



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Continuação de órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler no plano

Macelino Tenório Neto

SÃO CRISTÓVÃO – SE
SETEMBRO DE 2023

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Continuação de órbitas periódicas em perturbações
simétricas do problema de Kepler no plano

por

Macelino Tenório Neto

sob a orientação do

Prof. Dr. Angelo Alberti

São Cristóvão – SE
setembro de 2023

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

T312c Tenório Neto, Macelino.
Continuação de órbitas periódicas em perturbações simétricas
do problema de Kepler no plano / Macelino Tenório Neto ;
orientador Ângelo Alberti. – São Cristóvão, SE, 2023.
121 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade
Federal de Sergipe, 2023.

1. Órbitas. 2. Sistemas hamiltonianos. 3. Simetria (Matemática).
4. Mecânica celeste. 5. Matrizes (Matemática). I. Alberti, Ângelo,
orient. II. Título.

CDU 517.938



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler no plano

por

Macelino Tenório Neto

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Angelo Alberti - UFS
Orientador

Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Jose Claudio Vidal Diaz - UBIOBIO
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Setembro de 2023

A Deus e a minha família.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus pelo fôlego de vida que me deste e por ter me ajudado a concluir esta dissertação;
- Agradeço ao meu professor orientador Dr. Angelo Alberti pela excelente orientação e pela paciência que teve comigo;
- Agradeço aos meus pais e meu irmão por todo apoio fornecido a mim durante o mestrado;
- Agradeço aos professores Dr. Cláudio Vidal e Dr. Gerson Cruz Araújo por fazerem parte da banca examinadora;
- Agradeço a todos os professores do Promat que ministraram aulas para mim.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo o estudo das órbitas periódicas simétricas em perturbações simétricas do problema de Kepler no plano. O estudo começa com uma introdução aos sistemas Hamiltonianos, coordenadas simpléticas e ao problema de Kepler. Em seguida, explora o uso das reflexões em relação aos eixos coordenados (simetrias) para encontrar soluções periódicas em sistemas Hamiltonianos planares perturbados. O foco principal é estabelecer condições suficiente para a existência de soluções periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler, incluindo o problema de Kepler em coordenadas giratórias. Utilizando o método de continuação analítica de Poincaré e boas coordenadas, a dissertação estabelece condições suficientes para obter soluções periódicas simétricas próximas às soluções elípticas ou circulares do problema de Kepler não perturbado. Além disso, a dissertação apresenta duas aplicações práticas para os resultados obtidos. A primeira aplicação envolve um problema perturbado do problema de Kepler que descreve a interação entre átomos, considerando um potencial Coulombiano com carga negativa e um potencial de Buckingham anisotrópico generalizado, onde a anisotropia é tratada como um pequeno parâmetro perturbador. A segunda aplicação aborda o problema de uma partícula atraída pela força gravitacional de um disco circular massivo não homogêneo em rotação constante. Este problema é descrito como uma perturbação do problema de Kepler em coordenadas giratórias, onde o raio é tratado como um parâmetro perturbador. A dissertação contribui para o entendimento das órbitas periódicas simétricas em sistemas gravitacionais perturbados e tem aplicações importantes em áreas como a dinâmica celeste.

Palavras-chave: Problema de Kepler; Método da Continuação analítica de Poincaré; Simetrias, Soluções Periódicas.

Abstract

This dissertation aims to study symmetric periodic orbits in symmetric perturbations of the Kepler problem in the plane. The study begins with an introduction to Hamiltonian systems, symplectic coordinates, and the Kepler problem. It then explores the use of reflections with respect to coordinate axes (symmetries) to find periodic solutions in perturbed planar Hamiltonian systems.

The main focus is to establish sufficient conditions for the existence of periodic solutions in symmetric perturbations of the Kepler problem, including the Kepler problem in rotating coordinates. Utilizing Poincaré's method of analytic continuation and suitable coordinates, the dissertation establishes sufficient conditions for obtaining symmetric periodic solutions close to elliptical or circular solutions of the unperturbed Kepler problem.

Furthermore, the dissertation presents two practical applications for the obtained results. The first application involves a perturbed Kepler problem describing the interaction between atoms, considering a Coulomb potential with negative charge and a generalized anisotropic Buckingham potential, where anisotropy is treated as a small perturbing parameter. The second application addresses the problem of a particle attracted by the gravitational force of a non-homogeneous, uniformly rotating massive circular disk. This problem is described as a perturbation of the Kepler problem in rotating coordinates, where the radius is treated as a perturbing parameter.

The dissertation contributes to the understanding of symmetric periodic orbits in perturbed gravitational systems and has significant applications in areas such as celestial dynamics.

Keywords: Kepler Problem; Poincaré's Analytical Continuation Method; Symmetries, Periodic Orbits.

Conteúdo

Introdução	1
1 Definições e Resultados Básicos	4
1.1 Sistemas Hamiltonianos	4
1.1.1 Sistemas Hamiltonianos Lineares	7
1.1.2 Sistemas mecânicos	9
1.2 Transformações Simpléticas	11
1.2.1 Matrizes simpléticas	11
1.2.2 Espectro de matrizes simpléticas	14
1.2.3 Transformações simpléticas	15
1.3 O colchete de Poisson	19
1.4 Funções Geradoras	20
1.4.1 Exemplos de funções geradoras	22
2 O Problema de Kepler	24
2.1 O problema de N -corpos	24
2.2 O problema de 2-corpos e o problema de Kepler	25
2.2.1 Anomalia excêntrica e Anomalia verdadeira	30
2.3 O Problema de Kepler planar em coordenadas de Delaunay e Poincaré	32
3 Órbitas Periódicas e o Método de continuação analítica de Poincaré	41
3.1 Uma perturbação de um centro em $\mathbb{R}^2$	41
3.1.1 Equação de Van der Pool	45
3.2 O método de continuação analítica em sistemas Hamiltonianos	46
4 Órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler	52
4.1 Órbitas periódicas próximas a soluções circulares do problema de Kepler	53
4.2 Órbitas periódicas próximas a soluções elípticas do problema de Kepler	63
5 Órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	68
5.1 Continuação de soluções circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias	69
5.2 Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	77

6	Aplicações	83
6.1	O problema generalizado e anisotrópico de dois corpos com potencial de Buckingham	83
6.2	O problema de um disco não homogêneo com densidade de massa radial	97
6.2.1	Formulação do problema do movimento de uma partícula devido a força gravitacional do disco circular com densidade radial	98
6.2.2	O problema como perturbação do problema de Kepler em coordenadas giratórias	101
6.2.3	Soluções periódicas simétricas no problema planar do disco não homogêneo girante	104
7	Apêndice	105
7.0.1	A vizinhança de algumas soluções do problema de Kepler	105
	Referências Bibliográficas	109

Introdução

O objetivo desta dissertação é o estudo das órbitas periódicas simétricas em sistemas hamiltonianos analíticos planares com simetria, que são perturbações simétricas do problema de Kepler no plano. A importância de estudar sistemas hamiltonianos perturbados reside na compreensão das sutilezas e dos efeitos das perturbações, que podem surgir devido a forças externas, imperfeições no sistema, interações com outros sistemas, entre outros fatores. Essas perturbações podem ter um impacto significativo na dinâmica do sistema e levar a comportamentos complexos e imprevisíveis.

Determinaremos condições suficientes para a existência de órbitas periódicas cujo período seja conhecido, assumindo que o sistema hamiltoniano possui reflexões em relação aos eixos de coordenadas (eixo x e eixo y).

Mais precisamente, nossa análise objetiva estudar o sistema Hamiltoniano (na verdade, sistema mecânico) associado à função Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^2 \mathcal{H}_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon). \quad (1)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_r$ são funções analíticas. Este estudo é motivado por diferentes problemas na Mecânica Celeste, como por exemplo, em problemas de atração gravitacional de uma partícula infinitesimal por um corpo massivo (com distribuição de massa uniforme ou não), na forma de um anel circular, um disco, ou um segmento finito (veja [1] e [4] e as referências citadas nestes artigos). Nestes problemas, é possível introduzir um pequeno parâmetro que transforma o problema em uma perturbação do problema de Kepler, onde a força principal é devida ao potencial gravitacional Kepleriano. Estes problemas geralmente são modelados por sistemas hamiltonianos com três graus de liberdade, mas geralmente, possuem simetrias que tornam o plano xy um espaço invariante, o que define um subproblema planar a ser considerado.

O segundo caso que consideramos, consiste no sistema Hamiltoniano associado à função

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon K_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^2 \mathcal{K}_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon). \quad (2)$$

onde $K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ é a função Hamiltoniana do problema de Kepler em coordenadas giratórias e $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_r$ são funções analíticas. Alguns problemas com a forma dada em (1) podem ser escritos na forma do problema dado por (2) sempre que o primeiro é invariante por rotações em torno da origem. Por outro lado, existem outros problemas (veja por exemplo a aplicação dada na seção 6.2) cuja formulação já é dada como em (2).

A técnica usada neste trabalho consiste no uso do método da continuação analítica, que remonta a Poincaré, que estudou a existência de soluções periódicas no problema dos três corpos usando o método que agora é chamado de método de continuação de Poincaré [30].

Nesta dissertação obtemos soluções periódicas em sistemas Hamiltonianos que são perturbações do problema de Kepler integrável com 2 graus de liberdade. Nossos resultados combinam as simetrias discretas do problema e o método de continuação de Poincaré, fazendo uso (necessário) da primeira aproximação das soluções do sistema Hamiltoniano completo, fornecida por um sistema variacional. Consideramos diferentes tipos de perturbações, simetrias, e perturbações do problema de Kepler em coordenadas giratória e não giratórias. Além disso, o conjunto de coordenadas (coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay) que usamos em nossa abordagem nos permite estabelecer condições suficientes para continuar diferentes soluções Keplerianas.

O método desenvolvido nesta dissertação usa conceitos simples e construções geométricas, embora os detalhes técnicos às vezes sejam um pouco tediosos. No entanto, fornecemos a maioria dos detalhes nas diferentes situações analisadas, a fim de esclarecer as diferenças substanciais que surgem na prova dos diferentes resultados. Além disso, ao final da dissertação, apresentamos duas aplicações nas quais explicamos em detalhes como aplicar os resultados obtidos.

Para atingir nossos objetivos, no capítulo 1, apresentamos alguns resultados básicos importantes que serão utilizados durante este trabalho. Começamos com uma introdução aos sistemas Hamiltonianos e suas propriedades e estudamos alguns casos particulares: sistemas lineares e os sistemas mecânicos. Em seguida, apresentamos a teoria das transformações simpléticas, com alguns resultados e exemplos. Por fim, abordamos o estudo das funções geradoras e forneceremos alguns exemplos envolvendo essas funções.

No capítulo 2, formulamos o problema de N-corpos e, a partir dele, formularemos o problema de Kepler. Apresentamos algumas definições, as três leis de Kepler e o estudo das anomalias do problema de Kepler. Em seguida, introduziremos as coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay, fazendo uso das funções geradoras nesse processo. Por fim, trataremos o problema de Kepler nessas coordenadas e caracterizaremos as soluções desse problema nessas coordenadas.

No capítulo 3, discutiremos o Método de continuação analítica de Poincaré. Inicialmente, estudamos esse método para equações diferenciais ordinárias, incluindo uma aplicação à equação de Van der Pol. Em seguida, discutiremos o método para sistemas Hamiltonianos, introduzindo as simetrias S_1 e S_2 , que são reflexões em relação aos eixos coordenados x e y , respectivamente. Apresentaremos resultados que permitem simplificar a obtenção de soluções periódicas usando essas simetrias (uma delas ou ambas) de reflexão. Finalmente, apresentamos um resultado técnico que nos fornecerá uma aproximação das soluções do sistema perturbado de equações diferenciais ordinárias, escritas em série de Taylor em ϵ , de tal forma que a primeira aproximação seja a solução do problema não perturbado ($\epsilon = 0$).

No capítulo 4, inicialmente descreveremos as simetrias de reflexão nas coordenadas de Delaunay e em coordenadas de Poincaré-Delaunay. Em seguida, caracterizaremos uma solução simétrica do problema de Kepler e nas coordenadas de Delaunay ou nas coordenadas de Poincaré-Delaunay. Além disso, obtemos um resultado importante que nos fornecerá a aproximação das

soluções em séries do problema completo perturbado. Apresentaremos e demonstraremos três teoremas para órbitas periódicas simétricas (com uma simetria ou ambas as simetrias) próximas a soluções circulares do problema de Kepler em sistemas perturbados (1). Também apresentaremos um teorema para a continuação de soluções periódicas com uma das simetrias e próximas a soluções elípticas do problema de Kepler. Em todos os resultados, obtemos soluções periódicas simétricas com período fixo, o mesmo da solução Kepleriana associada.

No capítulo 5, demonstramos um resultado que caracteriza a solução do Problema perturbado em coordenadas giratórias. Após, enunciamos e demonstramos três teoremas para continuação de órbitas circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias para perturbações simétricas do tipo (2). Nestes teoremas, todas as soluções periódicas obtidas têm período conhecido, o mesmo da órbita Kepleriana associada. Por último, apresentamos mais três teoremas para continuação de órbitas elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias a fim de obter soluções periódicas simétricas do problema (2). Ao contrário dos casos anteriores, neste último, não somos capazes de obter soluções periódicas com o mesmo período da solução Kepleriana.

No capítulo 6, apresentamos duas aplicações de sistemas Hamiltonianos simétricos planares que são perturbações do problema de Kepler. Como uma perturbação do problema de Kepler clássico, apresentamos o problema generalizado e anisotrópico de dois corpos com potencial de Buckingham. Este problema consiste em uma perturbação do problema de Kepler que descreve a interação entre átomos, considerando um potencial Coulombiano com carga negativa e um potencial de Buckingham anisotrópico generalizado, onde a anisotropia é tratada como um pequeno parâmetro. Como o problema não é invariante por rotações em torno do eixo z , utilizamos os resultados do capítulo 4 e provamos a existência de órbitas periódicas e simétricas deste problema, próximas a soluções circulares e elípticas do problema de Kepler. Para as perturbações do problema de Kepler em coordenadas giratórias, consideramos o problema de um disco circular não homogêneo com densidade de massa radial que está girando com velocidade angular constante. Introduzindo um parâmetro perturbador (o raio do disco), o problema que descreve o movimento de uma partícula atraída pela força gravitacional devido ao disco massivo é descrito por um sistema hamiltoniano cuja função hamiltoniana é do tipo dada em (2).

No capítulo 7, apresentamos alguns resultados técnicos que são indispensáveis para aplicação dos resultados do Capítulo 6. Estes resultados, fornecem a expressão para a norma do vetor posição da partícula no problema perturbado em uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler e em coordenadas de Poincaré-Delaunay.

Capítulo 1

Definições e Resultados Básicos

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos necessários para a compreensão dos resultados das seções posteriores, como Sistemas Hamiltonianos, Transformações simpléticas e Funções geradoras.

Iniciamos este capítulo com definições e exemplos de sistemas Hamiltonianos, descrevendo os princípios básicos que regem os mesmos. A principal característica de um sistema Hamiltoniano é conservação de energia, propriedade essencial para compreender as características das órbitas periódicas em sistemas físicos. Isso se dá pois a função Hamiltoniana do sistema descreve a energia total do mesmo e é preservada ao longo do tempo.

Apois isso, estudaremos as transformações simpléticas, e por último as funções geradoras. As transformações simpléticas desempenham um papel muito importante na preservação das propriedades dinâmicas dos sistemas Hamiltonianos, enquanto que as funções geradoras desempenham um papel crucial na formulação das transformações simpléticas.

A principal referência utilizada neste capítulo foi [20].

1.1 Sistemas Hamiltonianos

Nesta seção vamos estudar conceitos e resultados básicos sobre sistemas Hamiltonianos.

Definição 1.1 *Um sistema Hamiltoniano (equações do movimento) em $\mathbb{R}^{2n}$ é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias expressas por*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}};\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde a função $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$ é uma função diferenciável definida no conjunto aberto $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. A função H é chamada de função hamiltoniana, os vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ e $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ são os vetores posição e os vetores momentos, respectivamente, o inteiro n positivo é o grau de liberdade do sistema e t geralmente representa o tempo.

O espaço de dimensão n onde estão definidos os vetores posições é dito ser espaço de configuração e o espaço de dimensão $2n$ onde os vetores posições e os vetores momentos estão definidos é o

espaço de fase. Os vetores $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ são conjugados: $\mathbf{p}$ é conjugado a $\mathbf{q}$. Sejam

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{H} = \nabla \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}_{2n}} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

onde 0 é a matriz nula de ordem n e $\mathbb{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n . O sistema (1.1) pode ser reescrito da forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \nabla \mathcal{H}(\mathbf{z}, t) \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbb{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}} \right)^T. \quad (1.3)$$

A matriz $\mathbb{J}$ apresenta as seguintes propriedades:

- i) é anti-simétrica pois $\mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$,
- ii) é ortogonal pois $\mathbb{J}^T = \mathbb{J}^{-1}$,
- iii) $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}_{2n}$ e $\det \mathbb{J} = 1$.

O teorema de existência e unicidade de EDOs nos diz que para cada $(t_0, \mathbf{z}_0) \in \Omega$, existe uma única solução $\mathbf{z} = \varphi(t, t_0, \mathbf{z}_0)$ de (1.3) definida em t numa vizinhança próxima de t_0 satisfazendo a condição inicial $\varphi(t_0, t_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$. A função φ tem como domínio uma vizinhança aberta $\mathbb{O}$ de $(t_0, t_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ e como contradomínio o conjunto $\mathbb{R}^{2n}$.

O sistema (1.3) é dito ser *autônomo* quando H não depende de t e é dito ser *não autônomo* quando H depende de t . Para os sistemas autônomos vale a igualdade

$$\varphi(t - t_0, 0, \mathbf{z}_0) = \varphi(t_0, t_0, \mathbf{z}_0),$$

pois ambas satisfaz a equação (1.3) com a mesma condição inicial. Dessa forma, podemos assumir que a solução não depende de t_0 e a escrevemos meramente como $\varphi(t, \mathbf{z}_0)$ já que $\varphi(0, \mathbf{z}_0) = 0$. As soluções, que chamamos de órbitas, são descritas como curvas parametrizadas em $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, e o conjunto Ω é o espaço de fase. Agora, introduziremos o conceito de integral primeira de um sistema Hamiltoniano (1.3).

Definição 1.2 Uma integral primeira para o sistema (1.3) é uma função de classe C^∞ (ou suave) $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$, que é constante ao longo das soluções do sistema (1.3), isto é,

$$\frac{dH}{dt}(\varphi(t, \mathbf{z}_0)) = 0, \quad \text{para todo } t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

onde $\varphi(t, \mathbf{z}_0)$ é a solução do sistema (1.3) com condição inicial $\varphi(0, \mathbf{z}_0) = 0$.

Suponhamos que o sistema (1.3) seja autônomo. Isso implica que a função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ é uma integral primeira, pois

$$\dot{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i} \dot{\mathbf{p}}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}_i} \right) = 0,$$

para todo t . Dessa forma, $\mathcal{H}$ é uma quantidade conservada ou uma constante de movimento. Quando isso acontece dizemos que o sistema Hamiltoniano (1.3) é conservativo, e $\mathcal{H}$ representa a energia do sistema. A superfície (ou variedade) de energia é representada pelo conjunto

$$\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U / \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\}, \quad (1.5)$$

onde h é um valor real arbitrário. Como $\mathcal{H}$ é uma integral primeira então as soluções estão contidas numa superfície de energia, ou seja, se $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ é uma solução de (1.3) então $\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = h$, onde h pode ser qualquer valor real dependendo da solução. Isso implica que Σ_h é um conjunto invariante. O conjunto Σ_h é chamado de superfície de energia porque o espaço de fase dado por esse conjunto pode não ser um espaço euclidiano, como uma esfera, um toro, ou outra variedade diferenciável que tenha estrutura não euclidiana. Em um sistema autônomo uma solução $\mathbf{z}_1$ é de equilíbrio se, e somente se, é um ponto crítico de $\mathcal{H}$, ou seja, $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{z}_1) = 0$. Em um sistema não autônomo, uma solução $\mathbf{z}_1$ é de equilíbrio se $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{z}^*, t) = 0$ para todo t .

Vamos terminar esta seção com um exemplo de sistema Hamiltoniano. No capítulo 2 vamos estudar com mais detalhes um sistema Hamiltoniano clássico.

Exemplo 1.1 Oscilador não-linear forçado *Este problema fundamenta-se no estudo de sistemas massa-mola, sem amortecimento, no qual é aplicado uma força externa $g(t)$. Dessa forma, a equação do movimento é dada por*

$$\ddot{x} + f(x) = g(t) \quad (1.6)$$

onde x é um número real e f, g são funções reais diferenciáveis. Esse sistema Hamiltoniano é dito ser linear se a função $f(x)$ é linear, e é não linear caso contrário. Suponhamos que o sistema seja não linear. Assim, a função Hamiltoniana associada a este sistema é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 + F(x) - xg(t)$$

onde $y = \dot{x}$ e $F(x) = \int_0^x f(s)ds$. Listamos a seguir, alguns exemplos destes sistemas:

- (i) O oscilador harmônico : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$,
- (ii) O problema do pêndulo : $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$.

Quando o sistema tem amortecimento, existe um fator da forma $\gamma \dot{x}$ na equação de segunda ordem. Um exemplo deste sistema é:

- (iii) A equação de Duffing: $\ddot{x} + \dot{x} + \alpha x^3 = \cos \omega t$.

Exemplo 1.2 Oscilador Harmônico *Consideremos uma massa m presa a uma mola. A lei de Hooke nos diz que a força F que a mola exerce sobre a massa é diretamente proporcional ao deslocamento x da mola a partir do ponto de equilíbrio. Como a força F está no sentido contrário ao deslocamento, temos que $F = -kx$, onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola. Fazendo $k = \omega^2$ e aplicando a segunda lei de Newton temos*

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (1.7)$$

A função Hamiltoniana associada a este sistema é descrita por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, y) = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2),$$

onde $y = \frac{\dot{x}}{\omega}$.

1.1.1 Sistemas Hamiltonianos Lineares

Um sistema Hamiltoniano linear é um sistema com $2n$ equações diferenciáveis ordinárias representado por

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{H}(\mathbf{z}, t) = \mathbb{J} S(t) \mathbf{z} = A(t) \mathbf{z} \quad (1.8)$$

onde a função Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S(t) \mathbf{z}, \quad (1.9)$$

e as matrizes S e A são definidas por

$$S = S^T \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) \text{ e } A(t) = \mathbb{J} S(t).$$

A função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ definida em (1.9) é uma forma quadrática em $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$, onde os coeficientes são contínuos em $t \in I$. Se a matriz S é independente de t , $\mathcal{H}$ também é independente de t e, conseqüentemente, $\mathcal{H}$ é uma integral primeira para o sistema (1.8).

Definição 1.3 Uma matriz $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é Hamiltoniana se, e somente se, $A^T \mathbb{J} + \mathbb{J} A = 0$.

Um resultado que dá uma caracterização das matrizes Hamiltonianas é o seguinte teorema:

Teorema 1.1 As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A é Hamiltoniana.
- (ii) $A = \mathbb{J} A^T \mathbb{J}$
- (iii) $A = \mathbb{J} R$, onde R é simétrica.
- (iv) $\mathbb{J} A$ é simétrica.

Demonstração: O fato de que (i) implica (ii) segue da propriedade $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}_{2n}$, de fato

$$A^T \mathbb{J} + \mathbb{J} A = 0 \Rightarrow A^T \mathbb{J} = -\mathbb{J} A \Rightarrow \mathbb{J} A^T \mathbb{J} = -\mathbb{J}^2 A = -(-\mathbb{I}_{2n}) A = A$$

Para mostrar que (ii) implica (iii), vamos tomar $R = A^T \mathbb{J}$. Observemos que

$$R^T = \mathbb{J}^T A = -\mathbb{J}(\mathbb{J} A^T \mathbb{J}) = A^T \mathbb{J} = R,$$

Assim, $A = \mathbb{J} R$, e R é simétrica.

Agora, vamos mostrar que (iii) implica (iv). Observemos que $\mathbb{J} A = \mathbb{J}^2 R = -R$. Assim, $\mathbb{J} A$ é

simétrica.

Por último, mostraremos que (iv) implica (i). Como $\mathbb{J}A$ é simétrica, temos que

$$\mathbb{J}A = (\mathbb{J}A)^T = A^T \mathbb{J}^T = -A^T \mathbb{J} \Rightarrow A^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A = 0$$

Portanto, A é Hamiltoniana. ■

A matriz dos coeficientes de um sistema Hamiltoniano linear é uma matriz Hamiltoniana. Esse resultado advem do último teorema e das definições de sistemas Hamiltonianos.

Apresentamos a seguir um resultado importante de sistemas Hamiltonianos lineares:

Proposição 1.1 *O polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é uma função par.*

Demonstração: Seja

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{J}S - \lambda \mathbb{J}), \quad (1.10)$$

o polinômio característico da matriz Hamiltoniana A , onde $A = \mathbb{J}S$ e S é uma matriz simétrica. Agora, provaremos que p é par. De fato

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbb{J}S - \lambda \mathbb{I}_{2n}) = \det(\mathbb{J}S - \lambda \mathbb{I}_{2n})^T = \det(S^T \mathbb{J}^T - \lambda \mathbb{I}_{2n}) \\ &= \det(-S \mathbb{J} - \lambda \mathbb{I}_{2n}) = \det(\mathbb{J}^2 S \mathbb{J} + \lambda \mathbb{J} \mathbb{I}_{2n} \mathbb{J}) = \det[\mathbb{J}(\mathbb{J}S + \lambda \mathbb{I}_{2n})\mathbb{J}] \\ &= \det \mathbb{J} \det(\mathbb{J}S + \lambda \mathbb{I}_{2n}) \det \mathbb{J} = \det(\mathbb{J}S + \lambda \mathbb{I}_{2n}) \\ &= p(-\lambda). \end{aligned}$$

Essa proposição nos diz que a equação (1.10), contém apenas potências pares de λ . Assim, se o polinômio característico tem uma raiz do tipo $\lambda = \alpha + i\beta$, então $\lambda = -\alpha - i\beta$ também é raiz desse polinômio. Se 0 é um autovalor, então tem multiplicidade par. Como A é uma matriz com coeficientes reais, então $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de A . Portanto, se λ é autovalor de A então $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ também são autovalores de A . ■

Teorema 1.2 *Sejam A e B matrizes Hamiltonianas de mesma ordem. Então A^T , αA ($\alpha \in \mathbb{R}$), $A \pm B$ e $[A, B] = AB - BA$ também são Hamiltonianas.*

Demonstração: A matriz A^T é Hamiltoniana pois

$$(A^T)^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A^T = A \mathbb{J} + \mathbb{J}A^T = (\mathbb{J}A^T \mathbb{J}) \mathbb{J} + \mathbb{J}A^T = -\mathbb{J}A^T + \mathbb{J}A^T = 0.$$

Para mostrar que αA , é Hamiltoniana basta ver que

$$(\alpha A)^T \mathbb{J} + \mathbb{J}(\alpha A) = \alpha(A^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A) = 0.$$

Agora, como

$$(A \pm B)^T \mathbb{J} + \mathbb{J}(A \pm B) = (A^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A) \pm (B^T \mathbb{J} + \mathbb{J}B) = 0,$$

segue que $A \pm B$ é Hamiltoniana.

Por último, mostraremos que o comutador $[A, B] = AB - BA$ é uma matriz Hamiltoniana.

Sejam $A = \mathbb{J}R$ e $B = \mathbb{J}S$, onde R e S são matrizes simétricas. Assim, $[A, B] = AB - BA = \mathbb{J}(R\mathbb{J}S - S\mathbb{J}R) = \mathbb{J}P$. Como $P^T = S^T\mathbb{J}^TR^T - R^T\mathbb{J}^TS^T = -S\mathbb{J}R + R\mathbb{J}S = P$, segue que $[A, B]$ é Hamiltoniana. ■

O comutador $[A, B]$ é chamado de Colchete de Lie entre A e B . Por este teorema, o conjunto $sp(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ é Hamiltoniana}\}$ é um álgebra de Lie.

Agora, determinaremos algumas condições para que uma matriz seja Hamiltoniana. Primeiro faremos para o caso simples, quando a matriz tem ordem 2. Observemos que

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \text{ então } A^T\mathbb{J} + \mathbb{J}A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \delta \\ -\alpha - \delta & 0 \end{pmatrix},$$

isso implica que uma matriz A de ordem 2 é Hamiltoniana se, e somente se, seu traço é nulo.

No caso de uma matriz de ordem $2n$, escrevendo as entradas da matriz em forma de blocos, temos que

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ então } A^T\mathbb{J} + \mathbb{J}A = \begin{pmatrix} c - c^T & a^T + d \\ -a - d^T & b^T - b \end{pmatrix}.$$

Por estas informações obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.2 *A matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é Hamiltoniana se, e somente se, b e c são simétricos e $a^T + d = 0$.*

1.1.2 Sistemas mecânicos

Os sistemas mecânicos são sistemas Hamiltonianos conservativos representados pelas equações

$$\ddot{\mathbf{q}} = \nabla V(\mathbf{q}) \quad (1.11)$$

onde $V: \mathbb{R}^n \setminus S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e S representa o conjunto das singularidades de V . A função V é chamada de função potencial. A função Hamiltoniana associada a este sistema é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - V(\mathbf{q}). \quad (1.12)$$

Como foi dito anteriormente, a variável $\mathbf{q}$ é a posição do corpo e a variável $\mathbf{p}$ é o momento. O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus S$ é o espaço de configuração e $M = \mathbb{R}^n \setminus S \times \mathbb{R}^n$ é o espaço de fase correspondente ao fibrado cotangente da variedade $\mathbb{R}^n \setminus S$.

