operador $\mathbb{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ e assumamos que $\mathbb{L}(S_{cl})$ é uma função apenas de t . Se existe apenas uma geodésica juntando os pontos x_0 e x no tempo t , então o núcleo do calor de \mathbb{L} é dado por

$$K(x_0, x; t) = V(t)e^{-S_{cl}(x_0, x; t)}, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

em que $V(t)$ satisfaz a seguinte equação de transporte:

$$V'(t) + V(t)\mathbb{L}(S_{cl}) = 0, \quad (2.15)$$

com condição inicial

$$V(0) = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-S_{cl}(x_0, x; 0)} dx}.$$

Demonstração. Seja $S = S_{cl}(x_0, x; t)$ a ação clássica. Vamos verificar que K definido em (2.14) satisfaz a equação $u_t - \mathbb{L}u = 0$. Aplicando as derivadas parciais com relação a x_j e em seguida com relação a x_i e fazendo uso da regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} \partial_{x_j} (e^{-S}) &= \partial_{x_i} (-e^{-S} \partial_{x_j} S) \\ &= e^{-S} (\partial_{x_i} S) (\partial_{x_j} S) - e^{-S} \partial_{x_i} \partial_{x_j} S \\ &= e^{-S} [(\partial_{x_i} S) (\partial_{x_j} S) - \partial_{x_i x_j} S].\end{aligned}$$

Conseqüentemente, ao substituir $p_i = \partial_{x_i} S$ (ver (2.9)), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(e^{-S}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} e^{-S} \\
&= e^{-S} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [(\partial_{x_i} S)(\partial_{x_j} S) - \partial_{x_i x_j} S] \right) \\
&= e^{-S} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\partial_{x_i} S)(\partial_{x_j} S) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i x_j} S \right) \\
&= e^{-S} (H(\nabla S) - \mathbb{L}(S)),
\end{aligned}$$

de acordo com (2.11) e a definição de \mathbb{L} . Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\partial_t(e^{-S}V(t)) &= \partial_t(e^{-S})V(t) + e^{-S}\partial_t V(t) \\
&= -e^{-S}V(t)\partial_t S + e^{-S}\partial_t V(t) \\
&= e^{-S}(\partial_t V(t) - V(t)\partial_t S).
\end{aligned}$$

Logo, como S satisfaz (2.10), obtemos:

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \mathbb{L})(e^{-S}V(t)) &= \partial_t(e^{-S}V(t)) - \mathbb{L}(e^{-S}V(t)) \\
&= e^{-S}(\partial_t V(t) - V(t)\partial_t S) - e^{-S}(H(\nabla S) - \mathbb{L}(S))V(t) \\
&= e^{-S}(\partial_t V(t) + V(t)\mathbb{L}(S)) - e^{-S}V(t)(\partial_t S + H(\nabla S)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

uma vez que V satisfaz a equação (2.15). □

2.1.5 Operadores com Potenciais

Nesta seção discutiremos sobre o núcleo do calor de operadores com potenciais. Mais especificamente, operadores do tipo $\frac{1}{2}\Delta + U(x)$, em que U é uma função de x chamada de potencial (ver [5]). Vamos aplicar o método geométrico apresentado na subseção anterior para encontrar a fórmula explícita dos núcleos do calor associados à \mathbb{L} . Devemos olhar para soluções do tipo $K = V(x; t)e^{-S}$, em que S é a ação.

Observação 4. Na expressão do núcleo do calor, quando o operador \mathbb{L} tem potencial do tipo quadrático, o elemento de volume V pode ser encontrado pelo

determinante de van Vleck:

$$V(t) = \sqrt{\det \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x \partial x_0} \right)}. \quad (2.16)$$

Considere $\mathbb{L} = \frac{1}{2}\Delta + U(x)$ com potencial $U \in C^\infty(\mathbb{R})$. O Hamiltoniano associado a este operador é dado por:

$$H(p, x) = \frac{1}{2}p^2 + U(x). \quad (2.17)$$

Daí, as equações do sistema Hamiltoniano são:

$$H_p = p = \dot{x}; \quad (2.18)$$

$$H_x = U'(x) = -\dot{p}; \quad (2.19)$$

$$\ddot{x} = \dot{p} = -U'(x). \quad (2.20)$$

A geodésica que liga dois pontos x_0 e x é obtida resolvendo a equação (2.20). Como o Hamiltoniano não depende explicitamente de t , o sistema é conservativo, ou seja:

$$H = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \quad (2.21)$$

em que $E = E(x_0, x; t)$ é a constante de energia e esta satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2E - 2U(x)}.$$

Por separação de variáveis, temos:

$$ds = \frac{dw}{\sqrt{2E - 2U(w)}} \implies \pm t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dw}{\sqrt{2E - 2U(w)}},$$

em que o sinal positivo (respec. negativo) ocorre quando $x > x_0$ (respec. $x < x_0$). Pela equação de Hamilton-Jacobi (2.10), temos que $\partial_t S = -H = -E$, em que S é a ação clássica. Usando (2.9) e (2.18), a equação (2.21) se torna:

$$(\partial_x S)^2 = 2E - 2U(x). \quad (2.22)$$

Vamos agora considerar uma solução do tipo $K = V(x; t)e^{-S}$. Como $\partial_t S =$

– E , temos:

$$\begin{aligned}\partial_t K &= \partial_t V(x; t)e^{-S} - V(x; t)e^{-S}\partial_t S = K \left(\frac{\partial_t V(x; t)}{V(x; t)} + E \right); \\ \partial_x K &= \partial_x V(x; t)e^{-S} - V(x; t)e^{-S}\partial_x S = K \left(\frac{\partial_x V(x; t)}{V(x; t)} - \partial_x S \right); \\ \partial_x^2 K &= \partial_x^2 V(x; t)e^{-S} - \partial_x V(x; t)e^{-S}\partial_x S \\ &\quad - [\partial_x V(x; t)e^{-S}\partial_x S + V(x; t)(-e^{-S}(\partial_x S)^2 + e^{-S}\partial_x^2 S)] \\ &= K \left(\frac{\partial_x^2 V(x; t)}{V(x; t)} - 2\frac{\partial_x V(x; t)\partial_x S}{V(x; t)} + (\partial_x S)^2 - \partial_x^2 S \right).\end{aligned}$$

Seja $T = \partial_t - \frac{1}{2}\partial_x^2 - U(x)$. Usando (2.22), verifica-se que

$$\begin{aligned}TK &= K \left(\frac{\partial_t V(x; t)}{V(x; t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial_x^2 V(x; t)}{V(x; t)} + \frac{\partial_x V(x; t)\partial_x S}{V(x; t)} - \frac{1}{2}(\partial_x S)^2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 S + E - U(x) \right) \\ &= K \left(\frac{\partial_t V(x; t) - \frac{1}{2}\partial_x^2 V(x; t) + \partial_x V(x; t)\partial_x S}{V(x; t)} + \frac{1}{2}\partial_x^2 S \right).\end{aligned}$$

Consequentemente, $TK = 0$ se, e somente se,

$$\partial_t V(x; t) - \frac{1}{2}\partial_x^2 V(x; t) + \partial_x V(x; t)\partial_x S + \frac{1}{2}\partial_x^2 SV(x; t) = 0. \quad (2.23)$$

Como $\dot{x} = p = \partial_x S$, pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt}V(x; t) = \frac{\partial V}{\partial x}\partial_x S + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (2.24)$$

como resultado, (2.23) se torna

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\partial_x^2 V - \frac{1}{2}\partial_x^2 SV.$$

Se $\partial_x^2 S$ depende apenas de t , por (2.24) faz sentido assumir $V = V(t)$, ou seja, a equação de transporte se resume a

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\partial_x^2 SV = 0. \quad (2.25)$$

2.2 A Solução Fundamental da Equação do Calor com Potencial Quadrático

Na seção anterior, abordamos operadores com potenciais e um algoritmo que nos permite encontrar o núcleo do calor do operador envolvido. Nesta seção, estamos interessados no caso em que o potencial é do tipo quadrático: $U(x) = -\frac{1}{2}a^2x^2$, ou seja, $\mathbb{L} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}a^2x^2$. Estudaremos o caso unidimensional e em seguida uma generalização para dimensão n natural. A principal ferramenta utilizada nesta seção é o método geométrico.

Teorema 2.2. Seja $\mathbb{L} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}a^2x^2$ e assumamos que o sistema Hamiltoniano é conservativo. Então, a ação clássica associada ao operador \mathbb{L} é dada por (2.26).

Demonstração. Considerando o operador com potencial do tipo quadrático, o Hamiltoniano fica determinado pela parte principal de \mathbb{L} , isto é,

$$H(p, x) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}a^2x^2.$$

O sistema Hamiltoniano de equações então é dado por:

$$\begin{cases} H_p = p = \dot{x}, \\ H_x = -\dot{p} = -a^2x. \end{cases}$$

Como o sistema acima é conservativo (não depende explicitamente de t), temos:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(s) - \frac{1}{2}a^2x^2(s) = E.$$

A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{2E + a^2x^2}.$$

Integrando entre $s = 0$ e $s = t$, com $x(0) = x_0$ e $x(t) = x$, e fazendo a substituição trigonométrica $x = \sqrt{2E} \tan \theta/a$, $dx = \sqrt{2E} \sec^2 \theta/a$, temos que

$$\int \frac{dw}{a\sqrt{2E + a^2w^2}} = \int ds,$$

transforma-se em

$$\int \sec \theta d\theta = at.$$

Logo, como $\int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta|$, $\tan \theta = \frac{ax}{\sqrt{2E}}$ e $\sec \theta = \sqrt{\frac{2E+a^2x^2}{2E}}$, segue que

$$\ln \left(\sqrt{\frac{2E+a^2x^2}{2E}} + \frac{ax}{\sqrt{2E}} \right) - \ln \left(\sqrt{\frac{2E+a^2x_0^2}{2E}} + \frac{ax_0}{\sqrt{2E}} \right) = at.$$

O lado esquerdo da igualdade acima pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\ln \left(\frac{ax + \sqrt{2E+a^2x^2}}{\sqrt{2E}} \right) - \ln \left(\frac{ax_0 + \sqrt{2E+a^2x_0^2}}{\sqrt{2E}} \right) = \ln \left(\frac{ax + \sqrt{2E+a^2x^2}}{ax_0 + \sqrt{2E+a^2x_0^2}} \right).$$

Assim,

$$\ln \left(\frac{ax + \sqrt{2E+a^2x^2}}{ax_0 + \sqrt{2E+a^2x_0^2}} \right) = at \implies \sqrt{2E+a^2x^2} = Je^{at} - ax,$$

em que $J = ax_0 + \sqrt{2E+a^2x_0^2}$. Daí, vale que

$$\begin{aligned} 2E + a^2x^2 &= J^2e^{2at} + a^2x^2 - 2axJe^{at} \implies 2axJ = J^2e^{at} - 2Ee^{-at} \\ \implies 2axJ &= e^{at} \left(2a^2x_0^2 + 2ax_0\sqrt{2E+a^2x_0^2} \right) + 2E(e^{at} - e^{-at}) \\ \implies axJ &= ax_0e^{at}J + 2E \sinh(at). \end{aligned}$$

Utilizando a definição de J , temos:

$$\sqrt{2E+a^2x^2} = \frac{2E \sinh(at)}{(ax - ax_0e^{at})} - ax_0.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$2E + a^2x^2 = \frac{4E^2 \sinh^2(at)}{(ax - ax_0e^{at})^2} + a^2x_0^2 - \frac{2ax_0(2E) \sinh(at)}{(ax - ax_0e^{at})}.$$

Cancelando o termo $a^2x_0^2$ e em seguida dividindo a igualdade por $2E$, obtemos:

$$1 = \frac{2E \sinh^2(at)}{(ax - ax_0e^{at})^2} - \frac{2ax_0 \sinh(at)}{(ax - ax_0e^{at})}.$$

Então

$$\begin{aligned} 2E \sinh^2(at) &= (ax - ax_0 e^{at})^2 + 2ax_0 \sinh(at)(ax - ax_0 e^{at}) \\ &= a^2 x^2 - 2a^2 x x_0 e^{at} + a^2 x_0^2 e^{2at} + 2ax_0 \sinh(at)(ax - ax_0 e^{at}). \end{aligned}$$

Daí, como a^2 é um fator comum do lado direito, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$2E \sinh^2(at) = a^2 (x^2 + x_0^2(e^{2at} - 2e^{at} \sinh(at)) - 2xx_0(e^{at} - \sinh(at))).$$

Como $e^{2at} - 2e^{at} \sinh(at) = 1$ e $e^{at} - \sinh(at) = \cosh(at)$, a expressão acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$2E = \frac{a^2(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 \cosh(at))}{\sinh^2(at)}.$$

Logo, como

$$\frac{d}{dt}(\coth(at)) = -\frac{a}{\sinh^2(at)}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sinh(at)}\right) = \frac{a \cosh(at)}{\sinh^2(at)},$$

a equação de Hamilton-Jacobi se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\frac{a^2(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 \cosh(at))}{2 \sinh^2(at)} \\ &= \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial t} [(x^2 + x_0^2) \coth(at) - 2xx_0 \operatorname{csch}(at)]. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$S(x, t) = \frac{a}{2} [(x^2 + x_0^2) \coth(at) - 2xx_0 \operatorname{csch}(at)]. \quad (2.26)$$

□

Podemos demonstrar o resultado acima por meio de equações diferenciais em que determinamos a função Lagrangiana e calculamos a integral em (2.3).

Demonstração 2: Nosso objetivo é determinar a geodésica que satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x, \\ x(0) = x_0, x(t) = x. \end{cases}$$

A equação acima é uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea. Sua equação característica é $m^2 - a^2 = 0$, ou seja, $m = \pm a$. Dessa forma, a solução

procurada é da forma

$$x(s) = Ae^{as} + Be^{-as}.$$

Utilizando as condições iniciais, temos que $x_0 = A + B$ e $\dot{x} = Ae^{at} + Be^{-at}$. Resolvendo para A e B , obtemos

$$x = Ae^{at} + (x_0 - A)e^{-at} \implies x = 2A \sinh(at) + x_0 e^{-at}.$$

Logo,

$$A = \frac{x - x_0 e^{-at}}{2 \sinh(at)} \text{ e } B = \frac{x_0 e^{as} - x}{2 \sinh(at)}.$$

Então

$$\begin{aligned} x(s) &= \left(\frac{x - x_0 e^{-at}}{2 \sinh(at)} \right) e^{as} + \left(\frac{x_0 e^{as} - x}{2 \sinh(at)} \right) e^{-as} \\ &= \frac{1}{2 \sinh(at)} [2x \sinh(at) - x_0 (e^{a(t-s)} - e^{-a(t-s)})] \\ &= \frac{1}{2 \sinh(at)} [2x \sinh(at) - 2x_0 \sinh(at - as)] \\ &= \frac{1}{\sinh(at)} [x \sinh(at) - x_0 \sinh(at) \cosh(as) + x_0 \sinh(as) \cosh(at)] \\ &= \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right) \sinh(as) + x_0 \cosh(as). \end{aligned}$$

A Lagrangiana associado ao Hamiltoniano é

$$L(x, \dot{x}) = p\dot{x} - H = \frac{1}{2}\dot{x}^2(s) + \frac{1}{2}a^2 x^2(s). \quad (2.27)$$

Vamos determinar x e \dot{x}^2 de modo que possamos obter a ação clássica integrando (2.27). Com efeito,

$$\dot{x} = a \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right) \cosh(as) + ax_0 \sinh(as),$$

$$x^2(s) = \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right)^2 \sinh^2(as) + x_0^2 \cosh^2(as) \\ + 2x_0 \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right) \sinh(as) \cosh(as),$$

e

$$\dot{x}^2(s) = a^2 \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right)^2 \cosh^2(as) + a^2 x_0^2 \sinh^2(as) \\ + 2a^2 x_0 \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right) \sinh(as) \cosh(as).$$

Então de (2.27), temos

$$L(x, \dot{x}) = \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right)^2 (\cosh^2(as) + \sinh^2(as)) \right. \\ \left. + 2x_0 \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right) \sinh(2as) + x_0^2 (\cosh^2(as) + \sinh^2(as)) \right].$$

Portanto, de (2.3) e a expressão da Lagrangiana obtida acima, temos:

$$S(x_0, x; t) = \int_0^t L(x(s), \dot{x}(s), s) ds \\ = \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right)^2 \int_0^t (\cosh^2(as) + \sinh^2(as)) ds \right. \\ \left. + 2x_0 \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right) \int_0^t \sinh(2as) ds \right. \\ \left. + x_0^2 \int_0^t (\cosh^2(as) + \sinh^2(as)) ds \right].$$

Pelas identidades de funções hiperbólicas temos que $\cosh^2(as) + \sinh^2(as) = \cosh(2as)$.

