



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

José Eduardo Santos Araújo

Modelagem Estocástica Explícita da Relação Capacidade-Regularização-Confiabilidade- Vulnerabilidade em Reservatórios

São Cristóvão – SE

2024

José Eduardo Santos Araújo

**Modelagem Estocástica Explícita da Relação Capacidade-
Regularização-Confabilidade-Vulnerabilidade em
Reservatórios**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Universidade Federal de Sergipe (UFS)
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa (POSGRAP)
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROEC)

Orientador: Prof. Dr. Alcigeimes Batista Celeste

São Cristóvão – SE
2024

José Eduardo Santos Araújo.

Modelagem Estocástica Explícita da Relação
Capacidade-Regularização-Confabilidade-Vulnerabilidade em
Reservatórios/ José Eduardo Santos Araújo, São Cristóvão – SE, 2024.
73 p. : il.

Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Sergipe, São
Cristóvão – SE.

I. Universidade Federal de Sergipe. II. Título.

Resumo

O estudo da dinâmica que envolve os reservatórios de águas superficiais busca encontrar meios que auxiliem no dimensionamento de barragens capazes de suportar a escassez de chuvas, as incertezas hidrológicas, e manter a disponibilidade hídrica para a população. Este trabalho propõe refinamentos ao método estocástico explícito de Fletcher-Ponnambalam (FP) para dimensionamento de reservatórios com o intuito de construir relações capacidade-regularização-confiabilidade-vulnerabilidade. Uma das melhorias ao método original é a incorporação da escala mensal, ao invés da anual originalmente utilizada. Desse modo, a partir de demanda e capacidade preestabelecidas, são estimadas as confiabilidades mensais junto as probabilidades de contenção, déficit e vertimento além dos momentos estatísticos de armazenamento. Outro aprimoramento é incluir as estimativas das vulnerabilidades mensais e dos momentos de déficit e vertimento, ausentes na formulação antiga. Para validar o modelo, são utilizados registros históricos de vazão natural ao reservatório de Sobradinho. Após a execução do procedimento FP, uma simulação da operação mensal é conduzida perante cenários sintéticos guiada pela política operacional padrão. A qualidade do ajuste entre os resultados do modelo e da simulação é medida pela soma dos erros quadráticos (*SSE*), pelo erro quadrático médio (*MSE*) e pelo coeficiente de eficiência de Nash-Sutcliffe (*NSE*). Além disso, é criada uma amostra dos resíduos (modelo menos simulação) entre todos os momentos de cada mês. A amostra é aplicada em testes paramétricos e não paramétricos para verificar a hipótese nula de média zero. Os resultados indicam que o *SSE* e *MSE* estão próximos de zero e que o *NSE* se aproxima da eficiência máxima. Outrossim, ambos os testes não rejeitam a hipótese nula, ou seja, a comparação do modelo com a simulação é adequada. O estudo também inclui a construção de curvas de regularização e a derivação de equações relacionando as variáveis envolvidas. O modelo FP-SYRV demonstra resultados satisfatórios para as várias condições, reforçando seu potencial de utilização na avaliação e no dimensionamento de sistemas de reservatórios.

Palavras-chave: Dimensionamento de Reservatórios. Incertezas. Momentos Estatísticos.

Abstract

The study of the dynamics involving surface water reservoirs seeks to find ways to help design dams capable of withstanding the scarcity of rainfall, the hydrological uncertainties, and maintaining water availability for the population. This work proposes refinements to the explicit stochastic method of Fletcher-Ponnambalam (FP) for sizing reservoirs in order to build storage-yield-reliability-vulnerability (SYRV) relationships. One of the improvements to the original method is the incorporation of the monthly scale, instead of the originally used annual time period. Thus, based on pre-established demand and capacity, monthly reliabilities are estimated as well as probabilities of containment, deficit and spill together with statistical moments of storage. Another improvement is to include estimates for monthly vulnerabilities and for the moments of deficit and spill, absent in the old formulation. To validate the model, historical records of natural flow to the Sobradinho reservoir are used. After running the FP procedure, a monthly simulation of the operation is conducted for synthetic scenarios guided by the standard operating policy. The goodness of fit between model and simulation results is measured by the error sum of squares (*SSE*), the mean squared error (*MSE*) and the Nash-Sutcliffe efficiency index (*NSE*). In addition, a residual sample (model minus simulation) is created between all moments of each month. The sample is applied to parametric and non-parametric tests to verify the null hypothesis of zero mean. The results indicate that *SSE* and *MSE* are close to zero and that the *NSE* is close to maximum efficiency. Furthermore, both tests do not reject the null hypothesis, that is, the comparison between model and simulation is adequate. The study also includes the development of SYR curves and equations relating the variables involved. The FP-SYRV model demonstrates satisfactory results for the various conditions tested, reinforcing its potential for use in the evaluation and sizing of reservoir systems.

Keywords: Reservoir Sizing. Uncertainties. Statistical Moments.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Curva de massa e definição do armazenamento requerido.	14
Figura 2	– Método dos picos sequenciais e definição de armazenamento requerido. . .	15
Figura 3	– Visita do autor à barragem de Sobradinho.	41
Figura 4	– Gráficos de probabilidade normal e resultados do teste de normalidade para cada mês nos registros de afluências à Sobradinho.	41
Figura 5	– Otimização versus simulação para o cenário S-GD.	51
Figura 6	– Otimização versus simulação para o cenário S-HR.	56
Figura 7	– Otimização versus simulação para o cenário S-MF.	60
Figura 8	– Relação SYR derivada do modelo FP-SYRV.	62
Figura 9	– Gráfico de dispersão e reta de 45° correspondente ao ajuste da equação (4.6) aos dados de confiabilidade.	64
Figura 10	– Relação SYR derivada da equação (4.6).	65
Figura 11	– Gráfico de dispersão e reta de 45° correspondente ao ajuste da equação (4.7) aos dados de confiabilidade.	66
Figura 12	– Gráfico de dispersão e reta de 45° correspondente ao ajuste da equação (4.8) aos dados de confiabilidade.	67

Lista de tabelas

Tabela 1	– Dados do reservatório de Sobradinho.	40
Tabela 2	– Otimização: probabilidades, momentos de armazenamento e índices de desempenho.	44
Tabela 3	– Otimização: momentos de déficit, vertimento e alocação.	45
Tabela 4	– Simulação cenário S-GD: frequências, momentos de armazenamento e índices de desempenho.	48
Tabela 5	– Simulação cenário S-GD: momentos de déficit, vertimento e alocação. . . .	49
Tabela 6	– Simulação cenário S-GD: comparação entre otimização e simulação.	50
Tabela 7	– Simulação cenário S-HR: frequências, momentos de armazenamento e índices de desempenho.	53
Tabela 8	– Simulação cenário S-HR: momentos de déficit, vertimento e alocação. . . .	54
Tabela 9	– Simulação cenário S-HR: comparação entre otimização e simulação.	55
Tabela 10	– Simulação cenário S-MF: frequências, momentos de armazenamento e índices de desempenho.	57
Tabela 11	– Simulação cenário S-MF: momentos de déficit, vertimento e alocação. . . .	58
Tabela 12	– Simulação cenário S-MF: comparação entre otimização e simulação.	59

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Contextualização	9
1.2	Objetivos	11
1.2.1	Geral	11
1.2.2	Específicos	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	Métodos Tradicionais de Dimensionamento	13
2.2	Métodos de Simulação e Otimização	15
2.2.1	Análise Comportamental	15
2.2.2	Técnicas de Otimização	16
2.2.3	Modelos ARCO, ARCOSO e ARCOSOP	18
2.3	Análise Capacidade-Regularização-Confiabilidade	19
2.4	Método Fletcher-Ponnambalam	21
3	MATERIAL E MÉTODOS	23
3.1	Balanço Hídrico Incorporando Excesso e Falta de Água	23
3.2	Método Fletcher-Ponnambalam para Dimensionamento de Reserva- tórios	24
3.3	Probabilidades de Contenção, Déficit e Vertimento	25
3.3.1	Probabilidade de Contenção	25
3.3.2	Probabilidade de Déficit	25
3.3.3	Probabilidade de Vertimento	26
3.4	Momentos do Armazenamento	26
3.4.1	Primeiro Momento do Armazenamento	26
3.4.2	Segundo Momento do Armazenamento	28
3.5	Momentos do Déficit	28
3.5.1	Primeiro Momento do Déficit	28
3.5.2	Segundo Momento do Déficit	29
3.6	Momentos do Vertimento	30
3.6.1	Primeiro Momento do Vertimento	30
3.6.2	Segundo Momento do Vertimento	30
3.7	Momentos da Alocação	31
3.8	Confiabilidade	31
3.9	Vulnerabilidade	32
3.10	Resolução Analítica das Integrais Considerando Afluências Gaussianas	33

3.10.1	Funções de Probabilidade e Integrais de Variável Aleatória Gaussiana . . .	33
3.10.2	Momentos	34
3.11	Refinamentos em Relação ao Modelo Original	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	40
4.1	Estudo de Caso	40
4.2	Aplicação	42
4.3	Problema Exemplo	42
4.3.1	Validação para o Cenário S-GD	46
4.3.2	Validação para os Cenários S-HR e S-MF	52
4.4	Relação SYR	61
4.5	Equações SYR	63
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	70

1 Introdução

1.1 Contextualização

A água é um recurso essencial para a vida humana e, justamente por isso, seu uso eficiente e econômico é uma das diretrizes da gestão dos recursos hídricos. Uma das ferramentas para tal é o planejamento. No que se refere a oferta de disponibilidade hídrica, uma atividade de planejamento é a construção de reservatórios capazes de armazenar água suficiente para manter o abastecimento urbano, industrial e de irrigação com o mínimo de falhas possível.

Tal medida é de fundamental importância no enfrentamento da seca na região Nordeste do Brasil, devido, principalmente, às características peculiares da região que provocam uma alta vulnerabilidade hídrica. A começar pelos solos rasos em grande parte do seu território, com rochas bastante aflorantes que comprometem tanto a recarga hídrica como a qualidade da água. Além disso, a região apresenta altas temperaturas que conduzem a altas taxas de evaporação, além da concentração em sua maior parte de rios intermitentes e alto índice de concentração populacional, acarretando pressões sobre os recursos hídricos da região (DANTAS, 2020).

A tomada de decisão em relação à capacidade do reservatório é algo que depende das características da região em estudo, como precipitação e evaporação, esta última sendo extremamente relevante no contexto do Nordeste brasileiro que em muitas situações inviabiliza a construção de grandes reservatórios. Além disso, a região Nordeste é vulnerável em disponibilidade hídrica por ter baixas precipitações que por si só aumentam a dificuldade em prever reservatórios capazes de operar com poucas falhas em períodos de escassez, sendo que a elevada evaporação proporciona perdas de água para atmosfera, especialmente em grandes reservatórios (DANTAS, 2020).

A construção de grandes reservatórios, além de poder ser prejudicial do ponto de vista ambiental, também pode ser inviável do ponto de vista econômico. Além das dificuldades no dimensionamento, outros fatores podem comprometer o desempenho do projeto de reservatórios ao longo da vida útil, como problemas na manutenção, operações inadequadas e usos diversos da água que não foram previstos inicialmente. Em regiões de clima árido ou semiárido, o dimensionamento de reservatórios é ainda mais importante e complexo, por conta das altas taxas de evaporação, variação espacial e temporal do regime de chuvas e baixas intensidades pluviométricas (SANTOS; CELESTE, 2016).

Tradicionalmente, o dimensionamento de reservatórios é realizado por metodologias que levam em consideração o período crítico para definir a capacidade. Esses métodos originam-se do trabalho de Rippl (1883) e utilizam-se de dados históricos para encontrar a capacidade do reservatório que atenda a uma demanda prefixada. Esses métodos tradicionais são tipicamente aplicados pressupondo-se que a demanda hídrica deve ser sempre atendida, ou seja, é sempre

empregada regularização firme igual a demanda. Alternativas ao método de Rippl foram introduzidas ao incorporar estratégias de simulação baseadas no balanço hídrico do reservatório, o que ficou conhecido como análise comportamental (BA: *behavior analysis*) (MCMAHON et al., 2007a). Os modelos baseados em simulação requerem um certo número de iterações para encontrar a capacidade do reservatório, e têm como vantagem a possibilidade de contabilizar falhas, ou seja, em alguns períodos é possível que a liberação seja menor que a demanda, incorporando, portanto, riscos aceitáveis de desabastecimento.

Em contraponto aos métodos tradicionais, que são determinísticos, foram desenvolvidos também, ao longo dos anos, modelos estocásticos para lidar com as incertezas das vazões afluentes. O resultado encontrado não atende exclusivamente ao registro histórico de dados, mas a um universo maior de possibilidades, podendo-se dimensionar o reservatório considerando um critério de desempenho predefinido.

Para que as interações da simulação sejam evitadas, podem ser empregados modelos de otimização que encontram automaticamente a capacidade ideal às necessidades de projeto (LOUCKS; BEEK, 2017). Existem duas técnicas de otimização estocásticas utilizadas para dimensionamento de reservatórios: a otimização estocástica explícita (OEE), que incorpora as incertezas diretamente na formulação da otimização e a otimização estocástica implícita (OEI), que considera a aleatoriedade das vazões ao aplicar um processo de Monte Carlo por meio de cenários sintéticos (CELESTE; CURI; CURI, 2009).

Os registros históricos das vazões compreendem apenas um único evento, e as séries sintéticas obtidas dessa amostra são consideradas como eventos alternativos (*ensembles*) com probabilidade de ocorrência reconhecidamente igual à do evento observado. A utilização de séries sintéticas é uma ferramenta importante e útil para profissionais e pesquisadores em gestão de recursos hídricos, visto que permite avaliar a incerteza associada aos fenômenos hidrológicos naturais em geral, e com o regime de escoamento em particular (SILVA, 2010).

Hashimoto, Stedinger e Loucks (1982) perceberam que a capacidade dos sistemas de recursos hídricos, construídos ou em implantação de atender satisfatoriamente a variedade de possíveis futuras demandas e condições hidrológicas, é crucial para a manutenção dos sistemas, especialmente durante os períodos de seca, picos e demandas ou condições meteorológicas extremas. Sendo assim, foram alguns dos precursores na utilização do termo sustentabilidade em recursos hídricos. Foram eles que definiram os termos confiabilidade, que consiste na probabilidade de o sistema funcionar sem falhas durante o horizonte de operação, e vulnerabilidade, que mede a magnitude de uma falha. Esses termos também são conhecidos como critérios de desempenho.

Do ponto de vista hidrológico, a solução da problemática de dimensionar um reservatório consiste em encontrar a relação ideal entre as características naturais da afluência, a capacidade do reservatório, a regularização controlada e os índices de desempenho do sistema. Desse modo, pesquisadores estudaram e definiram a relação capacidade-regularização-confiabilidade (SYR: *storage-yield-reliability*) como capaz de representar o comportamento do reservatório, ou seja,

a partir do conhecimento e definição de duas dessas variáveis, seria possível encontrar o valor da terceira (VOGEL; STEDINGER, 1987).

O presente trabalho implementa, de forma inédita, a relação capacidade-regularização-confiabilidade-vulnerabilidade (SYRV: *storage-yield-reliability-vulnerability*) para representar o comportamento de um reservatório. Porém, além dessas variáveis, existe a incerteza da afluência como algo a ser levado em consideração. Nesse sentido, é utilizado um refinamento do modelo estocástico introduzido por Fletcher e Ponnambalam (1996) para dimensionamento de reservatórios, o qual estima os valores dos momentos estatísticos de armazenamento, déficit e vertimento. O método Fletcher-Ponnambalam (FP) não requer discretização das variáveis de estado nem simulações Monte Carlo como outros modelos estocásticos. Sendo um problema explícito de otimização estocástica, o método FP propõe uma distribuição de probabilidade para as afluências ao reservatório, a fim de resolver várias integrais referentes às equações de momentos estatísticos, bem como as probabilidades de contenção (armazenamento entre os níveis mínimo e máximo), déficit (abaixo do mínimo) e vertimento (acima do máximo). O refinamento do modelo implementado neste trabalho inclui várias melhorias, tais como:

- Uso de uma escala de tempo mensal, não incluída no modelo original.
- Incorporação de estimativas de confiabilidade anuais e mensais (janeiro a dezembro), não apenas um único valor anual como no modelo original.
- Incorporação de estimativas para o primeiro e segundo momentos mensais de armazenamento, não apenas valores anuais únicos como no modelo original.
- Incorporação de estimativas para primeiro e segundo momentos mensais de déficit e vertimento, não incluídos no modelo original.
- Incorporação de estimativas mensais de vulnerabilidade, não incluídas no modelo original.
- Desenvolvimento de equações SYR para o estudo de caso, não incluídas no modelo original.
- Codificação de todo o modelo no software científico livre de código aberto GNU Octave (<www.octave.com>), não incluído no modelo original.

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

O presente trabalho tem como objetivo introduzir refinamentos consideráveis ao método estocástico explícito Fletcher-Ponnambalam para dimensionamento de reservatórios, implementando um número de procedimentos inéditos ao modelo, de forma a construir relações capacidade-regularização-confiabilidade-vulnerabilidade.

1.2.2 Específicos

- a) Aprimorar o modelo FP ao incorporar a vulnerabilidade mensal;
- b) Realizar o cálculo dos momentos estatísticos em intervalo de tempo mensal;
- c) Estudar a relação capacidade-regularização-confiabilidade-vulnerabilidade fornecida pelo modelo;
- d) Verificar a eficácia do modelo FP na resolução de problemas de dimensionamento de reservatórios;
- e) Avaliar o desempenho da nova implementação em um reservatório com as características de Sobradinho;
- f) Implementar todas as formulações em ambiente de programação livre e de código aberto.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Métodos Tradicionais de Dimensionamento

O dimensionamento de reservatórios é um problema antigo no gerenciamento de recursos hídricos. A ideia central de realizar a construção do reservatório é prover água para atender a demanda em épocas em que a afluência natural não é suficiente. A água é acumulada em períodos de afluência maior do que a demanda para ser utilizada posteriormente. O dimensionamento ótimo que leve em consideração as incertezas das demandas e das afluências é algo que vem sendo trabalhado ao longo dos anos (FLETCHER; PONNAMBALAM, 1996; FLETCHER; PONNAMBALAM, 2008; CELESTE, 2015).