Como a função Hamiltoniana (1.12) é uma integral primeira para o sistema (1.11), ela define um conjunto invariante definido por

$$\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}^n \mid \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\} \quad (1.13)$$

para cada h real. Se cada h real é um valor regular para $\mathcal{H}$, então, aplicando o Teorema do Valor Regular, o conjunto Σ_h é uma variedade diferenciável de dimensão $2n - 1$, ou seja, é uma superfície de energia constante. Desse modo, se considerarmos as equações definidas pela função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ dado por (1.12) como um campo vetorial sobre Σ_h , então podemos

reduzir a dimensão em uma unidade. O fato da energia cinética ser não negativa implica que, sobre Σ_h , temos $-V(\mathbf{q}) \leq h$. Chamamos de *região de Hill* a projeção de Σ_h sobre o espaço de configurações, ou seja, são os pontos $\mathbf{q}$ que satisfazem a desigualdade anterior. Assim, se $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \in \Sigma_h$ é uma solução do sistema Hamiltoniano associado a $\mathcal{H}$, então, para todo t , $\mathbf{q}(t)$ está na região de Hill correspondente. Chamamos de *conjunto de velocidade zero* a fronteira da região $(-V = h)$, pois as coordenadas do momento $\mathbf{p}(t)$ são nulas. Para cada ponto $\mathbf{q}$ no interior da região de Hill, temos uma esfera contida no momento $\mathbf{p}(t)$ definida por

$$0 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 = h + V(\mathbf{q}). \quad (1.14)$$

O sistema mecânico associado com a função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ dada por (1.12) é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla V(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

A seguir apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 1.3 *As soluções de equilíbrio de um sistema mecânico (1.15) são dadas por $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ onde $\mathbf{q}_0$ é um ponto crítico de V e $\mathbf{p}_0 = 0$.*

Sabemos que o diferencial de uma função $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é nulo ou é sobrejetivo. Assim, o fato de que $\text{grad}\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \nabla V(\mathbf{q}))$, implica que $D\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv 0$ se, e somente se, $\mathbf{p} = 0$ e $\nabla V(\mathbf{q}) = 0$. Isso mostra que $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é uma solução de equilíbrio do sistema mecânico (1.15). Seja $\mathbf{q}_0$ um ponto crítico de V e seja $h^* = V(\mathbf{q}_0)$. Dessa forma, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.4 *Se $h \neq h^*$ então Σ_h é uma subvariedade diferenciável de M .*

Um *campo de vetores* de classe C^k em W é uma aplicação $X: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k .

Seja $R: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $R(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}, -\mathbf{p})$ uma reversibilidade ou involução reversa, e seja $X: U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ um campo vetorial de classe C^k . Vamos mostrar que um sistema mecânico sempre admite uma involução reversa. De fato, como R é um isomorfismo que satisfaz $R^2 = \text{id}$, temos que

$$\left(\frac{dX}{d\mathcal{H}} \circ R \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \right) \circ R(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, -\mathbf{p}), -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, -\mathbf{p}) \right) = (-\mathbf{p}, \nabla V(\mathbf{q}))$$

e

$$-\left(R \circ \frac{dX}{d\mathcal{H}} \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -R \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) = (-\mathbf{p}, \nabla V(\mathbf{q})).$$

Isso mostra que $\frac{dX}{d\mathcal{H}} \circ R = -R \circ \frac{dX}{d\mathcal{H}}$. Portanto,

Teorema 1.5 *Todo sistema mecânico (1.15) é reversível ou admite a involução reversa,*

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow (\mathbf{q}, -\mathbf{p}, -t)$$

.

1.2 Transformações Simpléticas

As transformações simpléticas têm uma grande relevância na teoria dos Sistemas Hamiltonianos, pois são uma mudança de coordenadas que preserva a estrutura hamiltoniana.

1.2.1 Matrizes simpléticas

Inicialmente estudaremos as transformações simpléticas lineares, que representam a forma mais simples de uma transformação simplética.

Definição 1.4 Uma matriz $T \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é dita ser simplética com multiplicador μ , ou μ -simplética se

$$T^T \mathbb{J} T = \mu \mathbb{J} \quad (1.16)$$

onde $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é uma constante. Quando $\mu = 1$, dizemos que T é simplética.

Observemos que se T é uma matriz simplética, então satisfaz $(\det T)^2 = 1$. De fato, temos

$$\det(T^T \mathbb{J} T) = \det \mathbb{J} \Rightarrow \det T^T \det \mathbb{J} \det T = 1 \Rightarrow \det T^T \det T = 1 \Rightarrow (\det T)^2 = 1.$$

Posteriormente, mostraremos que o determinante de todas as matrizes simpléticas é igual a 1. Representamos por $Sp(n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes simpléticas em $M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$.

Teorema 1.6

- (i) Se T é μ -simplética, então T é não singular e $T^{-1} = -\mu^{-1} \mathbb{J} T^T \mathbb{J}$;
- (ii) Se T e R são μ e ν simpléticas, respectivamente, então T^T , T^{-1} e TR são μ , μ^{-1} e $\mu\nu$ simpléticas, respectivamente.

Demonstração: (i) Seja T μ -simplética, ou seja, $T^T \mathbb{J} T = \mu \mathbb{J}$. Desta forma, temos

$$\det(T^T \mathbb{J} T) = \det \mu \mathbb{J} \Rightarrow \det T^T \det \mathbb{J} \det T = \mu^{2n} \det \mathbb{J} \Rightarrow (\det T)^2 = \mu^{2n} \Rightarrow \det T = \pm 1.$$

Isso mostra que T é não singular. Agora, manipulando a equação (1.16) temos que

$$T^T \mathbb{J} T = \mu \mathbb{J} \Rightarrow T^T \mathbb{J} = \mu \mathbb{J} T^{-1} \Rightarrow \mathbb{J} T^T \mathbb{J} = \mu \mathbb{J}^2 T^{-1} \Rightarrow \mathbb{J} T^T \mathbb{J} = -\mu T^{-1} \Rightarrow T^{-1} = -\mu^{-1} \mathbb{J} T^T \mathbb{J},$$

e concluímos a demonstração desse item.

(ii) Percebamos que podemos reescrever a expressão $T^{-1} = -\mu^{-1} \mathbb{J} T^T \mathbb{J}$ como $T^T = -\mu \mathbb{J} T^{-1} \mathbb{J}$. Agora, mostraremos que T^T é μ -simplética. De fato, temos que

$$(T^T)^T \mathbb{J} T^T = T \mathbb{J} T^T = T \mathbb{J} (-\mu \mathbb{J} T^{-1} \mathbb{J}) = -\mu T \mathbb{J}^2 T^{-1} \mathbb{J} = \mu T T^{-1} \mathbb{J} = \mu \mathbb{J},$$

isso mostra que T^T é μ -simplética. A matriz T^{-1} é μ^{-1} -simplética pois

$$(T^{-1})^T \mathbb{J} T^{-1} = (T^{-1})^T \mathbb{J} (-\mu^{-1} \mathbb{J} T^T \mathbb{J}) = -\mu^{-1} (T^T)^{-1} \mathbb{J}^2 T^T \mathbb{J} = \mu^{-1} (T^T)^{-1} T^T \mathbb{J} = \mu^{-1} \mathbb{J}.$$

Por último, mostraremos que TS é $\mu\nu$ -simplética. Com efeito, temos que

$$(TS)^T \mathbb{J}(TS) = S^T T^T \mathbb{J} TS = S^T \mu \mathbb{J} S = \mu S^T \mathbb{J} S = \mu \nu \mathbb{J},$$

e assim concluímos a demonstração. ■

Este teorema nos diz que o conjunto $Sp(n, \mathbb{R})$ é um grupo, além do mais, é um subgrupo de $GL(2n, \mathbb{R})$. Para as matrizes de ordem 2, consideremos a matriz

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$T^T \mathbb{J} T = \begin{pmatrix} \alpha^T & \gamma^T \\ \beta^T & \delta^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \\ -(\alpha\delta - \beta\gamma) & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz T é simplética se, e somente se, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, ou seja, se $\det T = 1$. Portanto, as matrizes de ordem 2 são simpléticas se, e somente se, possuem determinante igual a 1. Dessa forma, uma matriz simplética representa uma transformação linear que mantém orientação, área e volume.

Para as matrizes de orden $2n$, consideremos a matriz em forma de blocos

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$T^T \mathbb{J} T = \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix}.$$

A matriz T será simétrica se $a^T c = c^T a$, $b^T d = d^T b$ e $a^T d - c^T b = \mu \mathbb{I}$. Além disso, sua inversa será a matriz

$$T^{-1} = -\mu^{-1} \mathbb{J} T^T \mathbb{J} = -\mu^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} = \mu^{-1} \begin{pmatrix} d^T & -b^T \\ -c^T & a^T \end{pmatrix}.$$

Apartir destas informações obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.3 *Uma matriz*

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é μ -simplética se, e somente se, as matrizes $a^T c$ e $b^T d$ são simétricas e $a^T d - c^T b = \mu \mathbb{I}_n$. Além disso, sua inversa é dada pela matriz

$$T^{-1} = \mu^{-1} \begin{pmatrix} d^T & -b^T \\ -c^T & a^T \end{pmatrix}.$$

Consideremos o sistema Hamiltoniano linear (1.8). Seja T uma matriz μ -simplética. A matriz T induz uma mudança de coordenadas da forma $\zeta = Tz$. Dessa forma, temos que

$$\dot{\zeta} = T\dot{z} = TAz = TAT^{-1}Tz = TAT^{-1}\zeta.$$

A matriz TAT^{-1} é Hamiltoniana pois

$$\begin{aligned}
(TAT^{-1})^T \mathbb{J} + \mathbb{J}(TAT^{-1}) &= (T^{-1})^T A^T T^T \mathbb{J} + \mathbb{J}TAT^{-1} \\
&= -\mu^{-1}(\mathbb{J}T^T \mathbb{J})^T A^T T^T \mathbb{J} - \mu^{-1} \mathbb{J}TA \mathbb{J}T^T \mathbb{J} \\
&= -\mu^{-1} \mathbb{J}T \mathbb{J}A^T T^T \mathbb{J} - \mu^{-1} \mathbb{J}TA \mathbb{J}T^T \mathbb{J} \\
&= -\mu^{-1} \mathbb{J}T(\mathbb{J}A^T + A\mathbb{J})T^T \mathbb{J} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação

$$\dot{\zeta} = TA(t)T^{-1}\zeta, \quad (1.17)$$

representa um sistema Hamiltoniano linear. Assim, mostramos que uma mudança de coordenadas proveniente de uma matriz μ -simplética envia sistemas Hamiltonianos lineares em sistemas Hamiltonianos lineares.

Como (1.9) é a função Hamiltoniana do sistema (1.8), a função Hamiltoniana associada ao sistema Hamiltoniano linear (1.17) é dada por

$$\mathcal{H}(\zeta, t) = \frac{1}{2} \zeta^T \mathcal{S}(t) \zeta,$$

no qual

$$TA(t)T^{-1} = \mathbb{J}\mathcal{S}(t) \Leftrightarrow \mathcal{S}(t) = -\mathbb{J}TA(t)T^{-1} = \mu^{-1} \mathbb{J}TA(t) \mathbb{J}T^T \mathbb{J}.$$

A seguir, apresentamos um resultado relevante que caracteriza a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.

Teorema 1.7 *A matriz fundamental $Z(t, t_0)$ do sistema Hamiltoniano linear (1.8) é simplética para todo $t, t_0 \in I$. Recíprocamente, se $Z(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então Z é a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Seja $U(t) = Z(t, t_0)^T \mathbb{J} Z(t, t_0)$. Como $Z(t_0, t_0) = I$, segue que $U(t_0) = \mathbb{J}$. Derivando a função $U(t)$, temos que

$$\dot{U}(t) = \dot{Z}^T \mathbb{J} Z + Z^T \mathbb{J} \dot{Z} = (AZ)^T \mathbb{J} Z + Z^T \mathbb{J} (AZ) = Z^T A^T \mathbb{J} Z + Z^T \mathbb{J} A Z = Z^T (A^T \mathbb{J} + \mathbb{J} A) Z = 0.$$

Logo, $U(t)$ é constante, consequentemente, $U(t) = \mathbb{J}$ para todo $t \in I$. Portanto, temos

$$Z^T \mathbb{J} Z = \mathbb{J}.$$

Recíprocamente, vamos supor que $Z^T \mathbb{J} Z = \mathbb{J}$ para todo $t \in I$. Derivando obtemos

$$\dot{Z}^T \mathbb{J} Z + Z^T \mathbb{J} \dot{Z} = 0.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
(\dot{Z}Z^{-1})^T \mathbb{J} + \mathbb{J}(\dot{Z}Z^{-1}) &= (Z^{-1})^T \dot{Z}^T \mathbb{J} + \mathbb{J} \dot{Z} Z^{-1} \\
&= (Z^T)^{-1} (\dot{Z}^T \mathbb{J} Z) Z^{-1} + (Z^T)^{-1} (Z^T \mathbb{J} \dot{Z}) Z^{-1} \\
&= (Z^T)^{-1} (\dot{Z}^T \mathbb{J} Z + Z^T \mathbb{J} \dot{Z}) Z^{-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Isso implica que $A = \dot{Z}Z^{-1}$ é uma matriz Hamiltoniana, e multiplicando ambos os lados desta igualdade obtemos $\dot{Z} = AZ$. ■

Corolário 1.8 *A matriz constante $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, $e^{t\mathbf{A}}$ é uma matriz simplética para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Consideremos um sistema linear $\dot{Z} = \mathbf{A}Z$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante. Observemos que $Z(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ é uma matriz fundamental deste sistema. Pelo Teorema (1.7), $\mathbf{A}$ é uma matriz Hamiltoniana se, e somente se, a matriz $Z(t, t_0)$ é simplética. ■

1.2.2 Espectro de matrizes simpléticas

Proposição 1.4 *Seja T uma matriz simplética. Se λ é um autovalor de T então λ^{-1} também é um autovalor.*

Demonstração: Seja T uma matriz simplética, logo $T^T = -\mathbb{J}T^{-1}\mathbb{J}$, e seja λ um autovalor de T . Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
p_t(\lambda) &= \det (T - \lambda \mathbb{I}_{2n}) = \det (T^T - \lambda \mathbb{I}_{2n}) = \det (-\mathbb{J}T^{-1}\mathbb{J} + \lambda \mathbb{J}\mathbb{J}) \\
&= \det \mathbb{J}(-T^{-1} + \lambda \mathbb{I}_{2n})\mathbb{J} = \det \mathbb{J} \det (-T^{-1} + \lambda \mathbb{I}_{2n}) \det \mathbb{J} \\
&= \det \left(\lambda T^{-1} (T - \lambda^{-1} \mathbb{I}_{2n}) \right) = \lambda^{2n} \det T^{-1} \det (T - \lambda^{-1} \mathbb{I}_{2n}) \\
&= \pm \lambda^{2n} p_t(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

Como $p_t(\lambda) = 0$, segue que $p_t(\lambda^{-1}) = 0$ e, portanto, λ^{-1} é autovalor de T . ■

A Proposição 1.2.2 nos diz que se uma matriz simplética real possui um autovalor λ , então $-\lambda$, λ^{-1} e $-\lambda^{-1}$ também são autovalores. Além disso, λ^{-1} tem a mesma multiplicidade de λ , e, se 1 e -1 são autovalores, então possuem multiplicidade par. Diante disso, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.5 *O determinante das matrizes simpléticas é igual a 1.*

1.2.3 Transformações simpléticas

Definição 1.5 *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ ou $\mathbb{C}^{2n}$. Uma transformação de coordenadas $E: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ($\mathbb{C}^{2n}$) é dita ser simplética ou canônica se para cada $t \in I$ fixo, E é um difeomorfismo satisfazendo*

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \mathbb{J} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = \mathbb{J}. \quad (1.18)$$

Representaremos por $\zeta = E(\mathbf{z}, t)$ a mudança de coordenadas simpléticas, e por $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(E(\mathbf{z}, t), t) = \mathbf{Z}(\zeta, t)$ sua inversa. Além disso, utilizaremos a notação

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = E(\mathbf{z}, t) = E(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (1.19)$$

As transformações simpléticas lineares são importantes pois mantém a estrutura Hamiltoniana dos sistemas Hamiltonianos lineares. Observemos que, se definirmos a função transformada por

$$\mathcal{H}(\zeta, t) = \mathcal{H}((\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t) := \mathcal{H}(\mathbf{Z}(\zeta, t), t), \quad (1.20)$$

e fizermos $\mathcal{U} = E(U \times I)$ temos que

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \dot{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \mathbb{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \mathbb{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \mathbb{J} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \zeta}(\zeta, t) \\ &= \mathbb{J} \nabla_{\zeta} \mathcal{H}(\zeta, t) + \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t)|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta, t)}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

A notação que utilizamos no segundo termo da expressão acima, significa que primeiro temos que derivar em relação a t , e em seguida, aplicar em $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\zeta, t)$. Observemos que se E não depende de t , então temos que $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$. Neste caso, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.9 *A transformação de coordenadas simplética $\zeta = E(\mathbf{z}, t)$, que não possui a dependência de t , transforma o sistema Hamiltoniano (1.3) em um novo sistema Hamiltoniano dado por*

$$\dot{\zeta} = \mathbb{J} \nabla_{\zeta} \mathcal{H}(\zeta, t),$$

onde a função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ é definida por (1.20)

Agora, vamos analisar o caso onde a transformação simplética (1.18) é dependente de t . Para obter um resultado análogo ao anterior, vamos supor a propriedade topológica de que: o conjunto

$$\mathcal{U}_t := \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} / (\zeta, t) \in \mathcal{U} \times I\} \quad (1.22)$$

é uma bola em $\mathbb{R}^{2n}$ para cada t fixo. Nestas condições, mostraremos que existe uma função diferenciável $R : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que

$$\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t)|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta, t)} = \mathbb{J} \nabla_{\zeta} R(\zeta, t). \quad (1.23)$$

Portanto, apresentemos o seguinte resultado:

Teorema 1.10 *Suponhamos que a transformação de coordenadas $E(\mathbf{z}, t) = (\zeta, t)$ é simplética (pelo menos de classe C^2) e, além disso, o contradomínio $\mathcal{U} = E(U \times I)$ satisfaz a propriedade (1.22), então E transforma o sistema Hamiltoniano (1.3) em um novo sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana é definida por*

$$\mathcal{H}(\zeta, t) + R(\zeta, t).$$

Demonstração: Demonstraremos que a função diferenciável R é o gradiente de uma função diferenciável de valores reais. Mas, como $\mathcal{U}_t$ é simplesmente conexo, é suficiente mostrar ¹ que a seguinte função

$$\Gamma(\zeta, t) = \mathbb{J} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta, t)} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \zeta}(\zeta, t)$$

é simétrica, isto é, $\Gamma = \Gamma^T$. Derivando a expressão (1.18) em relação a t , obtemos

$$\frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \mathbb{J} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E^T}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \mathbb{J} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = 0,$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{\partial E^{-T}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \mathbb{J} + \mathbb{J} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = 0. \quad (1.24)$$

Como $\frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{Z}(\zeta, t), t) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \zeta}(\zeta, t)$, substituindo $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\zeta, t)$ na expressão (1.24), obtemos

$$-\Gamma^T + \Gamma = 0.$$

Portanto, temos $\Gamma = \Gamma^T$. ■

Se o conjunto $\mathcal{U}_t$ não for uma bola, o teorema anterior não é válido globalmente. Dessa forma, em cada ponto $\mathbf{u}$ de $\mathcal{U}$ existe uma função R satisfazendo (1.23), com R definida localmente como uma única função de valores reais sobre todo $\mathcal{U}$.

Observemos que podemos estender os resultados anteriores para as transformações μ -simpléticas, definidas como difeomorfismos e utilizando a mesma notação das transformações simpléticas. Neste caso, a transformação E deve satisfazer a propriedade:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \mathbb{J} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = \mu \mathbb{J}, \quad (1.25)$$

¹Teorema. Seja $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $\mathcal{O}$ é simplesmente conexo (uma bola aberta por exemplo), então $F = \nabla f$ se, e somente se, $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$ é simétrica

ou, equivalentemente, a propriedade

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t)\right)^T \mathbb{J} \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) = \mu \mathbb{J}, \quad (1.26)$$

onde μ é uma constante real.

As transformações μ -simpléticas também preservam a estrutura Hamiltoniana dos sistemas Hamiltonianos. Substituindo a função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ pela função Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\zeta, t) = \mu \mathcal{H}(\mathbf{Z}(\zeta, t), t). \quad (1.27)$$

tornam-se válido os teoremas (1.9) e (1.10). Se supunhamos que E não depende de T , então temos que

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \mathbb{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \mathbb{J} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}(\zeta) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right)^T \\ &= \frac{1}{\mu} \mu \mathbb{J} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \zeta}(\zeta) \\ &= \mathbb{J} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \zeta}(\zeta). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Isso mostra que a preservação da estrutura Hamiltoniana é semelhante ao caso anterior. Apresentaremos a seguir alguns exemplos envolvendo as transformações μ -simpléticas.

Exemplo 1.3 Consideremos $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Seja

$$E: (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (1.29)$$

uma transformação de coordenadas a qual independe de t , definida por

$$E(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = (\alpha \mathbf{q}, \beta \mathbf{p}), \quad (1.30)$$

onde α e β são constantes reais não nulas. Observemos que

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \beta \mathbb{I}_n \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Assim, temos que

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbb{J} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \beta \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \beta \mathbb{I}_n \end{pmatrix} = \alpha \beta \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} = \alpha \beta \mathbb{J}. \quad (1.32)$$

Portanto, a transformação de coordenadas E é $\alpha\beta$ -simplética.

Exemplo 1.4 Consideremos uma função Hamiltoniana autônoma e analítica, que possui um ponto crítico na origem, dada por

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S \mathbf{z} + K(\mathbf{z}),$$

onde S é uma matriz Hessiana de $\mathcal{H}$ em $\mathbf{z} = 0$ e K é uma função analítica no qual suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem se anulam na origem. Consideremos a transformação de coordenadas

$$E: \mathbf{z} \mapsto \mathbf{w} = \epsilon^{-1}\mathbf{z},$$

onde ϵ é um número real diferente de zero. Como

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}\mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1}\mathbb{I}_n \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

segue que

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbb{J} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}\mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1}\mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}\mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1}\mathbb{I}_n \end{pmatrix} = \epsilon^{-2}\mathbb{J}. \quad (1.34)$$

Portanto, E é uma transformação ϵ^{-2} -simplética e a nova função Hamiltoniana $\mathcal{H}^*$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(\mathbf{w}) &= \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{H}(E^{-1}(\mathbf{z})) = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{H}(\epsilon \mathbf{w}) = \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 \mathbf{w}^T S \mathbf{w} + K(\epsilon \mathbf{w}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T S \mathbf{w} + \frac{1}{\epsilon^2} K(\epsilon \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Se escrevermos K em série de Taylor vemos que K é pelo menos de terceira ordem em torno da origem, logo, existe uma constante real C de modo que $\epsilon^{-2}K(\epsilon \mathbf{w}) = C\epsilon$ para ϵ suficientemente pequeno e w numa vizinhança da origem. Escrevemos isso como $\epsilon^{-2}K(\epsilon \mathbf{w}) = \mathcal{O}(\epsilon)$. Assim, reescrevemos (1.35) da forma

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T S \mathbf{w} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Exemplo 1.5 Consideremos a transformação de coordenadas polares

$$E_1: \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}$$

no plano, definida por $E_1(\mathbf{z}) = E_1(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Claramente E_1 é um difeomorfismo, além disso, satisfaz

$$\left(\frac{\partial E_1(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbb{J} \frac{\partial E_1(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = r \mathbb{J}.$$

Assim, a transformação E_1 é r -simplética. Todavia, se fizermos uma alteração na transformação E_1 , obtemos uma transformação simplética. Com efeito, consideremos a transformação de coordenadas

$$E_2(\mathbf{z}) = E_2(r, \varphi) = (\sqrt{2r} \cos \varphi, \sqrt{2r} \sin \varphi).$$

Assim, temos que

$$\left(\frac{\partial E_2(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbb{J} \frac{\partial E_2(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2r}} & \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2r}} \\ -\sqrt{2r} \sin \varphi & \sqrt{2r} \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2r}} & -\sqrt{2r} \sin \varphi \\ \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2r}} & \sqrt{2r} \cos \varphi \end{pmatrix} = \mathbb{J}.$$

As coordenadas simpléticas r, φ são chamadas de coordenadas ação-ângulo. Em um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade também podemos aplicar uma transformação de coordenadas ação-ângulo. Se as coordenadas cartesianas são $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, basta definirmos

$$x_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_j \quad \text{e} \quad y_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_j, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

1.3 O colchete de Poisson

Definição 1.6 *Sejam $F(\mathbf{z}, t)$ e $G(\mathbf{z}, t)$ funções reais diferenciáveis (de classe C^∞) definidas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$. Definimos o colchete de Poisson entre F e G pela aplicação $\{F, G\}_{\mathbf{z}}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\{F, G\}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = \left(\nabla_{\mathbf{z}} F(\mathbf{z}, t) \right)^T \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{z}} G(\mathbf{z}, t) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right).$$

Observemos que um sistema Hamiltoniano pode ser reescrito em termos do colchete de Poisson por

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \{q_j, H\}, \\ \dot{p}_j = \{p_j, H\}. \end{cases} \quad (1.36)$$

Consideremos a mudança de coordenadas simpléticas $\mathbf{z} \rightarrow \zeta = E(\mathbf{z}, t)$ e sua inversa $\zeta \rightarrow \mathbf{z} = Z(\zeta, t)$. Definindo

$$\bar{F}(\zeta, t) = F(Z(\zeta, t), t), \quad \text{e} \quad \bar{G}(\zeta, t) = G(Z(\zeta, t), t),$$

temos que

$$\begin{aligned} \{\bar{F}, \bar{G}\}_{\zeta}(\zeta, t) &= \left(\nabla_{\zeta} \bar{F}(\zeta, t) \right)^T \mathbb{J} \nabla_{\zeta} \bar{G}(\zeta, t) \\ &= \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right)^T \nabla_{\mathbf{z}} F(Z(\zeta, t), t) \right)^T \mathbb{J} \left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right)^T \nabla_{\mathbf{z}} G(Z(\zeta, t), t) \\ &= \left(\nabla_{\mathbf{z}} F(Z(\zeta, t), t) \right)^T \left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \mathbb{J} \left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right)^T \right) \nabla_{\zeta} G(Z(\zeta, t), t) \\ &= \left(\nabla_{\mathbf{z}} F(Z(\zeta, t), t) \right)^T \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{z}} G(Z(\zeta, t), t) \\ &= \{F, G\}_{\mathbf{z}}(Z(\zeta, t), t). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Isso implica que o colchete de Poisson é invariante por transformações de coordenadas simpléticas. Como consequência disso, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.11 *Uma transformação de coordenadas simpléticas preserva o colchete de Poisson.*

Consideremos novamente uma transformação de coordenadas simpléticas $\mathbf{z} \rightarrow \zeta = E(\mathbf{z}, t)$ e, chamaremos de $\zeta_i = E_i(\mathbf{z}, t)$ a i -ésima coordenada da transformação E . Como

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} \mathbb{J} \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} \right)^T = \mathbb{J}, \quad (1.38)$$

em termos das coordenadas, temos que

$$\{E_i, E_j\} = J_{ij}, \quad (1.39)$$

onde $\mathbb{J} = (J_{ij})$. Fazendo uso das coordenadas clássicas $\zeta = (Q, P)$, onde $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e $P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, reescrevemos as equações (1.39) da seguinte forma:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad (1.40)$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker. De acordo com estas informações, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.12 A transformação $\mathbf{z} \rightarrow \zeta = E(\mathbf{z}, t)$ é simplética se e somente se, as equações (1.39) e (1.40) são válidas.

Agora, vamos supor que F é uma integral primeira associada ao sistema Hamiltoniano (1.1), isto é, F é constante ao longo das soluções deste sistema. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}F(\mathbf{z}(t)) = \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \dot{q}_i(t) + \frac{\partial F}{\partial p_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \dot{p}_i(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) - \frac{\partial F}{\partial p_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \right) \\ &= \{F, \mathcal{H}\}_{\mathbf{z}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Portanto, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.13 F é uma integral primeira para o sistema Hamiltoniano (1.1) se, e somente se, $\{F, \mathcal{H}\}_{\mathbf{z}} = 0$ ao longo de cada solução.

1.4 Funções Geradoras

Fazendo $z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, definimos a forma simplética canônica por

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i := dq \wedge dp.$$

Ω é uma forma exata pois, se $\alpha = \sum_{i=1}^n q^i dp^i = qdp$, então $d\alpha = dq \wedge dp = \omega$. Consequentemente $d\omega = 0$ e ω também é uma forma fechada.

Definimos uma transformação de variáveis $T : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por $T(q, p) = (Q(q, p), P(q, p))$, onde as funções Q e P estão definidas em uma bola $U \subset \mathbb{R}^{2n}$. A transformação T é simplética se, e somente se,

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP \Leftrightarrow dq \wedge dp - dQ \wedge dP = 0 \Leftrightarrow d(qdp - QdP) = 0. \quad (1.42)$$

Definimos a 1-forma $\sigma_1 = qdp - QdP$. A 1-forma σ_1 é exata se, e somente se,

$$\sigma_2 = \sigma_1 + d(QP) = qdp + PdQ$$

é exata. De fato,

$$d\sigma_2 = dq \wedge dp + q \wedge d(dp) + dP \wedge dQ + P \wedge d(dQ) = dq \wedge dp - dQ \wedge dP = d(qdp - QdP)$$

. Portanto, a mudança de coordenadas é simplética, se e somente se, cada uma das 1-formas descritas abaixo é exata:

$$\begin{cases} \sigma_1 &= qdp - QdP, \\ \sigma_2 &= qdp + PdQ = \sigma_1 + d(QP), \\ \sigma_3 &= pdq - PdQ = \sigma_2 + d(pq), \\ \sigma_4 &= pdq + QdP = \sigma_3 + d(PQ). \end{cases}$$

Como a bola $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ é aberta, aplicando o lema de Poincaré — Uma forma é fechada se, e somente se é exata — temos que a transformação de coordenadas é simplética se e somente se, uma das funções $S_1 = S(p, P), S_2 = S_2(p, Q), S_3 = S_3(q, Q), S_4 = S_4(q, P)$ existe e satisfaz, respectivamente,

$$\begin{cases} dS_1 = \sigma_1, & dS_2 = \sigma_2, \\ dS_3 = \sigma_3, & dS_4 = \sigma_4. \end{cases}$$

Estas informações nos dá uma maneira fácil de construir coordenadas simpléticas. Suponhamos, por exemplo, que existe uma função $S_1(p, P)$ tal que $dS_1 = \sigma_1$. Dessa forma

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P)dp + \frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)dP = \sigma_1$$

se e somente se,

$$\frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) = q, \quad -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) = Q. \quad (1.43)$$

Portanto, se (1.43) define uma transformação de coordenadas de (q, p) para (Q, P) , então essa transformação é simplética.