Além disso, $\int \cosh(as)ds = a^{-1} \sinh(as)$ e $\int \sinh(as)ds = a^{-1} \cosh(as)$. Então

$$\begin{aligned}
S(x_0, x; t) &= \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right)^2 \left(\frac{\sinh(2at)}{2a} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2x_0 \left(\frac{x - x_0 \cosh(at)}{\sinh(at)} \right) \left(\frac{\cosh(2at) - 1}{2a} \right) + x_0^2 \left(\frac{\sinh(2at)}{2a} \right) \right] \\
&= \frac{a^2}{2} \frac{1}{2a \sinh(at)} \left[2(x - x_0 \cosh(at))^2 \cosh(at) \right. \\
&\quad \left. + 2x_0(x - x_0 \cosh(at))(\cosh(2at) - 1) + 2x_0^2 \sinh^2(at) \cosh(at) \right] \\
&= \frac{a}{2 \sinh(at)} \left[(x^2 - 2xx_0 \cosh(at) + x_0^2 \cosh^2(at)) \cosh(at) \right. \\
&\quad \left. + x_0^2 \sinh^2(at) \cosh(at) + 2xx_0 \sinh^2(at) - 2x_0^2 \sinh^2(at) \cosh(at) \right] \\
&= \frac{a}{2 \sinh(at)} \left[(x^2 + x_0^2(\cosh^2(at) - \sinh^2(at))) \cosh(at) \right. \\
&\quad \left. - 2xx_0(\cosh^2(at) - \sinh^2(at)) \right].
\end{aligned}$$

Pela identidade fundamental das funções hiperbólicas temos que $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$. Portanto,

$$S(x_0, x; t) = \frac{a}{2 \sinh(at)} \left[(x^2 + x_0^2) \cosh(at) - 2xx_0 \right].$$

□

Corolário 2.3. Seja a uma constante. O núcleo do operador $\mathbb{L} = \frac{1}{2}(\partial_x^2 - a^2x^2)$ é dado por:

$$L(x_0, x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sqrt{\frac{at}{\sinh(at)}} e^{-\frac{1}{2t} \frac{at}{\sinh(at)} [(x^2 + x_0^2) \cosh(at) - 2xx_0]}, t > 0.$$

Demonstração. Como $\partial_x^2 S = a \coth(at)$ depende apenas de t , a equação de transporte em (2.25) se torna:

$$V'(t) + \frac{a}{2} \coth(at) V(t) = 0.$$

Esta é uma edo linear de primeira ordem com fator integrante $\mu(t) = e^{\frac{a}{2} \int \coth(at) dt} =$

$\sqrt{\sinh(at)}$. Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sinh(at)}V'(t) + \frac{a}{2} \coth(at)\sqrt{\sinh(at)}V(t) &= 0 \\ \implies \frac{d}{dt}(\sqrt{\sinh(at)}V(t)) &= 0 \\ \implies V(t) &= \frac{k}{\sqrt{\sinh(at)}},\end{aligned}$$

em que k é uma constante a ser determinada. Por comparação com o núcleo do calor clássico, considerando $k = \sqrt{a/2\pi}$, obtemos:

$$\begin{aligned}L(x_0, x, t) &= \frac{k}{\sqrt{\sinh(at)}} e^{-\frac{a}{2\sinh(at)}[(x^2+x_0^2)\cosh(at)-2xx_0]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sqrt{\frac{at}{\sinh(at)}} e^{-\frac{1}{2t} \frac{at}{\sinh(at)}[(x^2+x_0^2)\cosh(at)-2xx_0]}.\end{aligned}$$

□

Observação 5. O elemento de volume também pode ser encontrado pelo determinante de van Vleck (2.16):

$$\begin{aligned}V(t) &= \sqrt{\det\left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}\right)} \\ &= \sqrt{\det\left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} \left[\frac{a}{2\sinh(at)} [(x^2+x_0^2)\cosh(at)-2xx_0]\right]\right)} \\ &= \sqrt{\det\left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x} [ax_0 \coth(at) - ax \operatorname{csch}(at)]\right)} \\ &= \sqrt{\det\left(\frac{a}{2\pi} \operatorname{csch}(at)\right)} \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}}.\end{aligned}$$

Observe que quando $a \rightarrow 0$, temos que $at/\sinh(at) \rightarrow 1$ e

$$L(x_0, x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2t}}.$$

Teorema 2.4. Seja a uma constante. O núcleo do calor do operador $\frac{1}{2}(\partial_x^2 - a^2x^2)$ é

$$L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{\sinh(at)}} e^{-\frac{a}{2\sinh(at)}[(x^2+x_0^2)\cosh(at)-2xx_0]}, \quad t > 0. \quad (2.28)$$

Demonstração. Lembremos que uma função L é núcleo do calor de um operador \mathbb{L} se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L(x_0, x; t) &= \mathbb{L}L(x_0, x; t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0; \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} L(x_0, x; t) &= \delta_{x_0}. \end{aligned}$$

Vamos à demonstração. Para simplificação de notação, denotemos $L = Ve^S$, em que

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}} \\ e^S &= -\frac{a}{2}(x^2 + x_0^2) \coth(at) + axx_0 \operatorname{csch}(at). \end{aligned}$$

A fim de facilitar os cálculos, destacamos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \partial_t V &= -\frac{a}{2} \coth(at) V; \\ \partial_t S &= \frac{a^2}{2}(x^2 + x_0^2) \operatorname{csch}(at) - a^2 xx_0 \operatorname{csch}(at) \coth(at); \\ \partial_x S &= -ax \coth(at) + ax_0 \operatorname{csch}(at); \\ \partial_x^2 S &= -a \coth(at). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_t L &= \partial_t V e^S + V e^S \partial_t S \\ &= K \left(-\frac{a}{2} \coth(at) + \frac{a^2}{2}(x^2 + x_0^2) \operatorname{csch}(at) - a^2 xx_0 \operatorname{csch}(at) \coth(at) \right); \\ \mathbb{L}L &= \frac{1}{2} (\partial_x^2 L - a^2 x^2 L) \\ &= L \left(\frac{a^2}{2}(x^2 + x_0^2) \operatorname{csch}(at) - a^2 xx_0 \operatorname{csch}(at) \coth(at) - \frac{a}{2} \coth(at) \right), \end{aligned}$$

ou seja, $\partial_t L - \mathbb{L}L = 0$ e portanto L satisfaz a equação (2.12). □

O teorema a seguir é uma generalização para o caso n -dimensional.

Teorema 2.5. Seja \mathbb{L} o operador de Grushin n -dimensional dado por

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} \sum \partial_{x_i}^2 - \frac{1}{2} a^2 |x|^2 = \frac{1}{2} (\partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2) - \frac{1}{2} a^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2), a \geq 0.$$

Então, o núcleo do calor associado é dado por

$$L(x_0, x, t) = \left(\frac{a}{2\pi \sinh(at)} \right)^{n/2} e^{-\frac{a}{2 \sinh(at)} [(|x|^2 + |x_0|^2) \cosh(at) - 2\langle x_j, x_j^0 \rangle]}, t > 0.$$

Demonstração. O Hamiltoniano associado ao operador \mathbb{L} é dado por

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + \cdots + p_n^2) - \frac{1}{2} a^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

e o sistema Hamiltoniano é

$$\begin{cases} \dot{x}_j = H_{p_j} = p_j \\ \dot{p}_j = -H_{x_j} = a^2 x_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

A geodésica $x(s)$ partindo de $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e com ponto final (x_1, \dots, x_n) satisfaz as equações

$$\begin{cases} \ddot{x}_j = a^2 x_j \\ x_j(0) = x_j^0 \\ x_j(t) = x_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Assim como no caso unidimensional, pela lei de conservação de energia, temos:

$$\dot{x}_j^2(s) - a^2 x_j^2(s) = 2E_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

em que E_j é a j -ésima componente constante da energia. Consequentemente, a energia total

$$H = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \dot{x}_j^2(s) - \frac{1}{2} a^2 x_j^2(s) \right) = E_1 + \cdots + E_n = E.$$

Como a energia unidimensional é

$$E_j = \frac{a^2 [x_j^2 + (x_j^0)^2 - 2x_j x_j^0 \cosh(at)]}{2 \sinh^2(at)},$$

a energia total é dada por $H = E = \sum_{j=1}^n E_j$, ou seja,

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{a^2[x_j^2 + (x_j^0)^2 - 2x_j x_j^0 \cosh(at)]}{2 \sinh^2(at)} = \frac{a^2[|x|^2 + |x_0|^2 - 2\langle x_j, x_j^0 \rangle \cosh(at)]}{2 \sinh^2(at)},$$

em que $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, $|x_0|^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^0)^2$ e $\langle x_j, x_j^0 \rangle = \sum_{j=1}^n x_j x_j^0$. Daí, pela equação de Hamilton-Jacobi (2.10), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= - \frac{a^2[|x|^2 + |x_0|^2 - 2\langle x_j, x_j^0 \rangle \cosh(at)]}{2 \sinh^2(at)} \\ &= - \frac{a}{2}(|x|^2 + |x_0|^2)(\operatorname{acsch}^2(at)) + a^2 \frac{\langle x_j, x_j^0 \rangle \cosh(at)}{\sinh^2(at)}. \end{aligned}$$

Como $\partial_t \coth(at) = -\operatorname{acsch}^2(at)$ e $\partial_t \left(\frac{1}{\sinh(at)} \right) = -\frac{a \cosh(at)}{\sinh^2(at)}$, temos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{a}{2}(|x|^2 + |x_0|^2) \coth(at) - a \frac{\langle x_j, x_j^0 \rangle}{\sinh(at)} \right].$$

Por conseguinte,

$$S_{cl}(x_0, x, t) = \frac{a}{2 \sinh(at)} \left[(|x|^2 + |x_0|^2) \cosh(at) - 2\langle x_j, x_j^0 \rangle \right].$$

Procuramos por um núcleo que tenha a forma

$$L(x_0, x, t) = V(t) = V(t)e^{-S(x_0, x, t)},$$

em que V é o elemento de volume. Pelo determinante de van Vleck (2.16), temos:

$$\begin{aligned} V(t) &= \sqrt{\det \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0} \right)} \\ &= \sqrt{\det \left(-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{-a}{\sinh(at)} \mathbb{I}_n \right) \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2\pi \sinh(at)} \right)^n \det \mathbb{I}_n} \\ &= \left(\frac{a}{2\pi \sinh(at)} \right)^{n/2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L(x_0, x, t) = \left(\frac{a}{2\pi \sinh(at)} \right)^{n/2} e^{-\frac{a}{2 \sinh(at)} [(|x|^2 + |x_0|^2) \cosh(at) - 2\langle x, x_0 \rangle]}, t > 0.$$

□

Observação 6. Vamos calcular a integral de L em todo o \mathbb{R}^n . Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Podemos reescrever L da seguinte forma

$$\begin{aligned} L(x_0, x; t) &:= \prod_{j=1}^n L(x_j^0, x_j; t) \\ &= \prod_{j=1}^n A e^{-\frac{a}{2} [(x_j)^2 + (x_j^0)^2] \coth(at) - 2x_j \cdot x_j^0 \operatorname{csch}(at)} \end{aligned}$$

em que $A = \sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}}$. Então, a integral de L pode ser reescrita como um produto de n integrais independentes sobre \mathbb{R} e o resultado será dado pelo produto de todas elas. Assim sendo, para cada $1 \leq j \leq n$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(x_0, x; t) dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} L(x_j^0, x_j; t) dx_j$$

Daí, utilizando (5.1), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} L(x_j^0, x_j; t) dx_j &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} [(x_j)^2 + (x_j^0)^2] \coth(at) - 2x_j x_j^0 \operatorname{csch}(at)} dx \\ &= A e^{-\frac{a}{2} (x_j^0)^2 \coth(at)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} (x_j)^2 \coth(at) + a x_j x_j^0 \operatorname{csch}(at)} dx \\ &= A e^{-\frac{a}{2} (x_j^0)^2 \coth(at)} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a} \tanh(at)} e^{\frac{a}{2} (x_j^0)^2 \operatorname{csch}(at) \operatorname{sech}(at)} \right) \\ &= \sqrt{\operatorname{sech}(at)} e^{-\frac{a}{2} (x_j^0)^2 \tanh(at)}. \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(x_0, x; t) dx = (\operatorname{sech}(at))^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a}{2} |x_0|^2 \tanh(at)}. \quad (2.29)$$

Note que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} L(x_0, x; t) dx = \lim_{t \rightarrow 0} (\operatorname{sech}(at))^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a}{2}|x_0|^2 \tanh(at)} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} L(x_0, x; t) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (\operatorname{sech}(at))^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a}{2}|x_0|^2 \tanh(at)} = 0.$$

Observação 7. Por outro lado, o núcleo do calor, $G_t(x, y) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$, para o operador Laplaciano, é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x, y; t) dx = 1.$$

Esse fenômeno é conhecido como conservação de massa. Portanto, enquanto no caso clássico a energia do sistema é conservada, no caso do operador com potencial quadrático $U(x) = -a^2 x^2$, há dissipação da energia à medida que o tempo t aumenta. O fato da integral de L tender a 1 quando t tende a zero reforça essa ideia.

No estudo da equação do calor clássica, notamos por comparação que o x_0 é convencionalmente 0 (zero). A partir de agora, adotaremos o mesmo valor para x_0 . Cabe salientar que os resultados anteriores não são prejudicados pela nossa nova escolha. Vamos mostrar que L satisfaz a equação (2.13).

Teorema 2.6. Assuma que $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e defina u por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x - y, t) \varphi(y) dy \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy, y \in \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (2.31)$$

Então

- i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
- ii) $u_t - \Delta u = 0$;
- iii) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = \varphi(x_0)$.

Demonstração. Ver [9], pg. 47. □

Teorema 2.7. Seja $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e defina u por

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x - y, t) \varphi(y) dy, \quad (2.32)$$

em que

$$L(x, t) = \sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}} e^{-\frac{a}{2}x^2 \coth(at)}, \quad t > 0.$$

Então, u é solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}(\partial_x^2 - a^2x^2)u, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Demonstração. O nosso objetivo é mostrar que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(0)$. Escolha $t \in (0, \delta')$ em que $\delta' > 0$. Vale que $a^{-1} \sinh(at) > t$ (na verdade são valores próximos e tal aproximação melhora à medida que t tende a zero). Conseqüentemente $\sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}} < \sqrt{\frac{1}{2\pi t}}$. Por outro lado, como $at/\sinh(at)$ tende a 1 quando t se aproxima de zero, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $at/\sinh(at) > 1/2$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{at}{\sinh(at)} \cosh(at) > \frac{1}{2} &\implies a \coth(at) > \frac{1}{2t} \\ \implies -\frac{a}{2}x^2 \coth(at) < -\frac{x^2}{4t} &\implies e^{-\frac{a}{2}x^2 \coth(at)} < e^{-\frac{x^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Considere $G_t(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Temos então

$$\begin{aligned} L(x, t) - G_t(x) &= \sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}} e^{-\frac{a}{2}x^2 \coth(at)} - \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &< \sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{a}{2\pi \sinh(at)}} - \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}} < 0. \end{aligned}$$

Posto isso, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < t < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \varphi(0)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} L(x - y; t) (\varphi(y) - \varphi(0)) dy \right| + |J(t)| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x - y) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \epsilon, \end{aligned}$$

isso pois esse resultado é válido para a Gaussiana (ver Teorema 2.6). □

Capítulo 3

A Equação Linear do Calor com o Operador de Grushin

Nesta seção determinamos o núcleo do calor do operador de Grushin e faremos uma abordagem do Problema de Cauchy para a *Equação de Grushin*. Considere o operador de *Grushin* bidimensional

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}(\partial_x^2 + x^2\partial_y^2). \quad (3.1)$$

Utilizaremos o núcleo do calor associado ao operador com potencial do tipo quadrático discutido no capítulo anterior para determinar o núcleo do calor do operador de Grushin. Em seguida, discutiremos propriedades intrínsecas à solução fundamental da equação do calor com o operador de Grushin, tais como estimativas em espaços L^p , propriedade de semigrupo e existência de solução do problema de Cauchy associado.