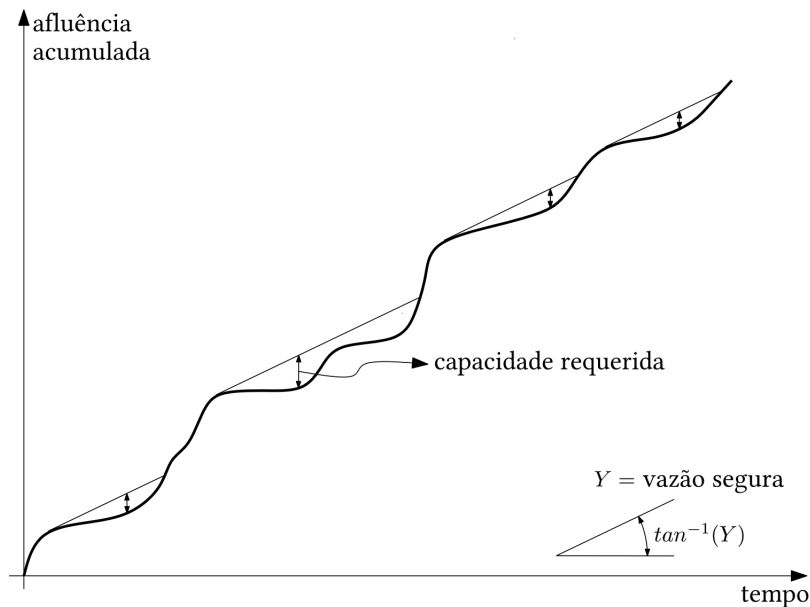
Os métodos tradicionais de dimensionamento de reservatórios se baseiam na curva de massa e na simulação. Tipicamente, tais métodos utilizam-se de séries históricas para o cálculo do volume ideal que permita uma alocação igual à demanda, isto é, uma regularização firme em todos os intervalos de tempo. No entanto, essa garantia só é válida em situação determinística, i.e., quando as características estatísticas da série de entradas forem completamente mantidas no futuro, algo não absolutamente realista no sentido prático. Para regularização firme, os métodos de simulação e os baseados na curva de massa atingem o mesmo resultado. O método de simulação através do balanço hídrico é mais flexível no sentido de ser possível encontrar a capacidade de reservatórios menores ao inserir nos cálculos a possibilidade de falhas no atendimento à demanda (SILVA, 2010).

Apesar de operar com a regularização firme da demanda e de não ser possível a existência de falhas na operação, os métodos baseados na curva de massa são amplamente utilizados a exemplo do método pioneiro de Rippl (1883), antes do qual o dimensionamento era governado pelo critério do reservatório ser capaz de suportar as demandas do ano mais seco dos registros históricos. Rippl percebeu que em uma sequência de dois anos secos, o reservatório poderia não suportar e não encher, logo produzindo um efeito cumulativo negativo, portanto a vazão de entrada do reservatório deve ser considerada como uma série temporal, em vez de uma coleção de dados anuais separados (KLEMEŠ, 1987).

O objetivo dos métodos baseados na curva de massa é encontrar a capacidade mínima de armazenamento necessária para garantir o suprimento total de uma determinada demanda a partir de registros (normalmente, históricos) de afluências. Esses métodos assumem frequentemente que o reservatório se encontra cheio no início do tempo e partem da premissa de que a série temporal de afluências utilizada é representativa (SILVA, 2010).

Para encontrar o valor da capacidade através da curva de massa é necessário acumular também a demanda. Ao definir que ela seja constante em relação ao tempo, a acumulação será representada por uma reta. McMahon e Mein (1978) definiram período crítico como o

Figura 1 – Curva de massa e definição do armazenamento requerido.



Fonte: Elaborado durante a pesquisa.

período em que o reservatório vai de cheio a vazio sem extravasar. Esses períodos são definidos como o pico mais próximo e o local onde a paralela da reta de acumulação da demanda toca a curva de massa. Essa paralela inicia nos pontos de tangência positiva da curva de massa. A distância vertical entre as paralelas e a curva de massa representa o volume retirado do armazenamento em um dado intervalo de tempo. O máximo desses valores representa o volume de armazenamento requerido para o reservatório. O procedimento está ilustrado na Figura 1.

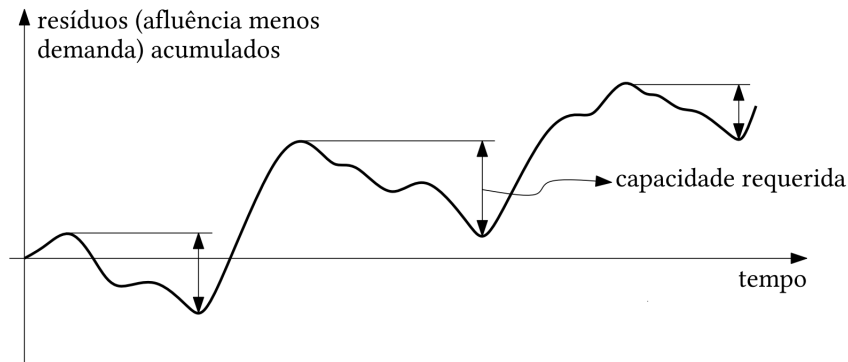
A curva de massa residual representa o diagrama de flutuações de armazenamento em um reservatório irrestrito sujeito a entradas (afluências) e saídas (demandas) (KLEMEŠ, 1979). Nada mais é do que a plotagem do gráfico dos resíduos acumulados. O resíduo é definido como sendo a diferença entre afluência e demanda em cada período de tempo. Uma maneira alternativa ao método de Rippl é encontrar a partir da curva de massa residual a distância entre o pico e o vale durante o período de deplecionamento crítico. Esta abordagem é conhecida como análise dos picos sequenciais.

Medindo-se a distância entre o pico e o vale antes do pico em sequência (maior do que o primeiro pico) encontra-se a disponibilidade hídrica necessária nesse intervalo de tempo (período crítico). O volume requerido para o reservatório será o maior valor encontrado. Uma forma alternativa de cálculo seria acumular na curva de massa apenas os resíduos quando eles forem negativos. Na Figura 2 é exemplificado o método dos picos sequenciais.

Assim como o procedimento de Rippl, o método dos picos sequenciais alternativo também pode ser obtido graficamente. Porém, a implementação pode ser facilmente feita sem a necessidade de visualização da curva de massa. Basta a utilização da equação do balanço hídrico:

$$S_t = S_{t-1} + I_t - R_t - Sp_t \quad (2.1)$$

Figura 2 – Método dos picos sequenciais e definição de armazenamento requerido.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

onde S_t é o armazenamento no reservatório no final do mês t , I_t é a afluência durante o mês, R_t é a regularização fornecida pelo reservatório durante o mês, e Sp_t é o vertimento mensal. Nessa metodologia, assim como no método de Rippl, a regularização é geralmente um valor constante igual a demanda hídrica, conhecida como regularização firme, embora possa assumir valores não constantes, conforme a equação (2.1). O vertimento só ocorre quando o armazenamento inicial adicionado a afluência mensal e subtraído da demanda for maior do que a capacidade útil K_a (*active storage capacity*). O deplecionamento do armazenamento em relação à capacidade é definido por $Z_t = S_t - K_a$. Com as substituições tem-se:

$$Z_t = Z_{t-1} + I_t - R_t - Sp_t \quad (2.2)$$

Caso ocorra vertimento o deplecionamento será nulo, e vice-versa. Quando $S_t = K_a$ ambos os valores são nulos. Sendo assim, o deplecionamento também pode ser estimado por:

$$Z_t = \min(0, Z_{t-1} + I_t - R_t) \quad (2.3)$$

e a capacidade pode, enfim, ser calculada como:

$$K_a = -\min\{Z_t\}; t = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

em que N é o comprimento da série de afluências. Como o armazenamento útil em cada mês deve ser menor do que a capacidade, pode ser encontrado por:

$$S_t = \min(S_{t-1} + I_t - R_t, K_a) \quad (2.5)$$

Essa implementação é conhecida como algoritmo dos picos sequenciais alternativo.

2.2 Métodos de Simulação e Otimização

2.2.1 Análise Comportamental

A simulação é um processo iterativo de tentativa e erro em que é escolhida uma capacidade inicial e é feito o balanço hídrico a partir dessa capacidade e definida a capacidade requerida a

dependem de índices de desempenho avaliados. A simulação através do balanço hídrico é também conhecida como análise comportamental, ou *behavior analysis* (MCMAHON; ADELOYE, 2005). Traz mais flexibilidade do que o método de Rippl ao admitir regularização diferente da demanda solicitada, ou seja, admitir a ocorrência de falhas na operação do sistema. A probabilidade de não haver falhas pode ser estimada pelo índice de confiabilidade CONFT (*time-based reliability*) conforme abaixo:

$$\text{CONFT} = 1 - F = 1 - \frac{f}{N} \quad (2.6)$$

em que F é a frequência de falhas, isto é, o número de períodos de falhas f dividido pelo horizonte de planejamento N .

A simulação da operação do reservatório é realizada perante a série temporal de afluências seguindo o balanço hídrico, aplicando-se, quando possível, a regularização igual a demanda. Caso a demanda total não possa ser suprida em dado intervalo de tempo, há falha de atendimento e, neste caso, a regularização é menor do que a demanda.

Na hipótese de o reservatório não secar em nenhum dos meses do horizonte de planejamento, deve-se diminuir o valor da capacidade e repetir o procedimento. Caso ele esvazie várias vezes, deve-se aumentar o valor da capacidade e repetir o procedimento.

Segundo Tucci (2007) outra característica de flexibilidade da simulação é que, apesar de ser um processo mais trabalhoso, por ser iterativo, permite uma demanda variável sazonal ou anual como, por exemplo, mudanças de estações climáticas.

Os modelos de simulação são guiados pela equação do balanço de massa e representam o comportamento hidrológico do sistema usando as entradas hídricas e outras condições operacionais (RANI; MOREIRA, 2010). Entre os modelos de simulação, evidencia-se a política de operação padrão (SOP: *standard operation policy*), confiável no atendimento da demanda (i.e., alta probabilidade de operação sem falhas), mas muito sujeita a maior ocorrência de grande magnitude de déficits (ou seja, alta vulnerabilidade quando uma falha ocorre). A SOP opera seguindo duas condições: quando a disponibilidade é menor do que a demanda, libera-se toda a disponibilidade; e quando a disponibilidade é igual ou maior que a demanda, libera-se a demanda e armazena-se o restante, até que ocorra o vertimento (SANTANA, 2019).

2.2.2 Técnicas de Otimização

Uma vez que a tarefa principal do dimensionamento de um reservatório é encontrar a capacidade mínima requerida para atender certa regularização, a otimização matemática pode ser uma ferramenta atraente para alcançar esse objetivo. Segundo Nagy, Asante-Duah e Zsuffa (2002), a maioria dos problemas de otimização requer maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições, incluindo as de domínio. Em modelos de otimização envolvendo reservatórios, a função objetivo representa uma forma de medir a qualidade da solução obtida de acordo com as restrições, estas sendo responsáveis por definir como o sistema

será operado, e.g., quando e quanto de água será liberada ou o quanto dela será armazenada (SIMONOVIC, 1992).

Não há um método único capaz de resolver todos os tipos de problemas de otimização de forma eficiente. Consequentemente, técnicas foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas para resolver diferentes formulações (RAO, 2019). Há diferentes metodologias, algumas das mais utilizadas sendo a programação linear (LP: *linear programming*), não linear (NLP: *nonlinear programming*) e dinâmica (DP: *dynamic programming*) (NAGY; ASANTE-DUAH; ZSUFFA, 2002).

Os modelos de otimização diferem-se dos de simulação na determinação da melhor solução, que é feita por um procedimento matemático (BRAVO; COLLISCHONN; PILAR, 2005). As incertezas do processo hidrológico são importantes e podem causar desconfortos na modelagem da operação de reservatórios, quando valores esperados de afluências podem não representar adequadamente condições hidrológicas altamente variáveis ou quando não há segurança em prever os influxos por um período relativamente longo. Dessa forma, as técnicas de otimização estocástica entram em evidência, e são classificadas como ferramentas de operação de sistemas de reservatórios perante incertezas, divididas em otimização estocástica explícita (OEE), uma abordagem que incorpora métodos probabilísticos de afluência diretamente no problema de otimização, e otimização estocástica implícita (OEI), que utiliza otimização determinística para operar o reservatório em vários cenários de afluências igualmente prováveis e, em seguida, constrói curvas-guia com base no conjunto resultante de dados operacionais ótimos (CELESTE; BILLIB, 2009).

Uma técnica de otimização bastante utilizada em recursos hídricos é a programação dinâmica, aplicada na solução de problemas que envolve processos de decisão sequencial em vários estágios, sendo que enfrenta um impasse, denominado de “maldição da dimensionalidade”, que surge quando a discretização das variáveis de estado é muito elevada, dificultado bastante a busca pelo ótimo, devido ao grande número de possibilidades que devem ser analisadas em cada estágio (PEIXOTO, 2006). A DP pode ser aplicada de forma determinística (DDP: *deterministic dynamic programming*) ou estocástica (SDP: *stochastic dynamic programming*). A programação dinâmica estocástica é mais utilizada na prática da operação de sistemas de reservatórios.

Modelos que utilizam somente séries históricas podem ser deficientes nos procedimentos de dimensionamento e/ou operação, por admitirem somente aquela possibilidade de vazão ao reservatório. Fundamentalmente, os métodos convencionais de dimensionamento se utilizam apenas de uma série temporal de afluências (tipicamente, os registros históricos), ou seja, são modelos determinísticos que em sua forma original não incorporam incertezas. Uma forma de incorporá-las é através da geração de séries sintéticas de afluências que preservem as características estatísticas da série histórica original, por exemplo, média, desvio padrão, assimetria, autocorrelação, curtose, entre outras. Conforme Celeste, Feitosa e Correia (2012), os modelos de geração destas séries se dividem basicamente em: simulação direta, como o procedimento de Thomas-Fiering (THOMAS; FIERING, 1962), onde a geração das vazões ocorre

simultaneamente para diferentes intervalos de tempo; e desagregação, como no método dos fragmentos (SVANIDZE, 1980), no qual as vazões são geradas para intervalos de tempo maiores e depois são desfragmentadas em intervalos de tempo menores (CELESTE; FEITOSA; CORREIA, 2012). Nesse contexto, a série histórica é considerada como evento de um processo estocástico e, dessa forma, vários outros cenários podem ser gerados a partir desta através de modelos estocásticos. Uma vez geradas as séries sintéticas, seria calculada a capacidade de armazenamento para cada uma delas e o valor final seria encontrado a partir da análise da distribuição empírica de probabilidades da capacidade.

2.2.3 Modelos ARCO, ARCOSO e ARCOSOP

Lima, Celeste e Cai (2022) propuseram um novo modelo de otimização linear inteira mista para dimensionamentos de reservatórios (modelo ARCOSOP) que incorpora indicadores de confiabilidade e vulnerabilidade, além de considerar as incertezas hidrológicas. Para tal, procurou-se aprimorar o modelo de dimensionamento de reservatório ARCO de Celeste (2015) incorporando a política de operação padrão (SOP) e introduzir a estocasticidade hidrológica, não testada previamente no modelo ARCO nem em sua variação ARCOSO (CELESTE et al., 2020), que utiliza um processo combinado de simulação-otimização. Além disso, foi realizada a comparação do modelo ARCOSOP com métodos tradicionais de dimensionamento de reservatórios e verificada a influência da abordagem estocástica em comparação com a determinística.

Os autores tinham o objetivo de minimizar a capacidade útil de armazenamento K_a para atender uma determinada demanda perante um cenário de afluências sujeito a valores de confiabilidade mínima $R_T^{\min}$ e de vulnerabilidade máxima α_{max} previamente definidos. Além de $R_T^{\min}$ e α_{max} , os únicos dados a serem inseridos no modelo são a série temporal de vazões I_t ($t = 1, \dots, N$) e a demanda D_t para cada tempo t (na abordagem clássica de Rippl esse valor é constante). $R_T^{\min}$ implica na estimativa do número máximo permitido de falhas. A estocasticidade é incorporada no modelo através do procedimento de Monte Carlo. São aplicados dois estágios nessa fase, a “calibração” e a “validação”.

A calibração inicia com a geração de cenários de afluências (cenário de calibração), baseados na série histórica através de um modelo de geração de vazões sintéticas. Em seguida é calculado pelo ARCOSOP a capacidade ótima para cada cenário de vazões. Determina-se, então, a função de frequência relativa da capacidade e a partir dela encontra-se a capacidade requerida do reservatório. Para tal, é assumido um risco igual a probabilidade de subdimensionar a capacidade. Isso significa encontrar a capacidade assumindo um risco de não atender a demanda.

Na etapa de validação, também são gerados cenários de afluência, diferentes dos cenários de calibração. É realizada a operação do reservatório levando-se em consideração a capacidade encontrada na etapa anterior e são calculadas a confiabilidade e vulnerabilidade em cada operação. Posteriormente, são construídas as funções de frequência da confiabilidade e da vulnerabilidade e, a seguir, encontram-se os valores obedecendo o risco predefinido na etapa de calibração. Assim como o risco, foram preestabelecidas uma confiabilidade e uma

vulnerabilidade na etapa de calibração. É estimado, então, o risco real de violar os valores predefinidos. Caso esse risco seja menor ou igual ao risco inicialmente assumido, é validada a capacidade. Na prática, apenas o estágio da calibração seria necessário para definir a capacidade final do reservatório.

2.3 Análise Capacidade-Regularização-Confabilidade

O estudo do dimensionamento e da regularização da vazão em rios intermitentes é algo muito importante e trabalhado por muitos estudiosos ao longo do tempo. De acordo com Campos (2005), as vazões anuais de rios intermitentes da região Nordeste são, em geral, serialmente independentes. Portanto, essas séries podem ser diretamente geradas a partir de um modelo probabilístico. Além disso, outro fator relevante em rios intermitentes da região Nordeste é a elevada evaporação, que para alguns estudiosos inviabilizariam a construção de reservatórios superficiais.

Os métodos tradicionais para dimensionamento e regularização da vazão em rios intermitentes da região Nordeste, como o método de Rippl (1883) e seus sucessores, não podem ser aplicados do modo original como se fossem rios perenes. Isso porque seria necessário realizar adaptações e correções para levar em consideração a elevada evaporação e a condição de rios intermitentes no semiárido nordestino (CAMPOS, 2005).

Segundo Campos (2005), pesquisadores brasileiros estudaram a condição de rios intermitentes no semiárido nordestino. O autor menciona que o engenheiro Francisco Aguiar foi pioneiro nesse estudo e desenvolveu um método para estimar os deflúvios em rios intermitentes. Esse método utiliza dados de chuvas e vazões escoadas em uma dada bacia hidrográfica para calcular o deflúvio anual. A fórmula polinomial empírica proposta por ele permite o cálculo da lâmina escoada média conhecidas a precipitação média e as características geomorfológicas da bacia (CAMPOS, 2005).

Com o passar dos anos, o desenvolvimento tecnológico trouxe mudanças no modo que são dimensionados os reservatórios. Essas descobertas fizeram com que métodos analíticos se desenvolvessem. Embora seja comprovada a eficácia e utilidade do método de Rippl original para rios perenes, o avanço desse método a partir do trabalho da teoria de range de Hurst (1951) promoveu a conceituação do déficit e a aplicação analítica desse método (CAMPOS, 2005).

Ainda de acordo com Campos (2005), a teoria estocástica de reservatórios foi proposta por Moran (1954) para rios intermitentes e modificou a utilização determinística dos dados, como por exemplo em um dimensionamento por simulação a partir unicamente da série histórica de vazão e regularização. A teoria assume que o armazenamento no reservatório segue uma cadeia Markoviana, fornecendo, com isso, a possibilidade de calcular as probabilidades de esvaziamento dos reservatórios. Outra técnica que evoluiu com os computadores foram os métodos experimentais de dimensionamento que consideram que os deflúvios seguem uma certa lei de probabilidade, como por exemplo a distribuição normal, e a partir delas são geradas

séries sintéticas de vazão e é realizada a operação simulada do reservatório. A partir da análise dos resultados é determinada a capacidade do reservatório que atende a certos critérios. Esse procedimento ficou conhecido como simulação de Monte Carlo.