Agora, suponhamos que a matriz Hessiana de S_1 é não singular, e consideremos um função $F : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(q, p, P) = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) - q = 0.$$

Seja $q_0 = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p_0, P_0)$ de modo que $\det \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p_0, P_0) \right) \neq 0$. Como $D_P F(q_0, p_0, P_0) = \frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p_0, q_0)$, então aplicando o Teorema da Função Implícita, escrevemos $P = P(q, p)$ em uma vizinhança de (p_0, q_0) com $P_0 = P(q_0, p_0)$. Substituído a expressão de P na expressão $Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)$, obtemos $Q = Q(q, p) = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P(q, p))$. Assim, procedendo de forma análoga com as expressões $\sigma_j, j = 2, 3, 4$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.14 *As seguintes mudanças de variáveis definem uma transformação local de coordenadas simpléticas:*

$$\begin{aligned} q &= \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P), & Q &= -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) & \text{quando} & \frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p, P) & \text{é não singular} \\ q &= \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q), & P &= \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q) & \text{quando} & \frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q) & \text{é não singular} \\ p &= \frac{\partial S_3}{\partial q}(q, Q), & P &= -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(q, Q) & \text{quando} & \frac{\partial^2 S_3}{\partial q \partial Q}(q, Q) & \text{é não singular} \\ p &= \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P), & Q &= \frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P) & \text{quando} & \frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P}(q, P) & \text{é não singular.} \end{aligned}$$

Cada uma das funções S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) é chamada de *função geradora*.

1.4.1 Exemplos de funções geradoras

Exemplo 1.6 Seja $S_2(p, Q) = pQ$, logo $\frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q) = I$ é não singular. Assim, podemos definir uma transformação de coordenadas simplética $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ por

$$q = \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q) = Q, \quad P = \frac{\partial S_2}{\partial Q} = p.$$

A aplicação $(q, p) \rightarrow (Q = q, P = p)$ é a aplicação identidade.

Exemplo 1.7 (Transformações de Mathieu). Suponhamos que existe uma transformação $Q = f(q)$ com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de modo que $\frac{\partial f}{\partial q}$ seja invertível. Esta transformação pode ser estendida a uma transformação simplética definida por S_4 (como no teorema 1.14) da seguinte forma:

$$S_4(q, P) = f(q)^T P,$$

ou seja,

$$(q, p) \rightarrow \left(Q = f(q), P = \frac{\partial f}{\partial q}(q)^{-T} p \right).$$

Exemplo 1.8 (Coordenadas polares). Sejam (x, y) as coordenadas usuais no plano e (X, Y) seus momentos conjugados. Vamos fazer uma mudança de variáveis, vamos passar das coordenadas usuais no plano para coordenadas polares (r, θ) e estender esta transformação à uma mudança de coordenadas simpléticas. Sejam (R, Θ) as variáveis conjugadas de (r, θ) . Fazendo $q = (r, \theta)$ e $Q = f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) := (x, y)$ temos que $\frac{\partial f}{\partial q}$ é invertível. Assim, aplicando a transformação de Mathieu com $p = (R, \Theta)$ e $P = (X, Y)$, temos que

$$S = S_4(q, P) = f(q)^T P = Xr \cos \theta + Yr \sin \theta,$$

e assim,

$$\begin{cases} x = \frac{\partial S}{\partial X} = r \cos \theta, \\ y = \frac{\partial S}{\partial Y} = r \sin \theta, \\ R = \frac{\partial S}{\partial r} = X \cos \theta + Y \sin \theta = \frac{xX + yY}{r}, \\ \Theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = -Xr \sin \theta + Yr \cos \theta = xY - yX. \end{cases} \quad (1.44)$$

Suponhamos que uma partícula de massa m se move num plano, assim temos que $X = m\dot{x}$ e $Y = m\dot{y}$ são as componentes do momento linear nas direções de x e y . Dessa forma, $R = m\dot{r}$ é o momento linear na direção de r , e $\Theta = mx\dot{y} - my\dot{x} = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular. A transformação inversa é dada por

$$\begin{cases} X = m\dot{x} = m\dot{r} \cos \theta - mr\dot{\theta} \sin \theta = R \cos \theta - \left(\frac{\Theta}{r} \right) \sin \theta, \\ Y = m\dot{y} = m\dot{r} \sin \theta + mr\dot{\theta} \cos \theta = R \sin \theta + \left(\frac{\Theta}{r} \right) \cos \theta. \end{cases} \quad (1.45)$$

Um exemplo de aplicação de coordenadas polares simpléticas é o problema de Kepler no plano. Utilizando as notações acima, a função hamiltoniana associado a este problema é dado por

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (1.46)$$

Como H é independente de θ , esta é uma variável ignorável, logo Θ é uma integral primeira. As equações do movimento do problema de Kepler no plano, nestas variáveis são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R, & \dot{\theta} &= \frac{\Theta}{r^2} \\ \dot{R} &= -\frac{\Theta^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2}, & \dot{\Theta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Capítulo 2

O Problema de Kepler

Neste capítulo, abordaremos o problema de N -corpos e o problema de Kepler clássico. O problema de N -corpos, aborda sistemas com três ou mais corpos celestes interagindo gravitacionalmente. Já o problema de Kepler, formulado pelo alemão Johannes Kepler no século XVII, descreve o movimento de dois corpos que interagem de forma gravitacional em um plano. As soluções deste problema são órbitas cônicas, que podem ser elípticas, parabólicas ou hiperbólicas, dependendo de algumas condições do sistema.

Neste capítulo, iremos determinar as soluções do problema de Kepler coordenadas especiais que permitem obter soluções (circulares e elípticas) de maneira muito simples. Estas coordenadas são chamadas de coordenadas de Delaunay e Poincaré Delaunay.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram [20] e [10].

2.1 O problema de N -corpos

Neste capítulo formularemos o problema de n corpos e reescreveremos o mesmo como um sistema Hamiltoniano.

Consideramos o movimento de N partículas que se movem unicamente sob a ação mútua gravitacional no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Seja a i -ésima partícula cujo vetor posição é $\mathbf{q}_i$ e a massa é m_i positiva.

Pela segunda Lei de Newton, a soma das forças que agem sobre uma partícula é igual a massa vezes a aceleração da mesma, $m_i \ddot{\mathbf{q}}_i$. A lei da gravitação universal nos diz que a força de atração gravitacional entre as partículas i e j é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, ou seja, a força é dada por $\frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^2}$, onde $G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{sec}^2 \text{kg}$ é a constante gravitacional. A direção dessa força, da partícula i à partícula j , é dada pelo vetor unitário $\frac{(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}$. Apartir dessas informações formulamos as equações do movimento que são dadas por

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (2.1)$$

onde

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}, \quad (2.2)$$

é o a função potencial associada ao sistema de equações (2.1).

Seja M uma matriz diagonal de ordem $3N$ dada por

$$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N),$$

e sejam $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ e $\Omega = \{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j, \text{ para } i = j\}$. Assim, (2.1) é um sistema de equações de segunda ordem em $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Omega$.

Seja $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ tal que $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$. Dessa forma, $\mathbf{p}_i = M\dot{\mathbf{q}}_i$ é o momento da i -ésima partícula.

Logo, reescrevemos as equações (2.1) da foma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}_i}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{H} = T - U$ é a função hamiltoniana e,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2, \quad (2.4)$$

é a energia cinética.

2.2 O problema de 2-corpos e o problema de Kepler

Nesta seção, vamos particularizar o problema de n corpos para $n = 2$, e a partir deste, vamos desenvolver toda a teoria do problema de Kepler, incluindo as anomalias excêntrica e verdadeira.

Para $n = 2$, as equações (2.1) são dadas por

$$m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1), m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2); \quad (2.5)$$

onde a função potencial associada a este sistema é dado por

$$U(\mathbf{q}) = \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|}. \quad (2.6)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.5) por m_2 , a segunda equação por m_1 e subtraindo a segunda da primeira, temos

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_2) &= -\frac{Gm_1 m_2 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - \frac{Gm_1 m_1 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ &= -\frac{Gm_1 m_2 (m_1 + m_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \end{aligned}$$

Logo

$$(\ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_2) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \quad (2.7)$$

Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ e $\mu = G(m_1 + m_2)$, de (2.7) temos que

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{z}} &= (\ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_2) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ &= -\frac{\mu}{\|\mathbf{z}\|^3}\mathbf{z}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

A equação (2.8) é chamada de o problema de Kepler. Agora, somando a primeira equação com a segunda, obtemos

$$\begin{aligned}m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + \frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Fazendo $C = m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2$, de (2.9) temos que $\ddot{C} = 0$ e integrando esta equação obtemos que a função C é da forma

$$C = L_0C + C_0,\tag{2.10}$$

onde L_0 e C_0 são as constantes de integração.

Consideremos o problema de 2 corpos, no qual o primeiro corpo tem uma massa muito grande, com sua posição fixa para a primeira aproximação e, o segundo corpo tem massa unitária. O movimento percorrido pelo segundo corpo é descrito pelo problema (2.8). Se a posição deste corpo é dada pelo vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, as equações que descrevem seu movimento são

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q},\tag{2.11}$$

onde $\mu = G(m_1 + m_2)$. Definimos $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ e desta maneira, a equação (2.9) pode ser reescrita como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

O sistema (2.12) é um sistema Hamiltoniano, cuja função hamiltoniana $\mathcal{H}$ é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|}.\tag{2.13}$$

Observemos que $\mathcal{H}$ é uma integral primeira do sistema. Além disso, existem outras duas integrais primeiras, as quais são

- i. O *momento angular* A . Se uma partícula possui vetor posição $\mathbf{q}$ então o momento angular A da partícula é definido por

$$A = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}.\tag{2.14}$$

- ii. O *vetor de Laplace* $\mathbf{e}$ definido por

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \dot{\mathbf{q}} \times A.\tag{2.15}$$

Mostremos que de fato o momento angular e o vetor de Laplace são integrais primeiras. Observemos que

$$\dot{A} = \dot{\mathbf{q}} \times \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \times \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \times \left(-\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3} \mathbf{q} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Isso mostra que $A(t) = cte$ e, portanto, o vetor A é uma integral primeira. Para mostrar que $\mathbf{e}$ é uma integral primeira, primeiro observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) &= \frac{\|\mathbf{q}\|\ddot{\mathbf{q}} - \frac{\langle \mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}} \rangle}{\|\mathbf{q}\|} \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{(\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{A \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{\mathbf{q} \times A}{\|\mathbf{q}\|^3} \\ &= \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3} \mathbf{q} \times A \right) = \frac{1}{\mu} \ddot{\mathbf{q}} \times A = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}} \times A), \end{aligned} \quad (2.17)$$

ou seja,

$$\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}} \times A). \quad (2.18)$$

Integrando ambos os lados da equação (2.18), obtemos a existência de um vetor $\mathbf{e}$ (constante de integração) de modo que

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \dot{\mathbf{q}} \times A. \quad (2.19)$$

Isso mostra que $\mathbf{e}$ é uma integral primeira.

Mostramos anteriormente que o momento angular A é uma integral primeira, ou seja, é constante ao longo do movimento. Assim, se $A = 0$, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{A \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{0 \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = 0. \quad (2.20)$$

Logo $\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \mathbf{w}$, para algum vetor fixo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Isso implica que a partícula se movimenta sobre a reta que tem direção do vetor w , ou seja, o seu movimento é colinear. Neste caso, se tomarmos a reta de movimento coincidindo com um dos eixos do sistema de coordenadas, obtemos um problema com um grau de liberdade.

Quando $A \neq 0$, os vetores $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ são ortogonais a A e o movimento é descrito no plano formado pelos vetores $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$, ou seja, no plano ortogonal a A , chamado de plano invariante. Pondo um dos eixos na direção de A , podemos escrever $\mathbf{q}$ na forma

$$\mathbf{q}(t) = r (\cos \theta, \sin \theta, 0). \quad (2.21)$$

Logo,

$$\mathbf{p}(t) = \dot{\mathbf{q}} = \dot{r} (\cos \theta, \sin \theta, 0) + r \dot{\theta} (-\sin \theta, \cos \theta, 0). \quad (2.22)$$

Assim,

$$\begin{aligned} A = \mathbf{q} \times \mathbf{p} &= r (\cos \theta, \sin \theta, 0) \times \left(\dot{r} (\cos \theta, \sin \theta, 0) + r \dot{\theta} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \right) \\ &= (0, 0, r^2 \dot{\theta} ((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)) \\ &= (0, 0, r^2 \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Isso implica que

$$c = \|A\| = r^2\dot{\theta}. \quad (2.24)$$

Como a taxa de variação da área varrida pelo corpo é dada por $\frac{r^2\dot{\theta}}{2}$, então a área $A_{\mathbf{q}}(t)$ varrida por $\mathbf{q}(t)$, começando em t_0 é dada por

$$A_{\mathbf{q}}(t) - A_{\mathbf{q}}(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{r^2\dot{\theta}}{2} dt = \int_{t_0}^t \frac{c}{2} dt = \frac{c}{2}(t - t_0). \quad (2.25)$$

A equação (2.24) ou (2.25) é a equação da segunda lei de Kepler, que nos diz que as áreas descritas pelo raio-vetor são sempre iguais nos mesmos intervalos de tempo.

Consideremos a equação (2.19). Observe que podemos reescrever esta equação como

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p} \times A}{\mu} - \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}. \quad (2.26)$$

Fazendo o produto interno dessa equação com A , temos

$$\langle \mathbf{e}, A \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p} \times A}{\mu}, A \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}, A \right\rangle = 0. \quad (2.27)$$

Quando $A = 0$, de (2.26) temos que $\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$, logo $\|\mathbf{e}\| = 1$ e $\mathbf{e}$ está na reta que o corpo se movimenta, pois já mostramos que o movimento é colinear. Quando $A \neq 0$, o vetor $\mathbf{e}$ está no plano invariante. Vamos considerar o caso em que $A \neq 0$.

Observemos que

$$\left\langle \mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right), \mathbf{q} \right\rangle = \mu \langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|} \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \mu (\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \|\mathbf{q}\|)$$

e

$$\langle \dot{\mathbf{q}} \times A, \mathbf{q} \rangle = \langle \dot{\mathbf{q}} \times (\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \rangle = \|\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}\|^2 = \|A\|^2.$$

Assim, fazendo o produto interno de (2.19) com $\mathbf{q}$, obtemos

$$\mu (\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \|\mathbf{q}\|) = \|A\|^2,$$

ou ainda

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \|\mathbf{q}\| = \frac{c^2}{\mu}, \quad (2.28)$$

onde $c = \|A\|$.

Quando $\mathbf{e} = 0$, temos que $\|\mathbf{q}\| = \frac{c^2}{\mu}$ é constante. Como $\mathbf{q} = r(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, então $\|\mathbf{q}\| = r$. Assim, pela equação (2.24) temos que

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2} = \frac{\mu^2}{c^3}.$$

Isso implica que o corpo se movimenta em um círculo com velocidade angular constante quando $\mathbf{e} = 0$.

Vamos supor que $\mathbf{e} \neq 0$ e vamos por $\epsilon = \|\mathbf{e}\|$. Seja r, θ as coordenadas polares do corpo com o ângulo θ medindo a partir do eixo positivo. Se g é o ângulo entre o eixo positivo e o vetor $\mathbf{e}$, então o ângulo entre os vetores $\mathbf{e}$ e $\mathbf{q}$ é dado por $f = \theta - g$.

Sabemos que $\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle = \cos f \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{q}\| = \epsilon r \cos f$. Substituindo $\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle$ por $\epsilon r \cos f$ na equação (2.28) e arrumando-a convenientemente obtemos

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos f} \quad (2.29)$$

Esta equação, na forma polar, representa a primeira lei de Kepler. Observe que podemos reescrever a equação (2.29) da forma

$$r = \epsilon \left(\frac{c^2}{\mu \epsilon} - r \cos f \right). \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é a equação da primeira Lei de Kepler, na forma generalizada, onde a partícula se move em uma cônica de excentricidade ϵ , com foco na origem, e tendo a reta d ortogonal ao vetor e como reta diretriz localizada à uma distância de $\frac{c^2}{\mu \epsilon}$ da origem. Observe que podemos determinar se a órbita é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola através do valor de ϵ , para isso temos as seguintes condições:

- i. Se $\epsilon = 0$, a órbita é uma circunferência;
- ii. Se $0 < \epsilon < 1$, a órbita é uma elipse;
- iii. Se $\epsilon = 1$, a órbita é uma parábola;
- iv. Se $\epsilon > 1$, a órbita é uma hipérbole.

Agora vamos considerar o caso em que a órbita é elíptica. Seja a o semi-eixo maior da elipse e b o semi-eixo menor. Observe que de (2.29) para $f = 0$ e para $f = \pi$ obtemos

$$r_0 = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos 0} = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon} \quad e \quad r_\pi = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos \pi} = \frac{c^2/\mu}{1 - \epsilon}.$$

Assim, temos que

$$2a = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon} + \frac{c^2/\mu}{1 - \epsilon},$$

e a reescrevemos como

$$a(1 - \epsilon^2) = \frac{c^2}{\mu}. \quad (2.31)$$

Seja P o período de uma órbita elíptica. A área descrita pelo raio-vetor de 0 a P , de acordo com (2.25) é dada pela equação

$$A(P) = \frac{c}{2}P. \quad (2.32)$$

Seja c a distância do centro da elipse ao foco. Definimos a *excentricidade* e da elipse como $e = \frac{c}{a}$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, substituindo $c = ae$ nesta equação, obtemos $b = a\sqrt{1 - e^2}$. A área da elipse pode ser calculada pela equação

$$A_q = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.33)$$

Assim, das equações (2.32) e (2.33) temos

$$\frac{c}{2}P = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

ou ainda,

$$\frac{c^2}{4\pi^2 a(1-e^2)} = \frac{a^3}{P^2}. \quad (2.34)$$

Utilizando a equação (2.31), reescrevemos (2.34) como

$$\frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2}. \quad (2.35)$$

A equação (2.35) é a terceira lei de Kepler, onde o período orbital da partícula é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita da elipse.

2.2.1 Anomalia excêntrica e Anomalia verdadeira

O vetor-posição $\mathbf{q}$ da partícula na órbita, no referencial canônico, é descrito por

$$\mathbf{q} = r(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \text{ com } \theta = f + g, \quad (2.36)$$

onde o ângulo f é chamado de anomalia verdadeira.

Vamos introduzir outro ângulo E , chamado de anomalia excêntrica com o objetivo de determinar os valores do ângulo θ e do raio-vetor r . A anomalia excêntrica E é ângulo entre o perigeu e a projeção da posição $\mathbf{q}$ da partícula no círculo com raio igual ao semi-eixo maior da elipse. Este ângulo é medido no centro da elipse ou no centro do círculo.

Apresentaremos a seguir, um resultado que fornece relações para obter os valores de r e θ , incluindo uma relação que associa o ângulo θ com o ângulo E .

Teorema 2.1 *seja $\mathbf{q}=r(t)$ uma solução do problema de Kepler com energia negativa, semi-eixo maior a e excentricidade e . Então r e θ são dados por*

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), \\ \operatorname{tg} \left(\frac{f}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \left(\frac{E}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Demonstração: Consideremos um sistema de coordenadas com a origem no centro da elipse e com eixos paralelos aos eixos da elipse. Representaremos as coordenadas do ponto P na elipse por ξ e η , e na circunferência por x e y . Dessa forma, segue que

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2} \right) + \left(\frac{\eta^2}{b^2} \right) = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = a^2. \quad (2.38)$$

Como $b = a\sqrt{1-e^2}$ e as abscissas ξ e x são iguais, segue que $\eta = \sqrt{1-e^2}y$. Assim, veja Fig, temos as equações

$$\begin{aligned} ae + r \cos f &= a \cos E, \\ +r \sin f &= a\sqrt{1-e^2} \sin E, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r \cos f = a(\cos E - e) \quad (2.39)$$

e

$$r \sin f = a\sqrt{1-e^2} \sin E. \quad (2.40)$$

Quadrando as equações (2.39) e (2.40) e somando os resultados, obtemos

$$r^2 = a^2((1 - e^2) \sin^2 E + \cos^2 E - 2e \cos E + e^2) = a^2(1 - e \cos E)^2, \quad (2.41)$$

e extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.42)$$

Agora, juntando as equações (2.40) e (2.42) temos

$$r(1 + \cos f) = a(1 - e)(1 + \cos E). \quad (2.43)$$

Como valem as identidades trigonométricas $1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$ e $\sin u = 2 \sin(\frac{u}{2}) \cos(\frac{u}{2})$, o quociente de (2.39) por (2.43) obtemos

$$\frac{\sin f/2}{\cos f/2} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E/2}{(1 - e) \cos E/2}. \quad (2.44)$$

Logo,

$$\operatorname{tg} \left(\frac{f}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \left(\frac{E}{2} \right). \quad (2.45)$$

■

Através deste Teorema, ao conhecer o valor de E , podemos determinar os valores de f e r . Apresentaremos a seguir um resultado que determina o valor de E .

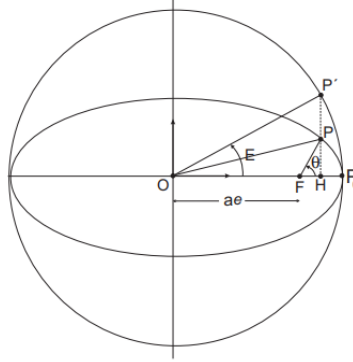


Figura 2.1: Ilustração para mostrar a Equação de Kepler.

Teorema 2.2 *A anomalia excêntrica E é determinada pela equação de Kepler*

$$E - e \sin E = n(t - T), \quad (2.46)$$

onde $n = \frac{2\pi}{P}$ é o movimento médio.

Demonstração: Consideremos a figura (2.1) onde o centro da elipse é representado por O , F é o foco atrator, P_0 é o pericentro, P é o ponto sobre a elipse, P' é o ponto correspondente na circunferência que define a anomalia excêntrica E , H é a projeção ortogonal de P sobre o eixo que passa pelo pericentro e f é a anomalia verdadeira.

A área do setor circular OP_0P' menos a área do triângulo OHP' é dada pela integral desde a abscissa de H até a do ponto P_0 da função $y(s)$, ordenada do ponto $P'(s)$. Dessa forma, temos uma relação entre a ordenada $\eta(s)$ de $P(s)$ e $y(s)$ dada por

$$\eta(s) = \sqrt{1 - e^2} y(s).$$

Assim, obtemos a equação

$$\int_x^a y(s) ds = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \int_x^a \eta(s) ds. \quad (2.47)$$

A integral do lado direito da equação anterior é igual a área do setor da elipse FP_0P menos a área do triângulo FHP , ou seja,

$$\int_x^a \eta(s) ds = \frac{c}{2}(t - T) - \frac{1}{2}r \cos fr \sin f. \quad (2.48)$$

Já a integral do lado esquerdo, sabemos que é igual a área do setor circular OP_0P' menos a área do triângulo OHP' , ou seja,

$$\int_x^a y(s) ds = \frac{1}{2}a^2 E - \frac{1}{2}a^2 \sin E \cos E. \quad (2.49)$$

Portanto, temos que

$$\frac{1}{2}a^2 E - \frac{1}{2}a^2 \sin E \cos E = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{c}{2}(t - T) - \frac{1}{2}r \cos fr \sin f. \quad (2.50)$$

Utilizando as expressões (2.39) e (2.40) obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} r \cos fr \sin f = \frac{1}{2}a^2 \sin E \cos E - \frac{1}{2}a^2 e \sin E. \quad (2.51)$$

Por outro lado, usando a igualdade (2.31) e a terceira lei de Kepler, obtemos a equação

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{c}{2} = \frac{1}{2}a^2 \frac{2\pi}{P} = \frac{1}{2}a^2 n. \quad (2.52)$$

Portanto, substituindo as equações (6.38) e (2.52) em (2.50), obtemos

$$E - e \sin E = n(t - T).$$

■

2.3 O Problema de Kepler planar em coordenadas de Delaunay e Poincaré

Nesta seção, primeiramente, vamos construir e definir as coordenadas de Delaunay e de Poincaré-Delaunay utilizando as funções geradoras. Feito isso, abordaremos o problema de Kepler nestas coordenadas, apresentaremos as soluções deste sistema, e faremos também alguns exemplos do mesmo.

Para definir as coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay, vamos passar das coordenadas cartesianas (x, y, X, Y) para as coordenadas polares (r, θ, R, Θ) (veja Exemplo 1.8) depois, definiremos as coordenadas de Delaunay e a partir destas últimas, as coordenadas de Poincaré-Delaunay.

O primeiro passo, consiste na mudança de coordenadas Cartesianas à coordenadas Polares:

$$(x, y, X, Y) \rightarrow (r, \theta, R, \Theta)$$

Consideremos as posições $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e utilizaremos a transformação de Mathieu (Exemplo 1.7) ou uma função geradora para obter os momentos conjugados. Vamos chamar as variáveis antigas de $q = (x, y)$, $p = (X, Y)$ e as variáveis novas de $Q = (r, \theta)$, $P = (R, \Theta)$. Consideremos uma função f de modo que $q = f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) := (x, y)$, logo $\frac{\partial f}{\partial Q}$ é invertível. Aplicando a transformação de Mathieu obtemos a transformação simplética definida por

$$S = S_4(Q, p) = f(Q)^T p = Xr \cos \theta + Yr \sin \theta,$$

e

$$\begin{aligned} q &= f(Q), \\ P &= \left(\frac{\partial q}{\partial Q} \right)^T \cdot p \Rightarrow p = \left(\frac{\partial q}{\partial Q} \right)^{-T} \cdot P = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$X = R \cos \theta - \frac{\Theta}{r} \sin \theta,$$

$$Y = R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta.$$

Outra forma de encontrar os momentos conjugados é utilizando a segunda função geradora do teorema (1.14):

$$q = \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q), \quad P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(q, Q).$$

Observemos que

$$x = \frac{\partial S_2}{\partial X}(X, r) = r \cos \theta,$$

$$y = \frac{\partial S_2}{\partial Y}(Y, \theta) = r \sin \theta;$$

o que implica que $S_2 = S_4 = rX \cos \theta + rY \sin \theta$. Logo

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial S_2}{\partial r}(x, r) = X \cos \theta + Y \sin \theta, \\ \Theta &= \frac{\partial S_2}{\partial \theta}(y, \theta) = -rX \sin \theta + rY \cos \theta. \end{aligned}$$

De maneira semelhante ao que foi feito no Exemplo 1.8 de funções geradoras se obtém X e Y como antes.

A função Hamiltoniana do problema de Kepler (com $\mu = 1$) em coordenadas polares é dada por

$$\mathcal{H}_{Pol} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \quad (2.53)$$

Agora, vamos passar de coordenadas Polares à coordenadas de Delaunay:

$$(r, \theta, R, \Theta) \rightarrow (\ell, g, L, G)$$

Agora, chamaremos as variáveis antigas de $q = (r, \theta)$, $p = (R, \Theta)$ e as variáveis novas de $Q = (\ell, g)$, $P = (L, G)$. Vamos utilizar a função Hamiltoniana (2.53) para obter uma transformação a partir da função em derivadas parciais. Para isso, vamos substituir na função hamiltoniana, os momentos conjugados pelas derivadas parciais da função geradora com respeito às variáveis. Igualaremos a energia $\mathcal{H} = h_0 = -\frac{1}{2L^2}$ à equação (2.53). Assim, temos

$$\frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2},$$

Agora, trocando os momentos conjugados pelas derivadas da função geradora $S = S(r, \theta) = S_1(r) + S_2(\theta)$ com respeito as variáveis, obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2},$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 = 2r - \frac{r^2}{a} - r^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 := G^2,$$

onde G tem que ser constante pois $\frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \theta}$ só depende da variável r . Dessa forma, dá última equação, concluímos que

$$S_2(\theta) = G\theta \quad e \quad \frac{\partial S_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \sqrt{2r - \frac{r^2}{L^2} - G^2}.$$

Assim, podemos reescrever S da forma

$$S = G\theta + \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}}.$$

Posteriormente, definiremos o limite inferior de integração. Agora temos

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{r} = R &= \frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}} \\ \Theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = G. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Chamaremos os novos momentos de $L = \sqrt{a}$ e $G = \sqrt{a}\sqrt{1-e^2}$. Se considerarmos $n = \sqrt{1/a^3}$, $dr = \dot{r}dt$ e fizermos o limite interior de integração ser o perigeu da órbita, ou seja, $t_0 = T$, a nova coordenada ℓ é dada por

$$\ell = \frac{\partial S}{\partial L} = \int_{r_0}^r \frac{2L^{-3}}{2\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}}} dr = \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{1}{a^3} \frac{1}{\dot{r}}} dr = \int_{t_0}^t n dt = n(t - T).$$

Agora, fazendo $df = Gdt/r^2$, escolhendo novamente os limites inferiores de integração como sendo o perigeu da órbita, isto é, $r_0 = r_p$, $f_0 = 0$ e considerando a relação $\theta = g + f$, a nova coordenada g é dada por

$$g = \frac{\partial S}{\partial G} = \theta - \int_{r_0}^r \frac{2G}{2r^2\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}}} dr = \theta - \int_{r_0}^r \frac{G}{r^2\dot{r}} dr = \theta - \int_{f_0}^f df = \theta - f.$$

Definimos um domínio elíptico como sendo um conjunto aberto de $\mathbb{R}^4$ onde estão as soluções elípticas do problema de Kepler. Com essas informações, definimos o conjunto de coordenadas de Delaunay (ℓ, g, L, G) que estão em um domínio elíptico do problema de Kepler. As coordenadas são:

- $\ell = n(t - T)$ é a anomalia média medida a partir do perigeu;
- $g = \theta - f$ é o argumento do perigeu, é medido do nodo ascendente até o perigeu;
- $L = \sqrt{a}$ é o semi-eixo maior da elipse;
- $G = \sqrt{a}\sqrt{1-e^2}$ é o momento angular.

(2.55)

As coordenadas L, G são variáveis radiais definidas em $\mathbb{R}$ tal que $0 < G < L$. As coordenadas ℓ, g são variáveis angulares módulo 2π e estão definidas no intervalo $[0, 2\pi[$. Há uma maneira de medir a anomalia média ℓ . Como $\dot{\ell} = \frac{1}{L^3} = cte$, pois $L(t) = cte$, $\dot{\ell}$ mede a área varrida pelo raio-vetor na segunda lei de Kepler. Seja S a área varrida pelo raio raio-vetor (que liga um corpo ao outro) do perigeu até a posição do corpo, e seja A a área da elipse. Assim, definimos ℓ como sendo igual a 2π multiplicado pela razão da área S para a área A , ou seja,

$$\ell = 2\pi \frac{S}{A}. \quad (2.56)$$

Em coordenadas de Delaunay, a função Hamiltoniana (2.53) é dada por

$$\mathcal{H}_D = -\frac{1}{2L^2}. \quad (2.57)$$

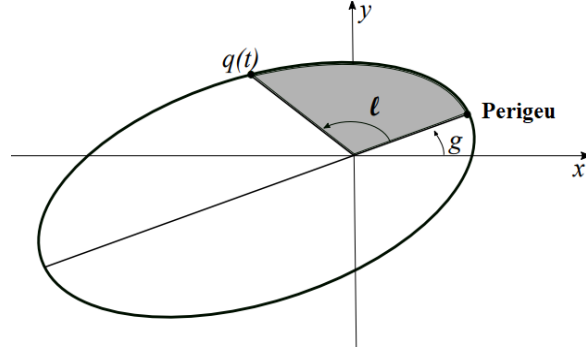


Figura 2.2: Representação das coordenadas angulares de Delaunay. O ângulo g é o argumento do perigeu e o ângulo ℓ é a anomalia média, é medido por $\ell = 2\pi S/A$.