3.1 O Núcleo do Calor do Operador de Grushin

Nosso objetivo é encontrar o núcleo do calor que satisfaz a equação do calor com o operador de Grushin:

$$\partial_t v = \Delta_{\mathcal{G}} v, t > 0 \quad (3.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v(x, y; t) = \delta_{x_0}(x) \otimes \delta_{y_0}(y). \quad (3.3)$$

Denote $u = \mathcal{F}_y(v)$ a transformada de Fourier de v com respeito a y . Então, aplicando a transformada em (3.2), segue que u é solução de:

$$\partial_t u = \frac{1}{2}(\partial_x^2 u - x^2 \xi^2 u), t > 0 \quad (3.4)$$

$$u(x, \xi; 0) = \delta_{x_0}(x) \otimes \mathbb{I}_\xi. \quad (3.5)$$

Observando a equação (3.4), notamos que esta tem a forma $\partial_t u = \mathbb{L}u$, em que $\mathbb{L} = \frac{1}{2}(\partial_x^2 - x^2 \xi^2)$. Neste caso, pelo Teorema 2.4, a solução fundamental do sistema acima é:

$$L(x_0, x, \xi; t) = \sqrt{\frac{\xi}{2\pi \sinh(\xi t)}} e^{-\frac{\xi}{2}[(x^2 + x_0^2) \coth(\xi t) - 2xx_0 \operatorname{csch}(\xi t)]}, t > 0.$$

Agora, aplicando a transformada inversa de Fourier na equação acima com respeito a ξ , temos:

$$\begin{aligned} K(x_0, x, y; t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_0, x, \xi; t) e^{iy\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\xi t}{2\pi t \sinh(\xi t)}} e^{iy\xi - \frac{\xi t}{2}[(x^2 + x_0^2) \coth(\xi t) - 2xx_0 \operatorname{csch}(\xi t)]} d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\tau = \xi t$, obtemos:

$$K(x_0, x, y; t) = \frac{1}{2\pi t^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh \tau}} e^{\frac{iy\tau}{t} - \frac{\tau}{2t}[(x^2 + x_0^2) \coth \tau - 2xx_0 \operatorname{csch} \tau]} d\tau.$$

Denotando

$$\begin{aligned} f(x, x_0, y; \tau) &= -iy\tau + \frac{\tau}{2}(x^2 + x_0^2) \coth \tau - xx_0 \tau \operatorname{csch} \tau \\ V(\tau) &= \sqrt{\frac{\tau}{\sinh \tau}}, \end{aligned}$$

podemos reescrever v da seguinte forma:

$$K(x_0, x, y; t) = \frac{1}{2\pi t^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) e^{-f(x, x_0, y; \tau)} d\tau, t > 0, \quad (3.6)$$

em que f é dita *ação complexa modificada* e V *elemento de volume* (note a semelhança com a ação clássica e a função de volume abordados na seção 2.1.4).

Em paralelo à seção anterior, iremos abordar o caso em que $x_0 = 0$ (pois este é escolhido arbitrariamente), ou seja,

$$K(x, y; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\xi}{2\pi \sinh(\xi t)}} e^{iy\xi - \frac{\xi}{2}x^2 \coth(\xi t)} d\xi. \quad (3.7)$$

Teorema 3.1. O núcleo do calor associado ao operador $\Delta_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}(\partial_x^2 + x^2\partial_y^2)$ é dado por

$$K(x, y; t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{i\xi y - \frac{x^2}{2}\xi \coth(\xi t)} d\xi, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0. \quad (3.8)$$

Além disso, para todo $t > 0$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y; t) d(x, y) = 1.$$

Demonstração. Vamos agora verificar a função K dada por (3.8) é solução da equação de Grushin (3.2). Denote

$$g(x, \xi; t) = \sqrt{\frac{\xi}{2\pi \sinh(\xi t)}} e^{-\frac{\xi}{2}x^2 \coth(\xi t)}.$$

Pela regra da cadeia e do produto, obtemos

$$\partial_x g(x, \xi; t) = \sqrt{\frac{\xi}{2\pi \sinh(\xi t)}} e^{-\frac{\xi}{2}x^2 \coth(\xi t)} (-x\xi \coth(\xi t)) = g(x, \xi; t) (-x\xi \coth(\xi t));$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 g(x, \xi; t) &= g(x, \xi; t) (-x\xi \coth(\xi t))^2 + g(x, \xi; t) (-\xi \coth(\xi t)) \\ &= g(x, \xi; t) (x^2 \xi^2 \coth^2(\xi t) - \xi \coth(\xi t)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t g(x, \xi; t) &= \sqrt{\frac{\xi}{2\pi}} e^{-\frac{\xi}{2}x^2 \coth(\xi t)} \left[-\frac{1}{2} \frac{\xi \cosh(\xi t)}{\sqrt{\sinh^3(\xi t)}} + \sqrt{\frac{1}{\sinh(\xi t)}} \left(\frac{\xi^2}{2} x^2 \operatorname{csch}^2(\xi t) \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\xi}{2\pi \sinh(\xi t)}} e^{-\frac{\xi}{2}x^2 \coth(\xi t)} \left(\frac{x^2 \xi^2 \operatorname{csch}^2(\xi t) - \xi \coth(\xi t)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} g(x, \xi; t) (x^2 \xi^2 \operatorname{csch}^2(\xi t) - \xi \coth(\xi t)). \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1 podemos derivar sob o sinal da integral:

$$\partial_t K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x, \xi; t) e^{iy\xi} d\xi, \quad (3.9)$$

$$\partial_x^2 K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 g(x, \xi; t) e^{iy\xi} d\xi, \quad (3.10)$$

$$\partial_y^2 K = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \xi; t) e^{iy\xi} \xi^2 d\xi. \quad (3.11)$$

Disso resulta que

$$\begin{aligned} \partial_t K &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \xi; t) (x^2 \xi^2 \operatorname{csch}^2(\xi t) - \xi \coth(\xi t)) e^{iy\xi} d\xi; \\ \Delta_g K &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 g(x, \xi; t) e^{iy\xi} d\xi - \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \xi; t) e^{iy\xi} \xi^2 d\xi \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} (\partial_x^2 g(x, \xi; t) - x^2 \xi^2 g(x, \xi; t)) d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(x, y; t) (x^2 \xi^2 (\coth^2(\xi t) - 1) - \xi \coth(\xi t)) d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} u(x, y; t) (x^2 \xi^2 \operatorname{csch}^2(\xi t) - \xi \coth(\xi t)) d\xi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\partial_t K - \Delta_g K = 0,$$

como queríamos demonstrar. Por fim, nos resta mostrar que a integral de K em \mathbb{R}^2 é igual a 1 (satisfaz a condição de conservação de massa). Pelo Teorema de Fubini e considerando K dada por (3.8), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y; t) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{i\xi y - \frac{\xi}{2} x^2 \coth(\xi t)} dx dy \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{i\xi y} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi}{2} x^2 \coth(\xi t)} dx \right) dy d\xi \end{aligned}$$

Usando (5.1), temos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y; t) d(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} \sqrt{\frac{2\pi \tanh(\xi t)}{\xi}} e^{i\xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2}{e^{\xi t} + e^{-\xi t}}} e^{i\xi y} dy d\xi.\end{aligned}$$

Defina

$$I(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2}{e^{\xi t} + e^{-\xi t}}} e^{i\xi y} e^{-sy^2} dy d\xi.$$

Daí, utilizando (5.2), podemos simplificar a integral acima:

$$\begin{aligned}I(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2}{e^{\xi t} + e^{-\xi t}}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y - sy^2} dy \right) d\xi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{e^{\xi t} + e^{-\xi t}}} \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\frac{\xi^2}{4s}} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{e^{\xi t} + e^{-\xi t}}} e^{-\frac{\xi^2}{4s}} d\xi.\end{aligned}$$

Substituindo $\xi = 2\sqrt{s}r$, $d\xi = 2\sqrt{s}dr$, obtemos

$$\begin{aligned}I(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{e^{2\sqrt{s}rt} + e^{-2\sqrt{s}rt}}} e^{-r^2} 2\sqrt{s}dr \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{e^{2\sqrt{s}rt} + e^{-2\sqrt{s}rt}}} e^{-r^2} dr.\end{aligned}$$

Considerando o limite $s \rightarrow 0^+$, segue de (5.1) que

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y; t) d(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r^2} dr = 1.$$

□

Podemos também utilizar expressões equivalentes do núcleo do calor em (3.8), por exemplo, pela fórmula de Euler: $e^{i\xi y} = \cos(\xi y) + i \sin(\xi y)$; e as igualdades com integrais: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, se f é ímpar; $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, se f é par, então podemos simplificar a expressão do núcleo do calor para as seguintes

expressões:

$$K(x, y; t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{-\frac{x^2}{2}\xi \coth(\xi t)} \cos(\xi y) d\xi \quad (3.12)$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{-\frac{x^2}{2}\xi \coth(\xi t)} \cos(\xi y) d\xi. \quad (3.13)$$

$$= \frac{2}{(2\pi t)^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} e^{-\frac{x^2}{2t}\tau \coth(\tau)} \cos(\tau y/t) d\tau. \quad (3.14)$$

Observe ainda que K é, em acordo com (1.8), uma função real. Adicionalmente, em [7] e [8] é demonstrado que o núcleo do calor associado ao operador de Grushin é positivo.

Proposição 3.1. Seja K o núcleo do calor do operador de Grushin. Então para cada $t > 0$ fixo, $K(\cdot, \cdot; t) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Vamos mostrar que podemos derivar sob sinal da integral em relação a y e, em seguida, em relação a x . Para isso, utilizaremos a expressão de K em (3.13). Defina g por

$$g(x, y, \xi; t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{i\xi y - \frac{x^2}{2}\xi \coth(\xi t)}.$$

Então $K(x, y; t) = \int_0^{+\infty} g(x, y, \xi; t) d\xi$. Para a variável y , a derivada de ordem k de g é igual a $\xi^k g$ a menos de um termo $(-1)^k \cos(\xi y)$ ou $(-1)^k \sin(\xi y)$. Em todo caso, temos que

$$|\partial_y^k g(x, y, \xi; t)| \leq \frac{\xi^k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{-\frac{x^2}{2}\xi \coth(\xi t)}, k \in \mathbb{Z}^+.$$

Daí, usando $(\xi t) \coth(\xi t) \geq \xi t$ e $\frac{\xi t}{\sinh(\xi t)} \leq 1$, temos que $e^{-\frac{x^2}{2}\xi \coth(\xi t)} \leq e^{-\frac{x^2}{2}\xi}$ e

$$|(-1)^k \xi^k g(x, y, \xi; t)| \leq \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \xi^k e^{-\frac{x^2}{2}\xi} =: h(\xi) \in L^1((0, \infty)), k \in \mathbb{Z}^+,$$

e pelo item *b*) Teorema 1.3, podemos passar a derivada em relação a y sob sinal da integral k vezes. Para a variável x , considere a expressão em (3.14). Pelas regras

de derivação obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial_x^1 g(x, y, \tau; t) &= g(x, y, \tau; t) \left(-\frac{x}{t} \tau \coth(\tau) \right); \\
\partial_x^2 g(x, y, \tau; t) &= g(x, y, \tau; t) \left(-\frac{x}{t} \tau \coth(\tau) \right)^2 + g(x, y, \tau; t) \left(-\frac{1}{t} \tau \coth(\tau) \right) \\
&= g(x, y, \tau; t) \left((-1)^2 \left(\frac{x}{t} \right)^2 \tau^2 \coth^2(\tau) - \frac{1}{t} \tau \coth(\tau) \right); \\
\partial_x^3 g(x, y, \tau; t) &= g(x, y, \tau; t) \left(-\frac{x}{t} \tau \coth(\tau) \right) \left((-1)^2 \left(\frac{x}{t} \right)^2 \tau^2 \coth^2(\tau) - \frac{1}{t} \tau \coth(\tau) \right) \\
&\quad + g(x, y, \tau; t) \left((-1)^2 \left(\frac{2x}{t^2} \right) \tau^2 \coth^2(\tau) \right) \\
&= g(x, y, \tau; t) \left((-1)^3 \left(\frac{x}{t} \right)^3 \tau^3 \coth^3(\tau) + (-1)^2 \left(\frac{3x}{t^2} \right) \tau^2 \coth^2(\tau) \right).
\end{aligned}$$

Prosseguindo com as derivações, chegamos à conclusão de que $\partial_x^n g(x, y, \tau; t) = g(x, y, \tau; t) h(x, \tau, t)$, em que h possui termos do tipo $(-1)^n x^\alpha t^{-n} \tau^n \coth^n(\tau)$. Para $x \geq 1$, temos que $e^{-\frac{x^2}{2t} \tau \coth(\tau)} \leq e^{-\frac{1}{2t} \tau \coth(\tau)}$. Pelo Lema 5.1, temos $\tau^n \coth^n(\tau) \leq (\tau + 1)^n$. Logo, podemos fazer a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
|g(x, y, \tau; t) (-1)^n x^\alpha t^{-\alpha} \tau^n \coth^n(\tau)| &\leq \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} e^{-\frac{x^2}{2t} \tau \coth(\tau)} x^\alpha t^{-\alpha} \tau^n \coth^n(\tau) \\
&\leq \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} \left(e^{-\frac{x^2}{4t} \tau \coth(\tau)} x^\alpha t^{-\alpha} \right) \\
&\quad \times \left(e^{-\frac{1}{4t} \tau \coth(\tau)} \tau^n \coth^n(\tau) \right) \\
&\leq C \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} \left(e^{-\frac{1}{4t} \tau \coth(\tau)} (\tau + 1)^n \right) \\
&\leq C' \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} =: h(\tau) \in L^1(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos passar a derivada sob sinal da integral n vezes e, portanto, K tem infinitas derivadas em relação a x . \square

Assim como o núcleo do calor clássico, K apresenta características de simetria. De fato, a seguir, faremos um cálculo heurístico para inferir as homogeneida-

des de K em relação às variáveis x, y e t . Definimos a aplicação de escala:

$$u(x, y; t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda^\gamma y; \lambda^\delta t),$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes a serem determinadas e $\lambda > 0$. Denote $v(x, y; \lambda, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda^\gamma y; \lambda^\delta t)$. Temos que

$$v_t = \lambda^{\alpha+\delta} u_t, \quad v_{xx} = \lambda^{\alpha+2\beta} u_{xx}, \quad v_{yy} = \lambda^{\alpha+2\gamma} u_{yy}.$$

Substituindo em (3.2), temos

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha+\delta} u_t &= \frac{1}{2} (\lambda^{\alpha+2\beta} u_{xx} + x^2 \lambda^{\alpha+2\gamma} u_{yy}) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda^{\alpha+2\beta} u_{xx} + (\lambda^\beta x)^2 \lambda^{\alpha+2\gamma-2\beta} u_{yy}). \end{aligned}$$

Daí, fazendo $\alpha + \delta = \alpha + 2\beta = \alpha + 2\gamma - 2\beta$, concluímos que $\delta = \gamma = 2\beta$. Escolhendo $\alpha = 3/2, \beta = 1/2$ e $\lambda = t^{-1}$, segue que $\delta = \gamma = 1$, fica determinado então o seguinte resultado.

Proposição 3.2. (Simetria) O núcleo em (3.8) tem a seguinte homogeneidade:

$$K(x, y; t) = t^{-\frac{3}{2}} K(t^{-\frac{1}{2}} x, t^{-1} y; 1).$$

Demonstração. Ao fazer a substituição $\tau = \xi t$, obtemos:

$$\begin{aligned} K(x, y; t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{i\xi y - \frac{x^2}{2} \xi \coth(\xi t)} d\xi \\ &= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi t}{\sinh(\xi t)}} e^{i\xi t(t^{-1} y) - \frac{(t^{-1/2} x)^2}{2} \xi t \coth(\xi t)} d\xi \\ &= \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} e^{i\tau(t^{-1} y) - \frac{(t^{-1/2} x)^2}{2} \tau \coth(\tau)} d\xi \\ &= t^{-\frac{3}{2}} K(t^{-\frac{1}{2}} x, t^{-1} y; 1). \end{aligned}$$

□

Uma comparação rápida com o núcleo do calor clássico $\Phi(x, y; t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$, este é invariante pela dilatação em escala $u(x, y; t) \mapsto t^{-1} u(t^{-\frac{1}{2}} x, t^{-\frac{1}{2}} y; 1)$.