Campos (2005) desenvolveu o método do diagrama triangular de regularização baseado na teoria do armazenamento que incorpora incertezas na entrada dos dados ao considerar a geração de séries sintéticas de aflúências com características estatísticas parecidas com as da série original. Para a construção dos diagramas triangulares foi utilizado o método de Monte Carlo obedecendo regras pré-estabelecidas. O autor empregou a função gama de dois parâmetros para representar a distribuição de probabilidade de vazões. Conforme Campos (2005), os rios intermitentes da região semiárida brasileira apresentam vazão aparente apenas na estação chuvosa, que dura de 3 a 6 meses por ano. Isso é relevante para o estudo hidrológico dessas bacias e para o cálculo da equação do balanço hídrico. A solução foi que na estação úmida apenas poderiam ocorrer perdas por extravasamento ou sangrias, pois por hipótese não haveria retiradas ou perdas por evaporação. Já na estação seca, poderiam ocorrer perdas por evaporação e por retirada e consequentemente haveria a possibilidade de parte da demanda anual não ser atendida. Para confecção dos diagramas triangulares foi considerado um balanço de massa de longo tempo utilizando os somatórios de volumes afluentes, regularizados, extravasados e evaporados.

A relação capacidade-regularização-confiabilidade (SYR: *storage-yield-reliability*) é uma técnica tradicional utilizada para determinar a capacidade de um reservatório necessária para atender a uma demanda perante uma confiabilidade especificada, para determinar a regularização que pode ser fornecida com certa confiabilidade a partir da capacidade conhecida do reservatório, ou para estimar a confiabilidade de atendimento de certa regularização feita por um reservatório de conhecida capacidade (KURIA; VOGEL, 2014; SILVA; PORTELA, 2013; ADELOYE, 2009; MCMAHON et al., 2007b; MCMAHON et al., 2007c; VOGEL; STEDINGER, 1987).

De acordo com Kuria e Vogel (2014), existem muitos estudos sobre a relação SYR, mas nenhum desses estudos anteriores havia, até então, assumido a regularização como variável dependente e poucos desses modelos anteriores incluíram a confiabilidade de específicas regularizações no resultado do modelo. Os autores apresentaram um modo em que a regularização fosse uma variável dependente. Para tal, foi empregada regressão linear múltipla para generalizar o relacionamento SYR usando conjuntos de dados globais mensais.

O trabalho de Silva (2010) aplicou análise comportamental para desenvolver a relação capacidade-regularização de reservatórios levando-se em consideração o balanço de massa. Foram realizadas algumas simplificações, ao desconsiderar as influências das precipitações e das perdas por evaporação. Foi feita a restrição de que o volume do reservatório estivesse em todo o tempo entre vazio e sua capacidade máxima. Isso fez com que o extravasamento não fosse levado em consideração em um primeiro momento. A ideia foi estimar o volume de armazenamento, ou seja, a capacidade do reservatório utilizando um algoritmo de simulação baseado no balanço de massa. Segundo o autor, esse método é usado para realizar uma análise

do comportamento do desempenho do reservatório, podendo permitir em certos tempos uma alocação maior que a afluência e aplicando uma série de critérios para verificar o desempenho do reservatório no atendimento da demanda. A estimativa da capacidade do reservatório pode ser feita iterativamente: primeiro é assumida uma capacidade inicial e com elas realizadas simulações com os dados da série histórica, calculando-se o índice de desempenho do reservatório; se a performance for insatisfatória ao predeterminado, então uma nova estimativa da capacidade é feita; iterações são realizadas até que as capacidades estimadas atinjam o nível de desempenho desejado. O critério de performance considerado no trabalho de Silva (2010) foi a confiabilidade. O autor considerou uma confiabilidade empírica desejada de 90%, ou seja, a iteração parava e determinava o volume do reservatório quando somente 10% dos meses possuísssem alguma falha na operação. A capacidade de armazenamento foi representada como uma porcentagem da média de afluência da série histórica. Esse procedimento foi realizado para 54 amostras de série histórica do respectivo rio e para 1200 séries sintéticas de vazão.

2.4 Método Fletcher-Ponnambalam

O método Fletcher-Ponnambalam (FP) é um método de otimização estocástica explícita que pode ser usado tanto para dimensionamento quanto para operação de reservatórios. O estudo de Fletcher e Ponnambalam (1996) proporcionou a utilização e incorporação de funções indicadoras na equação do balanço de massa para lidar com as restrições do armazenamento e encontrar momentos estatísticos bem como as probabilidades de variáveis de interesse.

Inicialmente, os autores realizaram a análise do primeiro e segundo momento do armazenamento. Para eles, a média e a variância são as estatísticas mais importantes para caracterizar a variável armazenamento na distribuição de probabilidades, entretanto, a teoria poderia ser expandida para momentos de outras ordens.

Ao longo dos anos, o método foi sendo adaptado para a operação de sistemas de armazenamento em geral e novas versões constataram que, para a resolução das integrais referentes às equações dos momentos estatísticos do armazenamento, das probabilidades de contenção, déficit e vertimento, seria necessária a suposição de uma distribuição de probabilidade para as afluências do reservatório. Fletcher e Ponnambalam (2008) passaram a considerar a alocação como variável aleatória dependente do armazenamento do período anterior.

A estocasticidade é aplicada na determinação do relacionamento entre capacidade-regularização-confiabilidade, no sentido de determinar a confiabilidade do sistema perante regularização e capacidade especificadas, ou, inversamente, determinar a capacidade para demanda fixada com um nível aceitável de confiabilidade. Nesse enfoque, Fletcher e Ponnambalam (1996) realizaram o dimensionamento do reservatório utilizando do primeiro e segundo momento do armazenamento, em função da distribuição de probabilidade da afluência, a partir de dados em escala anual e compararam os resultados com simulação. Nesse trabalho, eles encontraram os momentos de baixa ordem, média e variância, apenas para o armazenamento,

mas não o fizeram para outras variáveis de estado como déficit e vertimento.

A concordância entre a simulação e o modelo implementado pelos primeiros momentos do armazenamento foi, segundo os autores, muito boa e indicava a tendência de queda da confiabilidade ao aumentar a demanda e diminuir a capacidade do reservatório. Os autores ainda propuseram gráficos da relação capacidade-regularização-confiabilidade, onde era mantida constante a capacidade do reservatório e era variada a demanda e a respectiva confiabilidade. Esses gráficos objetivavam comparar o comportamento do modelo com as respectivas simulações.

Originalmente, o método FP necessita da suposição de uma distribuição de probabilidade para a entrada do reservatório, geralmente uma distribuição normal, com a finalidade de resolver várias integrais referentes às equações estatísticas dos momentos de armazenamento, bem como as probabilidades de contenção, déficit e vertimento. Com o objetivo de não ser necessário o conhecimento da distribuição de probabilidade e de não ser atrelado a uma distribuição normal para resolução das integrais, Celeste, Siqueira e Cai (2021) propuseram uma maneira alternativa de aproximar as soluções das integrais usando a amostra de registros históricos de vazão sem envolver a consideração de qualquer distribuição.

O método FP é um método de otimização estocástica explícita para dimensionamento e operação de reservatórios que não necessita de discretização das variáveis de estado, tal como na programação dinâmica estocástica, nem de geração de cenários de afluência, tal como na otimização estocástica implícita que se utiliza do procedimento de Monte Carlo. Mousavi et al. (2022) realizaram a atualização mais recente do método para aplicação em operação de reservatórios, onde foi proposta a remoção da necessidade de restrições não lineares e a redução do número de variáveis de decisão, diminuindo significativamente o tempo de resolução.

3 Material e Métodos

3.1 Balanço Hídrico Incorporando Excesso e Falta de Água

A utilização de reservatórios visa atender as demandas no período de secas, a partir da acumulação em momentos em que a demanda é inferior a afluência natural. A dinâmica do reservatório é definida pelo seu balanço hídrico, como segue:

$$S_t = S_{t-1} + I_t - D - Sp_t + \delta_t \quad (3.1)$$

onde S_t representa o armazenamento (útil) do reservatório no final do mês t ; I_t é o saldo de afluência natural (i.e., já descontando-se a evaporação) ao reservatório no mês t ; D é a demanda; e Sp_t e δ_t são, respectivamente, vertimento e déficit. Na formulação descrita neste capítulo, sem perda de generalidade, a demanda é assumida constante como no dimensionamento clássico de Rippl. Porém, o desenvolvimento do modelo poderia ser feito sem aumento da complexidade substituindo-se D por uma demanda variável D_t na Eq. (3.1).

Assume-se, nesse trabalho, que o armazenamento útil tem zero como seu limite inferior e, como limite superior, o valor da capacidade útil K . Seja $\hat{S}_t = S_{t-1} + I_t - D$ o volume de armazenamento projetado, i.e., o armazenamento no final do mês t se a demanda D for liberada e o armazenamento final permanecer contido dentro dos limites, i.e., $0 \leq \hat{S}_t \leq K$ (neste caso, $S_t = \hat{S}_t$). Quando o armazenamento projetado não for contido, haverá, porém não simultaneamente, vertimento (Sp_t) ou déficit (δ_t). Se $\hat{S}_t < 0$ então a demanda D não pode ser totalmente atendida e haverá um déficit de liberação δ_t . Alternativamente, caso a alocação I_t fizer com que o armazenamento projetado viole o limite superior, então o excesso de água deve ser vertido do reservatório e, nesse caso, a variável de vertimento assumirá o valor $Sp_t = \hat{S}_t - K$. A partir disso, são definidas as situações de contenção, déficit e vertimento, como seguem:

$$\begin{cases} 0 \leq \hat{S}_t \leq K \Rightarrow S_t = \hat{S}_t & \text{contenção} \\ \hat{S}_t < 0 \Rightarrow \delta_t = -\hat{S}_t \Rightarrow S_t = 0 & \text{déficit} \\ \hat{S}_t > K \Rightarrow Sp_t = \hat{S}_t - K \Rightarrow S_t = K & \text{vertimento} \end{cases} \quad (3.2)$$

No caso de déficit, é necessária uma liberação alternativa $R_t < D$, já que não é possível atender completamente a demanda requerida, para que o armazenamento final se torne pelo menos o limite inferior. Neste caso, o valor do déficit será $\delta_t = -\hat{S}_t$ e a liberação real será $R_t = D - \delta_t$. Nas equações de balanço hídrico abaixo são definidas a descarga total real (r_t) e a alocação real para atender as demandas (R_t):

$$\begin{aligned} S_t &= \underbrace{S_{t-1} + I_t}_{\text{disponibilidade}} - \underbrace{\left(\overset{\text{demanda}}{D} + \overset{\text{excesso}}{Sp_t} - \overset{\text{déficit}}{\delta_t} \right)}_{\text{descarga total real, } r_t} \\ &= S_{t-1} + I_t - r_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
S_t &= S_{t-1} + I_t - \underbrace{[(D - \delta_t) + Sp_t]}_{\substack{\text{alocação} \\ \text{real, } R_t}} \\
&= S_{t-1} + I_t - R_t - Sp_t
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sendo assim, a descarga total real é $r_t = R_t + Sp_t = (D - \delta_t) + Sp_t$. Logo, para os três casos possíveis, seus valores podem ser:

$$r_t = \begin{cases} (D - 0) + 0 = D & \text{se contenção} \\ (D - \delta_t) + 0 = D - \delta_t = R_t & \text{se déficit} \\ (D - 0) + Sp_t = D + Sp_t & \text{se vertimento} \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2 Método Fletcher-Ponnambalam para Dimensionamento de Reservatórios

No método FP é possível incorporar a dinâmica de um sistema de reservatórios levando-se em conta as situações de contenção, déficit e vertimento, como seguem:

$$\begin{aligned}
S_t &= \hat{S}_t \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t) + K \cdot \mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t) \\
&= (S_{t-1} + I_t - D) \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t) + K \cdot \mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta_t &= -\hat{S}_t \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(\hat{S}_t) \\
&= -(S_{t-1} + I_t - D) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(\hat{S}_t)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
Sp_t &= (\hat{S}_t - K) \cdot \mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t) \\
&= (S_{t-1} + I_t - D - K) \cdot \mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

em que a notação $\mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t)$ representa a função indicadora com as seguintes propriedades:

$$\mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \hat{S}_t \leq K \text{ (contenção)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } \hat{S}_t < 0 \text{ (déficit)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } \hat{S}_t > K \text{ (vertimento)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.11}$$

3.3 Probabilidades de Contenção, Déficit e Vertimento

3.3.1 Probabilidade de Contenção

O valor esperado da função indicadora, também conhecida como função característica, de uma variável aleatória em qualquer região é a probabilidade dessa variável ocorrer dentro dessa mesma região. Esse procedimento é responsável por encontrar a probabilidade do armazenamento projetado ficar contido nos limites de vazio até cheio, ou probabilidade de contenção $\mathbb{P}_\tau^{\text{con}}$, como segue:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[0,K]} \left(\hat{S}_\tau \right) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\ &= \Pr \left(0 \leq \hat{S}_\tau \leq K \right) \\ &= \Pr \left(0 \leq S_{\tau-1} + I_\tau - D \leq K \right) \\ &\approx \Pr \left(0 \leq \mathbb{E} (S_{\tau-1}) + I_\tau - D \leq K \right) \\ &\approx \Pr \left(D - \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \leq I_\tau \leq K + D - \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \right) \\ &\approx \Pr \left(\text{LB}_\tau \leq I_\tau \leq \text{UB}_\tau \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\approx \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.13)$$

sendo

$$\begin{cases} \text{LB}_\tau = D - \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \\ \text{UB}_\tau = K + D - \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \end{cases} \quad (3.14)$$

em que $\Pr()$ denota probabilidade; LB_τ é o limite inferior de integração e UB_τ é o limite superior; e $f_{I_\tau}(I_\tau)$ é a função densidade de probabilidade (PDF: *probability density function*) das afluências I_τ no período τ , em que $\tau = 1$ (janeiro), 2 (fevereiro), ..., 12 (dezembro). Portanto:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \approx \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.15)$$

O valor de armazenamento projetado, em tese, teria três variáveis aleatórias, porém considera-se a demanda como constante em relação ao tempo e é feita uma aproximação para o armazenamento anterior por meio de seu valor esperado $\mathbb{E} (S_{\tau-1})$. Por conta disso, o sinal de igualdade se torna aproximação na Eq. (3.12). Essa aproximação faz com que o operador probabilidade fique apenas em função da variável aleatória I_τ , o que torna possível sua estimativa através da integral do PDF de I_τ , conforme a Eq. (3.15).

3.3.2 Probabilidade de Déficit

A probabilidade de déficit é calculada pelo valor esperado da função indicadora do armazenamento projetado no domínio $\hat{S}_\tau < 0$. São realizadas as mesmas simplificações feitas para a probabilidade de contenção, como segue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, 0]} \left(\hat{S}_t \right) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\
&= \Pr \left(\hat{S}_\tau < 0 \right) \\
&= \Pr \left(S_{\tau-1} + I_\tau - D < 0 \right) \\
&\approx \Pr \left(\mathbb{E} \left(S_{\tau-1} \right) + I_\tau - D < 0 \right) \\
&\approx \Pr \left(I_\tau < D - \mathbb{E} \left(S_{\tau-1} \right) \right) \\
&\approx \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \approx \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.17}$$

3.3.3 Probabilidade de Vertimento

A probabilidade de vertimento é calculada pelo valor esperado da função indicadora do armazenamento projetado domínio $\hat{S}_\tau > K$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(K, +\infty)} \left(\hat{S}_t \right) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \\
&= \Pr \left(\hat{S}_\tau > K \right) \\
&= \Pr \left(S_{\tau-1} + I_\tau - D > K \right) \\
&\approx \Pr \left(\mathbb{E} \left(S_{\tau-1} \right) + I_\tau - D > K \right) \\
&\approx \Pr \left(I_\tau > K + D - \mathbb{E} \left(S_{\tau-1} \right) \right) \\
&\approx \int_{\text{UB}_\tau}^{+\infty} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \approx \int_{\text{UB}_\tau}^{+\infty} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.19}$$

3.4 Momentos do Armazenamento

3.4.1 Primeiro Momento do Armazenamento

No cálculo do primeiro momento bruto do armazenamento, aplica-se o operador esperança à ambos os lados da Eq. (3.6) definida pelo método FP, como segue:

$$S_t = (S_{t-1} + I_t - D) \cdot \mathbb{1}_{[0, K]} \left(\hat{S}_t \right) + K \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)} \left(\hat{S}_t \right) \tag{3.6 repetida}$$

$$\mathbb{E} \left(S_t \right) = \mathbb{E} \left((S_{t-1} + I_t - D) \cdot \mathbb{1}_{[0, K]} \left(\hat{S}_t \right) \right) + K \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(K, +\infty)} \left(\hat{S}_t \right) \right) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &= \mathbb{E}\left((S_{\tau-1} - D) \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right) \\
&\quad + K \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_\tau)\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

nesse ponto, será considerada a simplificação para a dependência de apenas uma variável (I_τ), assumindo-se o armazenamento anterior igual ao seu valor esperado. Essa consideração será feita para o cálculo de todos os momentos estatísticos presentes neste trabalho.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right) \\
&\quad + K \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_\tau)\right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Substituindo-se $\mathbb{P}_\tau^{\text{con}}$ e $\mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}$, encontradas nas equações (3.15) e (3.19), respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\
&\quad + \mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right) \\
&\quad + K \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Pela *lei do estatístico inconsciente* (LOTUS: *law of the unconscious statistician*)(DEVORE et al., 2012)¹:

$$\mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right] f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.24}$$

Uma vez que² $\mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau) = \mathbb{1}_{[\text{LB}_\tau, \text{UB}_\tau]}(I_\tau)$, tem-se

$$\mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_\tau)\right) = \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.25}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\
&\quad + \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\
&\quad + K \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

¹ A lei do estatístico inconsciente indica que, se X é uma variável aleatória e $g(X)$ é uma função de X , então $\mathbb{E}(g(X)) = \int g(x) f_X(x) dx$, onde $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade de X .