O sistema Hamiltoniano associado com a função Hamiltoniana (2.57) é descrito pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\ell} &= \frac{1}{L^3}, & \dot{L} &= 0 \\ \dot{g} &= 0, & \dot{G} &= 0\end{aligned}\tag{2.58}$$

Determinaremos uma solução desse sistema para o valor inicial $y_0 = (\ell_0, g_0, L_0, G_0)$. Observemos que

$$\dot{\ell} = \frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{L^3} \Rightarrow d\ell = \frac{1}{L^3} dt \Rightarrow \int_0^t d\ell = \int_0^t \frac{1}{L^3} dt = \frac{1}{L^3} t.$$

Assim $\ell(t) - \ell(0) = \frac{1}{L^3} t$, ou seja,

$$\ell(t) = \frac{1}{L^3} t + \ell_0.\tag{2.59}$$

Portanto, a solução do sistema Hamiltoniano (2.58) com condição inicial y_0 é dada por

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \frac{1}{L_0^3} t + \ell_0, & L(t) &= L_0; \\ g(t) &= g_0, & G(t) &= G_0.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Vamos determinar a excentricidade e o período da solução. Observemos que

$$G = L\sqrt{1 - e^2} \Rightarrow \frac{G^2}{L^2} = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L}.$$

Assim, a excentricidade e da solução é dada por

$$e = \frac{\sqrt{L_0^2 - G_0^2}}{L_0}.\tag{2.61}$$

Seja T o período da solução. Utilizando a equação (2.59) temos que

$$\ell_0 + 2\pi = \ell(T) = \frac{1}{L_0^3} T + \ell_0.$$

Isso implica que $\frac{1}{L_0^3} T = 2\pi$, logo o período da solução é dado por

$$T = 2\pi L_0^3.\tag{2.62}$$

Agora, faremos dois exemplos de soluções elípticas em coordenadas de Delaunay.

Exemplo 1 *Determinaremos a solução do sistema (2.58) com valor inicial $y_0 = (\pi, \frac{\pi}{2}, L_0, G_0)$. Como $\ell_0 = \pi$ e $g_0 = \frac{\pi}{2}$, segue de (2.60) que a solução desse sistema com valor inicial y_0 é dada por*

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \frac{1}{L_0^3}t + \pi, & L(t) &= L_0; \\ g(t) &= \frac{\pi}{2}, & G(t) &= G_0.\end{aligned}$$

Essa é uma solução elíptica com semi-eixo maior $a = L_0^2$, com período T dado por (2.62) e excentricidade e dada por (2.61). Além disso, temos que o ângulo $g = \frac{\pi}{2}$ é argumento do perigeu medido apartir do eixo x , e o ângulo $\ell_0 = \pi$ é anomalia média medida do perigeu até a posição inicial do corpo. Assim, representamos essa solução no plano cartesiano na figura 2.3

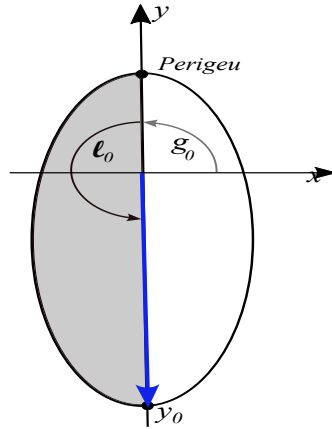


Figura 2.3: Solução elíptica do exemplo (1)

Exemplo 2 *Vamos determinar a solução do sistema (2.58) com valor inicial $y_0 = (\pi, \pi, L_0, G_0)$. Desde que $\ell_0 = \pi$ e $g_0 = \pi$, segue de (2.60) que a solução desse sistema com valor inicial y_0 é dada por*

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \frac{1}{L_0^3}t + \pi, & L(t) &= L_0; \\ g(t) &= \pi, & G(t) &= G_0.\end{aligned}$$

Assim como no exemplo anterior, essa é uma solução elíptica com semi-eixo maior $a = L_0^2$, com período T dado por (2.62) e excentricidade e dada por (2.61). Além disso, temos que o ângulo $g = \pi$ é argumento do perigeu medido apartir do eixo x , e o ângulo $\ell_0 = \pi$ é anomalia média medida do perigeu até a posição inicial do corpo. Assim, representamos essa solução no plano cartesiano na figura 2.4

Observemos que se uma solução do problema de Kepler é uma órbita circular (isso ocorre quando $e = 0$, ou seja, quando $L = G$), então as coordenadas de Delaunay não são válidas pois o perigeu não está definido no círculo, logo elas não podem ser utilizadas para continuar soluções circulares. Para contornar esse problema, Poincaré introduziu novas coordenadas que ficaram conhecidas como as coordenadas de Poincaré-Delaunay.

Finalmente, passaremos das coordenadas de Delaunay para as coordenadas de Poincaré-Delaunay

$$(l, g, L, G) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$$

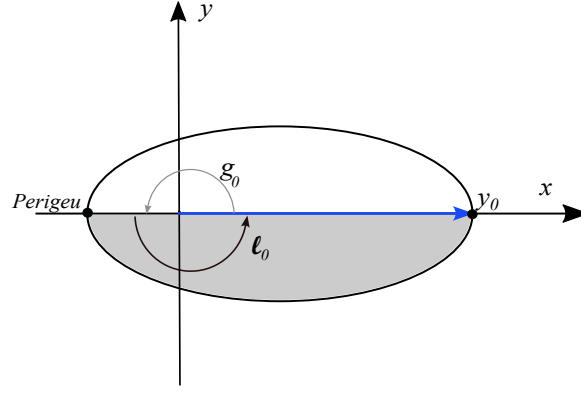


Figura 2.4: Solução elíptica do exemplo (2)

Definimos as coordenadas de Poincaré-Delaunay em $\mathbb{R}^4$ por

$$\begin{aligned}
 \bullet Q_1 &= l + g, \\
 \bullet Q_2 &= -\sqrt{2(L-G)} \sin g, \\
 \bullet P_1 &= L, \\
 \bullet P_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos g.
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Elas estão bem definidas para ℓ, g no intervalo $[0, 2\pi[$ e para $0 < G \leq L$. Além disso, são diferenciáveis para ℓ, g no intervalo $[0, 2\pi[$ e para $0 < G < L$. As coordenadas Q_2, P_1, P_2 são variáveis radiais e a coordenada Q_1 é uma variável angular módulo 2π .

Consideremos a transformação $E : (\ell, g, L, G) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$. Seja $\zeta = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$. Vamos mostrar que essa transformação é simplética. De fato, temos que

$$\frac{\partial E}{\partial \zeta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2(L-G)} \cos(g) & -\frac{\sin(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & \frac{\sin(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2(L-G)} \sin(g) & \frac{\cos(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & -\frac{\cos(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \end{pmatrix},$$

assim

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial E}{\partial \zeta} \right)^T J \left(\frac{\partial E}{\partial \zeta} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2(L-G)} \sin(g) & 1 & -\sqrt{2(L-G)} \cos(g) \\ -1 & -\frac{\cos(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & 0 & -\frac{\sin(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \\ 0 & \frac{\cos(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & 0 & \frac{\sin(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial E}{\partial \zeta} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J.
 \end{aligned}$$

A função Hamiltoniana do problema de Kepler nas coordenadas de Poincaré-Delaunay é dada por

$$\mathcal{H}_{DP} = -\frac{1}{2P_1^2}. \quad (2.64)$$

O sistema Hamiltoniano associado com a função Hamiltoniana (2.64) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3}, & \dot{P}_1 &= 0; \\ \dot{Q}_2 &= 0, & \dot{P}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Vamos determinar uma solução desse sistema Hamiltoniano para o valor inicial $Y_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0)$. Observemos que

$$\dot{Q}_1 = \frac{1}{P_1^3} \Rightarrow \int_0^t dQ_1 = \int_0^t \frac{1}{P_1^3} dt = \frac{1}{P_1^3} t.$$

Dessa forma, temos que $Q_1(t) - Q_1(0) = \frac{1}{P_1^3} t$, ou seja,

$$Q_1(t) = \frac{1}{P_1^3} t + Q_1^0. \quad (2.66)$$

Portanto, a solução do sistema (2.65) com condição inicial Y_0 é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{1}{(P_1^0)^3} t + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0; \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

As coordenadas de Poincaré-Delaunay estão definidas em vizinhanças de órbitas elípticas e em vizinhanças de órbitas circulares. Como as Soluções circulares acontecem quando $L = G$, então, em coordenadas de Poincaré-Delaunay ocorrem quando $Q_2 = P_2 = 0$.

Agora, iremos determinar o período e a excentricidade da solução (2.67). Seja T o período da solução (2.67), pela equação (2.66) temos

$$Q_1(T) = \frac{1}{(P_1^0)^3} T + Q_1^0.$$

Por outro lado, como Q_1 é uma variável angular módulo 2π , ou seja, $Q_1(T) - Q_1^0 = 2\pi$, temos

$$\frac{1}{(P_1^0)^3} T = 2\pi.$$

Portanto, o período da solução é dado por

$$T = 2\pi(P_1^0)^3. \quad (2.68)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} Q_2^2 + P_2^2 &= 2(L - G)(\sin g)^2 + 2(L - G)(\cos g)^2 \\ &= 2(L - G)((\sin g)^2 + (\cos g)^2) \\ &= 2(L - G). \end{aligned}$$

Desde que $L = P_1$, temos $G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$. Dessa forma, temos

$$L^2 - G^2 = P_1(Q_2^2 + P_2^2) - \frac{(Q_2^2 + P_2^2)^2}{4} = \frac{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}{4}.$$

Assim, segue que

$$\frac{\sqrt{L_0^2 - G_0^2}}{L_0} = \frac{\sqrt{((Q_2^0)^2 + (P_2^0)^2)(4P_1^0 - ((Q_2^0)^2 + (P_2^0)^2))}}{2P_1^0}.$$

Portanto, a excentricidade e dessa solução é dada por

$$e = \frac{\sqrt{((Q_2^0)^2 + (P_2^0)^2)(4P_1^0 - ((Q_2^0)^2 + (P_2^0)^2))}}{2P_1^0}. \quad (2.69)$$

Terminaremos essa seção com um exemplo de uma solução do problema de kepler em coordenadas de Poincaré-Delaunay.

Exemplo 3 *Encontraremos uma solução específica do sistema (2.65) com valor inicial $Y_0 = (\pi, 0, p_1, 0)$. Segue de (2.67) que a solução desse sistema com valor inicial Y_0 é dada por*

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{1}{p_1^3}t + \pi, & P_1(t) &= p_1; \\ Q_2(t) &= 0, & P_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Como $Q_2 = P_2$ e $P_1 = L$, essa é uma solução periódica circular com raio $a = p_1^2$, e período T dado por (2.68).

Vamos considerar apenas o caso em que $\ell = f$, onde f é a anomalia verdadeira. Dessa forma, temos $Q_1 = \ell + g = f + g = \theta$, o que implica que o ângulo $\theta = \pi$ determina a posição inicial do corpo. Descrevemos essa solução no plano cartesiano, representada na figura 2.5.

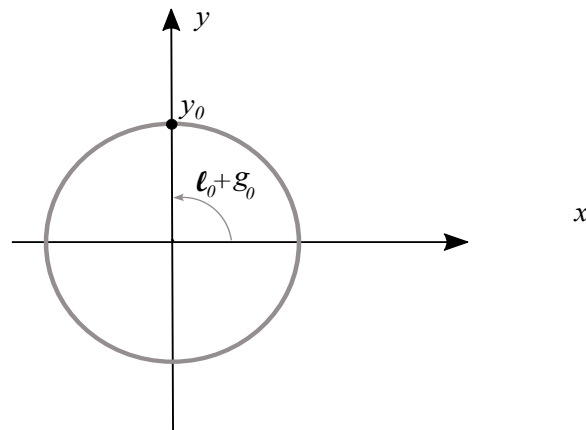


Figura 2.5: Solução periódica circular do exemplo (3)

Capítulo 3

Órbitas Periódicas e o Método de continuação analítica de Poincaré

Neste capítulo descreveremos um método para continuar órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler, conhecido como o Método de continuação analítica de Poincaré. Este método foi desenvolvido pelo matemático Henri Poincaré no final do século XIX, e nos permite identificar órbitas periódicas em sistemas de equações diferenciais.

Primeiramente, mostraremos este método para uma equação diferencial ordinária no plano, e após isso, vamos estudar o método em sistemas Hamiltonianos. Em particular, nosso estudo considera sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade e com simetrias discretas. O Objetivo principal deste capítulo é fornecer resultados preliminares e técnicos que serão muito importantes para os próximos capítulos. Utilizamos [1] como referência para este estudo.

3.1 Uma perturbação de um centro em $\mathbb{R}^2$

Nesta seção descreveremos uma aplicação do método de continuação analítica de Poincaré para equações diferenciais ordinárias.

Consideremos o sistema planar linear representado por

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{u}) \\ g_2(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ e ϵ é uma variável real.

O sistema (3.1) equivale ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \epsilon g_1(x, y), \\ \dot{y} &= x + \epsilon g_2(x, y); \end{aligned} \quad (3.2)$$

O problema não perturbado, ou seja, quando $\epsilon = 0$, é representado pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esse sistema é integrável e apresenta soluções circulares. De fato, suponhamos que (x_0, y_0) seja uma condição inicial de (3.12). Assim, as soluções de (3.12) são dadas por:

$$\phi(t, x_0, y_0) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t),$$

Fazendo $X(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t$ e $Y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t$, temos $X(t)^2 + Y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2$. Portanto, todas as soluções de (3.12) são circulares (exceto a solução de equilíbrio) de raio $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ e, em particular, são periódicas de período $\tau = 2\pi$ e intersectam de forma ortogonal o semi-eixo positivo de x .

Agora, seja

$$\phi(t) = (x(t, \xi, \epsilon), y(t, \xi, \epsilon))$$

uma solução do sistema (3.1) com condições iniciais

$$x_0 = x(0, \xi, \epsilon) = \xi \quad \text{e} \quad y_0 = y(0, \xi, \epsilon) = 0. \quad (3.4)$$

Assim, a trajetória regressa ao semi-eixo positivo x no ponto $x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon)$ para ϵ pequeno o suficiente. Dessa forma, estabelecemos uma aplicação de Poincaré definida por

$$(\xi, \epsilon) \rightarrow P(\xi, \epsilon) = x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon).$$

A solução $\phi(t)$ é periódica se $P(\xi, \epsilon) = \xi$. Assim, $T(\xi, \epsilon)$ é o período da solução e $(\xi, 0)$ é uma condição inicial para a solução periódica de (3.2).

Notemos que ξ é um ponto fixo da aplicação de Poincaré P se, e somente se, é um valor nulo da aplicação

$$\delta(\xi, \epsilon) = x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) - \xi. \quad (3.5)$$

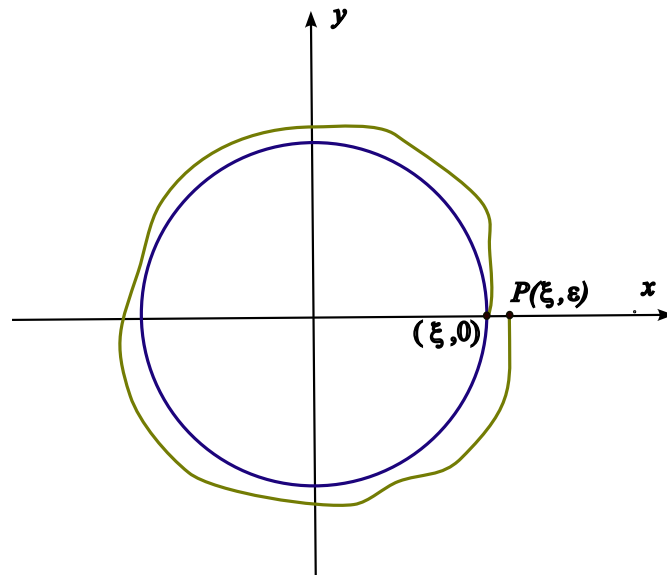


Figura 3.1: A aplicação de Poincaré.

Considerando que $\delta(\xi, 0) = 0$, precisamos buscar uma solução $\xi = \xi(\epsilon)$ definida em uma vizinhança de $\epsilon = 0$ de modo que $\delta(\xi(\epsilon), \epsilon) = 0$.

Para encontrar essa função implícita, utilizaremos o Teorema da Função Implícita (T.F.I). De forma precisa, seja $\delta : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação diferenciável, onde U e V são conjuntos abertos em $\mathbb{R}$. Uma vez que $\delta(\xi, 0) = 0$, se $\frac{\partial \delta}{\partial \xi}(\xi, 0) \neq 0$ para algum ponto $(\xi, 0)$, então pelo T.F.I existe $\xi = \xi(\epsilon)$ de modo que

$$\delta(\xi(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Obeservemos que não é possível resolver o problema de forma direta utilizando o T.F.I, pois $\delta(\xi, 0) = 0$ e $\frac{\partial \delta}{\partial \xi}(\xi, 0) = 0$. Assim, elaboraremos uma estratégia pra aplicar o T.F.I. Realizando a expansão de $\delta(\xi, \epsilon)$ em séries de Taylor em torno de $\epsilon = 0$, temos

$$\delta(\xi, \epsilon) = \delta(\xi, 0) + \epsilon \frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}(\xi, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Como $\delta(\xi, 0) = 0$, reescrevemos essa equação da forma

$$\delta(\xi, \epsilon) = \epsilon \left(\frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}(\xi, 0) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) =: \epsilon(\Delta(\xi, \epsilon)).$$

Chamamos a função $\Delta(\xi, \epsilon) = \frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}(\xi, 0) + \mathcal{O}(\epsilon)$ de função de deslocamento reduzido.

Lema 3.1 *Se $\xi > 0$ é tal que $\Delta(\xi, 0) = 0$ e $\frac{\partial \Delta}{\partial \xi}(\xi, 0) \neq 0$ então existe $\xi = \xi(\epsilon)$ tal que*

$$\delta(\xi(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Para aplicar o Lema derivamos a aplicação (3.5) com respeito a ϵ e avaliamos em $\epsilon = 0$. Assim, obtemos a expressão

$$\frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}(\xi, 0) = \dot{x}(T(\xi, 0), \xi, 0) \frac{\partial T}{\partial \epsilon}(\xi, 0) + \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T(\xi, 0), \xi, 0).$$

Observemos que

$$\dot{x}(T(\xi, 0), \xi, 0) = -y(0, \xi, 0) = 0,$$

assim, a aplicação $\xi \longrightarrow \dot{x}(T(\xi, 0), \xi, 0) \frac{\partial T}{\partial \epsilon}(\xi, 0)$ se anula para todo ξ . Dessa forma, temos

$$\frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}(\xi, 0) = \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T(\xi, 0), \xi, 0).$$

Diante disso, buscaremos uma expressão para $x_\epsilon(T(\xi, 0), \xi, 0)$. Para encontrar uma equação variacional, efetuamos o cálculo das derivadas parciais com respeito a ϵ e avaliamos em $\epsilon = 0$ na equação (3.2). Além disso, calculamos as derivadas parciais com respeito a ϵ nas condições iniciais (3.4).

Assim, obtemos um sistema variacional descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \epsilon} &= -\frac{\partial y}{\partial \epsilon} + g_1(x, y), \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + g_2(x, y); \end{aligned} \tag{3.6}$$

com condições iniciais

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(0, \xi, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial \epsilon}(0, \xi, 0) = 0.$$

O sistema variacional (3.6) pode ser descrito na forma matricial

$$\dot{W} = AW + b(t), \quad W(0) = 0, \tag{3.7}$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} g_1(x(t, \xi, 0), y(t, \xi, 0)) \\ g_2(x(t, \xi, 0), y(t, \xi, 0)) \end{pmatrix}$.

Como a matriz fundamental em $t = 0$ associada com o sistema linear homogêneo $\dot{W} = AW$ é dada por

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

a solução $W(t)$ do sistema (3.7) será determinada pela fórmula de variação dos parâmetros

$$W(t) = \Phi(t)W(0) + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds. \quad (3.8)$$

Lembremos que o nosso objetivo é encontrar

$$\Delta(2\pi, \xi, \epsilon) = \frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}(\xi, 0) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Segue das equações (3.7) e (3.8) que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(2\pi, \xi, 0) \\ \frac{\partial y}{\partial \epsilon}(2\pi, \xi, 0) \end{pmatrix} &= \phi(2\pi) \int_0^{2\pi} \Phi^{-1}(s)b(s)ds \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \cos(s)g_1(\xi \cos(s), \xi \sin(s)) + \sin(s)g_2(\xi \cos(s), \xi \sin(s))ds \\ \int_0^{2\pi} -\sin(s)g_1(\xi \cos(s), \xi \sin(s)) + \cos(s)g_2(\xi \cos(s), \xi \sin(s))ds \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}(\xi, 0) &= \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(2\pi, \xi, 0) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(s)g_1(\xi \cos(s), \xi \sin(s)) + \sin(s)g_2(\xi \cos(s), \xi \sin(s))ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Portanto, diante do que exposto anteriormente, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Consideremos o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \epsilon g_1(x, y), \\ \dot{y} &= x + \epsilon g_2(x, y); \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^2 . Se ξ_0 é uma raiz da função $B : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\xi \mapsto \int_0^{2\pi} \cos(s)g_1(\xi \cos(s), \xi \sin(s)) + \sin(s)g_2(\xi \cos(s), \xi \sin(s))ds$$

e

$$\frac{\partial B}{\partial \xi}(\xi_0) \neq 0,$$

então existe $\xi = \xi(\epsilon)$ (com $\xi(0) = \xi_0$) suficientemente pequeno tal que a solução com condição inicial $(x(0), y(0)) = (\xi(\epsilon), 0)$ é uma solução periódica de (3.10), cujo período é $T(\epsilon)$ próximo a 2π .

3.1.1 Equação de Van der Pool

A equação de Van der Pol descreve um oscilador que possui um termo de amortecimento não linear. Descrevemos sua evolução no tempo através da equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (3.11)$$

onde $x(t)$ é a posição do oscilador e μ mede a força do termo de amortecimento. No caso particular onde $\mu = 0$, temos um oscilador harmônico simples. Se definirmos $y = \frac{dx}{dt}$ então a equação (3.11) pode ser escrita pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + \epsilon(x^2 - 1)y. \end{aligned} \quad (3.12)$$

O oscilador de Van der Pol foi proposto pelo engenheiro elétrico e físico holandês Balthasar van der Pol durante seu trabalho na Philips. Van der Pol descobriu oscilações estáveis, que ele mais tarde chamou de oscilações de relaxação e que atualmente são tidas como um tipo de ciclo limite em circuitos elétricos que empregam tubos de vácuo. Ao serem acionados próximo ao ciclo limite, esses circuitos ficam arrastados, ou seja, o sinal de acionamento puxa a corrente junto com ele. Na edição de setembro de 1927 da Nature, Van der Pol e seu colega, van der Mark, descreveram que em determinadas frequências de transmissão foi possível ouvir um ruído irregular, que posteriormente foi identificado como resultado de um caos determinístico. A equação de Van der Pol tem uma vasta história de aplicação nas ciências biológicas e físicas. Na biologia, Fitzhugh e Nagumo desenvolveram a equação em um campo planar como uma representação para potenciais de ação de neurônios. Na sismologia, a equação é empregada para modelar as duas placas em uma falha geológica, já em pesquisas de fonação, é empregada para modelar os osciladores das pregas vocais direita e esquerda. Segue o seguinte resultado como consequência do Teorema (3.1):

Corolário 3.2 *Consideremos o sistema (3.12). Então a órbita circular de raio 2 pode ser continuada a uma solução periódica do sistema (3.12).*

Demonstração: Aplicando o Teorema 3.1, temos que $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = (x^2 - 1)y$ e

$$B(\xi) = \int_0^{2\pi} \sin(s)[(\xi^2 \cos(s) - 1)\xi \sin(s)]ds = \frac{\pi}{4}\xi(4 - \xi^2).$$

Uma vez que $\frac{\partial B}{\partial \xi}(\xi) = \frac{\pi}{4}(4 - 3\xi^2)$, se tomarmos $\xi_0 = 2$ temos que $B(2) = 0$ e $\frac{\partial B}{\partial \xi}(2) = -2\pi$. Assim, a órbita circular de raio $\xi_0 = 2$ pode ser continuada a uma órbita periódica do sistema (3.12), para todo ϵ pequeno o suficiente. ■

3.2 O método de continuação analítica em sistemas Hamiltonianos

Nesta seção, inicialmente, descreveremos o método de continuação analítica de Poincaré para sistemas Hamiltonianos com n graus de liberdade. Consideremos o sistema Hamiltoniano

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

cujas função Hamiltoniana é $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \epsilon)$. O método de continuação analítica de Poincaré [30], fundamenta-se no seguinte problema: Seja $\varphi(t, \mathbf{z}, \epsilon)$ uma solução do sistema (3.13) e vamos supor que conhecemos uma solução periódica para $\epsilon = \epsilon^*$. Além disso, consideremos a condição inicial $z = z_0^*$ tal que $\varphi(t, \mathbf{z}_0^*, \epsilon^*)$ é a solução periódica conhecida e que tem período T^* . Então temos que

$$\varphi(t + T^*, \mathbf{z}_0^*, \epsilon^*) = \varphi(t, \mathbf{z}_0^*, \epsilon^*),$$

para todo $0 \leq t \leq T^*$. Uma pergunta a ser feita agora é a seguinte: Quando o sistema (3.13) possui soluções periódicas com certas condições iniciais z e ϵ próximos a z_0^* e ϵ^* ? De maneira geral, queremos encontrar soluções periódicas com o mesmo período T^* . Pelo Teorema de Existência e unicidade para equações diferenciais, para que a solução $\varphi(t, \mathbf{z}, \epsilon)$ de (3.13) tenha período T^* é necessário e suficiente que $\varphi(T^*, \mathbf{z}, \epsilon) = \varphi(0, \mathbf{z}, \epsilon) = \mathbf{z}$. Então, definimos

$$\phi_k(\mathbf{z}, \epsilon) = \varphi_k(T^*, \mathbf{z}, \epsilon) - z_k, \quad (3.14)$$

e precisamos que sejam satisfeitas as $m = 2n$ funções analíticas

$$\phi_k(\mathbf{z}, \epsilon) = \varphi_k(T^*, \mathbf{z}, \epsilon) - z_k = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

Este sistema é um sistema implícito de equações (chamado de *equações de periodicidade*), o qual é satisfeito quando $z = z_0^*$ e quando $\epsilon = \epsilon^*$. Assim, se a matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial \phi_k}{\partial z_j}(\mathbf{z}, \epsilon) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \epsilon=\epsilon^*}$$

tem determinante diferente de zero, então pelo Teorema da Função Implícita existem funções diferenciáveis $z_k(\epsilon)$ tal que $z_k(0) = (z_0^*)_k$, $k = 1, \dots, 2n$.

Agora, consideremos um sistema Hamiltoniano no qual a função Hamiltoniana associada é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon), \quad (3.16)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ e ϵ é um parâmetro real. Supomos que H é uma função analítica em $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon)$. Desenvolvendo a função Hamiltoniana (3.16) em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$, obtemos

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.17)$$

cujos sistema associado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}, & \dot{p}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Suponhamos que o sistema Hamiltoniano (3.18) é invariante com respeito a uma (ou ambas) das simetrias dadas abaixo:

$$\begin{aligned} S_1 : (x, y, p_x, p_y) &\longrightarrow (x, -y, -p_x, p_y), \\ S_2 : (x, y, p_x, p_y) &\longrightarrow (-x, y, p_x, -p_y), \end{aligned} \quad (3.19)$$

ou seja,

$$\mathcal{H}(S_i(x, y, p_x, p_y)) = \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y).$$

Observemos que S_1 é uma reflexão em torno do eixo x (veja Figura 3.2) e S_2 é uma reflexão em torno do eixo y . Além disso, estas simetrias são consideradas reversíveis no tempo, pois, supondo que $(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ é uma solução, então $(x(-t), -y(-t), -p_x(-t), p_y(-t))$ (quando ocorre a simetria S_1) e $(-x(-t), y(-t), p_x(-t), -p_y(-t))$ (quando ocorre a simetria S_2) também são soluções. Os subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{L}_1 = \{(x, 0, 0, p_y) \in \mathbb{R}^4 : x, p_y \in \mathbb{R}\} \text{ e } \mathcal{L}_2 = \{(0, y, p_x, 0) \in \mathbb{R}^4 : y, p_x \in \mathbb{R}\}$$

são os conjuntos fixados pelas simetrias S_1 e S_2 , respectivamente. Observemos ainda que se uma solução periódica num determinado ponto estiver no subspaço $\mathcal{L}_1$ (respect. $\mathcal{L}_2$), então ela intersecta o eixo x (respect. y) de forma ortogonal. A seguir, apresentaremos alguns resultados que relacionam simetrias e as órbitas de um sistema Hamiltoniano.

Lema 3.2 *Suponhamos que o sistema Hamiltoniano (3.18) é invariante com respeito as simetrias S_1 e/ou S_2 . Seja $\phi(t)$ uma solução do sistema Hamiltoniano (3.18), então*

$$\tilde{\phi}_i(t) := S_i(\phi(t)) \quad i = 1, 2,$$

também é uma solução.