Corolário 3.2. O núcleo do calor K definido em (3.8) é uma aproximação da identidade na norma L^p .

Demonstração. Pela Proposição 3.2 podemos escrever $K(x, y; t) = t^{-\frac{3}{2}} K(t^{-\frac{1}{2}}x, t^{-1}y; 1)$. Substituindo $x = t^{\frac{1}{2}}\alpha$, $y = t\beta$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y; t) d(x, y) &= \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^2} K\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{t}; 1\right) d(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} K(\alpha, \beta; 1) d(\alpha, \beta) = 1. \end{aligned}$$

Daí, segue do Lema 1.3 que K é uma aproximação da identidade. \square

O próximo teorema apresenta resultados centrais sobre o núcleo do calor em (3.8) que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

Teorema 3.3. Seja K o núcleo do calor associado ao operador de Grushin. Então, para $1 \leq q \leq \infty$, temos que $\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})}$, para todo $t > 0$.

Demonstração. O núcleo do calor é obtido por meio da transformada inversa de Fourier em relação à variável y que, por sua vez, pode ser escrita em termos da transformada de Fourier: $K(\cdot, y; \cdot) = \mathcal{F}^{-1}[f](\cdot, \xi; \cdot) = \mathcal{F}[f](\cdot, -\xi; \cdot)$, em que

$$f(x, \xi; t) = \sqrt{\frac{\xi}{\sinh(\xi t)}} e^{-\frac{\xi}{2}x^2 \coth(\xi t)}.$$

Observe que f é uma função par. Logo, $\mathcal{F}[f](\cdot, -\xi; \cdot) = \mathcal{F}[f](\cdot, \xi; \cdot)$. Sejam p e q expoentes conjugados, isto é, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Vamos determinar a norma $L^q(\mathbb{R}^2)$ de K em três casos: i) $2 \leq q < \infty$, ii) $1 \leq q < 2$ e iii) $q = \infty$.

No primeiro caso, temos que

$$\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x, y; t)|^q dy dx \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|K(x, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q dx \right)^{1/q}. \quad (3.15)$$

Aplicando a desigualdade de Hausdorff-Young (Teorema 1.18) para os expoentes $1 < p \leq 2$, obtemos a seguinte estimativa:

$$\|K(x, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q \leq \|f(x, \cdot; t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^q.$$

Conseqüentemente,

$$\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(x, \cdot; t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^q dx \right)^{1/q}. \quad (3.16)$$

Daí, segue-se que:

$$\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, \xi; t)|^p d\xi \right)^{q/p} dx \right)^{1/q} \quad (3.17)$$

$$= \left(\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, \xi; t)|^p d\xi \right)^{q/p} dx \right)^{p/q} \right)^{1/p}. \quad (3.18)$$

Como $\frac{q}{p} = \frac{1}{p-1} \geq 1$ para $1 < p \leq 2$ e $|f| \geq 0$, segue da desigualdade de Minkowski para integrais (ver 1.11) que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, \xi; t)|^p d\xi \right)^{q/p} dx \right)^{p/q} \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, \xi; t)|^{p \cdot \frac{q}{p}} dx \right)^{p/q} d\xi. \quad (3.19)$$

Assim, escrevendo a função f , podemos calcular:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, \xi; t)|^q dx \right)^{p/q} d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\xi}{\sinh(\xi t)} \right)^{q/2} e^{-\frac{\xi q}{2} x^2 \coth(\xi t)} dx \right)^{p/q} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\xi}{\sinh(\xi t)} \right)^{p/2} \left(\frac{2\pi \tanh(\xi t)}{\xi q} \right)^{p/2q} d\xi \\ &= C'(p, q) \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\xi}{\sinh(\xi t)} \right)^{\frac{p}{2}(1-\frac{1}{q})} \left(\frac{1}{\cosh(\xi t)} \right)^{p/2q} d\xi \\ &\leq C'(p, q) t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\xi t}{\sinh(\xi t)} \right)^{1/2} \cosh^{-\frac{p}{2q}}(\xi t) d\xi \\ &\leq C'(p, q) t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cosh^{-\frac{p}{2q}}(\xi t) d\xi. \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \cosh^{-\frac{p}{2q}}(\xi t) d\xi &= 2 \int_0^{\infty} \cosh^{-\frac{p}{2q}}(\xi t) d\xi = 2^{1+p/2q} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\xi t} + e^{-\xi t}} \right)^{p/2q} d\xi \\ &\leq 2^{1+p/2q} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi t p}{2q}} d\xi = c_{p,q} t^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, \xi; t)|^q dx \right)^{p/q} d\xi \leq C'''(p, q) t^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.20)$$

Portanto, combinando (3.17), (3.18) e (3.20), obtemos:

$$\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(p, q) t^{-\frac{3}{2p}} = C(p, q) t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})}, 2 \leq q < \infty.$$

Em particular, $\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq M t^{-\frac{3}{4}}$.

Para o caso ii): $1 \leq q < 2$. Como K é positivo e $\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y; t) d(x, y) = 1$, para todo $t > 0$, temos que $\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = 1$. Daí, usando a Proposição 1.3 com $p = 1, r = 2$, temos $1 < q < 2, \lambda = \frac{2}{q} - 1 \in (0, 1)$ e

$$\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2}{q}-1} \|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{2}{q}} \leq C t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})}.$$

Para o caso em $q = \infty$, fazendo $\tau = \xi t$ e pelo Lema 5.2, temos:

$$\begin{aligned} |K(x, y; t)| &= \left| \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} e^{\frac{i\tau y}{t} - \frac{x^2}{2t}\tau \coth(\tau)} d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} e^{-\frac{x^2}{2t}\tau \coth(\tau)} d\tau \\ &\leq \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} d\tau \\ &\leq C t^{-3/2}, \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, logo $\|K(\cdot, \cdot; t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C t^{-3/2}$. □

3.2 O Problema de Cauchy

Nesta seção abordaremos o problema de valor inicial (ou Cauchy) da equação do calor com o operador de Grushin com o objetivo de obter uma solução:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_G u = 0, x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.21)$$

Definição 3.1. Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

- i) $u \in C^2(\mathbb{R}^2) \times C^1(0, \infty)$;

$$\text{ii) } u_t(x, t) - \Delta_{\mathcal{G}}u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^2, t > 0), u(x, 0) = u_0(x);$$

$$\text{iii) } \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = u_0(x_0), \text{ para cada } x_0 \in \mathbb{R}^2,$$

é solução de (3.21).

Teorema 3.4. (Solução do problema de valor inicial) Suponha $u_0 \in C(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ e defina u por

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^2} K(x - z, t)u_0(z)dz, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, t = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Então, u é solução de (3.21).

Demonstração. i) Como $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, pela Proposição 3.1, a equação (3.9) e pelo Teorema 1.13, com os multi-índices $\alpha = (2, 0, 0)$, $\beta = (0, 2, 0)$ e $\gamma = (0, 0, 1)$, temos que

$$\partial_x^\alpha u = \partial_x^\alpha (K * u_0) = (\partial_x^2 K) * u_0,$$

$$\partial_y^\beta u = \partial_y^\beta (K * u_0) = (\partial_y^2 K) * u_0,$$

$$\partial_t^\gamma u = \partial_t^\gamma (K * u_0) = (\partial_t K) * u_0.$$

ii) Pela linearidade da integral e o Teorema 3.1:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_{\mathcal{G}}u &= (\partial_t K) * u_0 - \frac{1}{2}((\partial_x^2 K) * u_0 + x^2(\partial_y^2 K) * u_0) \\ &= \left(\partial_t K - \frac{1}{2}(\partial_x^2 K + x^2 \partial_y^2 K) \right) * u_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois K é solução da equação do calor com o operador de Grushin.

iii). Fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pelo item iii) do Lema 1.3, temos uma convergência pontual de $K * u_0$ para u_0 quando $t \rightarrow 0$. Daí, pela continuidade de u_0 , temos:

$$\lim_{(x,y,t) \rightarrow (x_0,y_0;0)} u(x, y; t) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_0(x, y) = u_0(x_0, y_0).$$

□

Uma propriedade importante da equação do calor é a de unicidade da solução. Isso significa que a solução pode ser completamente determinada pela con-

dição inicial. Considere o PVI:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\mathcal{G}}u = f, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.23)$$

Teorema 3.5. A solução do problema 3.24 é única.

Demonstração. Sejam v, w duas soluções do sistema acima. Vamos mostrar que a solução de (3.21) é única em $(C_0^2(\mathbb{R}^2) \times C^1(0, T)) \cap C_0(\mathbb{R}^2 \times (0, T))$. Considere $u = v - w$. Temos que u é solução de

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{\mathcal{G}}u, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.24)$$

Basta então mostrarmos que $u \equiv 0$ é a única solução de (3.24). Com efeito, multiplicando $u_t = \Delta_{\mathcal{G}}u$ por u e depois integrando, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u_t u d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{\mathcal{G}}u u d(x, y) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} u_{xx} u d(x, y) + \int_{\mathbb{R}^2} x^2 u_{yy} d(x, y). \end{aligned}$$

Por meio de integração por partes, com $u' = u, du' = u_x dx, dv = u_{xx} dx, v = u_x$, e utilizando a hipótese de que as soluções se anulam no infinito, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u_{xx} u d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u_{xx} u dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(u u_x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx \right) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} u_x^2 d(x, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} x^2 u_{yy} u d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \left(\int_{\mathbb{R}} u_{yy} u dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(u u_y \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u_y^2 dx \right) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} x^2 u_y^2 d(x, y). \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 d(x, y) = - \int_{\mathbb{R}^2} (u_x^2 + x^2 u_y^2) d(x, y) \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \|u\|_2^2 \leq 0.$$

Isso significa que a norma L^2 é decrescente em t . Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x, y; t) d(x, y) \leq \int_{\mathbb{R}^2} u^2(x, y; 0) d(x, y) = 0, \forall t \in (0, T).$$

Logo, $u \equiv 0$. Isso nos mostra que $v = w$ e a unicidade está provada. \square

3.3 Semigrupo do Calor

De acordo com [17], o problema de Cauchy clássico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

tem solução dada por

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0,$$

em que $e^{t\Delta} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, dado por

$$e^{t\Delta} u_0 = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x - y) u_0(y) dy,$$

com $G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$, é um semigrupo que possui as seguintes propriedades (ver [17]):

Proposição 3.3. i) $\|G_t\|_{L^1} = 1, t > 0$;

ii) Se $u_0 \geq 0$, então $e^{t\Delta} u_0 \geq 0$ e $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^1} = \|u_0\|_{L^1}$;

iii) Se $1 \leq p \leq \infty$, então $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p}$, para todo $t > 0$;

iv) Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e se $r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}$, então $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^q} \leq (4\pi t)^{-n/2r} \|u_0\|_{L^p}$, para todo $t > 0$.

Nesta seção vamos mostrar que o núcleo do calor do operador de Grushin define um semigrupo. Retornemos ao PVI em (3.24).

Teorema 3.6. Defina a família de operadores $\mathcal{A} = (S_{\mathcal{G}}(t))_{t \geq 0}$, $S_{\mathcal{G}}(t) : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, dada por

$$S_{\mathcal{G}}(t)\varphi(x, y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^2} K(x-z, y-w; t)\varphi(z, w)d(z, w), & \text{se } t > 0, \\ \varphi(x, y), & \text{se } t = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

com $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2)$. Então $(S_{\mathcal{G}}(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo. Além disso,

i) se $1 \leq p, r \leq \infty$, para $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2)$, então

$$\|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}; \quad (3.27)$$

ii) o semigrupo $S_{\mathcal{G}}(t) : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq r \leq \infty$, para todo $t_0 > 0$

$$\|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi - S_{\mathcal{G}}(t_0)\varphi\|_{L^r} \rightarrow 0, \quad (3.28)$$

quando $t \rightarrow t_0$. Em particular, quando $r = p$, o semigrupo é fortemente contínuo em $t_0 = 0$.

Demonstração. Defina

$$u(x, t) = S_{\mathcal{G}}(t)\varphi(x).$$

Podemos demonstrar que $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ usando (1.16) e o Teorema 3.3, como será visto na demonstração do item ii). Pelos Teoremas 3.4 e 3.5, u uma solução única do problema (3.21). Defina $v(x, s) = u(x, t + s)$. Então, v é solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} v_s(x, s) = u_s(x, t + s) = \Delta_{\mathcal{G}}u(x, t + s) = \Delta_{\mathcal{G}}v(x, s), \\ v(x, 0) = u(x, t). \end{cases}$$

Pela unicidade da solução, temos que $v(x, s) = S_{\mathcal{G}}(s)u(x, t)$. Daí, temos que:

$$S_{\mathcal{G}}(t+s)u_0(x) = u(x, t+s) = v(x, s) = S_{\mathcal{G}}(s)u(x, t) = S_{\mathcal{G}}(s)S_{\mathcal{G}}(t)\varphi(x).$$

Além disso, pela definição em (3.26), temos que $S(0) = Id$. Segue, portanto, que \mathcal{A} é um semigrupo.

Para o item i), considere $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$ e $\varphi \in L^p$. Pela desigualdade geral de Young em 1.16, para pelo Teorema 3.3, temos:

$$\begin{aligned} \|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} &= \|K * \varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \|K(\cdot, \cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

Para o item ii), se $r = p$, segue da definição de semigrupo que

$$\begin{aligned}
\|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi - S_{\mathcal{G}}(t_0)\varphi\|_{L^p} &= \|S_{\mathcal{G}}(t + t_0 - t_0)\varphi - S_{\mathcal{G}}(t_0)\varphi\|_{L^p} \\
&= \|S_{\mathcal{G}}(t_0)S_{\mathcal{G}}(t - t_0)\varphi - S_{\mathcal{G}}(t_0)\varphi\|_{L^p} \\
&= \|S_{\mathcal{G}}(t_0)[S_{\mathcal{G}}(t - t_0)\varphi - \varphi]\|_{L^p} \\
&\leq \|S_{\mathcal{G}}(t - t_0)\varphi - \varphi\|_{L^p} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $t \rightarrow t_0$ de acordo com o item i) do Lema 1.3 e (3.27). Observe que podemos ter $t_0 = 0$. Se $r > p$, então

$$\begin{aligned}
\|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi - S_{\mathcal{G}}(t_0)\varphi\|_{L^r} &= \|S_{\mathcal{G}}(t_0)[S_{\mathcal{G}}(t - t_0)\varphi - \varphi]\|_{L^r} \\
&\leq Ct_0^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \|S_{\mathcal{G}}(t - t_0)\varphi - \varphi\|_{L^p} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $t \rightarrow t_0$ de acordo com o item i) do Lema 1.3 e (3.27). □

Capítulo 4

A Equação do Calor Não Linear com Operador de Grushin

Brezis e Cazenáve em [3] consideraram a existência, regularidade, unicidade e dependência contínua de soluções locais para o problema

$$u_t - \Delta u = |u|^{\rho-1}u, u(0) = u_0. \quad (4.1)$$

em domínio suave e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $u = 0$ em $(0, T) \times \partial\Omega$. Entre outros resultados, eles mostraram que, se $q > N(p-1)/2$ (*resp.* $q = N(p-1)/2$), $q \geq 1$ (*resp.* $q > 1$), $N > 1$ e $u_0 \in L^q(\Omega)$, existe um tempo $T = T(u_0) > 0$ e uma solução única de (4.1) no espaço $C([0, T], L^q(\Omega))$. No caso de o domínio ser o \mathbb{R}^N , Fujita [11] e Weissler [17] determinaram o expoente crítico ρ para a existência de soluções clássicas não negativas e globais para para (4.1).

Neste capítulo abordaremos o mesmo tipo de problema não linear para a equação do calor com o operador de Grushin a fim de obter resultados similares aos apresentados em [3] para $\Omega = \mathbb{R}^2$. Analogamente ao trabalho feito nas referências citadas, investigamos a existência, unicidade, dependência contínua, prolongamento e blowup de soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta_G u = |u|^{\rho-1}u, & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0, T], \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ e $\rho > 1$.