² Sendo $\hat{S}_t = S_{t-1} + I_t - D$, então:

1. $\hat{S}_t = 0 \Rightarrow I_t = 0 + D - S_{t-1} \equiv \text{LB}_t$
2. $\hat{S}_t = K \Rightarrow I_t = K + D - S_{t-1} \equiv \text{UB}_t$

3.4.2 Segundo Momento do Armazenamento

Partindo-se da definição do método FP para armazenamento, Eq. (3.6), é feita a elevação de ambos os lados à segunda potência e é aplicado o operador valor esperado. É interessante notar que, apesar de também estar elevado ao quadrado, a função característica só poderá atingir o valor unitário se estiver dentro do intervalo, e zero caso esteja fora dos limites, como segue:

$$S_t = (S_{t-1} + I_t - D) \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t) + K \cdot \mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.6 \text{ repetida})$$

$$S_t^2 = (S_{t-1} + I_t - D)^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t) + K^2 \cdot \mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.27)$$

$$\mathbb{E}(S_t^2) = \mathbb{E}\left((S_{t-1} + I_t - D)^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t)\right) + K^2 \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(K,+\infty)}(\hat{S}_t)\right) \quad (3.28)$$

$$\mathbb{E}(S_t^2) = \mathbb{E}\left((S_{t-1} + I_t - D)^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t)\right) + K^2 \cdot \mathbb{P}_t^{\text{sp}} \quad (3.29)$$

$$\mathbb{E}(S_t^2) \approx \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(S_{t-1}) - D + I_t)^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t)\right) + K^2 \cdot \mathbb{P}_t^{\text{sp}} \quad (3.30)$$

realizando a fatoração do trinômio quadrado perfeito da expressão anterior, é possível encontrar dois termos em função da afluência, o que ocasionará duas integrais da função densidade de probabilidade em relação a afluência, como segue abaixo:

$$\mathbb{E}(S_t^2) \approx \mathbb{E}\left(\left\{[\mathbb{E}(S_{t-1}) - D]^2 + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot I_t + I_t^2\right\} \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t)\right) + K^2 \cdot \mathbb{P}_t^{\text{sp}} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t^2) &\approx [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t)\right) \\ &\quad + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot \mathbb{E}\left(I_t \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t)\right) \\ &\quad + \mathbb{E}\left(I_t^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,K]}(\hat{S}_t)\right) \\ &\quad + K^2 \cdot \mathbb{P}_t^{\text{sp}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t^2) &\approx [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{P}_t^{\text{con}} \\ &\quad + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot \int_{\text{LB}_t}^{\text{UB}_t} I_t f_t(I_t) dI_t \\ &\quad + \int_{\text{LB}_t}^{\text{UB}_t} I_t^2 f_t(I_t) dI_t \\ &\quad + K^2 \cdot \mathbb{P}_t^{\text{sp}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.5 Momentos do Déficit

3.5.1 Primeiro Momento do Déficit

De modo semelhante ao realizado para encontrar o primeiro e segundo momento do armazenamento, são determinados os momentos do déficit. Partindo-se da definição do método FP para o déficit, Eq. (3.7), aplica-se o operador valor esperado, como segue:

$$\delta_t = -(S_{t-1} + I_t - D) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(\hat{S}_t) \quad (3.7 \text{ repetida})$$

$$\mathbb{E}(\delta_\tau) = \mathbb{E}\left(- (S_{\tau-1} + I_\tau - D) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \quad (3.34)$$

A separação desse trinômio é realizada com o objetivo de isolar os termos constantes da variável fluência, como visto a seguir:

$$\mathbb{E}(\delta_\tau) = \mathbb{E}\left(- (S_{\tau-1} - D) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau) - I_\tau \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \quad (3.35)$$

$$\mathbb{E}(\delta_\tau) \approx - [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) - \mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \quad (3.36)$$

$$\mathbb{E}(\delta_\tau) \approx - [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} - \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.37)$$

3.5.2 Segundo Momento do Déficit

A partir da equação definida pelo método FP para o déficit, é feita a elevação para o segundo grau em ambos os lados da equação e aplicado o operador esperança, como segue:

$$\delta_t = - (S_{t-1} + I_t - D) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_t) \quad (3.7 \text{ repetida})$$

$$\delta_t^2 = (S_{t-1} + I_t - D)^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_t) \quad (3.38)$$

$$\mathbb{E}(\delta_\tau^2) = \mathbb{E}\left((S_{\tau-1} + I_\tau - D)^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \quad (3.39)$$

$$\mathbb{E}(\delta_\tau^2) \approx \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(S_{\tau-1}) + I_\tau - D]^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \quad (3.40)$$

É realizada a fatoração do trinômio quadrado perfeito com o objetivo de separar os termos, sendo então encontrados dois termos dependentes da variável fluência e, por isso, necessária a aplicação de duas integrais para a resolução, como segue:

$$\mathbb{E}(\delta_\tau^2) \approx \mathbb{E}\left(\{[\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D]^2 + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot I_\tau + I_\tau^2\} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_\tau^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \\ & + \mathbb{E}\left(I_\tau^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\hat{S}_\tau)\right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_\tau^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ & + \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.6 Momentos do Vertimento

3.6.1 Primeiro Momento do Vertimento

Da mesma maneira realizada para o armazenamento e déficit, são desenvolvidas as expressões dos momentos do vertimento. A partir da definição do método FP para o vertimento, Eq. (3.8), têm-se:

$$Sp_t = (S_{t-1} + I_t - D - K) \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.8 \text{ repetida})$$

$$\mathbb{E}(Sp_t) = \mathbb{E}\left((S_{t-1} + I_t - D - K) \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) \quad (3.44)$$

$$\mathbb{E}(Sp_t) \approx \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(S_{t-1}) + I_t - D - K) \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) \quad (3.45)$$

$$\mathbb{E}(Sp_t) \approx [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K] \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) + \mathbb{E}\left(I_t \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) \quad (3.46)$$

A expressão $\mathbb{E}\left(I_t \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right)$ é igual a $\int_{UB_t}^{+\infty} I_t f_{I_t}(I_t) dI_t$ por conta da lei do estatístico inconsciente. Então:

$$\mathbb{E}(Sp_t) \approx [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K] \cdot \mathbb{P}_t^{\text{SP}} + \int_{UB_t}^{+\infty} I_t f_{I_t}(I_t) dI_t \quad (3.47)$$

3.6.2 Segundo Momento do Vertimento

Para encontrar o segundo momento do vertimento, parte-se da definição do método FP para o vertimento, Eq. (3.8), eleva-se os dois lados da equação e aplica-se o operador valor esperado:

$$Sp_t = (S_{t-1} + I_t - D - K) \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.8 \text{ repetida})$$

$$Sp_t^2 = (S_{t-1} + I_t - D - K)^2 \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.48)$$

$$\mathbb{E}(Sp_t^2) = \mathbb{E}\left((S_{t-1} + I_t - D - K)^2 \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) \quad (3.49)$$

Além da simplificação para a dependência de apenas uma variável, nesse ponto serão separados os termos do trinômio quadrado perfeito:

$$\mathbb{E}(Sp_t^2) \approx [\mathbb{E}(S_{t-1}) + I_t - D - K]^2 \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.50)$$

$$\mathbb{E}(Sp_t^2) \approx \left\{ [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K]^2 + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K] \cdot I_t + I_t^2 \right\} \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Sp_t^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K]^2 \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K] \cdot \mathbb{E}\left(I_t \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) \\ & + \mathbb{E}\left(I_t^2 \cdot \mathbb{1}_{(K, +\infty)}(\hat{S}_t)\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Sp_t^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K]^2 \cdot \mathbb{P}_t^{\text{SP}} \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D - K] \cdot \int_{UB_t}^{+\infty} I_t f_{I_t}(I_t) dI_t \\ & + \int_{UB_t}^{+\infty} I_t^2 f_{I_t}(I_t) dI_t \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.7 Momentos da Alocação

A alocação real R_t foi definida na Eq. (3.4) como sendo a diferença entre a demanda (constante) e o déficit. Portanto, os momentos são calculados pela aplicação do operador valor esperado, como seguem:

- Primeiro Momento da Alocação:

$$R_t = D - \delta_t \quad (3.54)$$

$$\mathbb{E}(R_t) = \mathbb{E}(D - \delta_t) \quad (3.55)$$

$$\mathbb{E}(R_t) = D - \mathbb{E}(\delta_t) \quad (3.56)$$

- Segundo Momento da Alocação:

$$\begin{aligned} R_t^2 &= (D - \delta_t)^2 \\ &= D^2 - 2 \cdot D \cdot \delta_t + \delta_t^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\mathbb{E}(R_t^2) = \mathbb{E}(D^2 - 2 \cdot D \cdot \delta_t + \delta_t^2) \quad (3.58)$$

$$\mathbb{E}(R_t^2) = D^2 - 2 \cdot D \cdot \mathbb{E}(\delta_t) + \mathbb{E}(\delta_t^2) \quad (3.59)$$

3.8 Confiabilidade

A frequência de falhas em cada mês do calendário pode ser calculada por

$$F_\tau = \frac{f_\tau}{Y} \quad (3.60)$$

onde f_τ é o número de anos de falha no mês τ ($\tau = 1, \dots, 12$) e Y é o total de anos. A frequência de falhas total (ao longo de todos os $N = Y \cdot 12$ meses dos Y anos) é

$$F = \frac{f}{N} = \frac{\sum_{\tau=1}^{12} f_\tau}{Y \cdot 12} = \frac{\sum_{\tau=1}^{12} \left(\frac{f_\tau}{Y} \right)}{12} = \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} F_\tau = \bar{F}_\tau \quad (3.61)$$

Em termos populacionais, $F_\tau = \mathbb{P}_\tau^{\text{def}}$. Sendo a confiabilidade o complemento da frequência de falhas, a confiabilidade em cada mês é

$$\text{CONF}_\tau = 1 - F_\tau = 1 - \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \quad (3.62)$$

Uma vez que $F = \bar{F}_\tau$, conforme (3.61), a confiabilidade total $\text{CONFT} = 1 - F$ pode ser estimada por

$$\begin{aligned}
 \text{CONFT} &= 1 - F \\
 &= 1 - \bar{F}_\tau \\
 &= 1 - \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} F_\tau \\
 &= \frac{1}{12} \left(12 - \sum_{\tau=1}^{12} F_\tau \right) \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} (1 - F_\tau) \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} \text{CONF}_\tau
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Portanto,

$$\text{CONFT} = \overline{\text{CONF}_\tau} \tag{3.64}$$

3.9 Vulnerabilidade

A medida da vulnerabilidade (HASHIMOTO; STEDINGER; LOUCKS, 1982) no mês τ pode ser definida como o erro quadrático adimensionalizado entre alocação e demanda:

$$\begin{aligned}
 \text{vUL}_t &= \left(\frac{R_t - D}{D} \right)^2 \\
 &= \left[\frac{(D - \delta_t) - D}{D} \right]^2 = \frac{\delta_t^2}{D^2}
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

sendo que $0 \leq \text{vUL}_t \leq 1$. Logo, o valor esperado para a vulnerabilidade em qualquer mês τ se torna:

$$\mathbb{E}(\text{vUL}_\tau) = \frac{1}{D^2} \mathbb{E}(\delta_\tau^2) \tag{3.66}$$

Em termos amostrais, seja $\text{vUL}_{y,\tau}$ a vulnerabilidade no mês τ ($\tau = 1, \dots, 12$) do ano y ($y = 1, \dots, Y$). Sendo assim, a vulnerabilidade amostral média do mês τ , $\overline{\text{vUL}}_\tau$ (equivalente à $\mathbb{E}(\text{vUL}_\tau)$ populacional), pode ser calculada somando-se as vulnerabilidade de todos os meses τ para todos os anos Y e dividindo-se pelo número de anos:

$$\overline{\text{vUL}}_\tau = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y \text{vUL}_{y,\tau} \tag{3.67}$$

da qual

$$Y \cdot \overline{\text{vUL}}_\tau = \sum_{y=1}^Y \text{vUL}_{y,\tau} \tag{3.68}$$

Seja $vULT$ a vulnerabilidade média *geral*, i.e., a média de todas as vulnerabilidades vUL_t sobre todos os $N = 12 \cdot Y$ meses. Deste modo,

$$vULT = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N vUL_t = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^{12} \sum_{y=1}^Y vUL_{y,\tau} \quad (3.69)$$

A combinação das equações anteriores fornece

$$vULT = \frac{1}{12 \cdot Y} \sum_{\tau=1}^{12} (Y \cdot \overline{vUL}_{\tau}) = \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} \overline{vUL}_{\tau} \quad (3.70)$$

a qual indica que $vULT$ é a média de todos os 12 valores de $\overline{vUL}_{\tau}$. Dentro dessa estrutura, em termos populacionais, a vulnerabilidade geral pode ser calculada como a média de todos os 12 valores do primeiro momento da vulnerabilidade:

$$vULT = \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E}(vUL_{\tau}) \quad (3.71)$$

3.10 Resolução Analítica das Integrais Considerando Afluências Gaussianas

3.10.1 Funções de Probabilidade e Integrais de Variável Aleatória Gaussiana

Neste trabalho, para resolver o problema de otimização irrestrita altamente não linear da modelagem em questão, surgem integrais com certo grau de complexidade que precisam ser solucionadas a fim de encontrar as probabilidade e os momentos. Para resolver essas integrais analiticamente, é utilizada a função densidade de probabilidade (PDF) de uma variável aleatória X que segue uma distribuição gaussiana, sendo escrita como:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z_x^2) \quad (3.72)$$

onde $z_x = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$. A função de distribuição acumulada correspondente (CDF: *cumulative distribution function*) é:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(z_x)] \quad (3.73)$$

sendo a função erro $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$.

Desse modo, as soluções de todas as integrais que aparecem no cálculo dos momentos de armazenamento, déficit e vertimento podem ser encontradas de forma analítica, assim como as integrais presentes nas expressões para probabilidade. Supondo limite de integração inferior a e superior b e substituindo a variável aleatória X pela afluência I_{τ} , temos:

$$\int_a^b f_{I_{\tau}}(I_{\tau}) dI_{\tau} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}(z_b) - \operatorname{erf}(z_a) \right] \quad (3.74)$$

$$\int_a^b I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau = \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\operatorname{erf}(z_b) - \operatorname{erf}(z_a) \right] - \sqrt{\frac{\operatorname{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_b^2) - \exp(-z_a^2) \right] \quad (3.75)$$

$$\int_a^b I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau = \frac{1}{2} (\bar{I}_\tau^2 + \operatorname{Var}(I_\tau)) \left[\operatorname{erf}(z_b) - \operatorname{erf}(z_a) \right] - \sqrt{\frac{\operatorname{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[(\bar{I}_\tau + b) \exp(-z_b^2) - (\bar{I}_\tau + a) \exp(-z_a^2) \right] \quad (3.76)$$

Utilizando os limites LB_τ e UB_τ definidos nas seções anteriores, têm-se:

$$z_{\text{LB}_\tau} = \frac{\text{LB}_\tau - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\operatorname{Var}(I_\tau)}} \quad (3.77)$$

$$z_{\text{UB}_\tau} = \frac{\text{UB}_\tau - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\operatorname{Var}(I_\tau)}} \quad (3.78)$$

As probabilidades de contenção, déficit e vertimento são encontradas como segue, respectivamente:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \approx \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.15 \text{ repetida})$$

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \approx \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \operatorname{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \quad (3.79)$$

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \approx \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.17 \text{ repetida})$$

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \approx \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \quad (3.80)$$

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \approx \int_{\text{UB}_\tau}^{+\infty} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.19 \text{ repetida})$$

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \approx \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \quad (3.81)$$

3.10.2 Momentos

Fazendo-se as substituições das integrais e as devidas operações é possível encontrar os primeiros e segundos momentos para o armazenamento, déficit e vertimento, como seguem:

- Primeiro Momento do Armazenamento:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\ &\quad + \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad + K \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \end{aligned} \quad (3.26 \text{ repetida})$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) - \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right]
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$+ K \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \tag{3.83}$$

- Segundo Momento do Armazenamento:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau^2) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\
&\quad + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\
&\quad + \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\
&\quad + K^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.33 repetida}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau^2) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\
&\quad + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \left\{ \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) - \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[\text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[(\bar{I}_\tau + \text{UB}_\tau) \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \right. \\
&\quad \left. - (\bar{I}_\tau + \text{LB}_\tau) \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right] \\
&\quad + K^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

- Primeiro Momento do Déficit:

$$\mathbb{E}(\delta_\tau) \approx -[\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} - \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.37 repetida}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\delta_t) &\approx -[\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) - \text{erf}(z_{-\infty}) \right] \\
&\quad + \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) - \exp(-z_{-\infty}^2) \right]
\end{aligned} \tag{3.85}$$

com as devidas operações, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\delta_t) \approx & -[\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\ & - \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[1 + \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\ & + \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right]\end{aligned}\quad (3.86)$$

- Segundo Momento do Déficit:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\delta_\tau^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ & + \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau\end{aligned}\quad (3.43 \text{ repetida})$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\delta_\tau^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot \left\{ \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) - \text{erf}(z_{-\infty}) \right] \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) - \exp(-z_{-\infty}^2) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2} (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[\text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) - \text{erf}(z_{-\infty}) \right] \\ & - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[(\bar{I}_\tau + \text{LB}_\tau) \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right. \\ & \left. - \lim_{a \rightarrow -\infty} [(\bar{I}_\tau + a) \exp(-z_a^2)] \right]\end{aligned}\quad (3.87)$$

Uma vez que³ o último termo $\lim_{a \rightarrow -\infty} [(\bar{I}_\tau + a) \exp(-z_a^2)] = 0$, substituindo e realizando as operações cabíveis, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\delta_\tau^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{t-1}) - D] \cdot \left\{ \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[1 + \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right\} \\ & + \frac{1}{2} (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[1 + \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\ & - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} (\bar{I}_\tau + \text{LB}_\tau) \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2)\end{aligned}\quad (3.88)$$

³ Pode-se demonstrar que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} t \cdot e^{-t^2} = 0$$

- Primeiro Momento do Vertimento:

$$\mathbb{E}(Sp_\tau) \approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} + \int_{\text{UB}_\tau}^{+\infty} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.47 \text{ repetida})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Sp_\tau) \approx & [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \\ & + \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{+\infty}) - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \\ & - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{+\infty}^2) - \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Sp_\tau) \approx & [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K] \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \\ & + \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[1 - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \\ & + \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \right] \end{aligned} \quad (3.90)$$

- Segundo Momento do Vertimento:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Sp_\tau^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K] \cdot \int_{\text{UB}_\tau}^{+\infty} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ & + \int_{-\text{UB}_\tau}^{+\infty} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \end{aligned} \quad (3.53 \text{ repetida})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Sp_\tau^2) \approx & [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \\ & + 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K] \cdot \left\{ \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{+\infty}) - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{+\infty}^2) - \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2} (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[\text{erf}(z_{+\infty}) - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \\ & - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} [(\bar{I}_\tau + b) \exp(-z_b^2)] \right. \\ & \left. - (\bar{I}_\tau + \text{UB}_\tau) \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \right] \end{aligned} \quad (3.91)$$

Uma vez que⁴ o penúltimo termo $\lim_{b \rightarrow +\infty} [(\bar{I}_\tau + b) \exp(-z_b^2)] = 0$, substituindo os termos e

⁴ Pode-se demonstrar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot e^{-t^2} = 0$$

realizando as operações devidas, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Sp_\tau^2) &\approx [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K]^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \\
 &+ 2 \cdot [\mathbb{E}(S_{\tau-1}) - D - K] \cdot \left\{ \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[1 - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] + \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[1 - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \\
 &+ \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} (\bar{I}_\tau + \text{UB}_\tau) \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2)
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

3.11 Refinamentos em Relação ao Modelo Original

Neste trabalho, é feita uma análise capacidade-regularização-confiabilidade motivada pela necessidade de estimar a confiabilidade de um reservatório de capacidade conhecida para atender à uma demanda especificada previamente, ou o problema inverso de encontrar a capacidade ideal do reservatório para uma demanda fixada e uma confiabilidade previamente aceita.

Nesse sentido, a modelagem tem como entrada a demanda e a capacidade do reservatório como fração da afluência média de longo período (MLP), e encontra a confiabilidade para o sistema, através do cálculo dos momentos estatísticos em função da distribuição de probabilidade da afluência.