Demonstração: Seja $\phi(t) = (x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ uma solução de (3.18). Mostraremos que $\tilde{\phi}_1(t) = (x(-t), -y(-t), -p_x(-t), p_y(-t))$ também é uma solução do sistema (3.18). De fato, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d(-p_x(-t))}{dt} &= \dot{p}_x(-t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), -y(-t), -p_x(-t), p_y(-t))}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\ \frac{d(p_y(-t))}{dt} &= -\dot{p}_y(-t) = \frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), -y(-t), -p_x(-t), p_y(-t))}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \\ \frac{d(x(-t))}{dt} &= -\dot{x}(-t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial p_x} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), -y(-t), -p_x(-t), p_y(-t))}{\partial p_x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}, \\ \frac{d(-y(-t))}{dt} &= \dot{y}(-t) = \frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial p_y} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), -y(-t), -p_x(-t), p_y(-t))}{\partial p_y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\tilde{\phi}_1(t)$ é uma solução. Agora, mostraremos que a função $\tilde{\phi}_2(t) = (-x(-t), y(-t), p_x(-t), -p_y(-t))$ é uma solução de (3.18). Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d(p_x(-t))}{dt} &= -\dot{p}_x(-t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial x} \\
&= \frac{\partial \mathcal{H}(-x(-t), y(-t), p_x(-t), -p_y(-t))}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\
\frac{d(-p_y(-t))}{dt} &= \dot{p}_y(-t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial y} \\
&= -\frac{\partial \mathcal{H}(-x(-t), y(-t), p_x(-t), -p_y(-t))}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \\
\frac{d(-x(-t))}{dt} &= \dot{x}(-t) = \frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial p_x} \\
&= \frac{\partial \mathcal{H}(-x(-t), y(-t), p_x(-t), -p_y(-t))}{\partial p_x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}, \\
\frac{d(y(-t))}{dt} &= -\dot{y}(-t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(-t), y(-t), p_x(-t), p_y(-t))}{\partial p_y} \\
&= -\frac{\partial \mathcal{H}(-x(-t), y(-t), p_x(-t), -p_y(-t))}{\partial p_y} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}.
\end{aligned}$$

Portanto, a função $\tilde{\phi}_2(t)$ é uma solução de (3.18) e concluímos a demonstração. ■

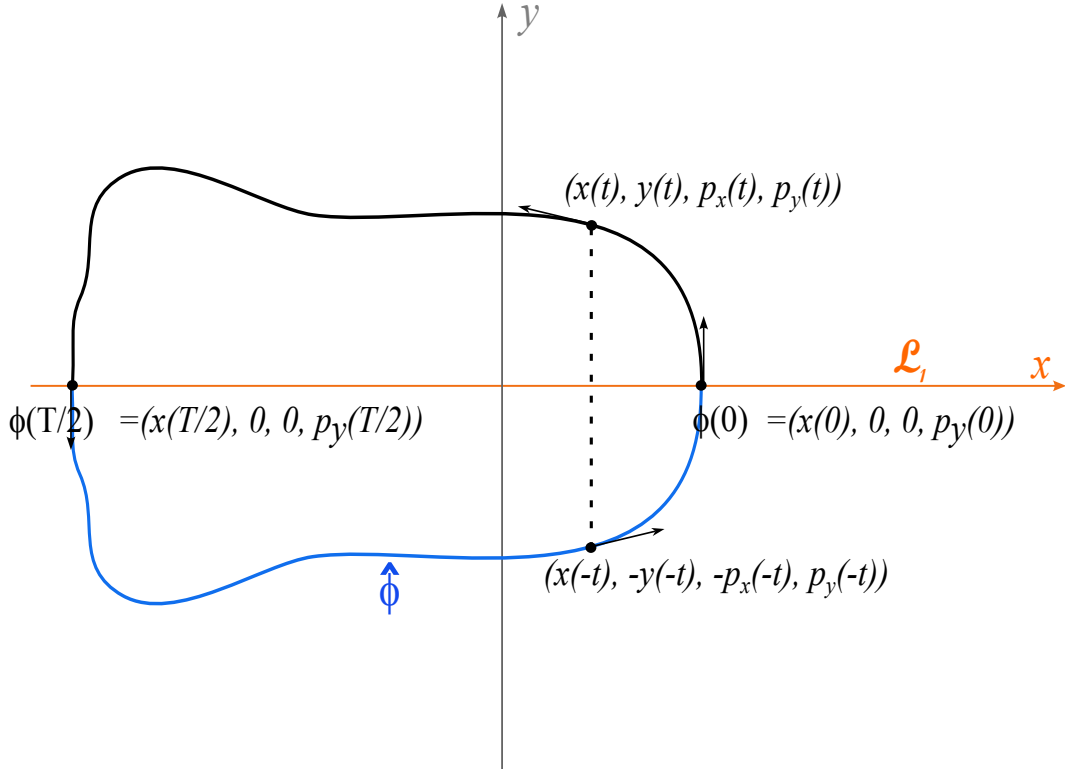


Figura 3.2: Esquema da demonstração do Lema 3.3 para soluções S_1 -simétricas.

Lema 3.3 *Seja $\phi(t) = (x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ uma solução do sistema Hamiltoniano (3.18). Dado $i = 1, 2$, supomos que o sistema (3.18) é invariante pela simetria S_i , $\phi(0) \in \mathcal{L}_i$, $\phi(T/2) \in$*

$\mathcal{L}_i$ e $\phi(t)$ não intersecta $\mathcal{L}_i$ no intervalo $(0, T/2)$. Então $\phi(t)$ é uma solução T -periódica e S_i -simétrica.

Demonstração: Primeiro, mostraremos para $i = 1$. Definimos a aplicação

$$\bar{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } 0 \leq t \leq T/2; \\ \hat{\phi}(t) = S_1 \circ \phi(T - t), & \text{se } T/2 \leq t \leq T; \end{cases}$$

Observemos que esta aplicação está bem definida, de fato,

$$\hat{\phi}(T/2) = S_1 \circ \phi(T - T/2) = S_1 \circ \phi(T/2) = \phi(T/2),$$

pois $\phi(T/2) \in \mathcal{L}_1$ e o subespaço $\mathcal{L}_1$ é fixado por S_1 , além disso, observemos também que

$$\bar{\phi}(T) = \hat{\phi}(T) = S_1 \circ \phi(0) = \phi(0) = \bar{\phi}(0),$$

pois $\phi(0)$ também pertence a $\mathcal{L}_1$. Pelo exercício anterior, $\bar{\phi}(t)$ é uma solução de (3.18). Percebamos que por S_1 ser uma reflexão de $\phi(t)$ a aplicação $\hat{\phi}(t)$ não intersecta $\mathcal{L}_1$ no intervalo $(T/2, T)$ e nos garante que $\bar{\phi}(t)$ é difeomorfo a um círculo. Como a aplicação $\phi(t)$ tem pontos em comum com a aplicação $\bar{\phi}(t)$, ela também é difeomorfa a um círculo. Isso mostra que $\phi(t)$ é T -periódica e S_1 -simétrica. A Figura 3.2 ilustra a demonstração desse lema para soluções S_1 -simétricas.

Para $i = 2$, basta definirmos a aplicação

$$\bar{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } 0 \leq t \leq T/2; \\ \hat{\phi}(t) = S_2 \circ \phi(T - t), & \text{se } T/2 \leq t \leq T; \end{cases}$$

e seguir os mesmos passos da demonstração anterior. ■

Se H em (3.18) é invariante com respeito as duas simetrias S_1 e S_2 , então podemos usar as duas reflexões e obter uma solução com ambas simetrias. Estas soluções são chamadas de soluções dupla simétricas. Assim, temos o seguinte resultado:

Lema 3.4 *Seja $\phi(t) = (x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ uma solução do sistema Hamiltoniano (3.18). Suponhamos que o sistema (3.18) é invariante pelas simetrias S_1 e S_2 , $\phi(0) \in \mathcal{L}_1$, $\phi(T/4) \in \mathcal{L}_2$ e $\phi(t)$ não intersecta os subspaços $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no intervalo $(0, T/4)$. Então $\phi(t)$ é uma solução T -periódica e dupla simétrica.*

Demonstração: A demonstração desse resultado é análoga a demonstração do Lema 3.3. Basta definir, no intervalo $[0, T]$, a função:

$$\bar{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } 0 \leq t \leq T/4, \\ S_1 \circ \phi(t - T/4), & \text{se } T/4 \leq t \leq T/2, \\ S_2 \circ S_1 \circ \phi(t - 3T/4), & \text{se } T/2 \leq t \leq 3T/4, \\ S_2 \circ \phi(t - T), & \text{se } 3T/4 \leq t \leq T, \end{cases}$$

e mostrar que esta função está bem definida e que é dupla simétrica. ■

Agora vamos obter um resultado técnico que será utilizado nos próximos capítulos. Mais precisamente, dado um sistema de equações diferenciais ordinárias que depende de um parâmetro ϵ , queremos aproximar as soluções do sistema perturbado, de maneira que possamos escrever em série de Taylor em torno de ϵ e tal que a primeira aproximação seja a solução do problema com $\epsilon = 0$.

Consideremos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$ representado pela equação

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon) \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{g}$ é uma função analítica em $\mathbf{x}$ e em ϵ , em alguma vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$ e $\epsilon = 0$, respectivamente. Desenvolvendo $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon)$ em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, 0) + \epsilon \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon}(\mathbf{x}, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &:= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

ou seja, (3.20) pode ser escrito como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ são funções diferenciáveis.

Seja $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)$ uma solução do sistema não perturbado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}), \quad (3.22)$$

Queremos determinar uma solução de (3.20) ou (3.21) numa vizinhança de $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)$ da seguinte maneira

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_*, \epsilon) = \mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \epsilon \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.23)$$

Para determinar a primeira aproximação (em ϵ) da solução (3.23) vamos necessitar de um resultado auxiliar que apresentaremos abaixo.

Teorema 3.3 *Consideremos o sistema Hamiltoniano (3.21). Seja $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)$ solução de (3.22). Então a solução de (3.21) é dada por*

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_*, \epsilon) = \mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \epsilon \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*)$ é solução do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))\mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)). \quad (3.25)$$

Demonstração: Diferenciando (3.23) em relação a t , obtemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_*, \epsilon) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)) + \epsilon \dot{\mathbf{x}}_1(t, \mathbf{x}_*) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.26)$$

Substituindo a expressão (3.23) na equação (3.21) e desenvolvendo em séries de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_*, \epsilon) &= \mathbf{g}_0\left(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \epsilon \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &\quad + \epsilon \mathbf{g}_1\left(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \epsilon \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)) + \epsilon \left(D\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Comparando (3.26) com (3.27) vemos que $\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*)$ satisfaz a equação diferencial (3.25). Isso mostra que (3.24) é solução de (3.21). ■

No teorema anterior, obtemos a expressão da solução de (3.21) e a condição que $\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*)$ deve satisfazer. O próximo resultado nos dá $\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*)$ explicitamente.

Proposição 3.1 *Mantenhamos o enunciado do Teorema (3.3). A solução de (3.25) é dada por*

$$\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) = X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon}(\mathbf{x}_0(s, \mathbf{x}_*)) ds,$$

onde $X(t)$ é a matriz fundamental do sistema de equações lineares

$$\dot{X} = D\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))X. \quad (3.28)$$

Demonstração: Consideremos o sistema de equações lineares

$$\dot{X} = D\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))X. \quad (3.29)$$

Seja $X(t)$ sua matriz fundamental. A solução de (3.25) é dada pela formula de variação de parâmetros

$$\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) = X(t)X^{-1}(0)x_1(0) + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(s, \mathbf{x}_*))ds$$

Como $\mathbf{x}_1(0) = 0$, temos que $X(t)X^{-1}(0)x_1(0) = 0$. Logo,

$$\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) = X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon}(\mathbf{x}_0(s, \mathbf{x}_*)) ds. \quad (3.30)$$

Observemos que a matriz $X(t)$ é dada por

$$X(t) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*}. \quad (3.31)$$

■

Capítulo 4

Órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler

Neste capítulo mostraremos analiticamente a existência de uma grande variedade de famílias de soluções periódicas simétricas próximas a soluções circulares ou próximas a soluções elípticas de sistemas analíticos planares que são perturbações simétricas do problema de Kepler. A motivação para este estudo é a variedade de problemas aplicados que aparecem na literatura. Por exemplo, existem muitos problemas na Mecânica celeste no qual podemos descrevê-los como uma perturbação do problema de Kepler em coordenadas planares. Citamos por exemplo o trabalho realizado pelos autores em [4] ou [5]. Também, existem motivações em problemas da química, onde o movimento de átomos de hidrogênio, por exemplo, são modelados por certas perturbações planares do problema de Kepler. Um exemplo bem concreto, neste sentido, pode ser encontrado em [22].

Nosso estudo é o suficientemente geral que nos permite obter órbitas periódicas simétricas dizendo qual o seu período e descrevendo as famílias de condições iniciais que dão origem a soluções periódicas. Os resultados deste capítulo são baseados nas referências [3] e [2].

De forma precisa, nossa análise consiste em estudar soluções periódicas em sistemas Hamiltonianos planares da forma

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é a função Hamiltoniana do problema de Kepler planar, ou seja,

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (4.2)$$

Consideramos o problema de Kepler (planar) em coordenadas de Delaunay, cuja função Hamiltoniana é

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2L^2} + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.3)$$

Assim, as equações do movimento associada a função Hamiltoniana (4.3) são descritas por

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{L^3} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{L} &= 0 - \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \ell}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2); \\ \dot{g} &= 0 + \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{G} &= 0 - \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Seja $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon)$ uma solução do sistema 4.4 com condição inicial $\mathbf{Y} = (\ell_0, g_0, L_0, G_0)$. Então temos que esta solução (veja Lema 4.3) é dada por:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \ell(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \frac{1}{L^3}t + \ell_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \varphi_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= g(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = g_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \varphi_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= L(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = L_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \varphi_4(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= G(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = G_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_0) = \varphi(t, \mathbf{Y}_0, 0) = (\frac{1}{L^3}t + \ell_0, g_0, L_0, G_0)$ uma solução periódica do problema de Kepler com condição inicial $Y_0 = (\ell_0, g_0, L_0, G_0)$. Então para encontrar uma solução periódica do sistema perturbado (4.4) precisamos encontrar condição inicial $\mathbf{Y}$ próxima a $\mathbf{Y}_0$ tal que

$$\phi_k(\mathbf{Y}, \epsilon) = \varphi_k(T^*, \mathbf{Y}, \epsilon) - Y_k = 0, \quad k = 1, \dots, 4.\tag{4.6}$$

Observemos que $\phi_k(\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0, \epsilon = 0) = 0$. Então, como vimos na seção 3.2 se a matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial \phi_k}{\partial Y_j}(\mathbf{Y}, \epsilon) \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0, \epsilon=0}$$

tem determinante diferente de zero, então pelo Teorema da Função Implícita podemos encontrar uma condição inicial $\mathbf{Y}$ que da origem a uma órbita periódica do sistema (4.4).

No entanto,

$$J = \frac{\partial \phi_k}{\partial Y_j} \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0, \epsilon=0} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial Y_j} \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0, \epsilon=0} - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3T/L_0^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{4.7}$$

Isso implica que a matriz jacobiana acima é altamente degenerada (possui determinante nulo) o que torna inviável a utilização imediata do Método da Continuação analítica de Poincaré conforme discutimos na seção 3.2.

Por este motivo uma opção para poder prolongar órbitas periódicas keplerianas é utilizar “boas coordenadas” e impor condições de simetrias no sistema, para evitar a degenerescência anterior. Em Mecânica Celeste há um ditado que diz “não existe um bom sistema de coordenadas”. Com efeito, a literatura clássica e moderna apresentam vários tipos de coordenadas (veja por exemplo: [8], [20]). Como vimos anteriormente, as coordenadas de Delaunay, os quais são válidos na vizinhança de elípticas, e as coordenadas de Poincaré-Delaunay, válidas na vizinhança de órbitas circulares, tornam o problema de Kepler e a descrição das simetrias particularmente simples.

4.1 Órbitas periódicas próximas a soluções circulares do problema de Kepler

Nesta seção vamos estudar a continuação de soluções circulares do problema de Kepler, utilizando o método de continuação analítica de Poincaré que foi desenvolvido no capítulo anterior.

Consideremos a função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ dada por

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ e $\mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é a função Hamiltoniana do problema de Kepler planar (4.2). Além disso, vamos assumir que $\mathcal{H}$ é invariante com respeito a uma (ou ambas) das reflexões S_1 e S_2 dadas em (3.19).

Neste problema, não estudaremos as órbitas em coordenadas cartesianas pelo fato de apresentarem expressões complexas para manipular e, também, não utilizaremos as coordenadas de Delaunay, pois a coordenada g , argumento do perigeu, não está definido para uma circunferência. Desta maneira, Vamos utilizar as coordenadas de Poincaré-Delaunay (PD-coordenadas) que estão definidas tanto para órbitas circulares quanto para órbitas elípticas. Observemos que a função Hamiltoniana (4.8), em PD-coordenadas, é dada por

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{P}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.9)$$

onde

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{P}) = -\frac{1}{2P_1^2}, \quad (4.10)$$

é a função Hamiltoniana do problema de Kepler em PD-coordenadas. As equações do movimento associadas a função Hamiltoniana (4.9) são descritas por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 - \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= 0 - \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Vamos representar o fluxo do sistema perturbado acima por $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon)$. Apresentaremos a seguir um resultado que determina algumas condições suficientes para que uma solução intersecte ortogonalmente os espaços $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, em coordenadas de Delaunay e em PD-coordenadas.

Lema 4.1 *Seja $\varphi(t)$ uma solução do sistema Hamiltoniano (4.11). Então, em coordenadas de Delaunay (2.55), $\varphi(t_0)$ intersecta o eixo x (respect. eixo y) ortogonalmente em $t = t_0$ se*

$$\begin{aligned} \ell(t_0) &= 0 \mod \pi & e & & g(t_0) &= 0 \mod \pi \\ (\text{respect. } \ell(t_0) &= 0 \mod \pi & e & & g(t_0) &= \frac{\pi}{2} \mod \pi), \end{aligned} \quad (4.12)$$

e em PD-coordenadas (2.63), $\varphi(t_0)$ intersecta o eixo x (respect. eixo y) ortogonalmente em $t = t_0$ se

$$\begin{aligned} Q_1(t_0) &= 0 \mod \pi & e & & Q_2(t_0) &= 0 \\ (\text{respect. } Q_1(t_0) &= \frac{\pi}{2} \mod \pi & e & & P_2(t_0) &= 0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Demonstração: Seja $\varphi(t) = (x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ solução de (4.11). Primeiro demonstraremos para as variáveis de Delaunay. Observemos que se $g(t_0) = 0 \mod \pi$ então o perigeu e o apogeu estão sobre o eixo x , e como $\ell(t_0) = 0 \mod \pi$ a solução em $t = t_0$ está sobre

o perigeu ou sobre o apogeu. Isso implica que $y(t_0) = 0$ e $p_x(t_0) = 0$, consequentemente, a solução em $t = t_0$ está sobre o espaço $\mathcal{L}_1$. Portanto, $\varphi(t)$ intersecta ortogonalmente o eixo x em $t = t_0$. Agora, se $g(t_0) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$ então o perigeu e o apogeu estão sobre o eixo y , e como $\ell(t_0) = 0 \mod \pi$ a solução em $t = t_0$ também está sobre o perigeu ou sobre o apogeu. Dessa forma, $x(t_0) = 0$ e $p_y(t_0) = 0$, consequentemente, a solução em $t = t_0$ está sobre o espaço $\mathcal{L}_2$. Portanto, $\varphi(t)$ intersecta ortogonalmente o eixo y em $t = t_0$.

Por outro lado, analisando em PD-coordenadas, pelo que vimos acima e pela definição destas coordenadas, uma intersecção ortogonal com o eixo x (respect. eixo y) em $t = t_0$ ocorre quando

$$\begin{aligned} Q_1(t_0) &= 0 \mod \pi & \text{e} & & Q_2(t_0) &= 0 \\ (\text{respect. } Q_1(t_0) &= \frac{\pi}{2} \mod \pi & \text{e} & & P_2(t_0) &= 0). \end{aligned}$$

■

A seguir vamos exibir um resultado importante, o qual é uma consequência direta das equações variacionais (Teorema 3.3) e do fluxo do sistema (4.11). Vamos representar o fluxo de (4.11) por $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon))$.

Lema 4.2 *Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}) = (Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}), Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}), P_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}), P_2^{(0)}(t, \mathbf{Y})) = (\frac{1}{p_1^3}t + q_1, q_2, p_1, p_2)$ uma solução do problema de kepler (4.10) com condição inicial $\mathbf{Y} = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ em PD-coordenadas. Então a solução do problema perturbado (4.11) representada por $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon)$ com a mesma condição inicial $\mathbf{Y}$ é dada por:*

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon Q_1^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ P_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= P_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon P_1^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ P_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= P_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon P_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}) &= \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y})) ds, \\ P_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}) &= - \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y})) ds. \end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração deste resultado segue do Teorema 3.3. De fato, mantendo a notação do Teorema 3.3, sejam $g_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = (P_1^{-3}, 0, 0, 0)$ e

$$g_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathbb{J} \nabla \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_1} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_1} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_1}, \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}, -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_1}, -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2} \right).$$

Consideremos a EDO

$$\dot{\mathbf{x}} = Dg_0(\varphi_0(t, \mathbf{Y}))\mathbf{x} + g_1(\varphi_0(t, \mathbf{Y})). \quad (4.15)$$

Como vimos no Teorema 3.3, se

$$\varphi_1(t, \mathbf{Y}) = (Q_1^{(1)}(t, \mathbf{Y}), Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}), P_1^{(1)}(t, \mathbf{Y}), P_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}))$$

é solução da EDO (4.15), então

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}_1^{(1)} \\ \dot{Q}_2^{(1)} \\ \dot{P}_1^{(1)} \\ \dot{P}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3p_1^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_1} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_1} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2} \end{pmatrix},$$

ou equivalente

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1^{(1)} &= -3p_1^{-4}P_1^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_1}, & \dot{P}_1^{(1)} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_1}, \\ \dot{Q}_2^{(1)} &= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}, & \dot{P}_2^{(1)} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Resolvendo o sistema (4.16) com condição inicial $\mathbf{Y} = (q_1, q_2, p_1, p_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \bullet Q_1^{(1)}(t, \mathbf{Y}) &= \int_0^t \left(\frac{-3}{p_1^4} P_1^{(1)}(\mathbf{s}, \mathbf{Y}) + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_1}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y})) \right) ds \\ \bullet Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}) &= \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y})) ds, \\ \bullet P_1^{(1)}(t, \mathbf{Y}) &= - \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_1}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y})) ds, \\ \bullet P_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}) &= - \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y})) ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Logo, concluímos a demonstração. ■

Agora, vamos caracterizar uma solução circular do problema de Kepler S_1 -simétrica em PD-coordenadas.

Pelo Lema 4.1, $\mathbf{Y}_{0,1} = (n\pi, 0, p_1, 0) \in \mathcal{L}_1$, onde $n \in \{0, 1\}$ e $p_1 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. Assim, a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}_{0,1})$ do problema de Kepler em PD-coordenadas com condição inicial $\mathbf{Y}_{0,1}$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,1}) &= \frac{1}{p_1^3}t + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,1}) &= p_1, \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,1}) &= 0, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,1}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Desde que a solução (4.18) é circular, seja T seu período. Esta solução é S_1 -simétrica se, em $t = \frac{T}{2}$, ela intesecta ortogonalmente o eixo x. Mas, pelo Lema 4.1, isso é verídico se

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Y}_{0,1}\right) &= \frac{T}{2p_1^3} + n\pi = (n+1)\pi, \\ Q_2^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Y}_{0,1}\right) &= 0, \end{aligned}$$

isto é, $\frac{T}{2p_1^3} = \pi$, consequentemente, $T = 2\pi p_1^3$.

Agora, seja $\mathbf{Y}_1 = (n\pi, 0, p_1 + \delta P_1, 0 + \delta P_2) \in \mathcal{L}_1$ uma condição inicial, próxima a $\mathbf{Y}_{0,1}$, onde δP_1 e δP_2 são suficientemente pequenos. Portanto, a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_1)$ do problema de Kepler em PD-coordenadas com condição inicial $\mathbf{Y}_1$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_1) &= \frac{1}{(p_1 + \delta P_1)^3} t + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_1) &= p_1 + \delta P_1 \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_1) &= 0, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_1) &= \delta P_2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Obtemos o seguinte resultado sobre soluções periódicas S_1 -simétricas do problema de Kepler perturbado:

Teorema 4.1 *Suponhamos que $\mathcal{H}$ em (4.9) é invariante com respeito a simetria S_1 , e seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_1)$, como em (4.19), solução do problema de Kepler em PD-coordenadas com condição inicial $\mathbf{Y}_1$. Suponhamos também que*

$$a) \quad \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_1)) \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} d\mathbf{s} = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_1)) \Big|_{\delta P_1=0, \delta P_2=0, \epsilon=0} d\mathbf{s} = 0$$

e

$$b) \quad \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial \delta P_2 \partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_1)) \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} d\mathbf{s} = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial \delta P_2 \partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_1)) \Big|_{\delta P_1=0, \delta P_2=0, \epsilon=0} d\mathbf{s} \neq 0.$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe uma família de condições iniciais, parametrizadas por ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon = (n\pi, 0, p_1 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon)) \in \mathcal{L}_1$$

tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Y}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução T -periódica S_1 -simétrica do sistema (4.11) com período $T = 2\pi p_1^3$.

Demonstração: Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_1)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}_1$ como em (4.19). Pelo Lema (4.2) a solução

$$\varphi(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon), P_1(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon), P_2(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon))$$

do sistema perturbado (4.11) satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= \frac{1}{(p_1 + \delta P_1)^3} t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ Q_2(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= 0 + \epsilon Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

A solução $\varphi(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon)$ é T -periódica e S_1 -simétrica se, em $t = T/2$, ele intersecta ortogonalmente o eixo x . No entanto, pelo Lema 4.1, isso ocorre se

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= \frac{T}{2(p_1 + \delta P_1)^3} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = (n+1)\pi, \\ Q_2(T/2, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= \epsilon Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Assim, precisamos encontrar condições iniciais $\mathbf{Y}_1$ tal que para todo $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, as equações acima são satisfeitas.

Observemos que $\mathbf{Y}_1$ depende de δP_1 e δP_2 , e como queremos encontrar soluções de (4.20) com $\epsilon \neq 0$, vamos reescrever as equações (4.20) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_1(T/2, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= \frac{T}{2(p_1 + \delta P_1)^3} + n\pi - (n+1)\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2(T/2, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_1) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Estas equações são chamadas de *equações de periodicidade*. Para resolver este sistema utilizaremos o Teorema da Função Implícita. Utilizando o item a) e avaliando as funções (4.21) em $\delta P_1 = 0$, $\delta P_2 = 0$ e $\epsilon = 0$ (Observemos que avaliar as funções (4.21) em $\delta P_1 = 0$, $\delta P_2 = 0$ e $\epsilon = 0$ é equivalente a avaliar em $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}$ e $\epsilon = 0$), obtemos

$$\begin{aligned} f_1(T/2, 0, 0, 0) &= \frac{T}{2p_1^3} - \pi = \frac{2\pi p_1^3}{2p_1^3} - \pi = 0, \\ f_2(T/2, 0, 0, 0) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_1) \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_1)) \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} d\mathbf{s} = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, diferenciando o sistema (4.21) com respeito a δP_1 e δP_2 , e avaliando em $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}$ e $\epsilon = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_2} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-3T}{2(p_1 + \delta P_1)^4} + \mathcal{O}(\epsilon) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_1)}{\partial \delta P_1} + \mathcal{O}(\epsilon) & \frac{\partial Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_1)}{\partial \delta P_2} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-3T}{2p_1^4} & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_{0,1})}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_{0,1})}{\partial \delta P_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, usando b), segue que

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} \right) &= \frac{-3T}{2p_1^4} \left(\frac{\partial Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_{0,1})}{\partial \delta P_2} \right) \\ &= \frac{-3T}{2p_1^4} \frac{\partial}{\partial \delta P_2} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_1)) \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} d\mathbf{s} \right) \\ &= \frac{-3T}{2p_1^4} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial}{\partial \delta P_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_1)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} d\mathbf{s} \\ &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, para ϵ suficientemente pequeno, existem únicas funções diferenciáveis $\delta P_1 = \delta P_1(\epsilon)$ e $\delta P_2 = \delta P_2(\epsilon)$ tais que $\delta P_1(0) = 0$, $\delta P_2(0) = 0$ e tal que

$$f_1(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad f_2(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Logo, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon = (n\pi, 0, p_1 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon)) \in \mathcal{L}_1,$$

tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon, \epsilon)$ é uma solução T -periódica e S_1 -simétrica do sistema (4.11), próxima da órbita circular do problema de Kepler com raio $r = r_0 = p_1^2$, e com período fixo $T = 2\pi p_1^3$. ■

Agora, caracterizaremos uma solução circular do problema de Kepler S_2 -simétrica em PD-coordenadas.

Pelo Lema 4.1, $\mathbf{Y}_{0,2} = (\frac{\pi}{2} + n\pi, 0, p_1, 0) \in \mathcal{L}_2$, onde $n \in \{0, 1\}$ e $p_1 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. Dessa forma, a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_{0,2})$ do problema de Kepler em PD-coordenadas com condição inicial $\mathbf{Y}_{0,2}$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,2}) &= \frac{1}{p_1^3}t + \frac{\pi}{2} + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,2}) &= p_1 \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,2}) &= 0, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_{0,2}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como a solução (4.23) é circular, denotaremos por T o seu período. A solução acima é S_2 -simétrica se, em $t = \frac{T}{2}$, ela intesecta o eixo y ortogonalmente. Todavia, de acordo com o Lema 4.1 devemos verificar se valem as condições

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(\frac{T}{2}, \mathbf{Y}_{0,2}) &= \frac{T}{2p_1^3} + \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi, \\ P_2^{(0)}(\frac{T}{2}, \mathbf{Y}_{0,2}) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{T}{2p_1^3} = \pi$, por conseguinte, $T = 2\pi p_1^3$.

Agora, seja $\mathbf{Y}_2 = (\frac{\pi}{2} + n\pi, 0 + \delta Q_2, p_1 + \delta P_1, 0) \in \mathcal{L}_2$ uma condição inicial, próxima a $\mathbf{Y}_{0,2}$, com δP_1 e δQ_2 suficientemente pequenos. Assim, a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_2)$ do problema de Kepler em PD-coordenadas com condição inicial $\mathbf{Y}_2$ é descrita por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_2) &= \frac{1}{(p_1 + \delta P_1)^3}t + \frac{\pi}{2} + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}_2) &= p_1 + \delta P_1 \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_2) &= \delta Q_2, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Obtemos o seguinte resultado para soluções periódicas S_2 -simétricas do problema de Kepler perturbado:

Teorema 4.2 *Suponhamos que $\mathcal{H}$ em (4.9) é invariante com respeito a simetria S_2 , e seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_2)$, como em (4.23), solução do problema de Kepler em PD-coordenadas com condição inicial $\mathbf{Y}_2$. Suponhamos também que*

$$a) \quad \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_2)) \Big|_{\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{0,2}} ds = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_2)) \Big|_{\delta P_1=0, \delta Q_2=0, \epsilon=0} ds = 0 \quad (4.25)$$

e

$$b) \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial \delta Q_2 \partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_2)) \Big|_{\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{0,2}} ds = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial \delta Q_2 \partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_2)) \Big|_{\delta P_1=0, \delta Q_2=0, \epsilon=0} ds \neq 0. \quad (4.26)$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe uma família de condições iniciais, parametrizadas por ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \delta Q_2(\epsilon), P_1 + \delta P_1(\epsilon), 0 \right) \in \mathcal{L}_2$$

tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Y}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução T -periódica e S_2 -simétrica do sistema (4.11) com período $T = 2\pi p_1^3$.