Definição 4.1. Dizemos que uma função $u : [0, T] \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ é L^p -solução branda de (4.2) se satisfaz

$$u(x, t) = S_G(t)u_0(x) + \int_0^t S_G(t-s)|u(x, s)|^{\rho-1}u(x, s)ds, x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.3)$$

4.1 O Teorema de Existência para $p > \frac{3}{2}(\rho - 1)$

Nesta seção, investigaremos a existência de soluções brandas de (4.2) para o caso $p > \frac{3}{2}(\rho - 1)$. Omitiremos a variável x para simplificar a notação. Sejam $E = C([0, T]; L^p(\mathbb{R}^2))$ e X_α o espaço de Banach (ver [14]) dado por

$$X_\alpha = \{u \in C((0, T]; L^{\rho p}(\mathbb{R}^2)) : \|u\|_{X_\alpha} = \sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u(t)\|_{L^{\rho p}} < +\infty\}, \quad (4.4)$$

em que $\alpha = \frac{3(\rho-1)}{2\rho p}$.

Teorema 4.1. Sejam $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 3(\rho - 1)/2$, $\rho > 1$. Então existe uma única função $u \in X_\alpha \cap E$, com $u(0) = u_0$, tal que u é uma solução branda de (4.2) em $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$. Além disso, a solução depende continuamente da condição inicial, ou seja, se $u(t)$ e $v(t)$ são soluções brandas de (4.2), com condições iniciais em u_0 e v_0 , respectivamente, então

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^p} \leq C\|u_0 - v_0\|_{L^p}, \quad (4.5)$$

para todo $t \in (0, T]$.

Demonstração. Seja $(X, \|\cdot\|_X)$, $X = X_\alpha \cap E$, em que X_α é dado por (4.4) e X é munido com a norma

$$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{X_\alpha} + \|\cdot\|_E.$$

Fixe $M \geq \|u_0\|_{L^p}$ e denote por S a seguinte bola em X :

$$S = \{u \in X; \|u(t)\|_{L^p} \leq M + 1 \text{ e } t^\alpha \|u(t)\|_{L^{\rho p}} \leq M + 1, \text{ para } t \in (0, T]\}.$$

Seja $\Lambda : S \rightarrow S$ dada na forma

$$\Lambda(u)(t) = S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds. \quad (4.6)$$

Nosso objetivo é mostrar que Λ é uma contração em S . Observe que dados $u, v \in S$, tem-se

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X = \|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{X_\alpha} + \|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_E.$$

Inicialmente, vamos estimar as normas $\|\cdot\|_{X_\alpha}$ e $\|\cdot\|_E$. Primeiro mostremos que Λ é X_α -invariante. Seja $u \in X_\alpha$. Então, utilizando o Teorema 1.8, (3.27) e

(1.12), respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}\|\Lambda(u)\|_{L^{\rho p}} &\leq \|S_{\mathcal{G}}(t)u_0\|_{L^{\rho p}} + \left\| \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right\|_{L^{\rho p}} \\ &\leq C\|u_0\|_{L^p}t^{-\alpha} + \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^{\rho p}} ds.\end{aligned}$$

Em particular, como $u \in L^{\rho p}$ segue que $|u|^{\rho-1}u \in L^p$. Por (3.27), o integrando acima pode ser estimado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\|S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^{\rho p}} &\leq C\||u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^p}(t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho p}-\frac{\rho}{\rho p}\right)} \\ &= C\|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho}(t-s)^{-\alpha}\end{aligned}$$

e dessa forma é possível concluir que

$$\begin{aligned}\int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^{\rho p}} ds &\leq C \int_0^t \|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho}(t-s)^{-\alpha} ds \\ &\leq C \left(\sup_{t \in (0, T]} t^{\alpha} \|u(t)\|_{L^{\rho p}} \right)^{\rho} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\alpha \rho} ds \\ &\leq C \|u\|_{X_{\alpha}}^{\rho} t^{-\alpha-\alpha \rho+1} \int_0^1 (1-z)^{-\alpha} z^{-\alpha \rho} dz \\ &\leq CB(1-\alpha, 1-\alpha \rho) \|u\|_{X_{\alpha}}^{\rho} t^{-\alpha-\alpha \rho+1}.\end{aligned}$$

Por hipótese, $p > \frac{3(\rho-1)}{2}$. Logo, $\rho p > \frac{3(\rho-1)}{2}\rho$, e, por conseguinte, $1-\alpha \rho > 0$. Ademais, $\rho p > \frac{3(\rho-1)}{2}$ implica $\frac{3(1-\rho)}{2\rho p} + 1 > 0$. Logo, a função Beta acima está bem definida e a estimativa acima está bem posta. Assim,

$$\|\Lambda(u)\|_{L^{\rho p}} \leq C\|u_0\|_{L^p}t^{-\alpha} + \tilde{C}\|u\|_{X_{\alpha}}^{\rho} t^{-\alpha-\alpha \rho+1}$$

e

$$t^{\alpha}\|\Lambda(u)\|_{L^{\rho p}} \leq C\|u_0\|_{L^p} + \tilde{C}\|u\|_{X_{\alpha}}^{\rho} t^{1-\alpha \rho},$$

para todo $t \in (0, T]$. Considerando o supremo da expressão acima, obtemos:

$$\|\Lambda(u)\|_{X_{\alpha}} \leq C\|u_0\|_{L^p} + \tilde{C}\|u\|_{X_{\alpha}}^{\rho} T^{1-\alpha \rho}.$$

Agora mostraremos que se $t \mapsto u(\cdot, t)$ é contínua em $L^{\rho p}(\mathbb{R}^2)$, então $t \mapsto \Lambda u(\cdot, t)$ é

contínua. Considere $t_0 \in (0, T]$. Combinando (1.8) e (1.12), temos:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(u)(t_0)\|_{L^{\rho p}} &= \left\| S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right. \\
&\quad \left. - S_{\mathcal{G}}(t_0)u_0 - \int_0^{t_0} S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right\|_{L^{\rho p}} \\
&\leq \| (S_{\mathcal{G}}(t) - S_{\mathcal{G}}(t_0)) u_0 \|_{L^{\rho p}} \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^t S_{\mathcal{G}}(s)|u(t-s)|^{\rho-1}u(t-s)ds \right\|_{L^{\rho p}} \\
&\quad + \left\| \int_0^{t_0} S_{\mathcal{G}}(s)|u(t-s)|^{\rho-1}u(t-s) \right. \\
&\quad \left. - S_{\mathcal{G}}(s)|u(t_0-s)|^{\rho-1}u(t_0-s)ds \right\|_{L^{\rho p}} \\
&:= I + J + L.
\end{aligned}$$

Daí, por (3.27), temos:

$$\begin{aligned}
L &\leq \int_0^{t_0} \| S_{\mathcal{G}}(s) [|u(t-s)|^{\rho-1}u(t-s) - |u(t_0-s)|^{\rho-1}u(t_0-s)] \|_{L^{\rho p}} ds \\
&\leq C \int_0^{t_0} s^{-\alpha} \|u(t-s) - u(t_0-s)\|_{L^{\rho p}} \|u(t-s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} ds \\
&\quad + C \int_0^{t_0} s^{-\alpha} \|u(t-s) - u(t_0-s)\|_{L^{\rho p}} \|u(t_0-s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} ds \\
&:= L_1 + L_2.
\end{aligned}$$

Para L_1 , temos:

$$\begin{aligned}
L_1 &\leq C \left(\sup_{\tau \in (0, T]} \tau^\alpha \|u(\tau)\|_{L^{\rho p}} \right)^{\rho-1} \int_0^{t_0} (t-s)^{-\alpha(\rho-1)} s^{-\alpha} \|u(t-s) - u(t_0-s)\|_{L^{\rho p}} ds \\
&\leq C \|u\|_{X_\alpha}^{\rho-1} \int_0^{t_0} (t-s)^{-\alpha(\rho-1)} s^{-\alpha} \|u(t-s) - u(t_0-s)\|_{L^{\rho p}} ds.
\end{aligned}$$

Seja $f(t, s) = (t - s)^{-\alpha(\rho-1)} s^{-\alpha} \|u(t - s) - u(t_0 - s)\|_{L^{\rho p}}$. Temos que

$$\begin{aligned} |f(t, s)| &\leq (t - s)^{-\alpha(\rho-1)} s^{-\alpha} (\|u(t - s)\|_{L^{\rho p}} + \|u(t_0 - s)\|_{L^{\rho p}}) \\ &\leq (t - s)^{-\alpha(\rho-1)} s^{-\alpha} ((t - s)^{\alpha-\alpha} \|u(t - s)\|_{L^{\rho p}} + (t_0 - s)^{\alpha-\alpha} \|u(t_0 - s)\|_{L^{\rho p}}) \\ &\leq (t - s)^{-\alpha(\rho-1)} s^{-\alpha} ((t - s)^{-\alpha} \|u\|_{X_\alpha} + (t_0 - s)^{-\alpha} \|u\|_{X_\alpha}). \end{aligned}$$

Como $t > t_0$, $(t - s)^{-\alpha} < (t_0 - s)^{-\alpha}$ e

$$|f(t, s)| \leq 2(M + 1)(t_0 - s)^{-\alpha\rho} s^{-\alpha} =: g(s).$$

Por sua vez, fazendo $z = s/t_0$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} |g(s)| ds &= 2(M + 1) \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{-\alpha\rho} s^{-\alpha} ds \\ &= 2(M + 1) t_0^{1-\alpha\rho-\alpha} \int_0^1 (1 - z)^{-\alpha\rho} z^{-\alpha} dz \\ &= 2(M + 1) t_0^{1-\alpha\rho-\alpha} B(1 - \alpha\rho, 1 - \alpha). \end{aligned}$$

Isso nos diz que podemos passar o limite $t \rightarrow t_0$ sob o sinal da integral L_1 , de acordo com o Teorema 1.3. O mesmo procedimento serve para a integral L_2 . Para a integral J , utilizando novamente (3.27), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} J &\leq \int_{t_0}^t \|S_G(s) |u(t - s)|^{\rho-1} u(t - s)\|_{L^{\rho p}} ds \\ &\leq C \int_{t_0}^t \|u(t - s)\|_{L^{\rho p}}^\rho s^{-\alpha} ds \\ &\leq C \left(\sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u(t)\|_{L^{\rho p}} \right)^\rho t_0^{-\alpha(1+\rho)} |t - t_0|. \end{aligned}$$

Pela continuidade forte do semigrupo $S_G(t)u_0$ no Teorema 3.6 ii), segue que $S_G(t)u_0 \rightarrow u_0$ na norma $L^{\rho p}$, quando $t \rightarrow t_0$. Logo, I, J e L tendem a zero quando t tende a

t_0 . Agora mostraremos que o mesmo vale na norma L^p . Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(u)(t_0)\|_{L^p} &= \left\| S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right. \\
&\quad \left. - S_{\mathcal{G}}(t_0)u_0 - \int_0^{t_0} S_{\mathcal{G}}(t_0-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right\|_{L^p} \\
&\leq \| (S_{\mathcal{G}}(t) - S_{\mathcal{G}}(t_0)) u_0 \|_{L^p} \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right\|_{L^p} \\
&\quad + \left\| \int_0^{t_0} S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s) \right. \\
&\quad \left. - S_{\mathcal{G}}(t_0-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right\|_{L^p} \\
&:= I' + J' + L'.
\end{aligned}$$

Pelo item ii) do Teorema 3.6, temos que $I' \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_0$. Para o termo em J' , temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_0}^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right\|_{L^p} &\leq \int_{t_0}^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^p} ds \\
&\leq C \int_{t_0}^t \|u(s)\|_{L^{\rho p}}^\rho ds \\
&\leq C(M+1)^\rho \int_{t_0}^t s^{-\alpha\rho} ds \\
&\leq C(M+1)^\rho (t^{1-\alpha\rho} - t_0^{1-\alpha\rho}) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $t \rightarrow t_0$. Das expressões acima podemos observar que, quando $t_0 = 0$, a integral é finita para cada t . Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} (S_{\mathcal{G}}(t-s) - S_{\mathcal{G}}(t_0-s)) |u(s)|^{\rho-1}u(s) \\
&= \int_0^{t_0} S_{\mathcal{G}}(t_0-s) (S_{\mathcal{G}}(t-t_0) - I) |u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \\
&= (S_{\mathcal{G}}(t-t_0) - I) \left(\int_0^{t_0} S_{\mathcal{G}}(t_0-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right).
\end{aligned}$$

Pelo item ii) do Teorema 3.6, temos que

$$\left\| (S_{\mathcal{G}}(t - t_0) - I) \left(\int_0^{t_0} S_{\mathcal{G}}(t_0 - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \right) \right\|_{L^p} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow t_0$. Logo, $\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(u)(t_0)\|_{L^p} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow t_0$ e, por conseguinte, a função $t \mapsto \Lambda u(t, \cdot)$ é contínua em S .

Para mostrar que Λ é uma contração considere $u, v \in S$. Então

$$\Lambda(u) - \Lambda(v) = \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t - s) (|u(s)|^{\rho-1} u(s) - |v(s)|^{\rho-1} v(s)) ds.$$

Assim, utilizando (1.12) e (3.27), respectivamente, segue que:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{L^{\rho p}} &\leq \left\| \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t - s) (|u(s)|^{\rho-1} u(s) - |v(s)|^{\rho-1} v(s)) ds \right\|_{L^{\rho p}} \\ &\leq \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t - s) (|u(s)|^{\rho-1} u(s) - |v(s)|^{\rho-1} v(s))\|_{L^{\rho p}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t - s)^{-\alpha} \| |u(s)|^{\rho-1} u(s) - |v(s)|^{\rho-1} v(s) \|_{L^p} ds, \end{aligned}$$

pois se $u \in L^{\rho p}$, então $|u|^{\rho-1} u \in L^p$. Logo, por (1.4):

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{L^{\rho p}} \leq C_1 \int_0^t (t - s)^{-\alpha} \| |u - v| \|_{L^{\rho p}} (\|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1}) ds.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} t^\alpha \|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{L^{\rho p}} &\leq C_1 t^\alpha \int_0^t (t - s)^{-\alpha} \| |u - v| \|_{L^{\rho p}} \\ &\quad \times (\|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1}) s^{(\alpha-\alpha)(\rho-1)} ds \\ &\leq C_1 t^\alpha \left[\left(\sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u(s)\|_{L^{\rho p}} \right)^{\rho-1} + \left(\sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|v(s)\|_{L^{\rho p}} \right)^{\rho-1} \right] \\ &\quad \times \int_0^t (t - s)^{-\alpha} s^{-\alpha(\rho-1)} \| |u - v| \|_{L^{\rho p}} ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
t^\alpha \|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{L^{\rho p}} &\leq C_1 t^{1-\alpha\rho} (\|u\|_{X_\alpha}^{\rho-1} + \|v\|_{X_\alpha}^{\rho-1}) \left(\sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u - v\|_{L^{\rho p}} \right) \\
&\quad \times \int_0^1 (1-z)^{-\alpha} z^{-\alpha\rho} dz \\
&\leq C_1 t^{1-\alpha\rho} (\|u\|_{X_\alpha}^{\rho-1} + \|v\|_{X_\alpha}^{\rho-1}) \\
&\quad \times B(1-\alpha, 1-\alpha\rho) \|u - v\|_X \\
&\leq C_2 T^{1-\alpha\rho} \|u - v\|_X,
\end{aligned}$$

para todo $t \in (0, T]$. Portanto, aplicando o supremo na desigualdade acima:

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{X_\alpha} \leq \tilde{C}_2 T^{1-\alpha\rho} \|u - v\|_X. \quad (4.7)$$

Vamos agora verificar que o mesmo ocorre com a norma $\|\cdot\|_E$. Utilizando (1.12), (3.27) e (1.4), respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s) (|u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s))\|_{L^p} ds \\
&\leq \int_0^t \||u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s)\|_{L^p} ds \\
&\leq C \int_0^t \|u - v\|_{L^{\rho p}} (\|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1}) ds.
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que

$$\sup_{t \in (0, T]} ((t^\alpha \|u(t)\|_{L^{\rho p}})^{\rho-1} + (t^\alpha \|v(t)\|_{L^{\rho p}})^{\rho-1}) \leq 2(M+1)^{\rho-1}.$$

Isto posto

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^p} &\leq 2C(M+1)^{\rho-1} \int_0^t \|u - v\|_{L^{\rho p}} s^{-\alpha(\rho-1)} ds \\
&\leq 2C(M+1)^{\rho-1} \|u - v\|_{X_\alpha} \int_0^t s^{-\alpha\rho} ds \\
&\leq 2C(M+1)^{\rho-1} t^{1-\alpha\rho} \|u - v\|_{X_\alpha} \\
&\leq C'(M+1)^{\rho-1} T^{1-\alpha\rho} \|u - v\|_{X_\alpha}.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_E \leq C'' T^{1-\alpha\rho} \|u - v\|_X. \quad (4.8)$$

Finalmente, de (4.7) e (4.8), temos que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq k \|u - v\|_X, k \in (0, 1),$$

para T suficientemente pequeno. Portanto, pelo Teorema 1.1, Λ admite um único ponto fixo em S . Esse ponto fixo é uma L^p -solução branda de (4.2), como queríamos demonstrar.