Como refinamento, o presente trabalho desenvolveu o cálculo dos momentos discretizados mensalmente, diferentemente do procedimento original de Fletcher e Ponnambalam (1996) que realizava o cálculo dos momentos de armazenamento levando-se em consideração a escala anual apenas. Outra diferença é a inclusão dos momentos de déficit e vertimento, os quais não foram utilizados por Fletcher e Ponnambalam (1996), em que somente as probabilidades $\mathbb{P}^{\text{def}}$ e $\mathbb{P}^{\text{sp}}$ eram calculadas também em escala anual. Adicionalmente, além de implementar o cálculo da confiabilidade final de forma total (Eq. 3.64), como feito originalmente, esta pesquisa também o formulou de maneira mensal (Eq. 3.62), o que é inédito. Inovadora também é a incorporação da vulnerabilidade em escala mensal no modelo. Dessa forma, pode-se dizer que o modelo desenvolvido é um procedimento estocástico explícito da relação capacidade-regularização-confiabilidade-vulnerabilidade (SYRV) em reservatórios de barragens. Por conta disso, o modelo será doravante denominado de FP-SYRV.

A discretização em meses pressupõe que o mês anterior à janeiro (mês 1) é o mês de dezembro (mês 12) do ano anterior, obedecendo, desse modo, o princípio da sustentabilidade hídrica. Surge um problema ao calcular o primeiro momento do armazenamento, pois, é necessário o valor esperado do mês anterior. A solução encontrada nesse trabalho foi a realização de uma rotina separada de otimização que resolve o sistema não linear de equações (3.82) para $\tau = 1, \dots, 12$ considerando, para $\tau = 1$, $\mathbb{E}(S_{\tau-1}) = \mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(S_{12})$. A resolução numérica desse sistema fornece os primeiros momentos de armazenamento em todos os meses, que

são suficientes para encontrar todos os outros momentos e probabilidade, incluindo déficit e vertimento.

Outro refinamento realizado foi a codificação computacional de todo o modelo no software livre Octave (<www.octave.com>), diferentemente da implementação original no software comercial MATLAB.

4 Resultados e Discussão

4.1 Estudo de Caso

O modelo FP-SYRV foi testado utilizando os registros históricos de vazão natural ao reservatório de Sobradinho (34 km³), localizado na Bacia Hidrográfica do Rio São Francisco, que possui uma área de 636.099,73 km² e abrange 508 municípios com população estimada em 20.330.051 habitantes (CODEVASF, 2024). A bacia é dividida em alto, médio, submédio e baixo São Francisco.

O reservatório de Sobradinho é o maior lago artificial do mundo, possuindo aproximadamente 320 km de extensão linear, com uma superfície de espelho d'água de 4.214 km² e uma capacidade de 34,1 bilhões de metros cúbicos em sua cota nominal de 392,50 m (CHESF, 2024). Está localizado na região semiárida a cerca de 40 km de Petrolina e Juazeiro. A Tabela 1 ilustra os dados do reservatório extraídos do site da Companhia Hidro Elétrica do São Francisco (Chesf). A Figura 3 é o registro fotográfico do autor em visita realizada à barragem de Sobradinho em dezembro de 2023.

Os dados fluviométricos das vazões naturais da barragem estão disponibilizados no portal da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) (<www.ccee.org.br>). Neste trabalho foram utilizados os dados no período de janeiro de 1931 à dezembro de 2015. Os valores de demanda e de capacidade foram lidados de maneira adimensionalizada como fração da vazão média de longo período (MLP). Como nos modelos tradicionais de dimensionamento, considerou-se demanda (regularização) constante.

Uma investigação foi conduzida a respeito da normalidade das vazões para cada mês do ano. A Figura 4 mostra gráficos relativos ao teste de normalidade de Jarque-Bera (JARQUE; BERA, 1980) aplicados aos registros históricos. Apenas nos meses de outubro, dezembro, janeiro e fevereiro a normalidade não é rejeitada, i.e., somente nesses meses as afluições ao reservatório de Sobradinho podem ser corretamente representadas por uma distribuição gaussiana.

Tabela 1 – Dados do reservatório de Sobradinho.

Atributo	Valor
Área de reservatório na cota 392,50 m	4.214 km ²
Volume total do reservatório	34.116 hm ³
Volume útil do reservatório	28.669 hm ³
Vazão regularizada	2.060 m ³ /s
Nível máximo <i>maximorum</i>	393,50 m
Nível máximo operativo normal	392,50 m
Nível mínimo operativo normal	380,50 m

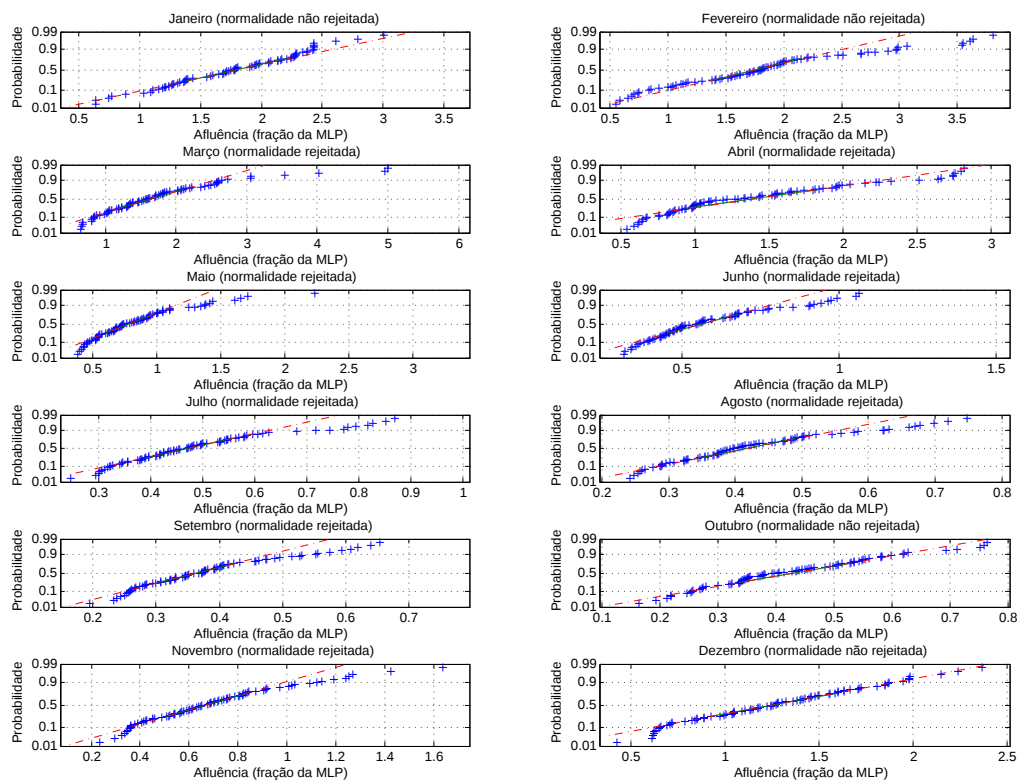
Fonte: CHESF (2024).

Figura 3 – Visita do autor à barragem de Sobradinho.



Fonte: Registro fotográfico a pedido do autor.

Figura 4 – Gráficos de probabilidade normal e resultados do teste de normalidade para cada mês nos registros de aflúências à Sobradinho.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4.2 Aplicação

Para execução do modelo FP-SYRV, o usuário precisa informar os valores (adimensionalizados) de demanda requerida e de capacidade a ser considerada a fim de que o modelo retorne a confiabilidade sob a qual a capacidade poderá atender a demanda, além de todos os momentos e probabilidades de armazenamento, déficit e vertimento, bem como as confiabilidades e vulnerabilidades mensais, conforme mostrados no capítulo anterior.

Para validar os resultados do modelo FP-SYRV, após cada rodada, uma simulação da operação mensal do reservatório foi conduzida para cada cenário de afluência guiado pela política de operação padrão (SOP). Os seguintes cenários foram considerados:

- S-GD: cenário sintético mensal de 10.000 anos assumindo as afluências de cada mês seguindo uma distribuição gaussiana com média e desvio padrão iguais aos históricos. Isso significa que um valor único foi obtido por $\bar{I}_\tau + \xi \cdot \sigma_\tau$, onde $\bar{I}_\tau$ e σ_τ são a média e o desvio padrão dos registros históricos do mês τ , respectivamente, e ξ é a variável aleatória seguindo uma distribuição normal com média zero e variância unitária.
- S-HR: registros históricos contendo 85 anos de afluências mensais.
- S-MF: cenário sintético mensal de 10.000 anos gerado pelo método dos fragmentos (SVANIDZE, 1980). Esse procedimento tenta incorporar a maior parte das propriedades estatísticas históricas na geração das afluências. Foi utilizada a função de distribuição gama de três parâmetros para gerar as séries anuais sintéticas.

De cada simulação, todos os momentos e amostras de frequências do armazenamento, déficit e vertimento foram calculados, assim como as confiabilidade e vulnerabilidades mensais, para serem comparadas com aqueles encontrados automaticamente pelo modelo FP-SYRV.

4.3 Problema Exemplo

Essa seção apresenta os resultados para um problema exemplo com entrada de 100% da MLP para a demanda mensal e para a capacidade do reservatório, ou seja, valores adimensionais de $D = 1$ e $K = 1$. Para melhorar a compreensão, a execução do modelo FP-SYRV é denominada como “otimização” já que utiliza técnicas de otimização para resolver o sistema de equações (3.26). Adicionalmente, a operação dos reservatórios perante cada cenário é referida como “simulação”.

As tabelas 2 e 3 mostram os resultados da otimização obtidos a partir de uma execução única do modelo FP-SYRV para as entradas especificadas, um processo que leva apenas uma fração de segundo. É importante salientar novamente que no trabalho de Fletcher e Ponnambalam (1996) não era realizada a discretização em 12 meses e não eram feitos estudos das probabilidades e momentos para o déficit e vertimento.

A Tabela 2 (colunas 2–4) traz as probabilidades de contenção, déficit e vertimento para os diferentes meses do ano, a partir do armazenamento projetado que é função da entrada

definida para a capacidade do reservatório, da afluência e da demanda.

Os momentos de armazenamento são mostrados nas colunas 6–8 da Tabela 2 e a Tabela 3 apresenta os momentos de déficit (colunas 2–5), vertimento (colunas 6–9) e alocação (colunas 10–13), discretizados mensalmente além da variância e do desvio padrão da respectiva variável em cada mês. A variância de uma variável aleatória X pode ser estimada com base no seu primeiro momento (média, $\mathbb{E}(X)$) e no seu segundo momento bruto ($\mathbb{E}(X^2)$) da forma:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \quad (4.1)$$

A Tabela 2, colunas 9 a 10, também traz os índices de desempenho, vulnerabilidade e confiabilidade, para os 12 meses do ano. Nota-se que em alguns meses existe uma grande probabilidade de déficit e por isso a confiabilidade é nula, pois não é possível atender integralmente a demanda para aqueles meses.

A confiabilidade total estimada e a vulnerabilidade total estimada foram, respectivamente, de 56% e 11,6% para a entrada de capacidade e demanda igual a vazão média de longo período (MLP) conforme mostradas na última linha da Tabela 2.

Tabela 2 – Otimização: probabilidades, momentos de armazenamento e índices de desempenho.

Mês	Probabilidade			Momentos do armazenamento				Desempenho (%)	
	Contenção	Déficit	Vertimento	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	Vul.	Conf.
1	0,3827	0,0217	0,5956	0,8417	0,7514	0,0430	0,2075	0,2	97,8
2	0,1752	0,0164	0,8084	0,9209	0,8881	0,0401	0,2002	0,2	98,4
3	0,1921	0,0378	0,7700	0,8858	0,8505	0,0659	0,2568	1,0	96,2
4	0,2936	0,0210	0,6853	0,8739	0,8129	0,0492	0,2217	0,2	97,9
5	0,6804	0,0459	0,2737	0,6717	0,5367	0,0855	0,2924	0,3	95,4
6	0,8941	0,1057	0,0002	0,2718	0,1277	0,0538	0,2320	0,2	89,4
7	0,0609	0,9391	0,0000	0,0040	0,0206	0,0206	0,1435	7,8	6,1
8	0,0000	1,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	34,1	0,0
9	0,0000	1,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	39,6	0,0
10	0,0000	1,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0062	35,0	0,0
11	0,1627	0,8373	0,0000	0,0259	0,1033	0,1026	0,3203	17,2	16,3
12	0,6773	0,2585	0,0642	0,3578	0,3026	0,1747	0,4179	3,3	74,1
Geral								56	11,6

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 3 – Otimização: momentos de déficit, vertimento e alocação.

Mês	Momentos do déficit				Momentos do vertimento				Momentos da alocação			
	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio
1	0,0045	0,0017	0,0017	0,0412	0,2989	0,2290	0,1397	0,3737	0,9955	0,9927	0,0017	0,0412
2	0,0047	0,0024	0,0024	0,0491	0,7750	1,0437	0,4430	0,6656	0,9953	0,9931	0,0024	0,0491
3	0,0146	0,0101	0,0099	0,0997	0,8410	1,3142	0,6069	0,7790	0,9854	0,9810	0,0099	0,0997
4	0,0050	0,0022	0,0022	0,0464	0,4425	0,4230	0,2272	0,4767	0,9950	0,9921	0,0022	0,0464
5	0,0083	0,0027	0,0026	0,0511	0,0735	0,0330	0,0276	0,1660	0,9917	0,9861	0,0026	0,0511
6	0,0106	0,0019	0,0017	0,0417	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,9894	0,9807	0,0017	0,0417
7	0,2397	0,0783	0,0208	0,1443	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7603	0,5989	0,0208	0,1443
8	0,5698	0,3405	0,0159	0,1261	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4302	0,2010	0,0159	0,1261
9	0,6186	0,3955	0,0129	0,1134	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3814	0,1583	0,0129	0,1134
10	0,5739	0,3505	0,0212	0,1455	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4261	0,2028	0,0212	0,1455
11	0,3224	0,1717	0,0678	0,2603	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,6776	0,5269	0,0678	0,2603
12	0,0719	0,0335	0,0283	0,1683	0,0129	0,0046	0,0044	0,0666	0,9281	0,8897	0,0283	0,1683

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4.3.1 Validação para o Cenário S-GD

Para efeito de validação do modelo FP-SYRV, foi realizada, para o primeiro cenário de validação (S-GD), a simulação da operação do reservatório perante os 10 mil anos de vazões mensais sintéticas. Após a simulação Monte Carlo, calcularam-se os momentos amostrais de armazenamento, déficit, vertimento e alocação e as frequências de contenção, déficit e vertimento a fim de compará-los com os correspondentes valores estimados na etapa de otimização do modelo FP-SYRV.

A Tabela 4, colunas 2 a 4, traz os resultados das frequências de contenção, déficit e vertimento em cada mês do ano, considerando demanda e capacidade propostas de 100% da média de longo período da afluência. A mesma Tabela 4, colunas 5 a 8, traz os momentos estatísticos do armazenamento discretizados mensalmente, além da variância e do desvio padrão da respectiva variável em cada mês.

As comparações entre as frequências obtidas na simulação e as probabilidades encontradas pelo modelo para o armazenamento, déficit e vertimento estão dispostas na Figura 5a.

A Tabela 5 traz os momentos estatísticos do déficit, vertimento e alocação e, assim como para o momento de armazenamento, os dados estão discretizados mensalmente e contém a variância e o desvio padrão da respectiva variável em cada mês.

Com a finalidade de realizar a comparação dos resultados, mês a mês, encontrados pelo modelo e pela simulação, foram confeccionados gráficos para o primeiro e segundo momento do armazenamento, déficit e vertimento, presentes na Figura 5b. Nota-se que os resultados foram bastante similares, apresentando, apenas, pequenos desvios.

A comparação entre o modelo e a simulação para os momentos da alocação está disposta na Figura 5c. É possível notar que, assim como para os demais momentos, o resultado é satisfatório.

A Tabela 4, colunas 9 e 10, traz os índices de desempenho, vulnerabilidade e confiabilidade, para os 12 meses do ano. Nota-se que em alguns meses, assim como percebido na execução do FP-SYRV, existe uma grande probabilidade de déficit e por isso a confiabilidade é nula, pois não é possível atender integralmente a demanda para aqueles meses.

A Figura 5c também traz a representação gráfica dos valores encontrados para a confiabilidade e vulnerabilidade mensal usando o modelo e a simulação para o cenário S-GD, que demonstra resultados bem coerentes.

Em resumo, para as entradas fornecidas de $D = 1$ e $K = 1$, o modelo FP-SYRV estimou uma confiabilidade total de 56% e uma vulnerabilidade total de 11.6%. A simulação, por outro lado, forneceu valores de 56.6% para a confiabilidade e de 11.8% para a vulnerabilidade (ver última linha da Tabela 4). Isto indica um alinhamento próximo entre as estimativas do modelo e os resultados da simulação.

Na Tabela 6 é feita a comparação entre os diversos resultados para o modelo na otimização e na simulação. A primeira coluna mostra a soma dos erros quadráticos (SSE: *sum of*

squared errors), a segunda coluna mostra o erro quadrático médio (*MSE: mean squared error*), e a terceira coluna mostra o coeficiente de eficiência de Nash-Sutcliffe (*NSE: Nash-Sutcliffe model efficiency coefficient*)(NASH; SUTCLIFFE, 1970), calculados como seguem:

$$SSE = \sum_{i=1}^{12} (o_i - s_i)^2 \quad (4.2)$$

$$MSE = \frac{1}{12} SSE \quad (4.3)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (o_i - s_i)^2}{\sum_{i=1}^m (o_i - \bar{o})^2} \quad (4.4)$$

em que o_i e s_i são, respectivamente os valores otimizados e simulados da variável em análise e $\bar{o} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} o_i$. Quanto mais próximos de zero forem *SSE* e *MSE*, e quanto mais próximo de um for o *NSE*, melhor será o ajuste.

Por fim, foi criada uma amostra contendo os resíduos entre todos os momentos de cada mês (otimização menos simulação). A amostra de 72 elementos (primeiro e segundo momentos de armazenamento, déficit e vertimento para 12 meses cada) foi aplicada em testes paramétricos (teste-t) e não paramétricos (teste dos sinais) para verificar a hipótese nula de média zero. Ambos os testes não rejeitaram a hipótese nula. Logo, é possível considerar que a comparação FP-SYRV vs. simulação pelo cenário S-GD foi adequada.

É importante salientar que enquanto o processo de simulação envolve um longo tempo de processamento devido à avaliação do longo cenário de afluência, o objetivo principal foi validar o modelo FP-SYRV. Em situações práticas, somente será necessário aplicar o modelo FP-SYRV para estimar os valores mensais dos momentos estatísticos, probabilidades, confiabilidade e vulnerabilidade. Em poucos segundos é possível encontrar todas as variáveis que envolvem o dimensionamento do reservatório.

Tabela 4 – Simulação cenário S-GD: frequências, momentos de armazenamento e índices de desempenho.

Mês	Frequência			Momentos do armazenamento				Desempenho (%)	
	Contenção	Déficit	Vertimento	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	Vul.	Conf.
1	0,3913	0,0410	0,5677	0,8060	0,7408	0,0911	0,3019	0,4	95,9
2	0,2023	0,0179	0,7798	0,8998	0,8676	0,0579	0,2407	0,3	98,2
3	0,2176	0,0206	0,7618	0,8777	0,8463	0,0759	0,2755	0,4	97,9
4	0,2978	0,0245	0,6777	0,8556	0,8080	0,0760	0,2756	0,5	97,5
5	0,6219	0,0712	0,3069	0,6633	0,5576	0,1177	0,3430	1,0	92,9
6	0,7230	0,2677	0,0093	0,3300	0,1929	0,0840	0,2899	3,3	73,2
7	0,3060	0,6940	0,0000	0,0664	0,0224	0,0180	0,1342	11,6	30,6
8	0,0174	0,9826	0,0000	0,0020	0,0004	0,0004	0,0192	28,9	1,7
9	0,0002	0,9998	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	39,3	0,0
10	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	35,3	0,0
11	0,1696	0,8304	0,0000	0,0264	0,0071	0,0064	0,0800	16,9	17,0
12	0,6727	0,2614	0,0659	0,3598	0,2401	0,1107	0,3327	3,4	73,9
Geral								56,6	11,8

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 5 – Simulação cenário S-GD: momentos de déficit, vertimento e alocação.