Demonstração: Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_2)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}_2$ como em (4.24). De acordo com Lema (4.2) a solução

$$\varphi(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon), P_1(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon), P_2(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon))$$

do sistema perturbado (4.11) é tal que

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon) &= \frac{1}{(p_1 + \delta P_1)^3} t + \frac{\pi}{2} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ P_2(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon) &= 0 + \epsilon P_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

A solução $\varphi(t, \mathbf{Y}_2, \epsilon)$ é T -periódica S_2 -simétrica se, em $t = T/2$, ele intersecta o eixo y ortogonalmente. Porém, o Lema 4.1 nos diz que isso acontece se

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_2, \epsilon) &= \frac{T}{2(p_1 + \delta P_1)^3} + \frac{\pi}{2} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi, \\ P_2(T/2, \mathbf{Y}_2, \epsilon) &= \epsilon P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dessa forma, encontraremos condições iniciais $\mathbf{Y}_2$ tal que para todo $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, as equações acima são satisfeitas. A fim de obter soluções de (4.27) com $\epsilon \neq 0$, reescrevemos as equações da forma

$$\begin{aligned} f_1(T/2, \delta P_1, \delta Q_2, \epsilon) &= \frac{T}{2(p_1 + \delta P_1)^3} + \pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2(T/2, \delta P_1, \delta Q_2, \epsilon) &= P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_2) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

e novamente, utilizaremos o Teorema da Função Implícita para resolvê-las. Usando o item $a)$ e avaliando as funções (4.28) em $\delta P_1 = 0$, $\delta Q_2 = 0$ e $\epsilon = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} f_1(T/2, 0, 0, 0) &= \frac{T}{2p_1^3} - \pi = \frac{2\pi p_1^3}{2p_1^3} - \pi = 0, \\ f_2(T/2, 0, 0, 0) &= P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_2) \Big|_{\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{0,2}, \epsilon=0} = - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_2)) \Big|_{\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{0,2}, \epsilon=0} ds = 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (4.28) com respeito a δP_1 e δQ_2 , e avaliando em $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{0,2}$ e $\epsilon = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta Q_2)} \right|_{\mathbf{Y}_2=\mathbf{Y}_{0,2}, \epsilon=0} &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta Q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta Q_2} \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{Y}_2=\mathbf{Y}_{0,2}, \epsilon=0} \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{-3T}{2p_1^4} & 0 \\ \frac{\partial P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_{0,2})}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_{0,2})}{\partial \delta Q_2} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Desta maneira, utilizando o item b), obtemos

$$\begin{aligned} \det \left(\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta Q_2)} \right|_{\mathbf{Y}_2=\mathbf{Y}_{0,2}, \epsilon=0} \right) &= \frac{-3T}{2p_1^4} \left(\frac{\partial P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}_{0,1})}{\partial \delta Q_2} \right) \\ &= \frac{3T}{2p_1^4} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial}{\partial \delta Q_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}_2)) \right) \bigg|_{\mathbf{Y}_2=\mathbf{Y}_{0,2}, \epsilon=0} ds \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo, de acordo com o Teorema da Função Implícita, para ϵ suficientemente pequeno, existem únicas funções diferenciáveis $\delta P_1 = \delta P_1(\epsilon)$ e $\delta Q_2 = \delta Q_2(\epsilon)$ tais que $\delta P_1(0) = 0$ e $\delta Q_2(0) = 0$ e tal que

$$f_1(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta Q_2(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad f_2(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta Q_2(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Assim, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \delta Q_2(\epsilon), P_1^0 + \delta P_1(\epsilon), 0 \right) \in \mathcal{L}_2,$$

tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon, \epsilon)$ é uma solução T -periódica e S_2 -simétrica do sistema (4.11), próxima da órbita circular do problema de Kepler com raio $r = r_0 = p_1^2$, e com período fixo $T = 2\pi p_1^3$. ■

Por ultimo, caracterizaremos uma solução circular dupla simétrica do problema de Kepler em PD-coordenadas.

Consideremos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}_{0,1})$ do problema de Kepler dada por (4.18), e como ela é periódica chamaremos de T o seu período. Esta solução é dupla simétrica se, em $t = \frac{T}{4}$, ela intesecta ortogonalmente o eixo y . Porém, aplicando o Lema 4.1, temos que verificar se são satisfeitas as condições

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{Y}_{0,1}\right) &= \frac{T}{4p_1^3} + n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \\ P_2^{(0)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{Y}_{0,1}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ou melhor, $\frac{T}{4p_1^3} = \frac{\pi}{2}$ o que implica em $T = 2\pi p_1^3$.

Consideremos também a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}_1)$ do problema de Kepler dada por (4.19), com condição inicial $\mathbf{Y}_1$ próxima a $\mathbf{Y}_{0,1}$. Apresentaremos a seguir o resultado que, de fato, caracteriza uma solução circular dupla simétrica.

Teorema 4.3 *Suponhamos que $\mathcal{H}$ em (4.9) é invariante com respeito as simetrias S_1 e S_2 , e seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_1)$, como em (4.19), solução do problema de Kepler em PD-variáveis com condição inicial $\mathbf{Y}_1$. Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe uma família de condições iniciais, parametrizadas por ϵ ,*

$$\mathbf{Y}_\epsilon = (n\pi, 0, p_1 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon)) \in \mathcal{L}_1$$

tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Y}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução T -periódica e dupla simétrica do sistema (4.11) com período $T = 2\pi p_1^3$.

Demonstração: Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_1)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}_1$ como em (4.19). O Lema (4.2) estabelece que a solução

$$\varphi(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon), P_1(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon), P_2(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon))$$

do sistema perturbado (4.11) cumpre as condições

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= \frac{1}{(p_1 + \delta P_1)^3} t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ P_2(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= \delta P_2 + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

A solução $\varphi(t, \mathbf{Y}_1, \epsilon)$ é T -periódica e dupla simétrica se, em $t = T/4$, ela intersecta ortogonalmente o eixo y . Contudo, de acordo com o Lema 3.4, isso ocorre se

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= \frac{T}{4(p_1 + \delta P_1)^3} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = \frac{\pi}{2} + n\pi, \\ P_2(T/4, \mathbf{Y}_1, \epsilon) &= \delta P_2 + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dessa forma, buscaremos condições iniciais $\mathbf{Y}_1$ que satisfaça as equações acima, para todo $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Para solucionar o sistema (4.30) com $\epsilon \neq 0$, a reescrevemos como

$$\begin{aligned} f_1(T/4, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= \frac{T}{4(p_1 + \delta P_1)^3} - \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2(T/4, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= \delta P_2 + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \end{aligned} \tag{4.31}$$

e assim, poderemos resolvê-lo pelo T.F.I. Avaliando as funções (4.31) em $\delta P_1 = 0$, $\delta P_2 = 0$ e $\epsilon = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} f_1(T/4, 0, 0, 0) &= \frac{T}{4p_1^3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi p_1^3}{4p_1^3} - \frac{\pi}{2} = 0, \\ f_2(T/4, 0, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (4.31) em relação a δP_1 e δP_2 , e avaliando em $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}$ e $\epsilon = 0$ temos que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \right|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_2} \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{-3T}{4p_1^4} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \tag{4.32}$$

e dessa forma, obtemos

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \Big|_{\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} \right) = \frac{-3T}{4P_1^4} \neq 0. \quad (4.33)$$

Assim, mediante o Teorema da função implícita, para ϵ suficientemente pequeno, existem únicas funções diferenciáveis $\delta P_1 = \delta P_1(\epsilon)$ e $\delta P_2 = \delta P_2(\epsilon)$ tais que $\delta P_1(0) = 0$ e $\delta P_2(0) = 0$, e tal que

$$f_1(T/4, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad f_2(T/4, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Isso implica que existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon = (n\pi, 0, p_1 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon)) \in \mathcal{L}_1,$$

tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Y}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução T -periódica e dupla simétrica do sistema (4.11), próxima da órbita circular do problema de Kepler com raio $r = r_0 = p_1^2$, e com período fixo $T = 2\pi p_1^3$. ■

4.2 Órbitas periódicas próximas a soluções elípticas do problema de Kepler

Estudaremos nesta seção a continuação de soluções elípticas do problema de Kepler utilizando, assim como na seção anterior, o método de continuação analítica de Poincaré, desenvolvido no capítulo anterior.

Consideremos a função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ dada em (3.17), com $\mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sendo a função Hamiltoniana do problema de Kepler planar dada em (4.2). Além disso, assumiremos que $\mathcal{H}$ é invariante com respeito a uma (ou ambas) das reflexões S_1 e S_2 dadas em (3.19). A função Hamiltoniana (3.17) em coordenadas de Delaunay $\mathbf{Q} = (\ell, g)$, $\mathbf{P} = (L, G)$, é dada por

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2L^2} + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.34)$$

onde

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2L^2} \quad (4.35)$$

é a função Hamiltoniana do problema de Kepler em coordenadas de Delaunay. Assim, as equações do movimento associada a função Hamiltoniana (4.34) são descritas por

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{L^3} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{L} &= 0 - \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \ell}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2); \\ \dot{g} &= 0 + \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{G} &= 0 - \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

A seguir apresentaremos um resultado importante, que também é uma consequência direta das equações variacionais (Teorema 3.3) e do fluxo do sistema (4.36), e que representaremos por $\phi(t, \mathbf{Y}, \epsilon)$. Esse resultado é análogo ao teorema (4.2) mas agora utilizando as coordenadas de Delaunay.

Lema 4.3 *Seja $\phi_0(t, \mathbf{Y}) = (\ell^{(0)}(t, \mathbf{Y}), g^{(0)}(t, \mathbf{Y}), L^{(0)}(t, \mathbf{Y}), G^{(0)}(t, \mathbf{Y}))$ uma solução do problema de kepler (4.35) com condição inicial $\mathbf{Y}$ em coordenadas de Delaunay. Então a solução do problema perturbado (4.36) representada por*

$$\phi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = (\ell(t, \mathbf{Y}; \epsilon), g(t, \mathbf{Y}; \epsilon), L(t, \mathbf{Y}; \epsilon), G(t, \mathbf{Y}; \epsilon)),$$

com a mesma condição inicial $\mathbf{Y}$, é dada por:

$$\begin{aligned}\ell(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \ell^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon \ell^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ g(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= g^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ L(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= L^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon L^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ G(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= G^{(0)}(t, \mathbf{Y}) + \epsilon G^{(1)}(t, \mathbf{Y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{4.37}$$

onde, em particular:

$$g^{(1)}(t, \mathbf{Y}) = \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(s, \mathbf{Y})) ds, \quad G^{(1)}(t, \mathbf{Y}) = - \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g}(\varphi_0(s, \mathbf{Y})) ds.$$

Demonstração: A demonstração deste lema é análoga a do Lema 4.2. ■

Vamos caracterizar uma solução elíptica do problema de Kepler S_i -simétrica, com $i = 1, 2$, em coordenadas de Delaunay.

Consideremos uma solução elíptica $\phi_0(t, \mathbf{Y}_0^{i,k})$ do problema de Kepler (4.35) em coordenadas de Delaunay com condição inicial

$$\mathbf{Y}_0^{i,k} = (n\pi, g_0^{i,k}, L_0, G_0),$$

onde $n \in \{0, 1\}$, $L_0 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $0 < |G_0| < L_0$, $i = 1, 2$ e

$$g_0^{i,k} = (2k + (i - 1))\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1.$$

Pelo Lema 4.1, $\mathbf{Y}_0^{i,k} \in \mathcal{L}_i$. Assim, a solução $\phi_0(t, \mathbf{Y}_0^{i,k})$ é descrita explicitamente por

$$\begin{aligned}\ell^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= \frac{1}{L_0^3}t + n\pi, & L^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= L_0, \\ g^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= g_0^{i,k}, & G^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= G_0.\end{aligned}\tag{4.38}$$

A solução (4.38) é T -periódica e S_1 -simétrica se, em $t = \frac{T}{2}$, ela intesecta o eixo x de maneira ortogonal e é S_2 -simétrica se, em $t = \frac{T}{2}$, ela intesecta ortogonalmente o eixo y . Em ambos os casos, aplicando o Lema 4.1, para que isso aconteça basta verificarmos a condição

$$\ell^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Y}_0^{i,k}\right) = \frac{T}{2L_0^3} + n\pi = (n + 1)\pi,$$

o que implica em $\frac{T}{2L_0^3} = \pi$, logo $T = 2\pi L_0^3$.

Agora, seja $\mathbf{Y}^{i,k} = (n\pi, g_0^{i,k}, L_0 + \delta L, G_0 + \delta G)i$ para $i = 1, 2$, uma condição inicial, próxima a $\mathbf{Y}_0^{i,k}$, onde δL e δG são suficientemente pequenos. Pelo Lema 4.1, $\mathbf{Y}^{i,k} \in \mathcal{L}_i$. Logo, a solução $\phi_0(t, \mathbf{Y}^{i,k})$ do problema de Kepler em coordenadas de Delaunay com condição inicial $\mathbf{Y}^{i,k}$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}(t, \mathbf{Y}^{i,k}) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t + n\pi, & L^{(0)}(t, \mathbf{Y}^{i,k}) &= L_0 + \delta L, \\ g^{(0)}(t, \mathbf{Y}^{i,k}) &= g_0^{i,k}, & G^{(0)}(t, \mathbf{Y}^{i,k}) &= G_0 + \delta G, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde $0 < |\delta G| \leq \delta L$, $k \in \{0, 1\}$ e $i = 1, 2$. Apresentaremos a seguir um resultado que nos dá condições suficientes para obtermos órbitas periódicas simétricas próximas as soluções elípticas.

Teorema 4.4 *Suponhamos que $\mathcal{H}$ em (4.34) é invariante com respeito a simetria S_i , e seja $\phi_0(t, \mathbf{Y}^{i,k})$ uma solução elíptica do problema de Kepler em coordenadas de Delaunay como em (4.39). Suponhamos também que*

$$a) \quad \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\phi_0(s, \mathbf{Y}^{i,k})) \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} ds = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\phi_0(s, \mathbf{Y}^{i,k})) \Big|_{\delta L=0, \delta G=0, \epsilon=0} ds = 0 \quad (4.40)$$

e

$$b) \quad \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial \delta G \partial G}(\phi_0(s, \mathbf{Y}^{i,k})) \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} ds = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial \delta G \partial G}(\phi_0(s, \mathbf{Y}^{i,k})) \Big|_{\delta L=0, \delta G=0, \epsilon=0} ds \neq 0. \quad (4.41)$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe uma família de condições iniciais

$$\mathbf{Y}_\epsilon^{i,k} = (n\pi, g_0^{i,k}, L_0 + \delta L^{i,k}(\epsilon), G_0 + \delta G^{i,k}(\epsilon)) \in \mathcal{L}_i$$

parametrizadas por ϵ , tal que

$$\phi(t, \mathbf{Y}_\epsilon^{i,k}, \epsilon) = \phi_0(t, \mathbf{Y}_\epsilon^{i,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução elíptica T -periódica e S_i -simétrica do sistema (4.36) com período fixo $T = 2\pi L_0^3$.

Demonstração: Seja $\phi_0(t, \mathbf{Y}^{i,k})$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}^{i,k}$ como em (4.39). O Lema (4.3) nos diz que a solução

$$\phi(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon) = (\ell(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon), g(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon), L(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon), G(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon))$$

do sistema perturbado (4.36) em variáveis de Delaunay satisfaz

$$\begin{aligned} \ell(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ g(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon) &= g_0^{i,k} + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Y}^{i,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

A solução $\phi(t, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon)$ é T -periódica e S_i -simétrica se, em $t = T/2$, ela intesecta o subespaço $\mathcal{L}_i$ de forma ortogonal. Porém, pelo Lema 4.1, isso é verdadeiro se

$$\begin{aligned} \ell(T/2, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon) &= \frac{T}{2(L_0 + \delta L)^3} + \mathcal{O}(\epsilon) = \pi, \\ g(T/2, \mathbf{Y}^{i,k}, \epsilon) &= g_0^{i,k} + \epsilon g^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}^{i,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = g_0^{i,k} + m\pi, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Assim, fazendo $m = 0$, podemos reescrever estas equações da forma

$$\begin{aligned} f_1^i(T/2, \delta L, \delta G, \epsilon) &= \frac{T}{2(L_0 + \delta L)^3} - \pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2^i(T/2, \delta L, \delta G, \epsilon) &= g^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}^{i,k}) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

e a resolveremos utilizando o Teorema da Função Implícita. Avaliando as funções (4.43) em $\delta L = 0$, $\delta G = 0$, $\epsilon = 0$ e utilizando a hipótese a) obtemos

$$\begin{aligned} f_1^i(T/2, 0, 0, 0) &= \frac{T}{2L_0^3} - \pi = \frac{2\pi L_0^3}{2L_0^3} - \pi = 0, \\ f_2^i(T/2, 0, 0, 0) &= g^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}^{i,k}) \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\phi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}^{i,k})) \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}} d\mathbf{s} = 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (4.31) com respeito a δL e δG , e avaliando em $\mathbf{Y}^{i,k} = \mathbf{Y}_0^{i,k}$ e $\epsilon = 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1^i, f_2^i)}{\partial(\delta L, \delta G)} \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^i}{\partial \delta L} & \frac{\partial f_1^i}{\partial \delta G} \\ \frac{\partial f_2^i}{\partial \delta L} & \frac{\partial f_2^i}{\partial \delta G} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-3T}{2L_0^4} & 0 \\ \frac{\partial g^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}^{i,k})}{\partial \delta L} & \frac{\partial g^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}^{i,k})}{\partial \delta G} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

logo, segue que

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(f_1^i, f_2^i)}{\partial(\delta L, \delta G)} \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} \right) &= \frac{-3T}{2L_0^4} \left(\frac{\partial g^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}^{i,k})}{\partial \delta G} \right) \\ &= \frac{-3T}{2L_0^4} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial}{\partial \delta G} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\phi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}^{i,k})) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} d\mathbf{s} \\ &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Assim, segundo o Teorema da Função Implícita, para ϵ suficientemente pequeno, existem únicas funções diferenciáveis $\delta L = \delta L(\epsilon)$ e $\delta G = \delta G(\epsilon)$ tais que $\delta L(0) = 0$ e $\delta G(0) = 0$, e tal que

$$f_1(T/2, \delta L(\epsilon), \delta G(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad f_2(T/2, \delta L(\epsilon), \delta G(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Portanto, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon^{i,k} = (n\pi, g_0^{i,k}, L_0 + \delta L^{i,k}(\epsilon), \delta G^{i,k}(\epsilon)) \in \mathcal{L}_i,$$

tal que

$$\phi(t, \mathbf{Y}_\epsilon^{i,k}, \epsilon) = \phi_0(t, \mathbf{Y}_\epsilon^{i,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução elíptica T -periódica e S_i -simétrica do sistema (4.36), próxima da órbita elíptica do problema de Kepler, com período fixo $T = 2\pi L_0^3$. $\blacksquare$

Observemos que não podemos obter soluções periódicas dupla simétricas sendo continuação de uma solução elíptica, isso só ocorre com órbitas circulares. De fato, seja $\phi_0(t, \mathbf{Y}_0^{i,k})$ uma solução elíptica do problema de Kepler (4.35) em coordenadas de Delaunay com condição inicial

$$\mathbf{Y}_0 = (n\pi, n\pi, L_0, G_0),$$

onde $n \in \{0, 1\}$, $L_0 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $0 < |G_0| < L_0$. Pelo Lema 4.1, $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{L}_1$. Esta solução é descrita especificamente da forma

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= \frac{1}{L_0^3}t + n\pi, & L^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= L_0, \\ g^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= n\pi, & G^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^{i,k}) &= G_0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Como a solução (4.46) é elíptica, ela é periódica, e representaremos por T seu Período. Além disso, esta solução é dupla simétrica se, em $t = \frac{T}{4}$, ela intesecta o eixo y de forma ortogonal. Porém, segundo o Teorema 4.1 precisamos verificar se são satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{Y}_0\right) &= \frac{T}{2L_0^3} + n\pi = (n+1)\pi, \\ g^{(0)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{Y}_0\right) &= n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi. \end{aligned}$$

De imediato vemos que a segunda condição não pode ser satisfeita, ou seja, não existem valores para n que a torne verdadeira. Isso mostra que não podemos obter soluções elípticas dupla simétricas como continuação de uma solução elíptica do problema de Kepler.

Capítulo 5

Órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Este capítulo se dedica a explorar as órbitas periódicas simétricas em perturbações simétricas do problema de Kepler planar, examinando-as em um sistema de coordenadas particularmente elegante, as coordenadas giratórias. Nesse cenário, o estudo da existência de soluções periódicas simétricas pode ser analisado de maneira mais clara e eficaz, no sentido da simplificação das equações de periodicidade.

Na literatura, é conhecido que existem alguns sistemas Hamiltonianos que são perturbações do problema de Kepler em coordenadas giratórias (veja, por exemplo, [20]). Em alguns casos, esses Hamiltonianos são obtidos a partir da função Hamiltoniana em coordenadas inerciais porque são invariantes sob rotação ao redor do eixo z , mas em outros casos eles surgem como um problema específico onde o problema já é colocado em coordenadas giratórias. Um caso particular deste último cenário, por exemplo na mecânica celeste, ocorre quando envolve o estudo da dinâmica quando alguma partícula (ou corpo massivo) está se movendo em órbita circular com velocidade angular constante. Este último caso será explorado em um exemplo concreto na seção 6.2 do capítulo 6.

Consideremos a função Hamiltoniana do problema de Kepler dada por

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (5.1)$$

Vamos estudar o problema de Kepler em um sistema de coordenadas não inercial. Definimos a transformação de coordenadas (Coordenadas giratórias)

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Assim, a função Hamiltoniana (5.1) é reescrita em coordenadas giratórias como

$$K_0 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - (XP_y - YP_x) - \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (5.3)$$

Logo, as equações do movimento associada a função Hamiltoniana (5.3) são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{X} &= P_x + Y, & \dot{P}_x &= \frac{X}{(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \dot{Y} &= P_y - X, & \dot{P}_y &= \frac{Y}{(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Nas seções seguintes, vamos estudar a existência de soluções periódicas em sistemas perturbados associados a funções Hamiltonianas do tipo

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon K_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\tag{5.5}$$

onde $K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é a função Hamiltoniana do problema de Kepler dada por (5.3). Como no capítulo anterior, queremos determinar condições suficientes para a existência de soluções periódicas simétricas como continuação de soluções circulares e elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias. Para alcançar nossos objetivos vamos também usar as coordenadas de Poincaré-Delaunay (para soluções circulares) e Delaunay (para soluções elípticas). O caso da continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias é um caso bastante particular, pois não somos capazes de obter soluções periódicas com período conhecido (o mesmo da solução Kepleriana). Esta impossibilidade ficará clara durante o processo de resolver as equações de periodicidade. Porém, mesmo assim vamos descrever como obter soluções periódicas, agora neste caso particular, com período dependendo do parâmetro perturbador.

Os resultados que apresentaremos neste capítulo podem ser encontrados em [3] e [20].

5.1 Continuação de soluções circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Consideremos a função Hamiltoniana dada em (5.3). Em PD-coordenadas, a função Hamiltoniana (5.3) é dada por

$$K_0 = -\frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2},\tag{5.6}$$

e as equações do movimento associada a função Hamiltoniana (5.6) são descritas por

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} - 1, & \dot{P}_1 &= 0; \\ \dot{Q}_2 &= P_2, & \dot{P}_2 &= -Q_2.\end{aligned}\tag{5.7}$$

A solução do sistema (5.7) com condição inicial $Y_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0)$ é dada por

$$\begin{aligned}Q_1(t) &= \left(\frac{1}{P_1^3} - 1\right)t + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0; \\ Q_2(t) &= Q_2^0 \cos t + P_2^0 \sin t, & P_2(t) &= -Q_2^0 \sin t + P_2^0 \cos t.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Mas, se as soluções são circulares, ou seja, se $L = G$ então temos que

$$Q_2^2 + P_2^2 = 2(L - G) = 0 \Rightarrow Q_2 = P_2 = 0.$$

Dessa forma, a solução circular do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial Y_0 é descrita por

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \left(\frac{1}{P_1^3} - 1 \right) t + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0; \\ Q_2(t) &= 0, & P_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Agora, consideremos a função Hamiltoniana

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon K_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.10)$$

onde $K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é a função Hamiltoniana do problema de Kepler dada por (5.1). Além disso, assumiremos que K é invariante com respeito a uma (ou ambas) das reflexões S_1 e S_2 dadas em (3.19).

A função Hamiltoniana (5.10) em coordenadas giratórias é descrita por

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2} + \epsilon K_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.11)$$

e as equações do movimento associada a função Hamiltoniana (5.11) são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \left(\frac{1}{P_1^3} - 1 \right) + \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial P_1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 - \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial Q_1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{Q}_2 &= P_2 + \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial P_2}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= -Q_2 - \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial Q_2}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Vamos caracterizar uma solução circular do problema de Kepler S_1 -simétrica em coordenadas giratórias. Seja

$$\mathbf{Z}_{0,1} = (n\pi, 0, P_1^0, 0) \in \mathcal{L}_1,$$

com $n \in \{0, 1\}$ e $P_1^0 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. Assim, a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_{0,1})$ circular do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_{0,1}$ é descrita por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1 \right) t + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= P_1^0 \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= 0, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A solução (5.13) é T -periódica e S_1 -simétrica se, em $t = \frac{T}{2}$, ela intesecta ortogonalmente o eixo x . Mas, pelo Lema 4.1, isso acontece se

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Z}_{0,1}\right) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1 \right) \frac{T}{2} + n\pi = (n+m)\pi, \text{ com } m \in \mathbb{Z}^+ \\ Q_2^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Z}_{0,1}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, se o período da solução é dado por $T = \frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}$.

Agora, consideremos uma condição inicial $\mathbf{Z}_1 = (n\pi, 0, P_1^0 + \delta P_1, 0 + \delta P_2) \in \mathcal{L}_1$ próxima a $\mathbf{Z}_{0,1}$, onde δP_1 e δP_2 são suficientemente pequenos. Dessa maneira, a solução do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_1$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) t + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= P_1^0 + \delta P_1 \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= \delta P_2 \sin t, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= \delta P_2 \cos t. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.1 *Suponhamos que K em (5.11) é invariante com respeito a simetria S_1 , e seja $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_1)$, como em (5.14), solução do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_1$, onde*

$$P_1^0 = \left\{ p_1 \in \mathbb{R}^+ : p_1 \neq 1 \text{ e } \frac{p_1}{1-p_1^3} \notin \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe condições iniciais $\mathbf{Z}_\epsilon = (n\pi, 0, P_1 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon))$ tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(\mathbf{Z}_\epsilon, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução T -periódica e S_1 -simétrica do sistema (5.12) com período $T = \frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1-(P_1^0)^3}$.

Demonstração: Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_1)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Z}_1$ como em (5.14). Pelo Lema (4.2) a solução

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), P_1(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), P_2(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon))$$

do sistema perturbado (5.12) satisfaz as condições

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ Q_2(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \delta P_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.4, a solução $\varphi(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon)$ é T -periódica S_1 -simétrica se, em $t = T/2$, ele intersecta ortogonalmente o eixo x . No entanto, através do Lema 4.1, isso é verídico se

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{2} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = (n+m)\pi, \text{ com } m \in \mathbb{Z} \\ Q_2(T/2, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \delta P_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Assim, determinaremos condições iniciais $\mathbf{Y}_1$ tais que para todo $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, as equações (5.15) são satisfeitas. Com o objetivo de encontrar soluções de (5.15) para $\epsilon \neq 0$, vamos reescrever as equações (5.15) da forma

$$\begin{aligned} f_1(T/2, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{2} + n\pi - (n+m)\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2(T/2, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= \delta P_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

e utilizaremos o Teorema da função implícita para resolvê-las. Avaliando as funções (5.16) em $\delta P_1 = 0$, $\delta P_2 = 0$ e $\epsilon = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} f_1(T/2, 0, 0, 0) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1 \right) \frac{T}{2} - m\pi = \left(\frac{1 - (P_1^0)^3}{(P_1^0)^3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3} \right) - m\pi = 0, \\ f_2(T/2, 0, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (5.15) em relação a δP_1 e δP_2 , e avaliando em $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}$ e em $\epsilon = 0$, obtemos

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \right|_{\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_2} \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{-3T}{2(P_1^0)^4} & 0 \\ 0 & \text{sen } \frac{T}{2} \end{array} \right). \quad (5.17)$$

Logo, segue que

$$\det \left(\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \right|_{\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} \right) = \left(\frac{-3T}{2(P_1^0)^4} \right) \text{sen } \frac{T}{2}. \quad (5.18)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{-3T}{2(P_1^0)^4} \right) \text{sen } \frac{T}{2} \neq 0 &\Leftrightarrow \text{sen } \frac{T}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{T}{2} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3} \neq 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3} \neq \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Assim, para

$$P_1^0 = \left\{ p_1 \in \mathbb{R}^+ : p_1 \neq 1 \text{ e } \frac{p_1}{1 - p_1^3} \notin \mathbb{Q}^+ \right\},$$

garantimos através do Teorema da função implícita, que para ϵ suficientemente pequeno, existem curvas diferenciáveis $\delta P_1 = \delta P_1(\epsilon)$ e $\delta P_2 = \delta P_2(\epsilon)$ tais que $\delta P_1(0) = 0$ e $\delta P_2(0) = 0$, e tal que

$$f_1(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad f_2(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Dessa forma, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Z}_\epsilon = (n\pi, 0, P_1^0 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon)) \in \mathcal{L}_1,$$

tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Z}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução periódica S_1 -simétrica do sistema (5.12) próxima da órbita circular do problema de Kepler com raio $r = r_0 = (P_1^0)^2$, e com período fixo $T = \frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}$. ■

Agora, caracterizaremos uma solução circular do problema de Kepler S_2 -simétrica em coordenadas giratórias. Seja

$$\mathbf{Z}_{0,2} = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0, P_1^0, 0 \right) \in \mathcal{L}_2,$$

onde $n \in \{0, 1\}$ e $P_1^0 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. Dessa forma, a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_{0,2})$ do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_{0,2}$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,2}) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1 \right) t + \frac{\pi}{2} + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,2}) &= P_1^0 \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,2}) &= 0, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,2}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

A solução acima é T -periódica e S_2 -simétrica se, em $t = \frac{T}{2}$, ela intesecta o eixo y ortogonalmente. Mas, de acordo com o Lema 4.1, isso ocorre se

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Z}_{0,2}\right) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1\right) \frac{T}{2} + \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2} + (n+m)\pi, \text{ com } m \in \mathbb{Z}_+ \\ P_2^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Z}_{0,2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, se o período da solução é dado por $T = \frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}$.