Para verificarmos a unicidade em X , considere u, v duas soluções de (4.2) em X . De (1.12), (3.27) e (1.4) podemos escrever

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} &= \left\| \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s) (|u(s)|^{\rho-1} u(s) - |v(s)|^{\rho-1} v(s)) ds \right\|_{L^{\rho p}} \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u - v\|_{L^{\rho p}} (\|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1}) ds. \end{aligned}$$

Daí, em termos da norma em X_α , temos:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} &\leq (\|u\|_{X_\alpha}^{\rho-1} + \|v\|_{X_\alpha}^{\rho-1}) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\alpha(\rho-1)} \|u - v\|_{L^{\rho p}} ds \\ &\leq M \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\alpha(\rho-1)} \|u - v\|_{L^{\rho p}} ds. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é utilizar a desigualdade singular de Gronwall 5.3. Fazendo as devidas comparações, temos: $A = a = 0, b = \alpha, f(s) = s^{-\alpha(\rho-1)}$. Verifiquemos as hipóteses:

- i) $\max\{a, b\} = b = \alpha$;
- ii) f é não negativa. Além disso, queremos encontrar $\tilde{p} > 1$ tal que $f \in L^{\tilde{p}}(0, T)$. Equivalentemente, basta que $-\alpha(\rho-1)\tilde{p} > -1$, ou seja, $\tilde{p} < 1/\alpha(\rho-1)$.
- iii) Como $\max\{a, b\} = b$, temos que

$$\tilde{q} \max\{a, b\} = \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}-1} \right) b < 1 \text{ se, e somente se, } \tilde{p} > \frac{1}{1-\alpha},$$

em que \tilde{q} é o expoente conjugado de \tilde{p} . Vamos verificar se o intervalo $(\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{\alpha(\rho-1)})$ é não degenerado. Para isso basta ver que $\alpha(\rho-1) < 1-\alpha$.

De fato,

$$(1 - \alpha) - \alpha(\rho - 1) = 1 - \alpha - \alpha\rho + \alpha = 1 - \alpha\rho > 0.$$

Portanto, o intervalo $(\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{\alpha(\rho-1)})$ é não degenerado e podemos escolher $\tilde{p} > 1$ de modo que sejam satisfeitas as hipóteses do Lema 5.3. Dessa forma, temos que $\|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} \leq 0$, para todo $t \in (0, T]$. Conseqüentemente, $\|u - v\|_{X_\alpha} \leq 0$. Por sua vez,

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s) (|u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s))\|_{L^p} ds \\ &\leq \int_0^t \| |u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s) \|_{L^{\rho p}} ds \\ &\leq C \int_0^t \|u - v\|_{L^p} (\|u(s)\|_{L^p}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^p}^{\rho-1}) ds \\ &\leq 2C(M+1)^{\rho-1} \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^p} ds. \end{aligned}$$

Comparando com o Teorema 5.1, temos: $A = 0$ e $f(s) = 2C(M+1)^{\rho-1}$, para todo $t \in (0, T]$. Logo, $\|u(t) - v(t)\|_{L^p} \leq 0$, para todo $t \in (0, T]$. Dessa forma, $0 \leq \|u - v\|_X \leq 0$. Isso prova a unicidade.

Além do que foi discutido, podemos mostrar que as soluções dependem continuamente das condições iniciais. Para isso, sejam $u, v \in X$ dados por

$$u(t) = S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds, \quad (4.9)$$

$$v(t) = S_{\mathcal{G}}(t)v_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|v(s)|^{\rho-1}v(s)ds. \quad (4.10)$$

Utilizando (1.8) e (1.12), temos:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^p} &\leq \|S_{\mathcal{G}}(t)(u_0 - v_0)\|_{L^p} \\ &\quad + \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)(|u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s))\|_{L^p} ds \\ &:= I + J. \end{aligned}$$

De acordo com (3.27), temos que $I \leq C\|u_0 - v_0\|_{L^p}$. Por outro lado, utilizando a

desigualdade em (1.4), segue que

$$J \leq C_1 \int_0^t \|u - v\|_{L^{\rho p}} (\|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1}) ds.$$

Uma vez que $u, v \in S$, segue que

$$s^{\alpha(\rho-1)} (\|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1}) \leq C_2(M+1)^{\rho-1}.$$

Assim, substituindo a desigualdade acima na expressão em J , obtemos:

$$\begin{aligned} J &\leq C_3 \int_0^t \|u - v\|_{L^{\rho p}} s^{-\alpha(\rho-1)} ds \\ &\leq C_3 \sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} \int_0^t s^{-\alpha \rho} ds \\ &\leq C_3 T^{1-\alpha \rho} \sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^p} \leq C \|u_0 - v_0\|_{L^p} + C'_3 \sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}}. \quad (4.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} &\leq \|S_{\mathcal{G}}(t)(u_0 - v_0)\|_{L^{\rho p}} \\ &\quad + \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)(|u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s))\|_{L^{\rho p}} ds \\ &:= I' + J'. \end{aligned}$$

De (3.27) decorre que $I' \leq C_4 \|u_0 - v_0\|_{L^p} t^{-\alpha}$. Por sua vez,

$$J' \leq C_5 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u - v\|_{L^{\rho p}} (\|u\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1}) ds.$$

Como $u, v \in S$, existe $A = \sup_{t \in (0, T]} t^{\alpha(\rho-1)} (\|u(t)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1} + \|v(t)\|_{L^{\rho p}}^{\rho-1})$. Logo,

$$J' \leq C_5 A \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u - v\|_{L^{\rho p}} s^{-\alpha(\rho-1)} ds.$$

Isso nos mostra que

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} \leq C_4 \|u_0 - v_0\|_{L^p} t^{-\alpha} + C_5 A \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\alpha \rho} s^\alpha \|u - v\|_{L^{\rho p}} ds.$$

Considere $a = b = \alpha$, $f(s) = s^{-\alpha(\rho-1)}$, $A = \|u_0 - v_0\|_{L^p}$. Já mostramos no problema de existência que podemos aplicar o Lema 5.3 para essas condições. Portanto,

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} \leq C_7 \|u_0 - v_0\|_{L^p} t^{-\alpha}.$$

Por conseguinte,

$$\sup_{t \in (0, T]} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} \leq \tilde{C} \|u_0 - v_0\|_{L^p}. \quad (4.12)$$

Finalmente, combinando 4.11 e 4.12, podemos concluir que

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^p} \leq L \|u_0 - v_0\|_{L^p}. \quad (4.13)$$

Isso mostra a dependência contínua das soluções u, v em termos das condições iniciais u_0, v_0 . \square

4.1.1 Continuação das Soluções e Alternativa de Blow-Up

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\mathcal{G}} u = |u|^{\rho-1} u, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T_0] \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.14)$$

Podemos considerar soluções do problema (4.14) que são definidas em intervalos nos quais não possam mais ser estendidos que são denominados maximais. Se $T_1 < T_2$ e u_1, u_2 são soluções de (4.14) em $[0, T_1]$ e $[0, T_2]$, respectivamente, por unicidade, $u_1 = u_2$ em $[0, T_1]$. Generalizando, considere a família $(u_i(t))_{i \in I}$ de soluções brandas de (4.14) definida em algum intervalo $[0, T_i]$ e seja

$$T_m = \sup_{i \in I} T_i.$$

Definimos a função $u(t)$ em $[0, T_m)$ por

$$u(t) = u_i(t), \text{ se } t \in [0, T_i], i \in I.$$

Por unicidade, esta função está bem definida, $u \in C([0, T_m), X)$ e u é uma solução branda para todo $t \in [0, T_m)$. Esse intervalo é dito maximal. Intuitivamente, é o

maior intervalo possível em que uma solução pode estar definida. Observe que T_m pode atingir $+\infty$. O teorema a seguir nos dá a ideia de *solução maximal*, isto é, uma solução definida um intervalo maximal:

Teorema 4.2. Sejam $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 3(\rho - 1)/2$, $\rho > 1$. Então existe uma única função maximal $u \in X_\alpha \cap E$, com $u(0) = u_0$ e $\alpha = \frac{3(\rho-1)}{2\rho p}$, tal que u é uma solução branda de (4.2) em $\mathbb{R}^2 \times (0, T_m)$. Além disso, vale a *alternativa de blow-up*: $T_m = +\infty$ ou $T_m < \infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow T_m^-} \|u(t)\|_{L^{\rho p}} = +\infty. \quad (4.15)$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.1, temos que existe uma única solução u definida em $[0, T_0]$, em que T_0 é o tempo de existência, tal que

$$u(t) = S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds, \quad (4.16)$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Considere o sistema

$$\begin{cases} v_t - \Delta_{\mathcal{G}}v = |v|^{\rho-1}v, t \in (0, T_1], T_1 > T_0, \\ v(0) = u(T_0). \end{cases}$$

Novamente, pelo Teorema 4.1, existe uma única função u_1 que é solução do problema anterior e

$$u_1(t) = S_{\mathcal{G}}(t)u(T_0) + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u_1(s)|^{\rho-1}u_1(s)ds,$$

para todo $t \in [0, \delta_1]$. Defina \tilde{u} por

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } t \in [0, T_0], \\ u_1(t - T_0), & \text{se } t \in [T_0, T_1], T_1 = T_0 + \delta_1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Pelo Lema 1.1, temos que \tilde{u} dada por (4.17) é contínua. Além disso, \tilde{u} é solução branda de (4.2) para $t \in [0, T_0]$ e vamos mostrar que também é solução branda de

(4.2), para $t \in [T_0, T_1]$. Seja $t \in [T_0, T_1]$. Então $t - T_0 \in [0, \delta_1]$ e:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= u_1(t - T_0) \\
&= S_{\mathcal{G}}(t - T_0)u(T_0) + \int_0^{t-T_0} S_{\mathcal{G}}(t - s)|u_1(s)|^{\rho-1}u_1(s)ds \\
&= S_{\mathcal{G}}(t - T_0) \left(S_{\mathcal{G}}(T_0)u_0 + \int_0^{T_0} S_{\mathcal{G}}(T_0 - s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right) \\
&\quad + \int_0^{t-T_0} S_{\mathcal{G}}(t - T_0 - s)|u_1(s)|^{\rho-1}u_1(s)ds \\
&= S_{\mathcal{G}}(t - T_0)S_{\mathcal{G}}(T_0)u_0 + S_{\mathcal{G}}(t - T_0) \int_0^{T_0} S_{\mathcal{G}}(T_0 - s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \\
&\quad + \int_0^{t-T_0} S_{\mathcal{G}}(t - T_0 - s)|u_1(s)|^{\rho-1}u_1(s)ds \\
&= S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^{T_0} S_{\mathcal{G}}(t - s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \\
&\quad + \int_0^{t-T_0} S_{\mathcal{G}}(t - T_0 - s)|u_1(s)|^{\rho-1}u_1(s)ds.
\end{aligned}$$

Substituindo $\tau = s + T_0$ na última integral, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^{T_0} S_{\mathcal{G}}(t - s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \\
&\quad + \int_{T_0}^t S_{\mathcal{G}}(t - \tau)|u_1(\tau - T_0)|^{\rho-1}u_1(\tau - T_0)d\tau.
\end{aligned}$$

Como $\tilde{u}(s) = u(s)$, para $s \in [0, T_0]$ e $\tilde{u}(\tau) = u_1(\tau - T_0)$ para $\tau \in [T_0, T_1]$, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^{T_0} S_{\mathcal{G}}(t - s)|\tilde{u}(s)|^{\rho-1}\tilde{u}(s)ds \\
&\quad + \int_{T_0}^t S_{\mathcal{G}}(t - \tau)|\tilde{u}(\tau)|^{\rho-1}\tilde{u}(\tau)d\tau \\
&= S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t - s)|\tilde{u}(s)|^{\rho-1}\tilde{u}(s)ds.
\end{aligned}$$

Isso mostra que a nova solução estendida \tilde{u} pode ser expressa em termos da primeira

condição inicial u_0 . Repetindo esse processo fica determinado o conjunto

$$A = \{T_0, T_1, \dots\} \quad (4.18)$$

Como $[T_0, T_j]$ é um intervalo fechado, o processo acima sempre pode ser repetido. Então, o processo pode repertir-se indefinidamente, com $T_0 < T_1 < \dots < T_j < \dots$. Pelo Lema de Zorn segue A tem um elemento maximal que denotamos por T_m e a função obtida pela colagem das soluções é uma solução maximal de (4.2).

Suponha que $T_m < \infty$ mas não vale o limite em (4.15), isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|u(t)\|_{L^{\rho p}} \leq c < \infty$ para todo $t \in [0, T_m)$. Dada uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \rightarrow T_m^-$, considere a sequência $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Vamos mostrar que essa sequência é de Cauchy. Para $0 < t_m < t_n < T_m$, temos

$$\begin{aligned} u(t_n) - u(t_m) &= [S_{\mathcal{G}}(t_n) - S_{\mathcal{G}}(t_m)]u_0 + \int_{t_m}^{t_n} S_{\mathcal{G}}(t_n - s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \\ &\quad + \int_0^{t_m} [S_{\mathcal{G}}(t_n - s) - S_{\mathcal{G}}(t_m - s)]|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \\ &:= I + J + K. \end{aligned}$$

Segue do item ii) do Teorema 3.6 que $I \rightarrow 0$ na norma $L^{\rho p}$, quando $n, m \rightarrow \infty$. Para o termo J ,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_m}^{t_n} S_{\mathcal{G}}(t_n - s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds \right\|_{L^{\rho p}} &\leq \int_{t_m}^{t_n} \|S_{\mathcal{G}}(t_n - s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^{\rho p}} ds \\ &\leq \int_{t_m}^{t_n} C(t_n - s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho} ds \\ &\leq A^{\rho} \int_{t_m}^{t_n} C(t_n - s)^{-\alpha} s^{-\alpha\rho} ds \\ &\leq CA^{\rho} t_n^{-\alpha - \alpha\rho + 1} \int_{t_m/t_n}^1 (1 - z)^{-\alpha} z^{-\alpha\rho} dz \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n, m \rightarrow \infty$. Para o termo K , pelo Teorema 1.20, temos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_m} [S_{\mathcal{G}}(t_n - s) - S_{\mathcal{G}}(t_m - s)] |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \\ &= \int_0^{t_m} [S_{\mathcal{G}}(t_n - t_m) - I] S_{\mathcal{G}}(t_m - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \\ &= [S_{\mathcal{G}}(t_n - t_m) - I] \int_0^{t_m} S_{\mathcal{G}}(t_m - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t_m} S_{\mathcal{G}}(t_m - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \right\|_{L^{\rho p}} &\leq \int_0^{t_m} \|S_{\mathcal{G}}(t_m - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s)\|_{L^{\rho p}} ds \\ &\leq C \int_0^{t_m} (t_m - s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho} ds \\ &\leq C(M+1)^{\rho} \int_0^{t_m} (t_m - s)^{-\alpha} s^{-\alpha \rho} ds \\ &\leq C(M+1)^{\rho} t_m^{-\alpha - \alpha \rho + 1} \int_0^1 (1-z)^{-\alpha} z^{-\alpha \rho} dz. \end{aligned}$$