Mês	Momentos do déficit				Momentos do vertimento				Momentos da alocação			
	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio
1	0,0091	0,0036	0,0035	0,0592	0,3311	0,2932	0,1836	0,4284	0,9909	0,9854	0,0035	0,0592
2	0,0053	0,0026	0,0026	0,0507	0,7733	1,0788	0,4809	0,6935	0,9947	0,9920	0,0026	0,0507
3	0,0071	0,0041	0,0041	0,0637	0,8393	1,3286	0,6243	0,7901	0,9929	0,9898	0,0041	0,0637
4	0,0083	0,0048	0,0047	0,0686	0,4609	0,4614	0,2490	0,4990	0,9917	0,9883	0,0047	0,0686
5	0,0209	0,0100	0,0096	0,0981	0,0920	0,0454	0,0369	0,1922	0,9791	0,9683	0,0096	0,0981
6	0,0770	0,0331	0,0272	0,1648	0,0006	0,0001	0,0001	0,0083	0,9230	0,8792	0,0272	0,1648
7	0,2450	0,1161	0,0561	0,2369	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7550	0,6261	0,0561	0,2369
8	0,5081	0,2893	0,0312	0,1765	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4919	0,2731	0,0312	0,1765
9	0,6164	0,3931	0,0132	0,1147	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3836	0,1603	0,0132	0,1147
10	0,5760	0,3529	0,0212	0,1456	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4240	0,2010	0,212	0,1452
11	0,3185	0,1692	0,0677	0,2602	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,6815	0,5321	0,0677	0,2602
12	0,0730	0,0344	0,0290	0,1704	0,0132	0,0048	0,0046	0,0679	0,9270	0,8883	0,0290	0,1704

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

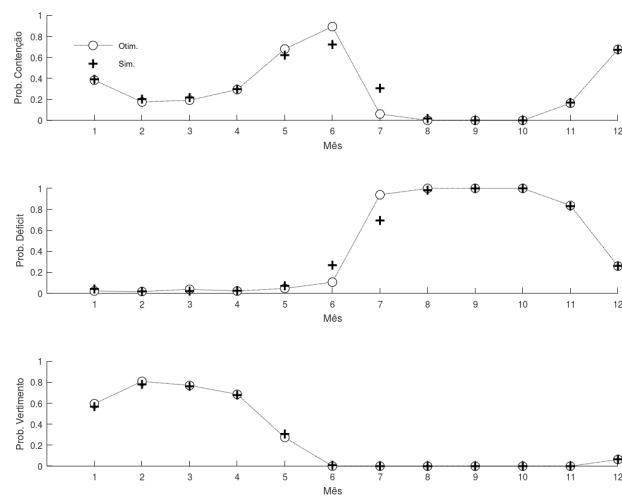
Tabela 6 – Simulação cenário S-GD: comparação entre otimização e simulação.

Variável	<i>SSE</i>	<i>MSE</i>	<i>NSE</i>
Armazenamento 1.º Mom.	0,00947	0,00079	0,99
Armazenamento 2.º Mom.	0,01844	0,00154	0,99
Prob. de Contenção	0,09463	0,00789	0,91
Prob. de Déficit	0,08801	0,00733	0,96
Prob. de Vertimento	0,00291	0,00024	1,00
Déficit 1.º Mom.	0,00851	0,00071	0,99
Déficit 2.º Mom.	0,00515	0,00043	0,98
Vertimento 1.º Mom.	0,00172	0,00014	1,00
Vertimento 2.º Mom.	0,00718	0,00060	1,00
Alocação 1.º Mom.	0,00851	0,00071	0,99
Alocação 2.º Mom.	0,01675	0,00140	0,99
Vulnerabilidade	0,00515	0,00043	0,98
Confiabilidade	0,00515	0,00043	0,98

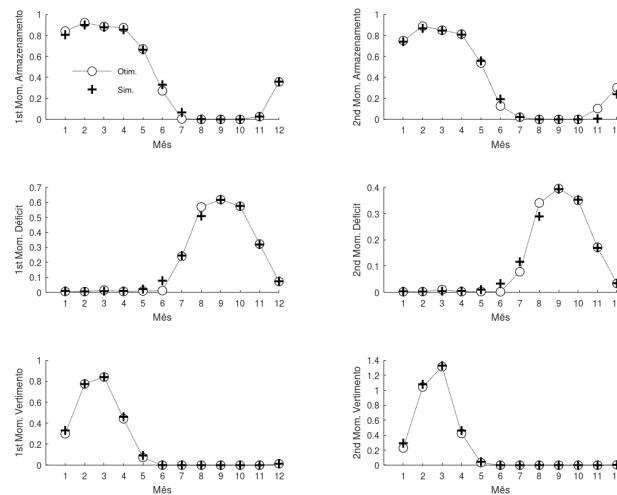
Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Figura 5 – Otimização versus simulação para o cenário S-GD.

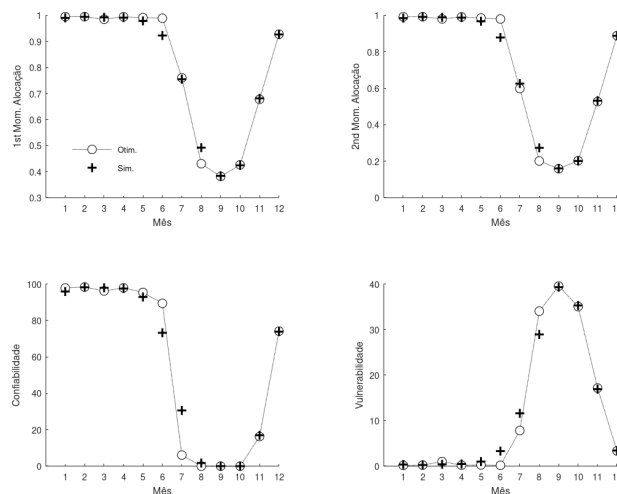
(a) Probabilidades de contenção, déficit e vertimento.



(b) Momentos de armazenamento, déficit e vertimento.



(c) Momentos de alocação e as vulnerabilidades e confiabilidades.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4.3.2 Validação para os Cenários S-HR e S-MF

A comparação otimização versus simulação para os outros dois cenários estão mostradas na Figura 6 (S-HR) e na Figura 7 (S-MF). As tabelas 7 a 9 apresentam os resultados para o cenário S-HR. Do mesmo modo, as tabelas 10 a 12 demonstram os dados da simulação para o cenário S-MF.

Para a entrada fornecida de $D = 1$ e $K = 1$, a confiabilidade total e vulnerabilidade total foram:

- Otimização FP-SYRV: confiabilidade = 56%; vulnerabilidade = 11,6%.
- Validação S-HR: confiabilidade = 56,7%; vulnerabilidade = 12,5%.
- Validação S-MF: confiabilidade = 56,5%; vulnerabilidade = 12,7%.

Dado que o modelo FP-SYRV aqui implementado assume afluências normalmente distribuídas (conforme explicado na Seção 3.10), previa-se que os resultados de validação mais favoráveis ocorreriam para os cenários S-GD, e esta expectativa de fato foi verificada. No entanto, as figuras 6 e 7 ilustram que as simulações para os demais cenários também ofereceu validação satisfatória quando comparada com às estimativas de otimização.

A série histórica da vazão natural da barragem de Sobradinho, utilizada como base de dados deste trabalho, apresenta comportamento enviesado com tendência de queda dos valores anuais. A validação pelo cenário S-HR utilizou os dados históricos dos 85 anos e apresentou os resultados na aplicação da política de operação padrão (SOP) bem semelhantes aos resultados advindos do modelo e aos outros dois cenários S-GD e S-MF que não são enviesados. Sendo assim, mesmo com série histórica enviesada, o modelo mostrou-se capaz de representar bem os resultados.

O modelo FP-SYRV encontra todos os momentos estatísticos e probabilidades de forma mensal sem ter a necessidade de construir cenários sintéticos para isso. É realizada a otimização estocástica explícita, ou seja, a incorporação das incertezas é feita na própria formulação e não através da geração de cenários. Para tal, são extraídos dos dados históricos apenas a média e variância da afluência para todos os meses (janeiro a dezembro) e feita a consideração que os dados seguem a distribuição gaussiana de probabilidades. Desse modo, não são cometidos erros por conta da utilização de cenários, pois essa geração de forma sintética já apresenta erros intrínsecos devido a maneira em que são produzidos, seja pelo método dos fragmentos ou por qualquer outro método.

Tabela 7 – Simulação cenário S-HR: frequências, momentos de armazenamento e índices de desempenho.

Mês	Frequência			Momentos do armazenamento				Desempenho (%)	
	Contenção	Déficit	Vertimento	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	Vul.	Conf.
1	0,4353	0,0588	0,5059	0,7563	0,6813	0,1106	0,3326	0,7	94,1
2	0,2000	0,0471	0,7529	0,8588	0,8281	0,0916	0,3026	0,5	95,3
3	0,1647	0,0588	0,7765	0,8714	0,8431	0,0847	0,2911	0,6	94,1
4	0,3529	0,0588	0,5882	0,8349	0,7842	0,0882	0,2970	0,9	94,1
5	0,6353	0,1176	0,2471	0,6476	0,5444	0,1264	0,3556	2,5	88,2
6	0,6471	0,3176	0,0353	0,3568	0,2464	0,1205	0,3472	6,9	68,2
7	0,3765	0,6235	0,0000	0,1489	0,0888	0,0675	0,2597	17,1	37,6
8	0,1294	0,8706	0,0000	0,0552	0,0278	0,0250	0,1582	29,3	12,9
9	0,0588	0,9412	0,0000	0,0135	0,0046	0,0044	0,0666	37,7	5,9
10	0,0235	0,9765	0,0000	0,0043	0,0008	0,0008	0,0281	34,7	2,4
11	0,1529	0,8471	0,0000	0,0415	0,0191	0,0176	0,1327	16,2	15,3
12	0,6588	0,2824	0,0588	0,3523	0,2436	0,1209	0,3477	2,7	71,8
Geral								56,7	12,5

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 8 – Simulação cenário S-HR: momentos de déficit, vertimento e alocação.

Mês	Momentos do déficit				Momentos do vertimento				Momentos da alocação			
	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio
1	0,0184	0,0070	0,0068	0,0823	0,4044	0,4756	0,3157	0,5619	0,9816	0,9702	0,0068	0,0823
2	0,0145	0,0053	0,0052	0,0720	0,7616	1,1786	0,6058	0,7783	0,9855	0,9764	0,0052	0,0720
3	0,0166	0,0059	0,0056	0,0751	0,7953	1,5152	0,8932	0,9451	0,9834	0,9727	0,0056	0,0751
4	0,0217	0,0092	0,0089	0,0942	0,4839	0,5686	0,3384	0,5817	0,9783	0,9658	0,0089	0,0942
5	0,0502	0,0251	0,0229	0,1513	0,1004	0,1102	0,1013	0,3183	0,9498	0,9248	0,0229	0,1513
6	0,1270	0,0690	0,0535	0,2314	0,0074	0,0032	0,0031	0,0560	0,8730	0,8151	0,0535	0,2314
7	0,2997	0,1712	0,0823	0,2869	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7003	0,5718	0,0823	0,2869
8	0,4800	0,2932	0,0635	0,2521	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5200	0,3332	0,0635	0,2521
9	0,5769	0,3768	0,0445	0,2109	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4231	0,2229	0,0445	0,2109
10	0,5646	0,3466	0,0281	0,1676	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4354	0,2173	0,0281	0,1676
11	0,3336	0,1616	0,0509	0,2257	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,6664	0,4944	0,0509	0,2257
12	0,0766	0,0274	0,0218	0,1476	0,0387	0,0283	0,0271	0,1647	0,9234	0,8741	0,0218	0,1476

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

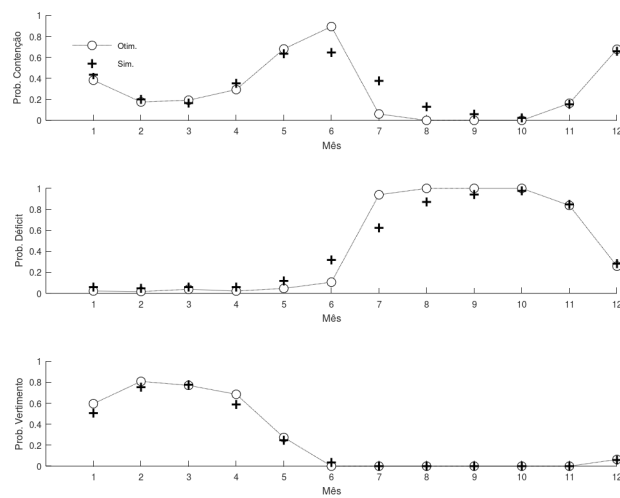
Tabela 9 – Simulação cenário S-HR: comparação entre otimização e simulação.

Variável	<i>SSE</i>	<i>MSE</i>	<i>NSE</i>
Armazenamento 1.º Mom.	0,04518	0,00376	0,97
Armazenamento 2.º Mom.	0,03957	0,00330	0,97
Prob. de Contenção	0,19151	0,01596	0,81
Prob. de Déficit	0,17527	0,01461	0,93
Prob. de Vertimento	0,02256	0,00188	0,98
Déficit 1.º Mom.	0,02948	0,00246	0,96
Déficit 2.º Mom.	0,01648	0,00137	0,94
Vertimento 1.º Mom.	0,01657	0,00138	0,98
Vertimento 2.º Mom.	0,14710	0,01226	0,94
Alocação 1.º Mom.	0,02948	0,00246	0,96
Alocação 2.º Mom.	0,05660	0,00472	0,96
Vulnerabilidade	1752,71	146,06	0,93
Confiabilidade	164,82	13,74	0,94

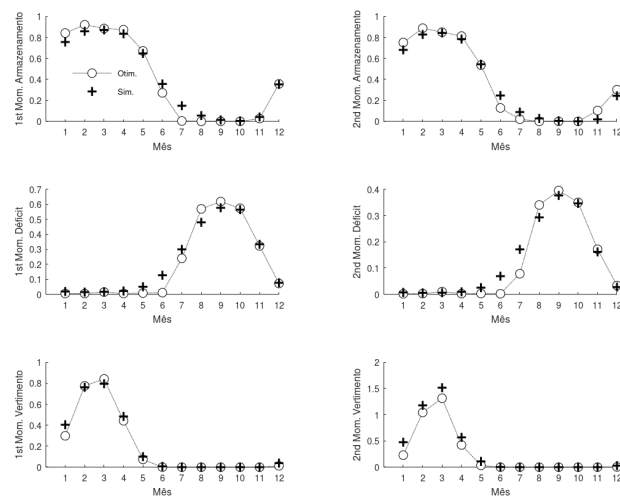
Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Figura 6 – Otimização versus simulação para o cenário S-HR.

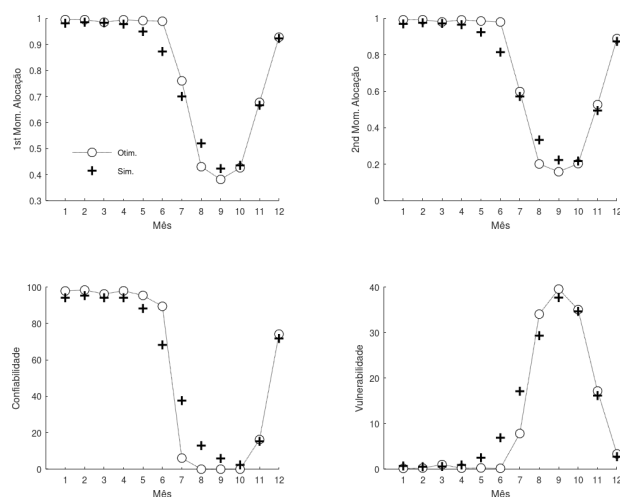
(a) Probabilidades de contenção, déficit e vertimento.



(b) Momentos de armazenamento, déficit e vertimento.



(c) Momentos de alocação e as vulnerabilidades e confiabilidades.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 10 – Simulação cenário S-MF: frequências, momentos de armazenamento e índices de desempenho.

Mês	Frequência			Momentos do armazenamento				Desempenho (%)	
	Contenção	Déficit	Vertimento	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	Vul.	Conf.
1	0,3724	0,0495	0,5781	0,8000	0,7354	0,0954	0,3089	0,5	95,0
2	0,1990	0,0286	0,7724	0,8796	0,8442	0,0705	0,2656	0,2	97,1
3	0,2081	0,0608	0,7311	0,8530	0,8213	0,0936	0,3060	0,5	93,9
4	0,3669	0,0650	0,5681	0,8081	0,7542	0,1012	0,3181	0,9	93,5
5	0,5860	0,1481	0,2658	0,6309	0,5427	0,1447	0,3803	3,2	85,2
6	0,6409	0,3361	0,0229	0,3736	0,2681	0,1285	0,3585	8,1	66,4
7	0,4380	0,5596	0,0024	0,1649	0,0918	0,0646	0,2541	18,1	44,0
8	0,1415	0,8584	0,0001	0,0532	0,0236	0,0208	0,1443	28,1	14,2
9	0,0483	0,9516	0,0001	0,0091	0,0039	0,0038	0,0616	37,7	4,8
10	0,0110	0,9889	0,0001	0,0038	0,0019	0,0018	0,0429	35,5	1,1
11	0,1451	0,8529	0,0020	0,0370	0,0187	0,0174	0,1318	16,9	14,7
12	0,6306	0,3261	0,0433	0,3164	0,2136	0,1135	0,3369	3,1	67,4
Geral								56,5	12,7

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 11 – Simulação cenário S-MF: momentos de déficit, vertimento e alocação.