Agora, consideremos uma condição inicial $\mathbf{Z}_2 = (\frac{\pi}{2} + n\pi, 0 + \delta Q_2, P_1^0 + \delta P_1, 0) \in \mathcal{L}_2$ próxima a $\mathbf{Z}_{0,2}$, onde δP_1 e δQ_2 são suficientemente pequenos. Assim, a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_2)$ do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_2$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_2) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1\right) t + \frac{\pi}{2} + n\pi, & P_1^{(0)}(t, \mathbf{Z}_2) &= P_1^0 + \delta P_1 \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_2) &= \delta Q_2 \cos t, & P_2^{(0)}(t, \mathbf{Z}_2) &= -\delta Q_2 \sin t. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2 *Suponhamos que K em (5.11) é invariante com respeito a simetria S_2 , e seja $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_2)$, como em (5.20), solução do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_2$, onde*

$$P_1^0 = \left\{ p_1 \in \mathbb{R}^+ : p_1 \neq 1 \text{ e } \frac{p_1}{1 - p_1^3} \notin \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe condições iniciais $\mathbf{Z}_\epsilon = (\frac{\pi}{2} + n\pi, \delta Q_2(\epsilon), P_1^0 + \delta P_1(\epsilon), 0)$ tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(\mathbf{z}_\epsilon, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução T -periódica S_2 -simétrica do sistema (5.12) com período $T = \frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}$.

Demonstração: Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_2)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Z}_2$ como em (5.20). De acordo com o Lema (4.2) a solução

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon), P_1(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon), P_2(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon))$$

do sistema perturbado (5.12) satisfaz o seguinte:

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1\right) t + \frac{\pi}{2} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ P_2(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon) &= -\delta Q_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

O Lema 3.4 nos diz que a solução $\varphi(t, \mathbf{Z}_2, \epsilon)$ é T -periódica e S_2 -simétrica se, em $t = T/2$, ele intersecta o eixo y de forma ortogonal. Mas, pelo Lema 4.1, isso é válido se

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Z}_2, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1\right) \frac{T}{2} + \frac{\pi}{2} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = \frac{\pi}{2} + (n+m)\pi, \text{ com } m \in \mathbb{Z} \\ P_2(T/2, \mathbf{Z}_2, \epsilon) &= -\delta Q_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Assim sendo, procuraremos condições iniciais $\mathbf{Z}_2$ que satisfaça as equações (5.21) para todo $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Como nosso intuito é encontrar soluções de (5.21) para $\epsilon = 0$ a reescrevemos como

$$\begin{aligned} f_1(T/2, \delta P_1, \delta Q_2, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{2} + \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{\pi}{2} - (n+m)\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2(T/2, \delta P_1, \delta Q_2, \epsilon) &= -\delta Q_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

e vamos resolver o sistema (5.22) utilizando o Teorema da função implícita. Avaliando as funções (5.22) em $\delta P_1 = 0$, $\delta Q_2 = 0$ e $\epsilon = 0$ temos

$$\begin{aligned} f_1(T/2, 0, 0, 0) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1 \right) \frac{T}{2} - m\pi = 0, \\ f_2(T/2, 0, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (5.21) com respeito a δP_1 e δQ_2 , e avaliando em $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{0,2}$ e em $\epsilon = 0$, temos que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta Q_2)} \right|_{\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{0,2}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta Q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta Q_2} \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{0,2}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{-3T}{2(P_1^0)^4} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{T}{2} \end{array} \right), \quad (5.23)$$

e, conseqüentemente,

$$\det \left(\left. \frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(\delta P_1, \delta Q_2)} \right|_{\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{0,2}, \epsilon=0} \right) = \left(\frac{3T}{2(P_1^0)^4} \right) \sin \frac{T}{2}. \quad (5.24)$$

Como

$$\left(\frac{3T}{2(P_1^0)^4} \right) \sin \frac{T}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{T}{2} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3} \neq \frac{k}{m} \in \mathbb{Q},$$

então, para

$$P_1^0 = \left\{ p_1 \in \mathbb{R}^+ : p_1 \neq 1 \text{ e } \frac{p_1}{1 - p_1^3} \notin \mathbb{Q}^+ \right\},$$

certificamos pelo Teorema da função implícita, que para ϵ suficientemente pequeno, existem curvas diferenciáveis $\delta P_1 = \delta P_1(\epsilon)$ e $\delta Q_2 = \delta Q_2(\epsilon)$ tais que $\delta P_1(0) = 0$ e $\delta Q_2(0) = 0$, e talque

$$f_1(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta Q_2(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad f_2(T/2, \delta P_1(\epsilon), \delta Q_2(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Portanto, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Z}_\epsilon = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \delta Q_2(\epsilon), P_1^0 + \delta P_1(\epsilon), 0 \right) \in \mathcal{L}_2,$$

tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Z}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução periódica S_2 -simétrica do sistema (5.12) próxima da órbita circular do problema de Kepler com raio $r = r_0 = (P_1^0)^2$, e com período fixo $T = \frac{2m\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}$. ■

Por fim, caracterizaremos uma solução circular do problema de Kepler dupla simétrica em coordenadas giratórias.

Consideremos a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_{0,1})$ do problema dada em (5.13), e sendo ela periódica, seja T seu período. A solução (5.13) é T -periódica e dupla simétrica se, em $t = \frac{T}{4}$, ela intesecta ortogonalmente o eixo y . Todavia, pelo Lema 4.1, isso acontece se

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{Z}_{0,1}\right) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1\right) \frac{T}{4} + n\pi = \frac{\pi}{2} + (n+m)\pi, \\ P_2^{(0)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{Z}_{0,1}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ou melhor, se o período da solução é dado por $T = \frac{2(2m+1)\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}$.

Consideremos ainda a solução $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_1)$ do problema de Kepler em coordenadas giratórias dada em (5.14), com condição inicial $\mathbf{Z}_1$ próxima a $\mathbf{Z}_{0,1}$. A seguir apresentemos o seguinte resultado:

Teorema 5.3 *Suponhamos que K em (5.11) é invariante com respeito as simetrias S_1 e S_2 , e seja $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_1)$, como em (5.14), solução do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_1$, onde*

$$P_1^0 = \left\{ p_1 \in \mathbb{R}^+ : p_1 \neq 1 \text{ e } \frac{p_1}{1 - p_1^3} \notin \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe condições iniciais $\mathbf{Z}_\epsilon = (n\pi, 0, P_1^0 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon))$ tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Z}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução T -periódica e dupla simétrica do sistema (5.12) com período fixo

$$T = \frac{2(2m+1)\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}.$$

Demonstração: Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Z}_1)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Z}_1$ como em (5.14). Pelo Lema (4.2) a solução

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), P_1(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), P_2(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon))$$

do sistema perturbado (5.12) satisfaz estas condições:

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ P_2(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \delta P_2 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Segundo o Lema 3.4, a solução $\varphi(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon)$ é T -periódica e dupla simétrica se, em $t = T/4$, ele intersecta o eixo y ortogonalmente. Contudo, segundo o Lema 4.1, isso é verdadeiro se

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{4} + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = \frac{\pi}{2} + (n+m)\pi, \\ P_2(T/4, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \delta P_2 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Determinaremos condições iniciais $\mathbf{Y}_1$ tais que para todo $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, as equações (5.25) são satisfeitas. Como desejamos resolver o sistema (5.25) para $\epsilon \neq 0$, reescrevemos o mesmo da forma

$$\begin{aligned} f_1(T/4, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= \left(\frac{1}{(P_1^0 + \delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{4} + n\pi - \frac{\pi}{2} - (n+m)\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2(T/4, \delta P_1, \delta P_2, \epsilon) &= \delta P_2 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

e usaremos o Teorema da função implícita para resolvê-lo. Avaliando o sistema (5.26) em $\delta P_1 = 0$, $\delta P_2 = 0$ e $\epsilon = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} f_1(T/2, 0, 0, 0) &= \left(\frac{1}{(P_1^0)^3} - 1 \right) \frac{T}{4} - \frac{\pi}{2} = \left(\frac{1 - (P_1^0)^3}{(P_1^0)^3} \right) \frac{1}{4} \left(\frac{2(2m+1)\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3} \right) - \frac{\pi}{2} - m\pi = 0, \\ f_2(T/2, 0, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (5.21) em relação a δP_1 e δP_2 , e avaliando em $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{0,2}$ e em $\epsilon = 0$, obtemos

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \right|_{\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta P_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta P_2} \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{-3T}{4(P_1^0)^4} & 0 \\ 0 & \cos \frac{T}{4} \end{array} \right). \quad (5.27)$$

Assim, segue que

$$\det \left(\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta P_1, \delta P_2)} \right|_{\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} \right) = \left(\frac{-3T}{4(P_1^0)^4} \right) \cos \frac{T}{4}. \quad (5.28)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{-3T}{4(P_1^0)^4} \right) \cos \frac{T}{4} \neq 0 &\Leftrightarrow \cos \frac{T}{4} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{T}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{2(2m+1)\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3} \right) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3} \neq \frac{2k+1}{2m+1} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Portanto, para

$$P_1^0 = \left\{ p_1 \in \mathbb{R}^+ : p_1 \neq 1 \text{ e } \frac{p_1}{1 - p_1^3} \notin \mathbb{Q}^+ \right\},$$

obtemos aplicando o Teorema da função implícita, que para ϵ suficientemente pequeno, existem curvas diferenciáveis $\delta P_1 = \delta P_1(\epsilon)$ e $\delta P_2 = \delta P_2(\epsilon)$ tais que $\delta P_1(0) = 0$ e $\delta P_2(0) = 0$, e tal que

$$f_1(T/4, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad f_2(T/4, \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Dessa maneira, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Z}_\epsilon = (n\pi, 0, P_1^0 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon)) \in \mathcal{L}_1,$$

tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Z}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução periódica e dupla simétrica do sistema (5.12), próxima da órbita circular do problema de Kepler com raio $r = r_0 = (P_1^0)^2$, e com período fixo $T = \frac{2(2m+1)\pi(P_1^0)^3}{1 - (P_1^0)^3}$. ■

5.2 Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Consideremos a função Hamiltoniana do problema de Kepler dada por (5.1), e consideremos também a transformação de coordenadas giratórias dada por (6.67). Sabemos que a função Hamiltoniana (5.1) é reescrita em coordenadas giratórias como (5.3).

Em coordenadas de Delaunay, a função Hamiltoniana (5.3) é descrita por

$$K_0 = -\frac{1}{2L^2} - G, \quad (5.29)$$

por sua vez, as equações do movimento associada a função Hamiltoniana (5.29) são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{L^3}, & \dot{L} &= 0; \\ \dot{g} &= -1, & \dot{G} &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A solução do sistema (5.30) com condição inicial $Y_0 = (\ell_0, g_0, L_0, G_0)$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell(t) &= \left(\frac{1}{L_0^3}\right)t + L_0, & L(t) &= L_0; \\ g(t) &= -t + g_0, & G(t) &= G_0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Agora, Consideremos a função Hamiltoniana

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon K_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.32)$$

onde $K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é a função Hamiltoniana do problema de Kepler dada por (5.1). Além do mais, vamos supor que K é invariante com respeito a uma (ou ambas) das reflexões S_1 e S_2 dadas em (3.19). A função Hamiltoniana (5.32) é reescrita em coordenadas giratórias como

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2L^2} - G + \epsilon K_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.33)$$

consequentemente, as equações do movimento associada a função Hamiltoniana (5.33) são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{L_0^3} + \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial L}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{L} &= 0 - \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial \ell}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{g} &= -1 + \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{G} &= 0 - \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial g}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Observemos que não é possível obter órbitas periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler com período fixo. De fato, consideremos o caso em que K em (5.33) é invariante com respeito a simetria S_1 , e seja $\phi(t, \mathbf{Z}_1)$ solução do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_1 = (n_1\pi, n_2\pi, L_0 + \delta L, G_0 + \delta G) \in \mathcal{L}_1$, com δL e δG suficientemente pequenos, próxima a $\mathbf{Z}_{0,1} = (n_1\pi, n_2\pi, L_0, G_0) \in \mathcal{L}_1$, onde $n_j \in \{0, 1\}$ para $j = 1, 2$, $L_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $0 < |G_0| < L_0$. As equações de periodicidade são dadas por:

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{T}{2}, \delta L, \delta G, \epsilon\right) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} \frac{T}{2} - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2\left(\frac{T}{2}, \delta L, \delta G, \epsilon\right) &= -\frac{T}{2} + k\pi + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Z}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta L, \delta G)} \right|_{\delta L=L_0, \delta G=G_0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} \frac{-3T}{4L_0^4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

implicando em

$$\det \left(\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\delta L, \delta G)} \right|_{\delta L=L_0, \delta G=G_0, \epsilon=0} \right) = 0.$$

Portanto, não podemos aplicar o Teorema da função implícita.

Diante disso, caracterizaremos uma solução elíptica do problema de Kepler S_i -simétrica, com $i = 1, 2$, em coordenadas giratórias com período arbitrário.

Seja $\phi(t, \mathbf{Z}_0^{j,k})$ uma solução elíptica do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial

$$\mathbf{Z}_0^{j,k} = (n\pi, g_0^{j,k}, L_0, G_0) \in \mathcal{L}_i,$$

onde $n \in \{0, 1\}$, $L_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $0 < |G_0| < L_0$, $j = 1, 2$ e

$$g_0^{j,k} = (2k + (j - 1))\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1.$$

A solução $\phi(t, \mathbf{Z}_0^{j,k})$ é descrita especificamente por

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}(t, \mathbf{Z}_0^{j,k}) &= \frac{1}{L_0^3}t + n\pi, & L^{(0)}(t, \mathbf{Z}_0^{j,k}) &= L_0 \\ g^{(0)}(t, \mathbf{Z}_0^{j,k}) &= -t + g_0^{j,k}, & G^{(0)}(t, \mathbf{Z}_0^{j,k}) &= G_0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

A solução acima é T -periódica e S_i -simétrica se, em $t = \frac{T}{2}$, ela intesecta ortogonalmente o subespaço $\mathcal{L}_i$. Entretanto, de acordo com o Lema 4.1, isso ocorre se são satisfeitas as condições abaixo:

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Z}_0^{j,k}\right) &= \frac{T}{2L_0^3} + n\pi = (n + m)\pi, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \\ g^{(0)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{Z}_0^{j,k}\right) &= -\frac{T}{2} + g_0^{j,k} = g_0^{j,k} - k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ou melhor, se o período da solução é dada por $T = 2m\pi L_0^3 = 2k\pi$, implicando em

$$L_0^3 = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q} \quad \text{ou} \quad k = mL_0^3.$$

Agora, seja $\mathbf{Z}^{j,k} = (n\pi, g_0^{j,k}, L_0 + \delta L, G_0 + \delta G) \in \mathcal{L}_i$, para $i = 1, 2$, uma condição inicial próxima a $\mathbf{Z}_0^{j,k}$, com δL e δG suficientemente pequenos. Dessa forma, a solução $\phi(t, \mathbf{Z}^{j,k})$ do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}^{j,k}$ é descrita por

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}(t, \mathbf{Z}^{j,k}) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3}t + n\pi, & L^{(0)}(t, \mathbf{Z}^{j,k}) &= L_0 + \delta L \\ g^{(0)}(t, \mathbf{Z}^{j,k}) &= -t + g_0^{j,k}, & G^{(0)}(t, \mathbf{Z}^{j,k}) &= G_0 + \delta G. \end{aligned} \tag{5.36}$$

onde $0 < |\delta G| \leq \delta L$, $k \in \{0, 1\}$ e $j = 1, 2$. A seguir, mostraremos um resultado que fornece condições para obtermos órbitas periódicas próximas as soluções elípticas em coordenadas giratórias.

Teorema 5.4 *Suponhamos que K em (5.33) é invariante com respeito a simetria S_j , e seja $\phi(t, \mathbf{Z}^{j,k})$, como em (5.36), solução do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}^{j,k}$ próxima a $\mathbf{Z}_0^{j,k}$. Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe uma família de condições iniciais*

$$\mathbf{Z}_\epsilon^{j,k} = (n\pi, g_0^{j,k}, L_0 + \delta L^{j,k}(\delta G^{j,k}, \epsilon), \delta G^{j,k}) \in \mathcal{L}_j,$$

com $L_0 = \{l_1 \in \mathbb{R} : l_1 \neq 0 \text{ e } l_1^3 \in \mathbb{Q}\}$, tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon^{j,k}, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Z}_\epsilon^{j,k}) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

é uma solução T -periódica S_j -simétrica do sistema (5.34) com período $T = 2m\pi L_0^3$.

Demonstração: Seja $\phi_0(t, \mathbf{Z}^{j,k})$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Z}^{j,k}$ como em (5.36). Obtemos a partir do Lema (4.3) que a solução

$$\phi(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon) = (\ell(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon), g(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon), L(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon), G(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon))$$

do sistema perturbado (5.34) em variáveis de Delaunay satisfaz as condições

$$\begin{aligned} \ell(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ g(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon) &= -t + g_0^{j,k} + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Z}^{j,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

A solução $\phi(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon)$ é periódica e S_j -simétrica se, em $t = T/2$, ela intesecta o subespaço $\mathcal{L}_j$ de forma ortogonal. Contudo, pelo Lema 4.1, isso é possível se

$$\begin{aligned} \ell(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = (n + m_1)\pi, \text{ para algum } m_1 \in \mathbb{Z}, \\ g(t, \mathbf{Z}^{j,k}, \epsilon) &= -t + g_0^{j,k} + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Z}^{j,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = g_0^{j,k} - m_2\pi, \text{ para algum } m_2 \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

em $t = T/2$. Dessa forma, desejando obter soluções de (5.37) para $\epsilon \neq 0$, fazemos $m_1 = m$, $m_2 = k$ e reescrevemos o sistema (5.37) como

$$\begin{aligned} f_1^j(t, \delta L, \delta G, \epsilon) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2^j(t, \delta L, \delta G, \epsilon) &= -t + k\pi + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Z}^{j,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

em $t = T/2$, e o resolveremos aplicando o Teorema da função implícita. Avaliando o sistema (5.38) em $t = T/2$, $\delta L = 0$, $\delta G = 0$ e $\epsilon = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} f_1^j(T/2, 0, 0, 0) &= \frac{T}{2L_0^3} - m\pi = \frac{2k\pi}{2L_0^3} - m\pi = \frac{2m\pi L_0^3}{2L_0^3} - m\pi = 0, \\ f_2^j(T/2, 0, 0, 0) &= -\frac{T}{2} + k\pi = -\frac{2k\pi}{2} + k\pi = 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (5.38) com respeito as variáveis t e δL , e avaliando em $t = T/2$,

$\mathbf{Z}^{j,k} = \mathbf{Z}_0^{j,k}$ e $\epsilon = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(f_1^j, f_2^j)}{\partial(t, \delta L)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Z}^{j,k}=\mathbf{Z}_0^{j,k}, \epsilon=0} &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1^j}{\partial t} & \frac{\partial f_1^j}{\partial \delta L} \\ \frac{\partial f_2^j}{\partial t} & \frac{\partial f_2^j}{\partial \delta L} \end{array} \right) \bigg|_{t=T/2, \mathbf{Z}^{j,k}=\mathbf{Z}_0^{j,k}, \epsilon=0} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3T \\ L_0^3 & 2L_0^4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

logo, segue que

$$\det \left(\frac{\partial(f_1^i, f_2^i)}{\partial(t, \delta L)} \bigg|_{t=T/2, \mathbf{Y}^{i,k}=\mathbf{Y}_0^{i,k}, \epsilon=0} \right) = \frac{-3T}{2L_0^4} \neq 0. \quad (5.40)$$

Portanto, de acordo com o teorema da função implícita, para δG e ϵ suficientemente pequenos, existem curvas diferenciáveis $t = t(\delta G, \epsilon)$ e $\delta L = \delta L(\delta G, \epsilon)$, tais que $\delta t(0, 0) = T$ e $\delta L(0, 0) = 0$, e tal que

$$f_1(t(\delta G, \epsilon), \delta L(\delta G, \epsilon), \delta G, \epsilon) = 0, \quad f_2(t(\delta G, \epsilon), \delta L(\delta G, \epsilon), \delta G, \epsilon) = 0.$$

Dessa forma, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon^{i,k} = (n\pi, g_0^{i,k}, L_0 + \delta L^{i,k}(\delta G^{i,k}, \epsilon), \delta G^{i,k}) \in \mathcal{L}_i,$$

tal que

$$\phi(t, \mathbf{Y}_\epsilon^{i,k}, \epsilon) = \phi_0(t, \mathbf{Y}_\epsilon^{i,k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução periódica S_i -simétrica do sistema (4.36), próxima da órbita elíptica do problema de Kepler, com período $T = 2m\pi L_0^3$. ■

Por último, caracterizaremos uma solução elíptica do problema de Kepler dupla simétrica, em coordenadas giratórias com período arbitrário.

Seja $\phi(t, \mathbf{Z}_{0,1})$ uma solução elíptica do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial

$$\mathbf{Z}_{0,1} = (n_1\pi, n_2\pi, L_0, G_0) \in \mathcal{L}_1,$$

onde $n_j \in \{0, 1\}$ para $j = 1, 2$, $L_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $0 < |G_0| < L_0$. A solução $\phi(t, \mathbf{Z}_{0,1})$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= \frac{1}{L_0^3}t + n_1\pi, & L^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= L_0 \\ g^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= -t + n_2\pi, & G^{(0)}(t, \mathbf{Z}_{0,1}) &= G_0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A solução acima é T -periódica e dupla simétrica se, em $t = \frac{T}{4}$, ela intesecta ortogonalmente o eixo y . Porém, através do Lema 4.1, isso ocorre se as seguintes condições

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}(T/4, \mathbf{Z}_{0,1}) &= \frac{T}{4L_0^3} + n_1\pi = (n_1 + m)\pi, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \\ g^{(0)}(T/4, \mathbf{Z}_{0,1}) &= -\frac{T}{4} + n_2\pi = (n_2 - k)\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

são satisfeitas, isto é, se o período da solução é dada por $T = 4m\pi L_0^3 = (4k + 2)\pi$, implicando em

$$L_0^3 = \frac{4k + 2}{4m} \in \mathbb{Q} \quad \text{ou} \quad k = \frac{4mL_0^3 - 2}{4}.$$

Agora, seja $\mathbf{Z}_1 = (n_1\pi, n_2\pi, L_0 + \delta L, G_0 + \delta G) \in \mathcal{L}_1$, com $n_j \in \{0, 1\}$ para $j = 1, 2$ e $0 < |\delta G| \leq \delta L$, uma condição inicial próxima a $\mathbf{Z}_{0,1}$, com δL e δG suficientemente pequenos. Assim, a solução $\phi(t, \mathbf{Z}_1)$ do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_1$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t + n_1\pi, & L^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= L_0 + \delta L \\ g^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= -t + n_2\pi, & G^{(0)}(t, \mathbf{Z}_1) &= G_0 + \delta G. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Seguidamente, apresentaremos um resultado que, de fato, fornece condições para obtermos órbitas periódicas dupla simétricas próximas as soluções elípticas, em coordenadas giratórias.

Teorema 5.5 *Suponhamos que K em (5.33) é invariante com respeito as simetrias S_1 e S_2 , e seja $\phi(t, \mathbf{Z}_1)$, como em (5.42), solução do problema de Kepler em coordenadas giratórias com condição inicial $\mathbf{Z}_1$ próxima a $\mathbf{Z}_{0,1}$. Então, para ϵ suficientemente pequeno, existe uma família de condições iniciais*

$$\mathbf{Z}_\epsilon = (n_1\pi, n_2\pi, L_0 + \delta L(\epsilon), G_0 + \delta G(\epsilon)),$$

com $L_0 = \{l_1 \in \mathbb{R} : l_1 \neq 0 \text{ e } l_1^3 \in \mathbb{Q}\}$, tal que

$$\varphi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_0(t, \mathbf{Z}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

é uma solução T -periódica e dupla simétrica do sistema (5.34) com período

$$T = 4m\pi L_0^3.$$

Demonstração: Seja $\phi_0(t, \mathbf{Z}_1)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Z}_1$ como em (5.42). O Lema (4.3) nos garante que a solução

$$\phi(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) = (\ell(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), g(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), L(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon), G(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon))$$

do sistema perturbado (5.34) em variáveis de Delaunay satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \ell(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \\ g(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= -t + n_2\pi + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Z}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

A solução $\phi(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon)$ é periódica e dupla simétrica se, em $t = T/4$, ela intesecta o eixo y de maneira ortogonal. No entanto, aplicando o Lema 4.1, isso acontece, de fato, se

$$\begin{aligned} \ell(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = (n_1 + m_1)\pi, \text{ para algum } m_1 \in \mathbb{Z}, \\ g(t, \mathbf{Z}_1, \epsilon) &= -t + n_2\pi + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Z}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = (n_2 - m_2)\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ para algum } m_2 \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

em $t = T/4$. Assim, como pretendemos obter soluções de (5.43) para $\epsilon \neq 0$, faremos $m_1 = m$, $m_2 = k$ e reescrevemos o sistema (5.37) da forma

$$\begin{aligned} f_1(t, \delta L, \delta G, \epsilon) &= \frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_2(t, \delta L, \delta G, \epsilon) &= -t + k\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon g^{(1)}(t, \mathbf{Z}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

para $t = T/4$. Resolveremos o sistema (5.44) através do Teorema da função implícita. Avaliando o sistema (5.44) em $t = T/4$, $\delta L = 0$, $\delta G = 0$ e $\epsilon = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} f_1(T/4, 0, 0, 0) &= \frac{T}{4L_0^3} - m\pi = \frac{(4k+2)\pi}{4L_0^3} - m\pi = \frac{4m\pi L_0^3}{4L_0^3} - m\pi = 0, \\ f_2(T/4, 0, 0, 0) &= -\frac{T}{4} + k\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{(4k+2)\pi}{4} + k\pi + \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Diferenciando o sistema (5.44) com respeito as variáveis t e δL , e avaliando em $t = T/4$, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{0,1}$ e $\epsilon = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \delta L)} \right|_{t=T/4, \mathbf{Z}_1=\mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta L} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta L} \end{array} \right) \bigg|_{t=T/4, \mathbf{Z}_1=\mathbf{Z}_{0,1}, \epsilon=0} \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{L_0^3} & \frac{-3T}{4L_0^4} \\ -1 & 0 \end{array} \right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

implicando que

$$\det \left(\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \delta L)} \right|_{t=T/4, \mathbf{Z}_1=\mathbf{Y}_{0,1}, \epsilon=0} \right) = \frac{-3T}{4L_0^4} \neq 0. \quad (5.46)$$

Assim, obtemos pelo teorema da função implícita, para δG e ϵ suficientemente pequenos, que existem curvas diferenciáveis $t = t(\delta G, \epsilon)$ e $\delta L = \delta L(\delta G, \epsilon)$, tais que $\delta t(0, 0) = T$ e $\delta L(0, 0) = 0$, e tal que

$$f_1(t(\delta G, \epsilon), \delta L(\delta G, \epsilon), \delta G, \epsilon) = 0, \quad f_2(t(\delta G, \epsilon), \delta L(\delta G, \epsilon), \delta G, \epsilon) = 0.$$

Portanto, existe uma família de condições iniciais parametrizadas em ϵ ,

$$\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, n_2\pi, L_0 + \delta L(\delta G, \epsilon), \delta G) \in \mathcal{L}_1,$$

tal que

$$\phi(t, \mathbf{Z}_\epsilon, \epsilon) = \phi_0(t, \mathbf{Z}_\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

é uma solução periódica e dupla simétrica do sistema (5.34), próxima da órbita elíptica do problema de Kepler, com período $T = 4m\pi L_0^3$. ■

Capítulo 6

Aplicações

Neste capítulo faremos duas aplicações do estudo das soluções periódicas em sistemas Hamiltonianos simétricos perturbados. A primeira aplicação serve como aplicações dos resultados obtidos no Capítulo 4 enquanto que a segunda, como aplicação dos resultados obtidos no Capítulo 5.

6.1 O problema generalizado e anisotrópico de dois corpos com potencial de Buckingham

O estudo do problema de dois corpos ainda atrai o vivo interesse de matemáticos, físicos e químicos, tanto em sua forma clássica quanto em versões mais recentes.

Na forma mais recente, estão os problemas levantados por potenciais quase-homogêneos, que são a soma de funções homogêneas com diferentes graus. Para problemas quase-homogêneos, a terminologia e os primeiros resultados qualitativos foram introduzidos na década de 1990 (ver [12] e suas referências). Esse potencial unifica várias leis dinâmicas, incluindo as de Newton, Coulomb, Manev, Schwarzschild, Lennard-Jones, Birkhoff e outros. Alguns problemas quase-homogêneos são descritos em espaços anisotrópicos, nos quais a lei de interação é diferente em cada direção do espaço. O estudo de problemas anisotrópicos está mais relacionado à física e foi iniciado por Gutzwiller em 1970 ([15]-[16]) para a quantização de sistemas ergódicos clássicos. Podemos encontrar vários trabalhos na literatura nos últimos anos que combinam o potencial quase-homogêneo no espaço anisotrópico (ver [4] e suas referências).

Na química computacional e na dinâmica molecular, é comum usar modelos matematicamente simples para descrever a interação entre um par de átomos ou moléculas (ver, por exemplo, [14], [17] e [18]). Um modelo comum é dado pelo potencial de Lennard-Jones

$$V(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

$A, B > 0$ e r é a distância interatômica. Resultados analíticos sobre problemas com o potencial de Lennard-Jones, podem ser encontrados em [6], [19] ou [23].

Uma modificação do potencial de Lennard-Jones, o potencial átomo-átomo de Buckingham, é um modelo proposto em 1938 por Richard Buckingham [9] para o estudo da equação de estado para hélio, néon e argônio gasosos. Conforme mencionado em [22], o potencial de Buckingham

descreve a energia de repulsão de Pauli e a energia de van der Waals para a interação de dois átomos que não estão diretamente ligados. Este potencial é dado por

$$V(r) = Ae^{-Br} - \frac{C}{r^6},$$

onde A, B e C são constantes positivas determinadas empiricamente. Resultados envolvendo este problema, podem ser encontrados em [27] e [28].