Esta última é finita para cada t_m . Logo,

$$\int_0^{t_m} S_{\mathcal{G}}(t_m - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \in L^{\rho p}$$

e pelo item ii) do Teorema 3.6, temos que

$$\left\| [S_{\mathcal{G}}(t_n - t_m) - I] \left(\int_0^{t_m} S_{\mathcal{G}}(t_m - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \right) \right\|_{L^{\rho p}} \rightarrow 0,$$

quando $n, m \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\|u(t_n, \cdot) - u(t_m, \cdot)\|_{L^{\rho p}} \rightarrow 0, \text{ quando } n, m \rightarrow \infty.$$

Vamos mostrar que o mesmo vale para a norma em L^p . Consideremos os mesmos termos I, J e K . Novamente, do item ii) do Teorema 3.6 temos que $I \rightarrow 0$

na norma L^p , quando $n, m \rightarrow \infty$. Para o termo J :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_m}^{t_n} S_{\mathcal{G}}(t_n - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \right\|_{L^p} &\leq \int_{t_m}^{t_n} \|S_{\mathcal{G}}(t_n - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s)\|_{L^p} ds \\ &\leq \int_{t_m}^{t_n} C \|u(s)\|_{L^{\rho p}}^{\rho} ds \\ &\leq C(M+1)^{\rho} \int_{t_m}^{t_n} s^{-\alpha\rho} ds \\ &\leq C(M+1)^{\rho} (t_n^{1-\alpha\rho} - t_m^{1-\alpha\rho}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n, m \rightarrow \infty$. Repetindo os que foi feito nas desigualdades acima, temos que

$$\left\| \int_0^{t_n} S_{\mathcal{G}}(t_n - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \right\|_{L^p} \leq C(M+1)^{\rho} t_n^{1-\alpha\rho}$$

é finito para cada $t_n > 0$. Portanto, pelo Teorema 1.3 e item ii) do Teorema 3.6, segue que

$$\left\| [S_{\mathcal{G}}(t_n - t_m) - I] \left(\int_0^{t_m} S_{\mathcal{G}}(t_m - s) |u(s)|^{\rho-1} u(s) ds \right) \right\|_{L^p} \rightarrow 0,$$

quando $n, m \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\|u(t_n, \cdot) - u(t_m, \cdot)\|_{L^p} \rightarrow 0, \text{ quando } n, m \rightarrow \infty.$$

Consequentemente,

$$\|u(t_n, \cdot) - u(t_m, \cdot)\|_X \rightarrow 0, \text{ quando } n, m \rightarrow \infty.$$

Como X é Banach, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = u(T_m).$$

Mas então poderíamos estender a solução u com condição inicial $u(T_m)$, o que contradiz a hipótese de T_m ser um elemento maximal. \square

4.2 O Teorema de Existência para $p = \frac{3}{2}(\rho - 1)$

Nesta seção investigaremos a existência de soluções de (4.2) para o caso em que $p = \frac{3}{2}(\rho - 1)$ e $r \in (p, \rho p)$. Procederemos de modo análogo ao caso em que

$p > \frac{3}{2}(\rho - 1)$. Usaremos o seguinte lema.

Lema 4.1. Seja $1 \leq p < r < \infty$ e $\alpha = \frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$. Então

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi\|_{L^r} = 0 \quad (4.19)$$

uniformemente para φ em conjuntos limitados de $L^p(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Dado $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2)$, existe uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ convergindo para φ . Daí, utilizando (3.27), temos:

$$\begin{aligned} t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi\|_{L^r} &\leq t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)(\varphi - \varphi_n)\|_{L^r} + t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi_n\|_{L^r} \\ &\leq C \|\varphi - \varphi_n\|_{L^r} + t^\alpha \|\varphi_n\|_{L^r} \\ &\leq C \|\varphi - \varphi_n\|_{L^r} + t^\alpha M, \forall n \in \mathbb{N}, t \in (0, T). \end{aligned}$$

Assim, aplicando o limite $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi\|_{L^r} \leq T^\alpha M.$$

Daí,

$$\sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi\|_{L^r} \leq T^\alpha M.$$

Aplicando o limite $T \rightarrow 0^+$, segue do Teorema do Sanduíche que

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)\varphi\|_{L^r} = 0.$$

□

O resultado a seguir trata da existência local de soluções de (4.2). Seja $E = BC([0, \infty), L^p(\mathbb{R}^2))$.

Teorema 4.3. Assuma que $p = \frac{3}{2}(\rho - 1)$. Dado $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$, existe uma função $u \in X_\alpha \cap E$, com $\alpha = \frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$, $p < r < \rho p$, tal que u é solução branda de (4.2) em $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$.

Demonstração. Fixe $M \geq \|u_0\|_{L^p}$ e seja $\delta > 0$ a ser determinado. Defina

$$\tilde{S} = \{u \in X_\alpha \cap E; \|u(t)\|_{L^p} \leq M + 1 \text{ e } t^\alpha \|u(t)\|_{L^r} \leq \delta \text{ para } t \in (0, T)\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{\tilde{S}} = \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|u(t)\|_{L^r} + \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_{L^p}$$

e considere $\Lambda : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ dada por

$$\Lambda(u)(t) = S_{\mathcal{G}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds.$$

Analogamente à seção anterior, queremos mostrar que Λ é uma contração em \tilde{S} . Seja $a = \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{r} - \frac{1}{p} \right)$. Primeiro, mostremos que Λ é S -invariante. Com efeito, dado $u \in \tilde{S}$, utilizando (1.8), (1.12) e (3.27), respectivamente, obtemos as desigualdades:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u)(t)\|_{L^p} &\leq \|S_{\mathcal{G}}(t)u_0\|_{L^p} + \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^p} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-a} \|u(s)\|_{L^r}^{\rho} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^p} + C \left(\sup_{t \in (0, T)} t^{\alpha} \|u(t)\|_{L^r} \right)^{\rho} \int_0^t (t-s)^{-a} s^{-\alpha\rho} ds. \end{aligned}$$

Como $a + \alpha\rho = 1$, segue que

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u)(t)\|_{L^p} &\leq \|u_0\|_{L^p} + C \left(\sup_{t \in (0, T)} t^{\alpha} \|u(t)\|_{L^r} \right)^{\rho} t^{-a-\alpha\rho+1} \int_0^1 (1-\tau)^{-a} \tau^{-\alpha\rho} d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{L^p} + C \left(\sup_{t \in (0, T)} t^{\alpha} \|u(t)\|_{L^r} \right)^{\rho} B(\alpha\rho, 1 - \alpha\rho) \\ &\leq \|u_0\|_{L^p} + C\delta^{\rho}. \end{aligned}$$

Dessa forma, sendo $C\delta^{\rho} \leq 1$, obtemos $\|\Lambda(u)(t)\|_{L^p} \leq M+1$. Além disso, utilizando

(3.27), temos que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u)(t)\|_{L^r} &\leq \|S_{\mathcal{G}}(t)u_0\|_{L^r} + \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)|u(s)|^{\rho-1}u(s)\|_{L^r} ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^p} t^{-\alpha} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2r}(\rho-1)} \|u(s)\|_{L^r}^\rho ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^p} t^{-\alpha} + C \left(\sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|u(t)\|_{L^r} \right)^\rho \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2r}(\rho-1)} s^{-\alpha\rho} ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^p} t^{-\alpha} + C \delta^\rho t^{-\frac{3}{2r}(\rho-1) - \alpha\rho + 1} \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{3}{2r}(\rho-1)} \tau^{-\alpha\rho} d\tau \\
&\leq \|u_0\|_{L^p} t^{-\alpha} + C \delta^\rho t^{-\alpha} B \left(1 - \frac{3}{2r}(\rho-1), 1 - \alpha\rho \right),
\end{aligned}$$

pois $\alpha = \frac{3}{2r}(\rho-1) + \alpha\rho - 1$. Assim,

$$t^\alpha \|\Lambda(u)(t)\|_{L^r} \leq \|u_0\|_{L^p} + C_1 \delta^\rho \leq \|u_0\|_{L^p} + \delta/2,$$

com que $C_1 \delta^{\rho-1} \leq \frac{1}{2}$.

Para mostrar a existência de solução do problema utilizaremos novamente o Teorema do Ponto Fixo em 1.1. Sejam $u, v \in \tilde{S}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^r} &\leq \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)(|u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s))\|_{L^r} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3(\rho-1)}{2r}} \|u(s) - v(s)\|_{L^r} (\|u(s)\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^r}^{\rho-1}) ds \\
&\leq C \left[\left(\sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|u(t)\|_{L^r} \right)^{\rho-1} + \left(\sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|v(t)\|_{L^r} \right)^{\rho-1} \right] \\
&\quad \times \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^r} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3(\rho-1)}{2r}} s^{-\alpha(\rho-1) - \alpha} ds \\
&\leq 2C \delta^{\rho-1} t^{-\frac{3(\rho-1)}{2r} - \alpha\rho + 1} \|u - v\|_{X_\alpha} B \left(1 - \frac{3(\rho-1)}{2r}, 1 - \alpha\rho \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$t^\alpha \|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^r} \leq 2C \delta^{\rho-1} \|u - v\|_{X_\alpha}, \forall t \in (0, T). \quad (4.20)$$

Conseqüentemente,

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{X_\alpha} \leq C_1 \delta^{\rho-1} \|u - v\|_X. \quad (4.21)$$

Considerando agora a norma em E , para $u, v \in \tilde{S}$, utilizamos (1.12), (3.27) e (1.4) para obter:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)(|u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s))\|_{L^p} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-a} \|u(s) - v(s)\|_{L^r} (\|u(s)\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{L^r}^{\rho-1}) ds \\ &\leq 2C \delta^{\rho-1} \|u - v\|_{X_\alpha} \int_0^t (t-s)^{-a} s^{-\alpha\rho} ds \\ &\leq 2C t^{-a-\alpha\rho+1} \delta^{\rho-1} \|u - v\|_{X_\alpha} \int_0^1 (1-z)^{-a} z^{-\alpha\rho} dz \\ &\leq 2C \delta^{\rho-1} \|u - v\|_{X_\alpha} B(\alpha\rho, 1 - \alpha\rho). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^p} \leq C' \delta^{\rho-1} \|u - v\|_X, \forall t \in (0, T). \quad (4.22)$$

Fixemos δ pequeno o suficiente de modo que as desigualdades $C\delta^\rho \leq 1$, $C_1\delta^{\rho-1} \leq 1/2$ e $C'\delta^{\rho-1} \leq 1/2$ sejam satisfeitas. Portanto, combinando (4.21) e (4.22), concluímos que Λ é uma contração em \tilde{S} .

Vamos agora mostrar a dependência contínua que as soluções tem em relação às condições iniciais. De modo análogo à demonstração do Teorema 4.1, considerando u_0, v_0 definidas em (4.9) e (4.10), respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^r} &\leq t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} + t^\alpha \|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^r} \\ &\leq \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} + \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^r} \\ &\leq \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} + \frac{1}{2} \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^r}, \end{aligned}$$

de acordo com (4.20). Portanto,

$$\sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^r} \leq t^\alpha \|S_{\mathcal{G}}(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} \leq C \|u_0 - v_0\|_{L^p}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_{L^p} &\leq \|S_{\mathcal{G}}(t)(u_0 - v_0)\|_{L^p} \\
&\quad + \int_0^t \|S_{\mathcal{G}}(t-s)(|u(s)|^{\rho-1}u(s) - |v(s)|^{\rho-1}v(s))\|_{L^p} ds \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_{L^p} + 2C\delta^{\rho-1} \sup_{t \in (0, T)} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^r} \\
&\quad \times \int_0^t (t-s)^{-\frac{3(\rho-1)}{2r}} s^{-\alpha\rho} ds \\
&\leq C_1 \|u_0 - v_0\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u(t) - v(t)\|_{X_\alpha} + \|u(t) - v(t)\|_{L^p} \leq \tilde{L} \|u_0 - v_0\|_{L^p}.$$

□

Observação 8. Uma diferença entre os casos $p = 3(\rho - 2)/2$ e $p > 3(\rho - 2)/2$ é ilustrada pela impossibilidade de demonstrar a unicidade utilizando o Lema Singular de Gronwall. Isso ocorre porque dados u, v soluções de (4.2) em X , poderíamos escrever

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^{\rho p}} \leq C_2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{3(\rho-1)}{2r}} s^{-\alpha(\rho-1)} \|u(s) - v(s)\|_{L^{\rho p}} ds.$$

Fazendo as devidas comparações com o Teorema 5.3, temos: $A = a = 0, b = \frac{3(\rho-1)}{2r}, f(s) = s^{-\alpha(\rho-1)}$. Para que $f \in L^{\tilde{p}}((0, T))$, deveríamos ter $\tilde{p} \in (\frac{1}{\alpha(\rho-1)}, \frac{1}{\alpha(\rho-1)})$. Portanto, não podemos concluir a unicidade por esse método.

Corolário 4.4. Assuma que $p = \frac{3}{2}(\rho - 1)$. Dado $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|u_0\|_{L^p}$ é suficientemente pequena, existe uma única função $u \in X_\alpha \cap E$, com $p < r < \rho p$ e $\alpha = \frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$, tal que u é solução branda de (4.2) em $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.

Demonstração. Seja $\delta > 0$ tal que $\|u_0\|_{L^p} < \delta/2$. Defina $B[0, \delta]$ a bola em $X_\alpha \cap E$ centrada em 0 de raio $\delta > 0$ e seja $\Lambda : B[0, \delta] \rightarrow B[0, \delta]$ dada por (4.6). Analogamente ao Teorema 4.3, para quaisquer $u, v \in B[0, \delta]$, temos

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_{X_\alpha} \leq C_1 \delta^{\rho-1} \|u - v\|_X,$$

e

$$\|\Lambda(u)(t) - \Lambda(v)(t)\|_{L^p} \leq C_2 \delta^{\rho-1} \|u - v\|_X,$$

para $t > 0$. Assim, para δ suficientemente pequeno, combinando as duas desigualdades acima, segue que Λ é uma contração em $B[0, \delta]$. Pelo Teorema do

Ponto Fixo de Banach, nos garante a existência de uma solução branda de 4.2 em $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$. \square

Capítulo 5

Apêndice

Neste apêndice apresentamos alguns resultados importantes para as demonstrações desta dissertação.

Proposição 5.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Demonstração. Completando quadrado, observamos que

$$-ax^2 + bx = \frac{b^2}{4a} - \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2.$$

Daí, substituindo $y = \sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}$, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx = \frac{e^{\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

□

Proposição 5.2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi^2+i\xi} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{1}{4t}}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Proposição 5.3. (Inequação Elementar) Dados $p, q \geq 0$, vale a desigualdade

$$|p^{1+\alpha} - q^{1+\alpha}| \leq (1 + \alpha)|p - q|(p^\alpha + q^\alpha), \quad \alpha \geq 0.$$

Demonstração. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{1+\alpha}, \alpha \geq 0$. Fixe $p, q \geq 0$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, \max\{p, q\})$ tal que

$$|f(p) - f(q)| = |f'(c)(p - q)| = |(1 + \alpha)c^\alpha||p - q| \leq (1 + \alpha)|p - q| \max\{p^\alpha, q^\alpha\},$$

ou seja,

$$|p^{1+\alpha} - q^{1+\alpha}| \leq (1 + \alpha)|p - q|(p^\alpha + q^\alpha).$$

□

Teorema 5.1. (Lema de Gronwall) Sejam $T > 0, A \geq 0$ e $f \in L^1(0, T)$ uma função não negativa. Considere uma função não negativa $\varphi \in C([0, T])$ tal que

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds,$$

para todo $t \in [0, T]$. Então,

$$\varphi(t) \leq A \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Sejam $\psi(t) = A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds$ e $h(t) = \psi(t) \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right)$. Temos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= \psi'(t) \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right) + \psi(t) \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right) (-f(t)) \\ &= \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right) (\psi'(t) - f(t)\psi(t)) \\ &= \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right) f(t)(\varphi(t) - \psi(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, h é decrescente e $h(t) \leq h(0) = A$, ou seja, $\psi(t) \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right) \leq A$. Então

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \leq A \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right).$$

□

Teorema 5.2. Assuma que $u, \alpha, \beta : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ são funções contínuas. Se

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)u(s)ds, \forall [0, T],$$

então

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds.$$

Teorema 5.3. (Lema Singular de Gronwall) Sejam $T > 0$, $A \geq 0$, $0 \leq a, b \leq 1$ e seja $f \in L^p(0, T)$ uma função não negativa para $p > 1$ tal que $p' \max\{a, b\} < 1$, p' expoente conjugado de p . Considere uma função não negativa $\varphi \in L^\infty(0, T)$ tal que

$$\varphi(t) \leq At^{-a} + \int_0^t (t-s)^{-b} f(s)\varphi(s)ds, \text{ para quase todo } t \in [0, T].$$

Então existe C dependendo de T, a, b, p e $\|f\|_{L^p}$, tais que

$$\varphi(t) \leq ACt^{-a},$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Considere $t_0 \in [0, T]$ e $\delta \in (0, 1)$ pequeno o suficiente tal que

$$t_0^{\frac{1}{p'}-b} \left[\int_0^1 (1-\sigma)^{-bp'} \sigma^{-ap'} d\sigma \right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p((0, T))} \leq \frac{1}{2}, \quad (5.3)$$

$$T^{\frac{1}{p'}-b}(1-\delta)^{-a} \left[\int_0^\delta \sigma^{-bp'} d\sigma \right]^{1/p'} \|f\|_{L^p((0, T))} \leq \frac{1}{2}. \quad (5.4)$$

Podemos fazer tais considerações pois $p' \max\{a, b\} < 1$ implica que $b < \frac{1}{p'}$, ou seja, $\frac{1}{p'} - b > 0$ e $f \in L^p((0, T))$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|(1-\sigma)^{-b}\sigma^{-a}\|_{L^{p'}((0,1))} &= \left(\int_0^1 (1-\sigma)^{-bp'} \sigma^{-ap'} d\sigma \right)^{1/p'} \\ &= [B(1-bp', 1-ap')]^{1/p'}, \end{aligned}$$

em que B representa a função Beta de Euler.