Mês	Momentos do déficit				Momentos do vertimento				Momentos da alocação			
	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio
1	0,0140	0,0050	0,0048	0,0696	0,3301	0,2889	0,1800	0,4243	0,9860	0,9771	0,0048	0,0696
2	0,0069	0,0024	0,0023	0,0484	0,8176	1,2322	0,5637	0,7508	0,9931	0,9886	0,0023	0,0484
3	0,0144	0,0049	0,0047	0,0688	0,8080	1,4458	0,7931	0,8906	0,9856	0,9761	0,0047	0,0688
4	0,0217	0,0094	0,0089	0,0945	0,5262	0,6583	0,3815	0,6177	0,9783	0,9661	0,0089	0,0945
5	0,0623	0,0321	0,0282	0,1680	0,0946	0,0010	0,0603	0,2455	0,9377	0,9076	0,0282	0,1680
6	0,1509	0,0813	0,0586	0,2421	0,0031	0,0000	0,0010	0,0308	0,8491	0,7796	0,0586	0,2421
7	0,3003	0,1805	0,0902	0,3005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0030	0,6997	0,5798	0,0903	0,3005
8	0,4598	0,2807	0,0692	0,2631	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5402	0,3610	0,0692	0,2631
9	0,5747	0,3768	0,0466	0,2158	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,4253	0,2275	0,0466	0,2158
10	0,5740	0,3552	0,0257	0,1604	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,4260	0,2072	0,0257	0,1604
11	0,3431	0,1690	0,0513	0,2264	0,0006	0,0002	0,0002	0,0151	0,6569	0,4828	0,0513	0,2264
12	0,0840	0,0308	0,0238	0,1541	0,0287	0,0238	0,0229	0,1515	0,9160	0,8629	0,0238	0,1541

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

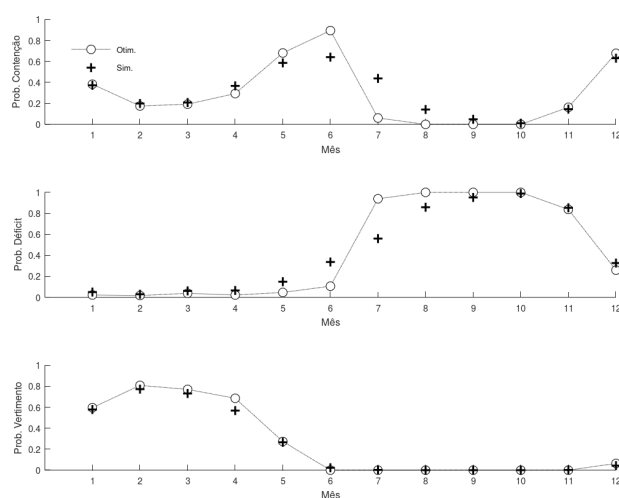
Tabela 12 – Simulação cenário S-MF: comparação entre otimização e simulação.

Variável	<i>SSE</i>	<i>MSE</i>	<i>NSE</i>
Armazenamento 1.º Mom.	0,05150	0,00429	0,97
Armazenamento 2.º Mom.	0,04695	0,00391	0,97
Prob. de Contenção	0,24650	0,02054	0,76
Prob. de Déficit	0,23833	0,01986	0,90
Prob. de Vertimento	0,01788	0,00149	0,99
Déficit 1.º Mom.	0,04122	0,00344	0,94
Déficit 2.º Mom.	0,02169	0,00181	0,92
Vertimento 1.º Mom.	0,01160	0,00097	0,99
Vertimento 2.º Mom.	0,11352	0,00946	0,95
Alocação 1.º Mom.	0,04122	0,00344	0,94
Alocação 2.º Mom.	0,08098	0,00675	0,94
Vulnerabilidade	2383,33	198,61	0,90
Confiabilidade	216,88	18,07	0,92

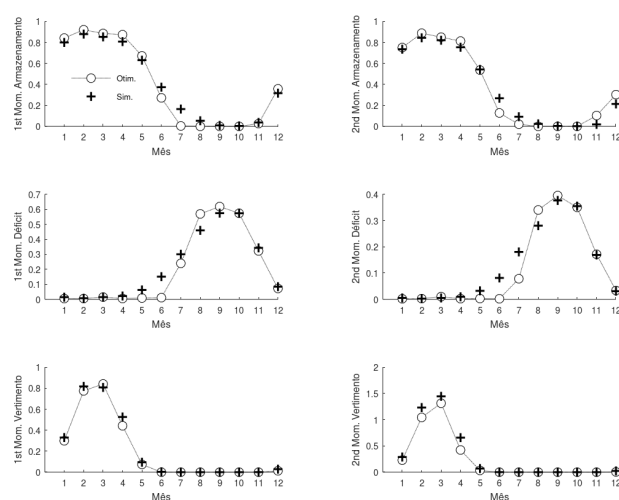
Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Figura 7 – Otimização versus simulação para o cenário S-MF.

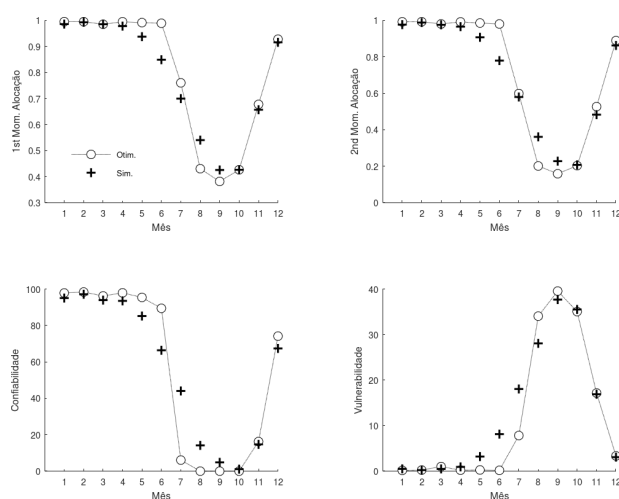
(a) Probabilidades de contenção, déficit e vertimento.



(b) Momentos de armazenamento, déficit e vertimento.



(c) Momentos de alocação e as vulnerabilidades e confiabilidades.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4.4 Relação SYR

A função armazenamento-regularização para reservatórios estabelece a capacidade mínima de armazenamento útil necessária para manter uma taxa de descarga constante para uma especificada sequência de aflúências para o reservatório (MCMAHON; ADELOYE, 2005). A relação armazenamento-regularização-confiabilidade (SYR) amplia a tradicional função armazenamento-regularização para incorporar o conceito da confiabilidade. Essa relação fornece percepções sobre a probabilidade de que um reservatório possa atender uma especificada demanda hídrica perante várias condições, incluindo variações na aflúência, seca, ou outros fatores de incerteza.

Para estabelecer relação SYR para o estudo de caso, o modelo FP-SYRV foi executado para várias combinações de capacidade de armazenamento (K) e regularização (demanda D) para determinar a confiabilidade correspondente (CONFT). Os seguintes valores foram utilizados:

- $K = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5$.
- $D = 0,7; 0,75; 0,8; 0,85; 0,9; 0,95; 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$.

Os resultados são mostrados na Figura 8. O gráfico de malha da Figura 8a retrata a confiabilidade no eixo vertical como função da capacidade e regularização no plano inferior. A Figura 8b fornece a visualização regularização versus capacidade do gráfico de malha, exibindo curvas de interpolação que representam as curvas de regularização, com as correspondentes confiabilidades marcadas ao longo das curvas. O gráfico de malha mostra claramente um platô correspondendo aos valores de confiabilidade 100% alcançados para altas capacidades e baixas demandas.

Similarmente, as curvas de regularização indicam valores assintóticos para as demandas a medida que a capacidade aumenta. Em hidrologia, sabe-se que a máxima demanda regularizada por um reservatório é a vazão média de longo período, para uma regularização completa. Isto ocorre em uma capacidade específica. Qualquer capacidade acima dessa não aumentará a regularização, já que o reservatório não pode produzir mais água. Por isso, a presença de assíntotas é prevista.

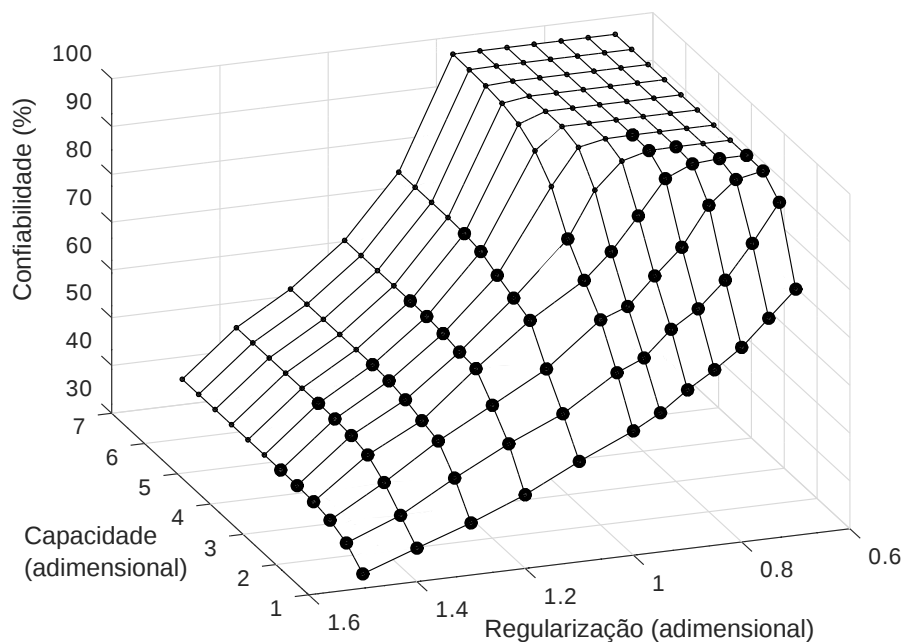
Os pontos em destaque nas figuras possuem significado. Depois de gerar a relação SYR, o próximo passo foi formular equações correlacionando todas as variáveis. O gráfico de malha oferece um meio simples de definir uma equação geral com a confiabilidade em função do armazenamento e da demanda. Esta equação pode ser invertida para derivar duas equações adicionais:

1. Capacidade como função da regularização e confiabilidade.
2. Regularização como função da capacidade e confiabilidade.

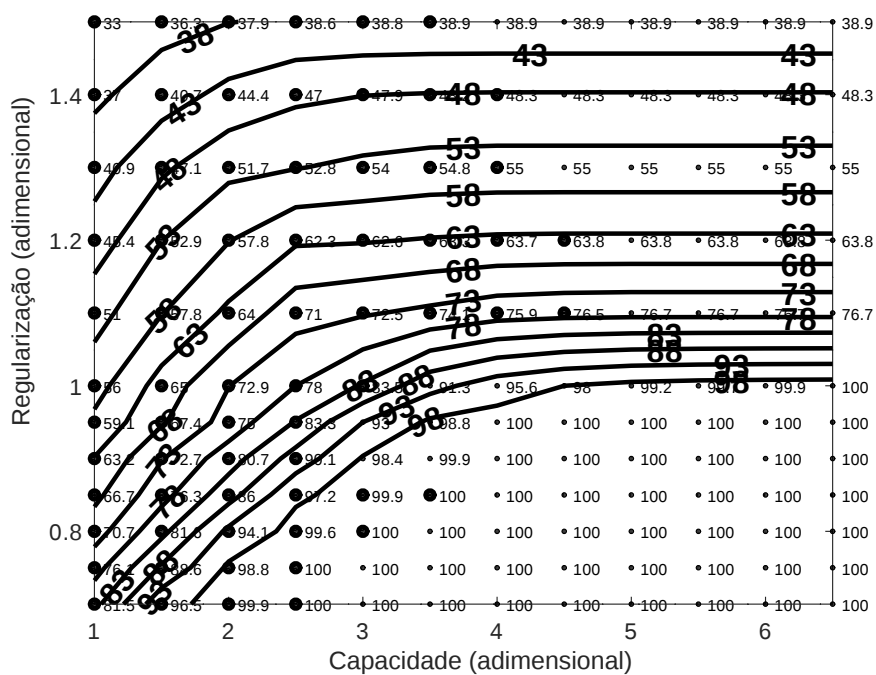
Entretanto, o platô da confiabilidade e os valores assintóticos da regularização colocam desafios para sua inversão, já que as equações invertidas poderiam passar a não mais aderir à definição de função matemática. A relação $f(x)$ deixa de ser função quando um valor único de x é associado a múltiplos e distintos valores de $f(x)$. Por isso, para ajustar uma superfície ao gráfico de malha, pontos pertencendo ao platô e as assíntotas das curvas de regularização

Figura 8 – Relação SYR derivada do modelo FP-SYRV.

(a) Confiabilidade como função da capacidade e regularização.



(b) Curvas de regularização. Os números na malha representam as confiabilidade derivadas pelo modelo FP-SYRV para cada combinação de capacidade e demanda.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

foram excluídos da análise da regressão. Consequentemente, somente os pontos em destaque no gráfico de malha foram utilizados.

4.5 Equações SYR

Depois dos testes de várias alternativas (por meio do website <www.findcurves.com>), a equação com o melhor ajuste ao gráfico de malha foi

$$\text{CONF T} = \min (100\%, \Sigma) \quad (4.5)$$

onde Σ é a função sigmóide tridimensional

$$\Sigma = \frac{\theta_1}{\left[1 + \exp (\theta_2 - \theta_3 \cdot K)\right] \left[1 + \exp (\theta_4 - \theta_5 \cdot D)\right]} \quad (4.6)$$

Os parâmetros ótimos foram calibrados através de regressão não-linear e são como segue: $\theta_1 = 215,87$, $\theta_2 = 0,42$, $\theta_3 = 1,10$, $\theta_4 = -1,57$ e $\theta_5 = -1,97$, para valores adimensionais de K e D , com Σ em porcentagem, resultando em um coeficiente de determinação de $R^2 = 0,99$. A Figura 9 apresenta o gráfico de dispersão retratando o bom ajuste entre a confiabilidade observada e calculada, considerando os pontos usados para a regressão.

A Figura 10 exibe a superfície ajustada baseada na equação acima mencionada. Os contornos desta superfície no plano regularização versus capacidade representam as curvas de regularização.

A equação (4.7) fornece as bases para derivar a relação entre as variáveis que é suficiente para determinar a capacidade como função da regularização e confiabilidade, representando as relações fundamentais de projeto:

$$K = \frac{1}{\theta_3} \left[\theta_2 - \ln \left(\frac{\theta_1}{\text{CONF T} \left[1 + \exp (\theta_4 - \theta_5 \cdot D) \right]} - 1 \right) \right] \quad (4.7)$$

onde $\ln (\cdot)$ é o logaritmo natural.

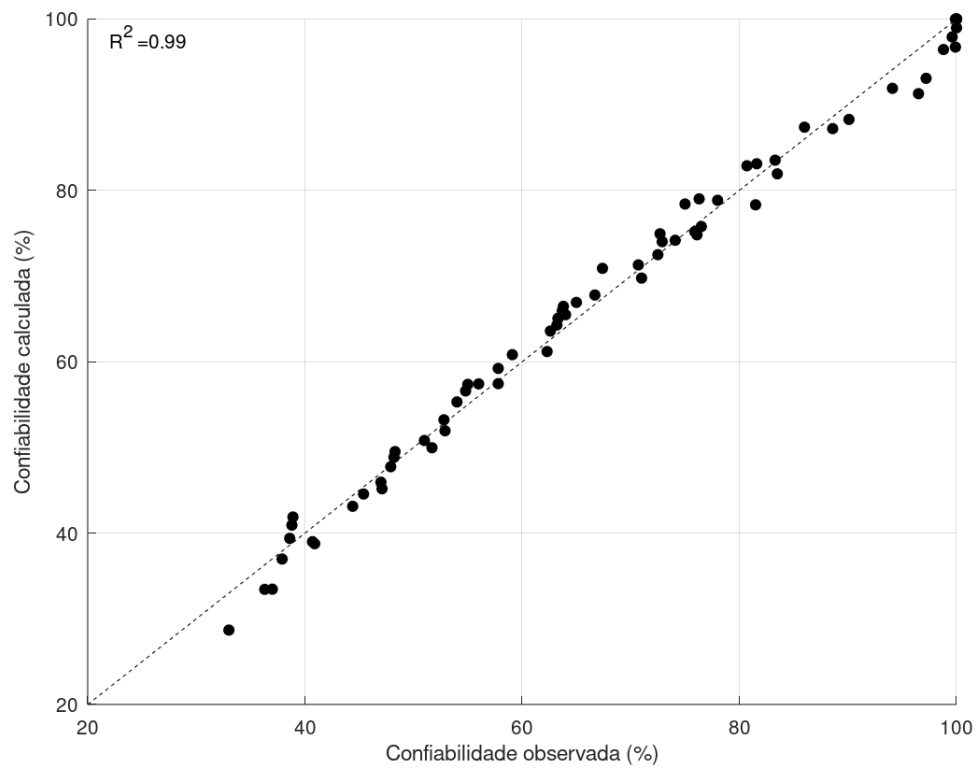
A Figura 11 mostra o gráfico de dispersão retratando o bom ajuste entre as capacidades observadas e calculadas pela Equação (4.7), considerando os pontos usados pela regressão. Essa comparação gerou um R^2 de 0,78.

De forma semelhante, a seguinte equação foi obtida da equação (4.6) para encontrar a regularização, sendo dados os valores de capacidade e confiabilidade:

$$D = \frac{1}{\theta_5} \left[\theta_4 - \ln \left(\frac{\theta_1}{\text{CONF T} \left[1 + \exp (\theta_2 - \theta_3 \cdot K) \right]} - 1 \right) \right] \quad (4.8)$$

A Figura 12 mostra o gráfico de dispersão retratando o bom ajuste entre os valores de regularização observados e calculados através da equação (4.8), considerando os pontos utilizados na regressão. Essa comparação gerou um R^2 de 0,99. Claramente, as equações (4.6),

Figura 9 – Gráfico de dispersão e reta de 45° correspondente ao ajuste da equação (4.6) aos dados de confiabilidade.

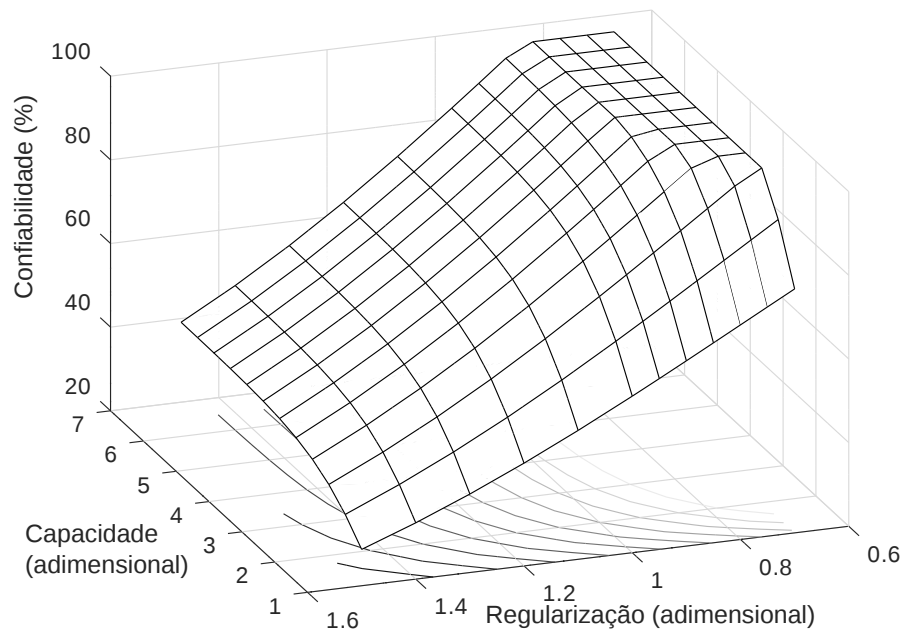


Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

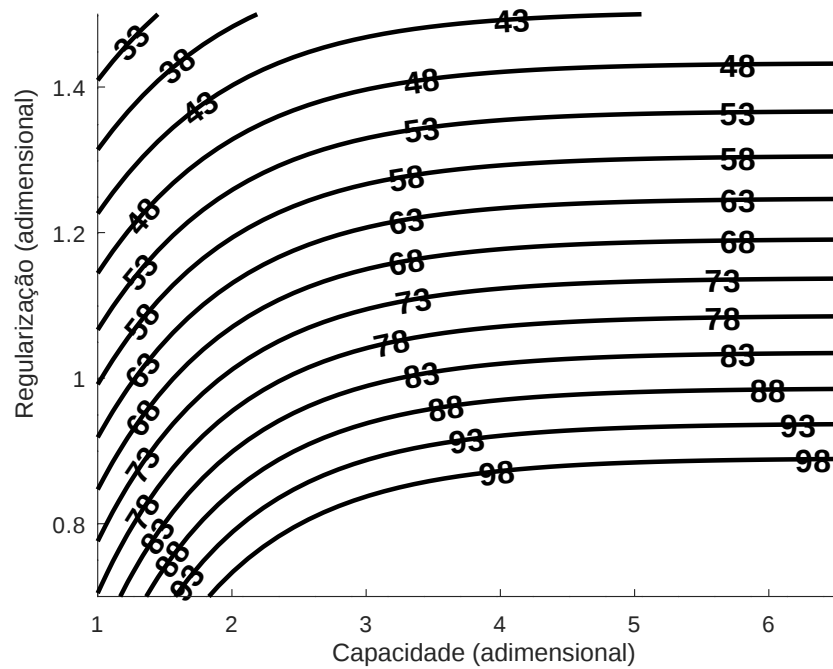
(4.7) e (4.8) são definidas somente quando os denominadores são diferentes de zero e quando os existem os logaritmos.

Figura 10 – Relação SYR derivada da equação (4.6).

(a) Confiabilidade como função da capacidade e da regularização. Os contornos do plano inferior são as curvas de regularização mostradas na Figura 8b.

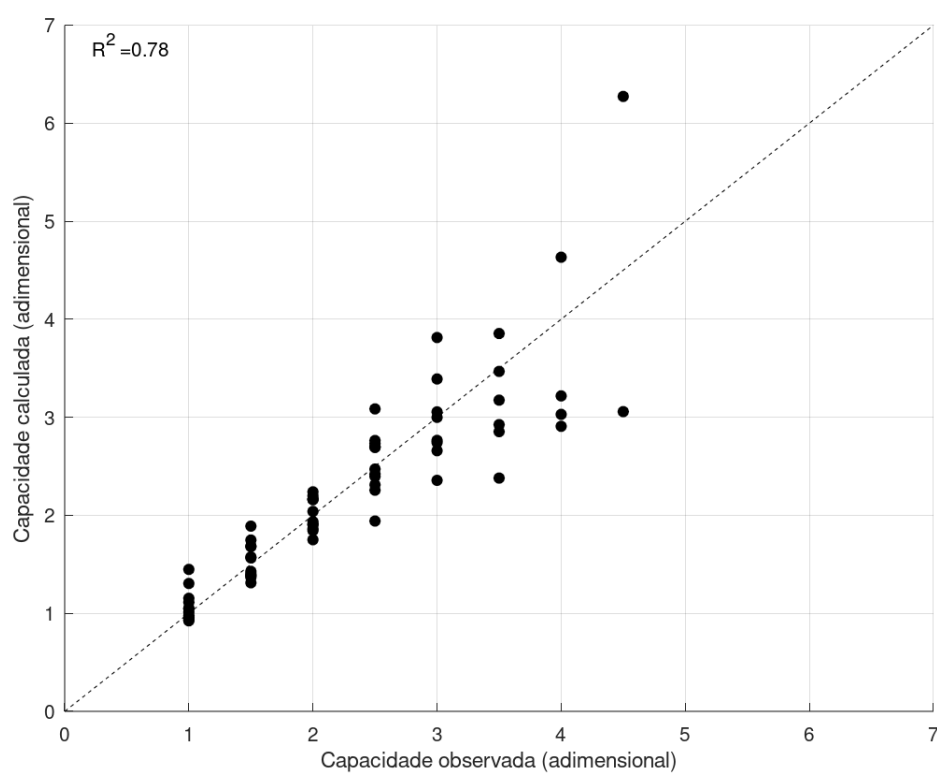


(b) Curvas de regularização.



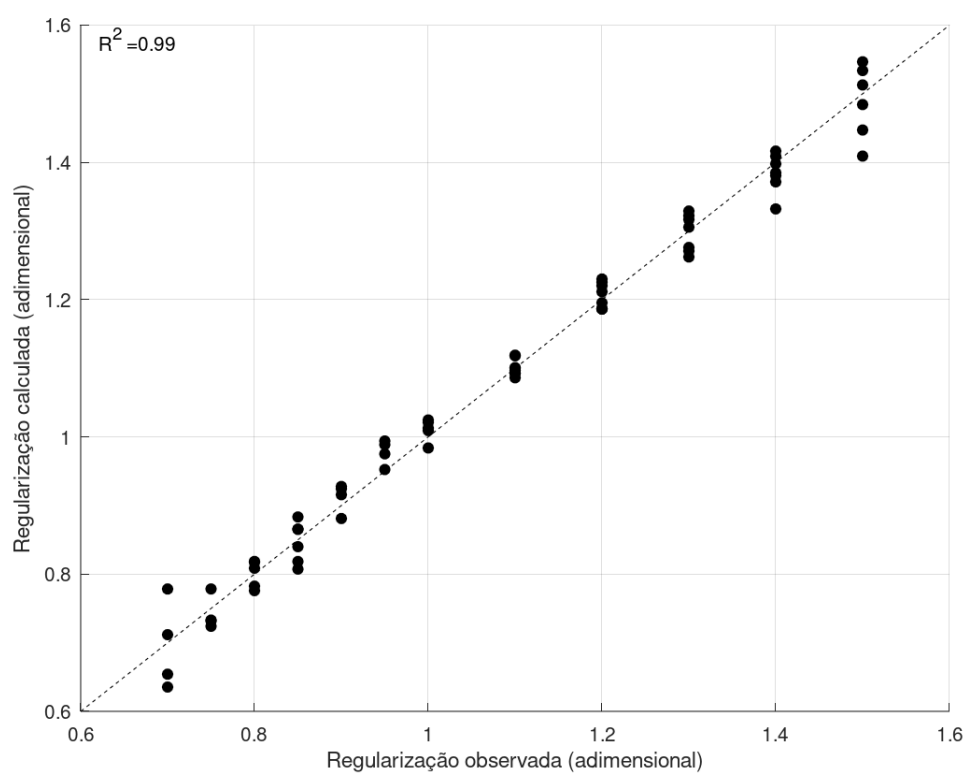
Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Figura 11 – Gráfico de dispersão e reta de 45° correspondente ao ajuste da equação (4.7) aos dados de confiabilidade.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Figura 12 – Gráfico de dispersão e reta de 45° correspondente ao ajuste da equação (4.8) aos dados de confiabilidade.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

5 Conclusão

Esse estudo forneceu refinamentos significativos ao método estocástico explícito de Fletcher-Ponnambalam (FP) para dimensionamento de reservatórios, com foco primariamente no desenvolvimento de relações SYRV. Essas melhorias abrangeram mudança da análise de anual para mensal, possibilitando o cálculo das confiabilidades mensais, probabilidades de contenção, déficit, vertimento e momentos estatísticos do armazenamento. Notadamente, o modelo agora inclui estimativas para vulnerabilidades mensais e os primeiros e segundos momentos de déficit, vertimento e alocação, abordando aspectos anteriormente não explicados.

A validação do modelo FP-SYRV envolveu comparações entre os resultados da otimização e das simulações, destacando o alto grau de semelhança entre as duas bases de dados. Esse processo de validação foi particularmente robusto para o cenário S-GD, onde o modelo FP-SYRV forneceu confiabilidade e vulnerabilidade totais estritamente alinhadas com os resultados da simulação. Além disso, índices de desempenho tais como *SSE* e *MSE*, bem como testes estatísticos forneceram evidências da capacidade do modelo FP-SYRV em estimar efetivamente todos os momentos estatísticos. Em aplicações práticas, o modelo FP-SYRV pode ser eficientemente empregado para estimar várias variáveis relacionadas ao dimensionamento de reservatórios, como foi validado através do processo de simulação. A implementação de todas as formulações do modelo FP-SYRV foi realizada no ambiente de programação livre e de código aberto GNU Octave, não incluído no modelo original.

Em adição aos feitos inéditos deste trabalho, foram realizados diversos testes com o modelo, utilizando diferentes entradas de capacidade e regularização que resultavam em diferentes valores de confiabilidade, no intuito de ajustar uma equação ao gráfico de malha dos valores observados. Foi encontrada a função sigmóide tridimensional que apresentou o melhor ajuste e, conseqüentemente, o coeficiente de determinação mais eficiente para a equação com a confiabilidade como variável dependente da capacidade e regularização. Com esses dados, foi possível encontrar a equação com a capacidade dependente da confiabilidade e regularização, assim como a equação com a regularização como variável dependente da capacidade e confiabilidade. Para estas equações, também foram confeccionados gráficos de dispersão que demonstraram possuir um ótimo ajuste ao comparar com os valores observados.

Esse estudo adicionalmente reforçou que, embora o método FP-SYRV tenha sido inicialmente desenvolvido assumindo a distribuição de probabilidade normal para afluência, sua aplicabilidade estendeu-se além deste cenário específico. O modelo demonstrou resultados satisfatórios para validação entre várias condições, reforçando seu potencial de utilização na avaliação de sistemas de reservatórios.

O modelo FP-SYRV, operando como um problema de otimização estocástica explícita, depende de assumir uma distribuição de probabilidade para as afluências do reservatório com o intuito de facilitar a resolução de várias integrais relativas as equações dos momentos

estatísticos, assim como as probabilidade de contenção, déficit e vertimento. Como feito nesta dissertação, a prática comum é assumir a distribuição gaussiana para as afluências, simplificando a derivação das expressões analíticas. Outras distribuições de probabilidades alternativas foram exploradas em trabalhos anteriores, tal como a aplicação da distribuição Kumaraswamy (1980) utilizada por Joodavi et al. (2017) e por Mahootchi e Ponnambalam (2013) no contexto do método FP para operação de reservatórios. Para atingir o mesmo objetivo, em trabalhos futuros poderia ser assumida uma distribuição qualquer que mais se adequasse aos dados históricos através de testes de aderência (FRANCO et al., 2014; CALDEIRA et al., 2015) e, a partir dela, encontrar a distribuição normal equivalente (CASTRO, 1997) para auxiliar na resolução das integrais relativas aos momentos estatísticos. Para eliminar a necessidade da consideração da distribuição específica, Celeste, Siqueira e Cai (2021) propuseram um método que evita completamente a indicação de uma distribuição e, ao invés disso, baseia-se na amostra de registros históricos para aproximar as soluções das integrais, resultando em expressões mais concisas e reduzindo o esforço computacional. Isto serve como uma orientação valiosa para futuros estudos nesse campo, oferecendo um caminho para uma exploração científica mais aprofundada.

Referências

- ADELOYE, A. The relative utility of regression and artificial neural networks models for rapidly predicting the capacity of water supply reservoirs. *Environmental Modeling and Software*, v. 24, n. 10, p. 1233–1240, 2009.
- BRAVO, J. M.; COLLISCHONN, W.; PILAR, J. V. Otimização da operação de reservatórios: estado-da-arte. In: BRAVO. *XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. João Pessoa, Paraíba, 2005.
- CALDEIRA, T. L. et al. Modelagem probabilística de eventos de precipitação extrema no estado do Rio Grande do Sul. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, SciELO Brasil, v. 19, p. 197–203, 2015.
- CAMPOS, N. *Dimensionamento de reservatórios: o método do diagrama triangular de regularização*. Fortaleza: Expressão gráfica e editora, 2005.
- CASTRO, L. A. d. *Análise da segurança no projeto de estruturas: método dos estados limites*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1997.
- CELESTE, A.; FEITOSA, D.; CORREIA, E. Análise de métodos para geração de vazões sintéticas no agreste sergipano. In: *XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. João Pessoa, Paraíba: [s.n.], 2012.
- CELESTE, A. B. Reservoir design optimization incorporating performance indices. *Water Resources Management*, v. 29, n. 12, p. 4305–4318, 2015.
- CELESTE, A. B.; BILLIB, M. Evaluation of stochastic reservoir operation optimization models. *Advances in Water Resources*, v. 32, n. 9, p. 1429–1443, 2009.
- CELESTE, A. B.; CURI, W. F.; CURI, R. C. Implicit stochastic optimization for deriving reservoir operating rules in semiarid brazil. *Pesquisa Operacional*, v. 29, p. 223–234, 2009.
- CELESTE, A. B.; SIQUEIRA, J. Í. P.; CAI, X. Using inflow records to approximate solutions to statistical moment equations of an explicit stochastic reservoir optimization method. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 147, n. 7, p. 06021006, 2021.
- CHESF. *Descrição do Aproveitamento de Sobradinho*. 2024. CHESF. Acessado em: 12 jan. 2024. Disponível em: <<<https://www.chesf.com.br/SistemaChesf/Pages/SistemaGeracao/Sobradinho.aspx>>>.
- CODEVASF. *Caracterização da Bacia*. 2024. CODEVASF. Acessado em: 12 jan. 2024. Disponível em: <<<https://www.codevasf.gov.br/area-de-atuacao/bacia-hidrografica/sao-francisco>>>.
- DANTAS, S. P. Dimensionamento e gestão de reservatórios: Breve discussão acerca da experiência do estado do Ceará/Brasil. *Revista Verde Grande: Geografia e Interdisciplinaridade*, v. 2, n. 01, p. 25–36, 2020.
- DEVORE, J. L. et al. *Modern mathematical statistics with applications*. [S.l.]: Springer, 2012. v. 285.

- FLETCHER, S.; PONNAMBALAM, K. Estimation of reservoir yield and storage distribution using moments analysis. *Journal of Hydrology*, v. 182, n. 1-4, p. 259–275, 1996.
- FLETCHER, S.; PONNAMBALAM, K. Reservoir design optimisation using new storage moments equations. In: *Proceedings of Water Down Under 2008*. [S.l.]: Engineers Australia; Causal Productions Modbury, SA, 2008. p. 1762–1770.
- FRANCO, C. S. et al. Distribuição de probabilidades para precipitação máxima diária na bacia hidrográfica do Rio Verde, Minas Gerais. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, SciELO Brasil, v. 18, p. 735–741, 2014.
- HASHIMOTO, T.; STEDINGER, J. R.; LOUCKS, D. P. Reliability, resiliency, and vulnerability criteria for water resource system performance evaluation. *Water Resources Research*, v. 18, n. 1, p. 14–20, 1982.
- HURST, H. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American society of civil engineers*, American Society of Civil Engineers, v. 116, 1951.
- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, v. 6, n. 3, p. 255–259, 1980.
- JOODAVI, A. et al. Groundwater management under uncertainty using a stochastic multi-cell model. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 551, p. 265–277, 2017.
- KLEMEŠ, V. Storage mass-curve analysis in a systems-analytic perspective. *Water Resources Research*, v. 15, n. 2, p. 359–370, 1979.
- KLEMEŠ, V. One hundred years of applied storage reservoir theory. *Water Resources Management*, v. 1, p. 159–175, 1987.
- KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 46, n. 1-2, p. 79–88, 1980.
- KURIA, F. W.; VOGEL, R. M. A global water supply reservoir yield model with uncertainty analysis. *Environmental Research Letters*, v. 9, n. 9, p. 095006, 2014.
- LIMA, A. C. C.; CELESTE, A. B.; CAI, X. A mixed-integer linear optimization model for reservoir sizing incorporating performance measures: Deterministic and stochastic frameworks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 148, n. 7, p. 04022036, 2022.
- LOUCKS, D. P.; BEEK, E. V. *Water resource systems planning and management: An introduction to methods, models, and applications*. Gewerbestrasse, Suíça: Springer, 2017.
- MAHOOTCHI, M.; PONNAMBALAM, K. Parambikulam-aliyar project operations optimization with reliability constraints. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 139, n. 4, p. 364–375, 2013.
- MCMAHON, T.; MEIN, R. G. *Reservoir capacity and yield*. New York, N. Y: Elsevier, 1978.
- MCMAHON, T. A.; ADELOYE, A. J. *Water resources yield*. Highlands Ranch, Colorado: Water Resources Publication, 2005.
- MCMAHON, T. A. et al. Revisiting reservoir storage–yield relationships using a global streamflow database. *Advances in Water Resources*, v. 30, n. 8, p. 1858–1872, 2007.

- MCMAHON, T. A. et al. Revisiting reservoir storage-yield relationships using a global streamflow database. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 30, n. 8, p. 1858–1872, 2007.
- MCMAHON, T. A. et al. Global streamflows - part 2: Reservoir storage-yield performance. *Journal of Hydrology*, v. 347, n. 3, p. 260–271, 2007.
- MORAN, P. A probability theory of dams and storage systems. *Aust. Jour. App. Sci.*, v. 5, p. 116–124, 1954.
- MOUSAVI, S. J. et al. Enhancements to explicit stochastic reservoir operation optimization method. *Advances in Water Resources*, v. 169, p. 104307, 2022.
- NAGY, I. V.; ASANTE-DUAH, K.; ZSUFFA, I. *Hydrological dimensioning and operation of reservoirs: practical design concepts and principles*. Dordrecht: Springer Science Business Media, v.39, 2002.
- NASH, J.; SUTCLIFFE, J. River flow forecasting through conceptual models part I – a discussion of principles. *Journal of Hydrology*, v. 10, n. 3, 1970.
- PEIXOTO, L. S. *Derivação de regras operacionais de proteção contra déficits de suprimento de sistemas de reservatórios via algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006.
- RANI, D.; MOREIRA, M. M. Simulation–optimization modeling: a survey and potential application in reservoir systems operation. *Water Resources Management*, v. 24, p. 1107–1138, 2010.
- RAO, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2019.
- RIPPL, W. The capacity of storage-reservoirs for water-slpply.(including plate). In: THOMAS TELFORD-ICE VIRTUAL LIBRARY. *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. [S.l.], 1883. v. 71.
- SANTANA, R. *Avaliação de estratégias de otimização estocástica para operação de reservatórios de pequena, média e grande escalas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, 2019.
- SANTOS, J. A. de S.; CELESTE, A. B. Curvas-guia operacionais de reservatório sergipano derivadas por otimização estocástica implícita e regressão não linear. *Scientia cum Industria*, v. 4, n. 1, p. 32–37, 2016.
- SILVA, A. T.; PORTELA, M. M. Stochastic assessment of reservoir storage-yield relationships in portugal. *Journal of Hydrologic Engineering*, v. 18, n. 5, p. 567–575, 2013.
- SILVA, A. T. C. d. F. *Design of the storage capacity of artificial reservoirs*. Tese (Doutorado) — University of Libson, 2010.
- SIMONOVIC, S. P. Reservoir systems analysis: closing gap between theory and practice. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 118, n. 3, 1992.
- SVANIDZE, G. G. *Mathematical Modeling of Hydrologic Series (for Hydroelectric and Water Resources Computations)*. Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications, 1980.

THOMAS, H. A.; FIERING, M. Mathematical synthesis of stream-flow sequences for the analysis of river basins by simulation. In: Design of Water Resource Systems. *Org. por Maass et al.* Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1962. p. 459–493.

TUCCI, C. *Hidrologia: ciência e aplicação*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2007.

VOGEL, R. M.; STEDINGER, J. R. Generalized storage-reliability-yield relationships. *Journal of Hydrology*, v. 89, n. 3, p. 303–327, 1987.