Seja $\psi(t) = \sup_{s \in [0, t]} \{s^a \varphi(s)\}$. Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} t^a \varphi(t) &\leq A + t^a \int_0^t (t-s)^{-b} f(s)\varphi(s)ds \\ &\leq A + t^a \int_0^t (t-s)^{-b} s^{-a} f(s)\psi(s)ds. \end{aligned}$$

Para $0 \leq t \leq t_0$, pela desigualdade de Hölder e por (5.3), segue que

$$\begin{aligned}
t^a \varphi(t) &\leq A + t^a \int_0^t (t-s)^{-b} s^{-a} f(s) \psi(s) ds \\
&\leq A + t^a \psi(t) \int_0^t (t-s)^{-b} s^{-a} f(s) ds \\
&\leq A + t^a \psi(t) \left[\int_0^t (t-s)^{-bp'} s^{-ap'} ds \right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p((0,T))} \\
&\leq A + t^a \psi(t) \left[t^{-p'(a+b)+1} \int_0^1 (1-\sigma)^{-bp'} \sigma^{-ap'} d\sigma \right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p((0,T))} \\
&\leq A + t_0^{\frac{1}{p'}-b} \psi(t) \left[\int_0^1 (1-\sigma)^{-bp'} \sigma^{-ap'} d\sigma \right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p((0,T))} \\
&\leq A + \frac{1}{2} \psi(t).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para quase todo $t_0 \leq t \leq T$, temos:

$$\begin{aligned}
t^a \varphi(t) &\leq A + t^a \int_0^t (t-s)^{-b} s^{-a} f(s) \psi(s) ds \\
&= A + t^a \int_0^{(1-\delta)t} (t-s)^{-b} s^{-a} f(s) \psi(s) ds + t^a \int_{(1-\delta)t}^t (t-s)^{-b} s^{-a} f(s) \psi(s) ds \\
&:= A + I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

No intervalo $(0, (1-\delta)t)$ vale as desigualdades $(t-s)^{-b} \leq (\delta t)^{-b} \leq (\delta t_0)^{-b}$. Logo,

$$\begin{aligned}
I_1 &= t^a \int_0^{(1-\delta)t} (t-s)^{-b} s^{-a} f(s) \psi(s) ds \\
&\leq T^a (\delta t_0)^{-b} \int_0^t s^{-a} f(s) \psi(s) ds.
\end{aligned}$$

Por outro lado, em $((1-\delta)t, t)$, temos que $s^{-a} \leq ((1-\delta)t)^{-a}$. Daí,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq t^a \int_{(1-\delta)t}^t (t-s)^{-b} s^{-a} f(s) \psi(s) ds \\
&\leq t^a \psi(t) \int_{(1-\delta)t}^t (t-s)^{-b} t^{-a} (1-\delta)^{-a} f(s) ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} t^a \psi(t) \int_{(1-\delta)t}^t (t-s)^{-b} t^{-a} (1-\delta)^{-a} f(s) ds &= \psi(t) (1-\delta)^{-a} \|(t-\cdot)^{-b} f\|_{L^1((1-\delta)t, t)} \\ &\leq \psi(t) (1-\delta)^{-a} \|f\|_{L^p((1-\delta)t, t)} \\ &\quad \times \|(t-\cdot)^{-b}\|_{L^{p'}((1-\delta)t, t)}. \end{aligned}$$

Substituindo $\sigma = 1 - s/t$, temos que

$$\begin{aligned} \|(t-\cdot)^{-b}\|_{L^{p'}((1-\delta)t, t)} &= \left[\int_{(1-\delta)t}^t (t-s)^{-bp'} ds \right]^{1/p'} \\ &= \left[\int_0^\delta \sigma^{-bp'} t^{1-bp'} d\sigma \right]^{1/p'}. \end{aligned}$$

Assim, utilizando a desigualdade (5.4), obtemos:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq t^a \psi(t) \int_{(1-\delta)t}^t (t-s)^{-b} t^{-a} (1-\delta)^{-a} f(s) ds \\ &\leq \psi(t) (1-\delta)^{-a} \|f\|_{L^p((1-\delta)t, t)} \|(t-\cdot)^{-b}\|_{L^{p'}((1-\delta)t, t)} \\ &\leq \psi(t) T^{\frac{1}{p'}-b} (1-\delta)^{-a} \|f\|_{L^p((1-\delta)t, t)} \left[\int_0^\delta \sigma^{-bp'} d\sigma \right]^{1/p'} \\ &\leq \frac{1}{2} \psi(t). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$t^a \varphi(t) \leq A + T^a (\delta t_0)^{-b} \int_0^t s^{-a} f(s) \psi(s) ds + \frac{1}{2} \psi(t).$$

Logo, para quase todo $t_0 \in [0, T]$, temos:

$$\psi(t) \leq 2A + 2T^a (\delta t_0)^{-b} \int_0^t s^{-a} f(s) \psi(s) ds.$$

Pela hipótese sobre f , podemos fazer a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \int_0^T s^{-a} f(s) ds &\leq \|s^{-a}\|_{L^{p'}((0,T))} \|f\|_{L^p((0,T))} \\ &= \left(\int_0^T s^{-ap'} ds \right)^{1/p'} \|f\|_{L^p((0,T))} \\ &= \left(\frac{T^{1-ap'}}{1-ap'} \right)^{1/p'} \|f\|_{L^p((0,T))} < \infty. \end{aligned}$$

Isso nos diz que $s^{-a} f \in L^p((0, T))$. Portanto, pelo Lema de Gronwall (ver Teorema 5.1), temos que

$$\begin{aligned} t^a \varphi(t) \leq \psi(t) &\leq 2A \exp \left(2T^a (\delta t_0)^{-b} \int_0^t s^{-a} f(s) ds \right) \\ &\leq 2A \exp \left(2T^a (\delta t_0)^{-b} \int_0^T s^{-a} f(s) ds \right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(t) \leq ACt^{-a},$$

para quase todo $t \in [0, T]$, em que

$$C = 2 \exp \left(2T^a (\delta t_0)^{-b} \left(\frac{T^{1-ap'}}{1-ap'} \right)^{1/p'} \|f\|_{L^p((0,T))} \right). \quad (5.5)$$

□

Lema 5.1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \coth(x)$. Então f é par, f é crescente para $x > 0$ e para $x \geq 0$ satisfaz as desigualdades $f(x) \geq 1$ e $x \leq f(x) \leq x + 1$.

Demonstração. Como $\sinh(\cdot)$ é uma função ímpar e $\cosh(\cdot)$ é par, valem as igualdades:

$$f(-x) = (-x) \coth(-x) = (-x) \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = (-x) \frac{\cosh(x)}{(-\sinh(x))} = x \coth(x) = f(x).$$

Logo, f é par. Além disso, para $x > 0$, temos:

$$x \coth(x) \geq x \iff \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \geq 1 \iff e^x + e^{-x} \geq e^x - e^{-x}.$$

Pela regra do produto, temos que $f'(x) = \coth(x) - x\operatorname{csch}^2(x)$. Para $x > 0$, $\sinh(x) > 0$ e

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \coth(x) > x\operatorname{csch}^2(x) \iff \cosh(x)\sinh(x) > x \\ &\iff (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) > 4x \iff e^{2x} - e^{-2x} - 4x > 0. \end{aligned}$$

A desigualdade é satisfeita, pois o primeiro termo da série de Maclaurin de $e^{2x} - e^{-2x}$ é $4x$. Portanto, f é crescente, $f(x) \geq 1$ e $f(x) \geq x$. Adicionalmente, para $x > 0$ vale que $2x + 1 \leq e^{2x}$. Logo, $2xe^{-x} + e^{-x} \leq e^x$. Daí, somando xe^x em ambos os lados da desigualdade resulta que

$$\begin{aligned} xe^x + 2xe^{-x} \leq xe^x + e^x - e^{-x} &\iff xe^x + xe^{-x} \leq xe^x - xe^{-x} + e^x - e^{-x} \\ 2x \cosh(x) \leq 2x \sinh(x) + 2 \sinh(x) &\iff x \coth(x) \leq x + 1. \end{aligned}$$

Como $f(0) = 1$, concluímos que $x \leq f(x) \leq x + 1$. \square

Lema 5.2. Para cada $t > 0$,

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\xi t}{\sinh(\xi t)}} d\xi < \infty \quad (5.6)$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi \coth(\xi t) \sqrt{\frac{1}{\cosh(\xi t)}} d\xi < \infty \quad (5.7)$$

Demonstração. Antes de prosseguirmos, note que ambos os integrandos são funções pares. Além disso, podemos fazer a substituição $\tau = \xi t$ e reduzi-las a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\xi t}{\sinh(\xi t)}} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\xi t}{\sinh(\xi t)}} d\xi = \frac{2}{t} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} d\tau; \\ J &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \coth(\xi t) \sqrt{\frac{1}{\cosh(\xi t)}} d\xi = \frac{2}{t^2} \int_0^{+\infty} \tau \coth(\tau) \sqrt{\frac{1}{\cosh(\tau)}} d\tau \\ &= \frac{2}{t^2} \int_0^{+\infty} \tau \frac{\sqrt{e^\tau + e^{-\tau}}}{e^\tau - e^{-\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Assim sendo, vamos calcular as integrais mais à direita. Considere o seguinte: queremos a, b tais que $f(\tau) = \sinh(\tau) - ae^{b\tau}$ seja crescente. Isso significa que $f'(\tau)$

deve positiva, ou seja, $\cosh(\tau) - abe^{b\tau} \geq 0$. Assim, escrevendo $z = e^\tau$, temos

$$\frac{z + z^{-1}}{2} - abz^b \geq 0 \iff z^2 + 1 \geq 2abz^{b+1} \iff 1 \geq z^{b+1}(2ab - z^{1-b}).$$

Ora, para $\tau > 0$, temos que $z > 1$. Sendo assim, escolhendo $a = 1$ e $b = 1/2$, temos $1 \geq z^{\frac{3}{2}}(1 - z^{\frac{1}{2}})$, o que é sempre verdade. Disso concluímos que $\sinh(\tau) > e^{\tau/2}$. Por conseguinte, $\operatorname{csch}(\tau) < e^{-\tau/2}$ a partir de algum $c > 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} d\tau &= \int_0^c \underbrace{\sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}}}_{\leq 1} d\tau + \int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau}{\sinh(\tau)}} d\tau \\ &\leq c + \int_c^{+\infty} \tau^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tau}{4}} d\tau \leq c + \int_0^{+\infty} \tau^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tau}{4}} d\tau \\ &\leq c + 8 \int_0^{+\infty} \tau^{\frac{3}{2}-1} e^{-\tau} d\tau = c + 8\Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \end{aligned}$$

em que Γ é a função Gama de Euler. Considere agora a integral J . Em analogia ao item anterior (5.6), queremos a, b tais que $f(\tau) = \frac{\sqrt{e^\tau + e^{-\tau}}}{e^\tau - e^{-\tau}} - ae^{-b\tau}$ seja negativa, ou seja,

$$\frac{\sqrt{e^\tau + e^{-\tau}}}{e^\tau - e^{-\tau}} - ae^{-b\tau} < 0 \iff \frac{\sqrt{e^{2\tau} + 1}}{e^{2\tau} - 1} < \frac{a}{e^{\tau(b+\frac{1}{2})}}.$$

Escrevendo $z = e^\tau$ e escolhendo $b = \frac{1}{2}$, temos o seguinte

$$\frac{z\sqrt{z^2 + 1}}{(z^2 - 1)} < a.$$

Defina $g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ em que

$$g_b(z) = \frac{z\sqrt{z^2 + 1}}{(z^2 - 1)}.$$

Temos que

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z\sqrt{z^2 + 1}}{(z^2 - 1)} = 1.$$

Isso no diz que g se aproxima assintoticamente de 1. Então existe a tal que f é

negativa para todo $\tau \in [\ln 2, \infty)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \tau \frac{\sqrt{e^\tau + e^{-\tau}}}{e^\tau - e^{-\tau}} d\tau &= \int_0^{\ln 2} \tau \frac{\sqrt{e^\tau + e^{-\tau}}}{e^\tau - e^{-\tau}} d\tau + \int_{\ln 2}^{+\infty} \tau \frac{\sqrt{e^\tau + e^{-\tau}}}{e^\tau - e^{-\tau}} d\tau \\ &\leq k + a \int_{\ln 2}^{+\infty} \tau e^{-\frac{\tau}{2}} d\tau = k + \sqrt{2}a (\ln 2 + 2). \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos a demonstração. □

Referências Bibliográficas

- [1] B. de Andrade, G. Siracusa and A. Viana, A nonlinear fractional diffusion equation: well-posedness, comparison results, and blow-up, *J. Math. Anal. Appl.* **505** (2022), no. 2, Paper No. 125524, 24 pp.
- [2] G. Botelho, D. Pellegrino and E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, 2015.
- [3] H. Brezis and T. Cazenave, A nonlinear heat equation with singular initial data, *J. Anal. Math.* **68** (1996), 277–304.
- [4] H. Brezis and T. Cazenave, Nonlinear evolution equation, in preparation.
- [5] O. L. Calin et al., *Heat kernels for elliptic and sub-elliptic operators*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [6] E. Carneiro. Tópico 2: Aproximações da identidade, notas de aula. IMPA, 2015.
- [7] C.-H. Chang et al., The positivity of the heat kernel on Heisenberg group, *Anal. Appl. (Singap.)* **11** (2013), no. 5, 1350019, 15 pp.
- [8] C.-H. Chang et al., Geometric analysis on a step 2 Grusin operator, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **4** (2009), no. 2, 119–188.
- [9] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [10] G. B. Folland, *Real analysis*, second edition, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [11] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **13** (1966), 109–124 (1966).
- [12] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, SBM, Rio de Janeiro, 2014.

- [13] G. Oliveira, A Equação do Calor com o Operador de Grushin, Relatório de Iniciação Científica (2020).
- [14] D. M. Teixeira, Alguns espaços métricos completos na teoria de equações diferenciais parciais. *ReviSeM*, N^o 1, 50-58, 2018.
- [15] J. M. A. M. van Neerven, Stochastic Evolution Equations, ISEM lecture notes (2008).
- [16] G. Lv, J. Wei and L. Xie, Blowup solutions of Grushin's operator, *Appl. Math. Lett.* **97** (2019), 20–26.
- [17] F. B. Weissler, Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, *Israel J. Math.* **38** (1981), no. 1-2, 29–40.