Os efeitos de anisotropia, surgem quando se considera a falta de esfericidade dos átomos e desta forma, os modelos anisotrópicos apresentam uma dinâmica mais complexa. Esta formulação para o potencial anisotrópico átomo-átomo, pode ser encontrada com mais detalhes nos trabalhos de [26] e [31].

Neste capítulo, seguimos [22] e consideramos o modelo e interação entre átomos dado pela soma de um potencial Coulombiano com carga negativa e o potencial de Buckingham anisotrópico generalizado, onde a anisotropia é considerada como um parâmetro perturbativo pequeno. De forma precisa, vamos considerar o problema representado pela função hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2}} + Ae^{-B\sqrt{\mu x^2 + y^2}} - \frac{C}{(\mu x^2 + y^2)^{\alpha/2}}, \quad (6.1)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y)$ representa a posição da partícula e $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ o momento conjugado da mesma. A função Hamiltoniana (6.1) depende dos parâmetros reais A, B, C e $\mu > 1$ (que é a intensidade da anisotropia). Por sua vez, o potencial de (6.1) é representado por

$$V = -\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2}} + Ae^{-B\sqrt{\mu x^2 + y^2}} - \frac{C}{(\mu x^2 + y^2)^{\alpha/2}}. \quad (6.2)$$

Para obtermos nossos resultados, faremos uma mudança nos parâmetros da seguinte forma:

$$B = b\epsilon, \quad C = m\epsilon, \quad \mu = 1 - \mu_0\epsilon \quad (\text{com } \mu_0 > 0),$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim, reescrevemos a função (6.1) da forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2}} + Ae^{-b\epsilon\sqrt{(1-\mu_0\epsilon)x^2 + y^2}} - \frac{m\epsilon}{((1 - \mu_0\epsilon)x^2 + y^2)^{\alpha/2}}, \quad (6.3)$$

Desenvolvendo a função hamiltoniana (6.3) em séries de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ e eliminando o termo constante composto somente por A , obtemos a função hamiltoniana

$$\mathcal{H}_\epsilon = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \epsilon \left(-Ab\sqrt{x^2 + y^2} - m(x^2 + y^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.4)$$

A seguir, definimos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \sqrt[3]{Q^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Observemos que a transformação de coordenadas acima é $1/\sqrt[3]{Q^2}$ -simplética. Dessa forma, aplicando-a na função Hamiltoniana (6.4), temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\epsilon &= \frac{1}{\sqrt[3]{Q^2}} \left(\frac{\sqrt[3]{Q^2}}{2} (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2) - \frac{Q}{\sqrt[3]{Q} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}} + \epsilon \left(-Ab \sqrt[3]{Q} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} - \frac{m}{\sqrt[3]{Q^2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}} + \epsilon \left(\frac{-Ab}{\sqrt[3]{Q}} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} - \frac{m}{(\sqrt[3]{Q^2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2))^{\frac{\alpha}{2}}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{6.6}$$

Fazendo $\gamma = \frac{Ab}{\sqrt[3]{Q}}$ e $\Gamma = \frac{m}{\sqrt[3]{Q^2}}$, reescrevemos (6.6) como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\epsilon &= \frac{1}{2} (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}} + \epsilon \left(-\gamma \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} - \frac{\Gamma}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}} + \epsilon \Gamma \left(-\frac{\gamma}{\Gamma} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} - \frac{1}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{6.7}$$

Agora, chamando $\frac{\gamma}{\Gamma} = \beta$ e excluindo o til ($\sim$) nas variáveis, reescrevemos (6.7) da forma

$$\mathcal{H}_\epsilon = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \epsilon \Gamma \left(-\beta \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\tag{6.8}$$

Percebemos facilmente que o problema associado a função Hamiltoniana (6.8) é invariante com respeito as simetrias S_1 e S_2 . Queremos determinar condições suficientes para que as soluções circulares ou elípticas do problema de Kepler possam ser continuadas as soluções periódicas simétricas do problema completo associada a função Hamiltoniana (6.8). Para obter nossos objetivos, utilizaremos os resultados obtidos nos capítulos 4 e 5.

Inicialmente determinaremos a existência de soluções periódicas próximas a soluções circulares do problema de Kepler. Para tal finalidade, como mostra no capítulo 4, precisaremos utilizar as PD-coordenadas. A função Hamiltoniana (6.8) deverá ser reescrita em PD-coordenadas (2.63), ou seja, na forma

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\tag{6.9}$$

onde $\mathcal{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2P_1^2}$ é a função hamiltoniana do problema de Kepler em PD-coordenadas. Observemos que em coordenadas polares, vista no capítulo 2, a função Hamiltoniana $\mathcal{H}_1$ da primeira aproximação é dada por

$$\mathcal{H}_1 = \Gamma \left(-\beta r - \frac{1}{r^\alpha} \right).\tag{6.10}$$

Como $r = \|\mathbf{q}\|$, podemos escrever (6.10) como

$$\mathcal{H}_1 = \Gamma \left(-\beta \|\mathbf{q}\| - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^\alpha} \right).\tag{6.11}$$

Porém, não podemos escrever diretamente a função $\mathcal{H}_1$ em PD-coordenadas de forma explícita, pois não podemos obter explicitamente uma expressão para $\|\mathbf{q}\| = r$ nestas coordenadas. Para

superar este problema, escreveremos $\|\mathbf{q}\| = r$ em séries de Taylor centrada em $Q_2 = P_2 = 0$ e $P_1 = p_1$. Assim, a expressão obtida para $\|\mathbf{q}\|$ será válida em uma vizinhança suficientemente pequena de uma solução circular do problema de Kepler. O procedimento para conseguir esta expressão está detalhado na seção (Apêndice). Este resultado pode ser resumido no seguinte Lema:

Lema 6.1 *A expressão para $\|\mathbf{q}\|$ em PD-coordenadas é dada por*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| = & P_1^2 \left(1 - \left(\frac{P_2 \cos Q_1}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} - \left(\frac{Q_2 \sin Q_1}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} \right. \\ & + \left(\left(\frac{P_2 \sin Q_1}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} + \left(\frac{Q_2 \cos Q_1}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} \right)^2 \\ & \left. + \mathcal{O}(e^3) \right). \end{aligned}$$

onde e é a excentricidade da órbita. Expandindo a última expressão em séries de Taylor em torno de uma solução circular, $Q_2 = 0$, $P_2 = 0$ e $P_1 = p_1$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| = & p_1^2 + \sqrt{p_1^3} Q_2 \sin Q_1 - \sqrt{p_1^3} P_2 \cos Q_1 + 2p_1(P_1 - p_1) + p_1 Q_2^2 \cos^2 Q_1 \\ & + \frac{3}{2} \sqrt{p_1} Q_2 (P_1 - p_1) \sin Q_1 + 2p_1 Q_2 P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - p_1)^2 \\ & - \frac{3}{2} \sqrt{p_1} (P_1 - p_1) P_2 \cos Q_1 + p_1 P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3), \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $\mathbf{X} = (\delta Q_2, \delta P_1, \delta P_2) = (Q_2, P_1 - p_1, P_2)$.

Demonstração: Veja seção (Apêndice). ■

Agora, apresentaremos o resultado principal referente a existência de soluções periódicas simétricas para o problema associado a função Hamiltoniana (6.8). Mas, primeiro, reescreveremos as expressões para as soluções Keplerianas e as condições iniciais que aparecem no enunciado do Teorema. Apesar de termos feito um teorema para o caso em que a solução é S_1 -simétrica e outro teorema quando a solução é S_2 -simétrica, nesta aplicação faremos os dois casos em um único teorema.

Consideremos uma solução circular do problema de Kepler em PD-coordenadas dada por

$$\varphi_0(t, \mathbf{Y}_0^j) = (p_1^{-3} t ((2n + (j - 1))\pi/2, 0, p_1, 0), \quad j = 1, 2 \quad (6.13)$$

com condição inicial $\mathbf{Y}_0^j$ dada por

$$\mathbf{Y}_0^j = ((2n + (j - 1))\pi/2, 0, p_1, 0) \in \mathcal{L}_j, \quad j = 1, 2, \quad (6.14)$$

Agora, faremos uma pequena perturbação na condição inicial $\mathbf{Y}_0^j$ da forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^j &= \mathbf{Y}_0^j + (0, (j - 1)\delta Q_2, \delta P_1, (2 - j)\delta P_2) \\ &= ((2n + (j - 1))\pi/2, (j - 1)\delta Q_2, p_1 + \delta P_1, (2 - j)\delta P_2) \in \mathcal{L}_j, \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde $\delta Q_2, \delta P_1, \delta P_2 \in \mathbb{R}$ e $j = 1, 2$. Por sua vez, a solução do problema de Kepler $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}^j)$ com a condição inicial $\mathbf{Y}^j$ em PD-coordenadas é dada por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t) &= \frac{1}{(p_1 + \delta P_1)^3} t + (2n + (j - 1)) \frac{\pi}{2}, & Q_2^{(0)}(t) &= (j - 1) \delta Q_2, \\ P_1^{(0)}(t) &= p_1 + \delta P_1, & P_2^{(0)}(t) &= (2 - j) \delta P_2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Desta forma, obtemos o seguinte resultado a respeito da existência de soluções periódicas simétricas:

Teorema 6.1 *Sejam $\beta \in \mathbb{R}$, $p_1, \alpha \in \mathbb{R}^+$, $T = 2\pi p_1^3$ e seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$ uma solução circular do problema de Kepler como em (6.16). Então, para o problema associado a função Hamiltoniana (6.8), para todo ϵ suficientemente pequeno, valem os seguintes resultados:*

(a) *Se $2\beta + (\alpha - 1)\alpha p_1^{-2(\alpha+1)} \neq 0$, então para cada $j = 1, 2$, existe uma família a 1-parâmetro de condições iniciais*

$$\mathbf{Y}(\epsilon) = ((2n + (j - 1))\pi/2, (j - 1)\delta Q_2(\epsilon), p_1 + \delta P_1(\epsilon), (2 - j)\delta P_2(\epsilon))$$

em PD-coordenadas, parametrizadas por ϵ , tal que cada um deles nos dá duas soluções periódicas S_j -simétrica com período fixo T .

(b) *Existe uma família a 1-parâmetro de condições iniciais*

$$\mathbf{Y}(\epsilon) = (2\pi, 0, p_1 + \delta P_1(\epsilon), \delta P_2(\epsilon))$$

em PD-coordenadas parametrizadas por ϵ , tal que para cada ϵ existe uma solução periódica duplamente simétrica com período fixo T .

Além disso, estas soluções periódicas estão próximas de uma solução Kepleriana circular com raio p_1^2 e período $T = 2\pi p_1^3$.

Demonstração: Para demonstrar este teorema, precisamos verificar as hipóteses dos teoremas 4.1, 4.2 e 4.3.

Definimos as variáveis auxiliares: $\mathcal{Z}_1 = P_2$ e $\mathcal{Z}_2 = Q_2$. Assim, a derivada de $\mathcal{H}_1$, dada em (6.11), com respeito a $\mathcal{Z}_j$ para $j = 1, 2$, é dada pela expressão

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{Z}_j} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \|\mathbf{q}\|} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \mathcal{Z}_j} = (\alpha \|\mathbf{q}\|^{-(\alpha+1)} - \Gamma \beta) \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \mathcal{Z}_j}. \quad (6.17)$$

Da equação (6.12), segue que as derivadas de $\|\mathbf{q}\|$ em relação a P_2 e a Q_2 são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} &= -\sqrt{p_1^3} \cos Q_1 + 2p_1 Q_2 \sin Q_1 \cos Q_1 - \frac{3}{2} \sqrt{p_1} (P_1 - p_1) \cos Q_1 + 2p_1 P_2 \sin^2 Q_1 \\ &\quad + \mathcal{O}(\|X\|^2), \\ \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} &= \sqrt{p_1^3} \sin Q_1 + 2p_1 P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + \frac{3}{2} \sqrt{p_1} (P_1 - p_1) \sin Q_1 + 2p_1 P_2 \cos^2 Q_1 \\ &\quad + \mathcal{O}(\|X\|^2), \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde $\mathbf{X} = (Q_2, P_1, P_2)$. Aplicando $\|\mathbf{q}\|$ em $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$ dada por (6.16), e utilizando as expressões (6.12) e (6.18), temos que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}\| \big|_{\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)} &= p_1^2 - \sqrt{p_1^3} \delta P_2 \cos Q_1(t) + 2p_1 \delta P_1 + (\delta P_1)^2 \\ &\quad - \frac{3}{2} \sqrt{p_1} \delta P_2 \delta P_1 \cos Q_1(t) + p_1 \delta P_2^2 \sin^2 Q_1(t) + \mathcal{O}(\|X\|^3), \\ \|\mathbf{q}\| \big|_{\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)} &= p_1^2 + \sqrt{p_1^3} \delta Q_2 \sin Q_1(t) + 2p_1 \delta P_1 + (\delta P_1)^2 \\ &\quad + \frac{3}{2} \sqrt{p_1} \delta P_2 \delta P_1 \cos Q_1(t) + p_1 \delta P_2^2 \sin^2 Q_1(t) + \mathcal{O}(\|X\|^3),\end{aligned}\tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \bigg|_{\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)} &= -\sqrt{p_1^3} \cos Q_1 - \frac{3}{2} \sqrt{p_1} \delta P_1 \cos Q_1 + 2p_1 \delta P_2 \sin^2 Q_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial P_2} \mathcal{O}(\|X\|^2), \\ \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \bigg|_{\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)} &= \sqrt{p_1^3} \sin Q_1 + \frac{3}{2} \sqrt{p_1} \delta P_1 \sin Q_1 + 2p_1 \delta Q_2 \cos^2 Q_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial Q_2} \mathcal{O}(\|X\|^2).\end{aligned}\tag{6.20}$$

Agora, aplicando $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{Z}_j}$ em $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$ e avaliando em $\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j$, para $j = 1, 2$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \bigg|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} &= c \left(-\beta \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \bigg|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \|\mathbf{q}\|^{-(\alpha+1)}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \bigg|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \bigg|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} \right).\end{aligned}\tag{6.21}$$

Fixando $j = 1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{Z}_1}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \bigg|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} &= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \bigg|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} \\ &= c(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)})(-\sqrt{p_1^3} \cos Q_1(t, \mathbf{Y}_0^1)).\end{aligned}\tag{6.22}$$

Assim, integrando (6.25) de 0 a $T/2$ em relação a t , temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \bigg|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} c \left(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)} \right) \left(-\sqrt{p_1^3} \cos Q_1(t, \mathbf{Y}_0^1) \right) dt \\ &= -c \sqrt{p_1^3} (-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) dt.\end{aligned}$$

Observemos que, fazendo $u = \frac{t}{p_1^3} + n\pi$, logo $du = \frac{1}{p_1^3} dt$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) dt &= p_1^3 \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos(u) du = p_1^3 \sin(u) \bigg|_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= p_1^3 (\sin((n+1)\pi) - \sin(n\pi)) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{6.23}$$

Portanto, segue que

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \Big|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} dt = 0.$$

Agora, fixando $j = 2$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{Z}_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} &= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} \\ &= c(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)})(\sqrt{p_1^3} \sin Q_1(t, \mathbf{Y}_0^2)). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Assim, integrando (6.24) de 0 a $T/2$ na variável t , temos que

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} dt = c\sqrt{p_1^3}(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) dt.$$

Mas, fazendo $u = \frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2}$, temos $du = \frac{1}{p_1^3} dt$, e assim segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) dt &= p_1^3 \int_{n\pi + \frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}} \sin(u) du = -p_1^3 \cos(u) \Big|_{n\pi + \frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}} \\ &= -p_1^3 \left(\cos\left((n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Dessa forma, obtemos que

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} dt = 0. \quad (6.26)$$

Portanto, verificamos a condição (a) dos Teoremas 4.1 e 4.2.

Agora, verificaremos a condição (b) dos teoremas 4.1 e 4.2. Avaliamos a expressão (6.17) na solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$, e diferenciamos em relação a $\delta \mathcal{Z}_j$, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta \mathcal{Z}_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right) &= c \left(-\beta \frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \delta \mathcal{Z}_j \partial \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right. \\ &\quad - \alpha(\alpha+1) \|\mathbf{q}\|^{-(\alpha+2)}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \delta \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \\ &\quad \left. + \alpha \|\mathbf{q}\|^{-(\alpha+1)}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \delta \mathcal{Z}_j \partial \mathcal{Z}_j}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Fixamos $j = 1$. Utilizando as equações (6.19) e (6.20), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \delta P_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \Big|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} &= \sqrt{p_1^3} \cos Q_1(t, \mathbf{Y}^1), \\ \frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \delta P_2 \partial P_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \Big|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} &= 2p_1 \sin^2 Q_1(t, \mathbf{Y}^1). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Agora aplicamos as equações (6.20) e (6.27) em $\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1$. De (6.20), (6.27) e (6.30) obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta P_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} &= c \left(2p_1 \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) (-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \right. \\ &\quad \left. - \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} p_1^3 \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) \right). \end{aligned}$$

Agora, vamos integrar a equação anterior na variável t de 0 a $T/2$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/2} \frac{\partial}{\partial \delta P_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2} \right) (\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \Big|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} d\mathbf{t} &= \int_0^{T/2} c \left(2p_1 \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) (-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \right. \\
&\quad \left. - \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} p_1^3 \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) \right) dt. \\
&= 2cp_1(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \int_0^{T/2} \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) dt \\
&\quad - cp_1^3 \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} \int_0^{T/2} \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) dt
\end{aligned}$$

Tomando $u = \frac{t}{p_1^3} + n\pi$, logo $du = \frac{1}{p_1^3} dt$, e utilizando as relações trigonométricas

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/2} \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) dt &= p_1^3 \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2(u) du = p_1^3 \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2u) du \\
&= p_1^3 \left(\frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin(2u) \right) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = p_1^3 \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/2} \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi \right) dt &= p_1^3 \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos^2(u) du = p_1^3 \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u) du \\
&= p_1^3 \left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin(2u) \right) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = p_1^3 \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, da equação (6.31) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/2} \frac{\partial}{\partial \delta P_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P_2} \right) (\varphi_0(t, \mathbf{Y}^1)) \Big|_{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}_0^1} d\mathbf{t} &= 2cp_1(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) p_1^3 \frac{\pi}{2} \\
&\quad - cp_1^3 \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} p_1^3 \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

A integral acima é igual a zero se

$$2cp_1(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) p_1^3 \frac{\pi}{2} - cp_1^3 \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} p_1^3 \frac{\pi}{2} = 0,$$

ou melhor, se

$$(-c \frac{\pi}{2} p_1^4)(2\beta + \alpha(\alpha-1)(p_1)^{-2(\alpha+1)}) \neq 0.$$

Como $-c \frac{\pi}{2} p_1^4$ é um número positivo, segue que a integral em (6.29) é zero se

$$2\beta + \alpha(\alpha-1)(p_1)^{-2(\alpha+1)} = 0.$$

Portanto, o teorema é válido se

$$2\beta + \alpha(\alpha-1)(p_1)^{-2(\alpha+1)} \neq 0.$$

Consideremos a expressão (6.27). Fixando $j = 2$ e utilizando as equações (6.19) e (6.20) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \delta Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} &= \sqrt{p_1^3} \sin Q_1(t, \mathbf{Y}_0^2), \\ \frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \delta Q_2 \partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} &= 2p_1 \cos^2 Q_1(t, \mathbf{Y}_0^2).\end{aligned}\tag{6.30}$$

Pelas equações acima e por (6.20) e (6.27), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \delta Q_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} &= c \left(2p_1 \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) (-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \right. \\ &\quad \left. - \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} p_1^3 \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right).\end{aligned}$$

Integrando a equação anterior na variável t de 0 a $T/2$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{T/2} \frac{\partial}{\partial \delta Q_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} dt &= \int_0^{T/2} c \left(2p_1 \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) (-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \right. \\ &\quad \left. - \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} p_1^3 \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right) dt.\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_0^{T/2} \frac{\partial}{\partial \delta Q_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} dt &= 2cp_1(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) \int_0^{T/2} \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) dt \\ &\quad - cp_1^3 \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} \int_0^{T/2} \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) dt\end{aligned}$$

Pondo $u = \frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2}$, temos que

$$\int_0^{T/2} \sin^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) dt = \int_0^{T/2} \cos^2 \left(\frac{t}{p_1^3} + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) dt = p_1^3 \frac{\pi}{2},$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^{T/2} \frac{\partial}{\partial \delta Q_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial Q_2}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^2)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^2 = \mathbf{Y}_0^2} dt &= 2cp_1(-\beta + \alpha(p_1^2)^{-(\alpha+1)}) p_1^3 \frac{\pi}{2} \\ &\quad - cp_1^3 \alpha(\alpha+1)(p_1^2)^{-(\alpha+2)} p_1^3 \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, a integral acima é diferente de zero se

$$2\beta + \alpha(\alpha-1)(p_1)^{-2(\alpha+1)} \neq 0.$$

Portanto, o teorema também é válido para $j = 2$. Com isso concluímos a demonstração do item (a) do Teorema. Observe que não há nada a provar no item (b). ■

Agora faremos o estudo da continuação das órbitas Keplerianas elípticas por meio das coordenadas de Delaunay. Consideremos uma solução elíptica $\varphi_0(t, \mathbf{Y}_0^j)$ do problema de Kepler (4.35) em coordenadas de Delaunay com condição inicial

$$\mathbf{Y}_0^j = (\ell_0, g_0^j, L_0, G_0) \equiv (0, j\frac{\pi}{2}, L_0, G_0) \in \mathcal{L}_j, \tag{6.31}$$

com $|G_0| < L_0$ e $j = 1, 2$. Esta solução em coordenadas de Delaunay é T -periódica com período $2\pi L_0^3$ e a condição inicial $\mathbf{Y}_0^j$ pertence a $\mathcal{L}_j$ para cada $j = 1, 2$. Como vimos anteriormente, esta solução é expressa como

$$\varphi_0(t, \mathbf{Y}_0^j) = (\ell^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^j), g^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^j), L^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^j), G^{(0)}(t, \mathbf{Y}_0^j)) = \left(\frac{t}{L_0^3}, j\frac{\pi}{2}, L_0, G_0 \right).$$

Em seguida, fazemos uma pequena perturbação na condição inicial $\mathbf{Y}_0^j$ da solução do problema não perturbado, da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}^j = (0, Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, P_1^{(0)} + \delta L, P_2^{(0)} + \delta G) = (0, g_0^j, L_0 + \delta L, G_0 + \delta G) \in \mathcal{L}_j. \quad (6.32)$$

A solução $\varphi(t, \mathbf{Y}^j)$ com esta condição inicial também é elíptica e é descrita por

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= (L_0 + \delta L)^{-3}t, & P_1(t) &= L_0 + \delta L, \\ Q_2(t) &= j\frac{\pi}{2}, & P_2(t) &= G_0 + \delta G, \end{aligned} \quad (6.33)$$

com $|\delta G| \leq \delta L$. Para continuar as órbitas elípticas Keplerianas consideramos valores particulares do parâmetro α , a saber: $\alpha = 2$ e $\alpha = 6$. Diante disso, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 6.2 *Dados $\beta < 0$, $L_0 \in \mathbb{R}^+$, $T = 2\pi L_0^3$ e seja $\varphi(t, \mathbf{Y}^j)$ uma solução elíptica do problema de Kepler como em (6.33) com período T , expresso em coordenadas de Delaunay. Então para o problema associado a função Hamiltoniana (6.8), para todo ϵ suficientemente pequeno, é válido as seguintes afirmações:*

- (a) *Se $\alpha = 2$, $L_0 > 1/\sqrt[6]{-\beta}$ e $G_0 = \pm \frac{1}{L_0\sqrt[3]{-\beta}}$ então para cada $j = 1, 2$, existem duas famílias 1-parâmetro (em ϵ) de condições iniciais em coordenadas de Delaunay, tal que cada uma delas nos dá soluções periódicas S_j -simétricas com período fixo T .*
- (b) *Se $\alpha = 6$, $L_0 > \sqrt[14]{-15/\beta}$ então para cada $j = 1, 2$, existem duas famílias 1-parâmetro (em ϵ) de condições iniciais em coordenadas de Delaunay, tal que cada uma delas nos dá soluções periódicas S_j -simétricas com período fixo T .*

Demonstração: Seja $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$ solução do problema de Kepler como em (6.33). Para provar esse Teorema precisamos verificar as hipóteses do Teorema (4.4), que são

$$a) \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\phi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} ds = 0 \quad \text{e} \quad b) \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial \delta G (\partial G)}(\phi_0(\mathbf{s}, \mathbf{Y}^{i,k})) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} ds \neq 0. \quad (6.34)$$

Primeiro verificaremos o item (a) do Teorema (4.4). Para calcular a integral em (6.34) utilizaremos variáveis auxiliares envolvendo os elementos orbitais, e também, introduziremos uma mudança de variáveis na integração. Obteremos estas relações fazendo o mesmo processo que foi feito em [7].

Vamos calcular a derivada parcial de $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}$, considerando a equação de Kepler

$$\ell = E - e \sin E, \quad (6.35)$$

onde $e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$ é a excentricidade da órbita Kepleriana e E é a anomalia excentrica.

A função perturbada $\mathcal{H}_1$, na forma polar e em coordenadas de Delaunay depende das variáveis r , f , g , L e G . Dessa forma, eliminaremos a dependência de $\mathcal{H}_1$ das variáveis r , f e e , utilizando as seguintes relações auxiliares:

$$r = L^2(1 - e \cos E), \quad r \cos f = L^2(\cos E - e), \quad r \sin f = L^2\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \quad (6.36)$$

onde $a = L^2$. Feito isso, a função $\mathcal{H}_1$ assume a forma

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(E(e), e, g, L, G). \quad (6.37)$$

Derivando (6.37) em relação a G pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G} + \frac{d\mathcal{H}_1}{dG}. \quad (6.38)$$

Pela equação (6.35) temos que

$$\frac{\partial E}{\partial G} = -\frac{G \sin E}{L^2 e (1 - e \cos E)}. \quad (6.39)$$

Portanto, de (6.38) e (6.39) obtemos uma expressão para a derivada de $\mathcal{H}_1$ em relação a G . Na integral de (6.34), vamos introduzir a mudança de variáveis

$$t = L_0^3(E - e_0 \sin E), \quad (6.40)$$

onde L_0^2 corresponde ao semi-eixo maior e e_0 corresponde a excentricidade da órbita Kepleriana $\varphi_0(\tau, \mathbf{Y}_0^j)$. Em [7] contém mais detalhes sobre as expressões expostas acima. Agora, consideraremos os casos particulares do parâmetro α .

Caso 1: $\alpha = 2$: Pelas equações em (6.36), segue que a função Hamiltoniana $\mathcal{H}_1$, para $\alpha = 2$, é descrita por

$$\mathcal{H}_1 = -(\beta r + \frac{1}{r^2}) = -\beta L^2(1 - e \cos E) - \frac{1}{L^4(1 - e \cos E)^2}. \quad (6.41)$$

Diferenciando (6.41) pela regra da cadeia e utilizando a expressão (6.39) (por meio do software Mathematica) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G} = & \frac{G(\cos E) - e}{4a^3e(e \cos E - 1)^4} \left(-4a^3\beta + 3a^3\beta e \left(e^2 + 4 \right) \cos E - 6a^3\beta e^2 \cos(2E) \right. \\ & \left. + a^3\beta e^3 \cos(3E) - 6a^3\beta e^2 + 8 \right), \end{aligned} \quad (6.42)$$

onde $a = L^2$.

Agora, avaliando $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}$ na solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$, e após isso, fazendo $\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j$ (Isso é equivalente a avaliar (6.42) em $e = e_0 = \sqrt{1 - \frac{G_0}{L_0}}$, $L = L_0$ e $G = G_0$) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G} (\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) |_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} = & \frac{G_0(\cos E) - e_0}{4L_0^6e_0(e_0 \cos E - 1)^4} \left(-4L_0^6\beta + 3L_0^6\beta e_0 (e_0^2 + 4) \cos E \right. \\ & \left. - 6L_0^6\beta e_0^2 \cos(2E) + L_0^6\beta e_0^3 \cos(3E) - 6L_0^6\beta e_0^2 + 8 \right), \end{aligned} \quad (6.43)$$

onde $e_0 = \sqrt{1 - G_0^2/L_0^2}$. Agora calcularemos a integral $\int_0^{T/2} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt$. Observemos que para $t = T/2$, da equação de Kepler temos $2\pi L_0^3 = L_0^3(E - e_0 \sin E)$ e $E = \pi$ é solução desta equação. Portanto, integrando (6.43) de 0 a $t/2$ e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt &= \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(E, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} L_0^3 (1 - e_0 \cos E) dE \\ &= \frac{\pi (\beta G_0^2 L_0^3 |G_0| + 1)}{G_0 |G_0|}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Observemos que a equação (6.44) depende do sinal de G_0 e assim, temos dois casos a considerar: $G_0 > 0$ e $G_0 < 0$.

Consideremos a equação

$$\frac{\pi (\beta G_0^2 L_0^3 |G_0| + 1)}{G_0 |G_0|} = 0,$$

ou equivalentemente, a equação

$$\beta G_0^2 L_0^3 |G_0| + 1 = 0, \quad (6.45)$$

já que $G_0 \neq 0$. Observemos que se $L_0 > \frac{1}{\sqrt[6]{-\beta}}$ e $\beta < 0$ então existe uma solução positiva $G_0 = G_0^* = \frac{1}{L_0 \sqrt[3]{-\beta}}$ e uma solução negativa $G_0 = -G_0^*$. De fato, suponhamos primeiro que $G_0 > 0$. Assim,

$$\beta G_0^2 L_0^3 |G_0| + 1 = 0 \Rightarrow \beta G_0^3 L_0^3 + 1 = 0 \Rightarrow G_0^3 = -\frac{1}{L_0^3 \beta} \Rightarrow G_0 = \frac{1}{L_0 \sqrt[3]{-\beta}}. \quad (6.46)$$

Como $0 < G_0 < L_0$, segue que $\beta < 0$ e

$$\frac{1}{L_0 \sqrt[3]{-\beta}} < L_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{-\beta}} < L_0^2 \Rightarrow L_0 > \frac{1}{\sqrt[6]{-\beta}}.$$

Agora, suponhamos que $G_0 < 0$. Dessa forma,

$$\beta G_0^2 L_0^3 |G_0| + 1 = 0 \Rightarrow -\beta G_0^3 L_0^3 + 1 = 0 \Rightarrow G_0^3 = \frac{1}{L_0^3 \beta} \Rightarrow G_0 = \frac{1}{L_0 \sqrt[3]{\beta}}. \quad (6.47)$$

Como $G_0 < 0 < L_0$, segue que $\beta < 0$ e

$$\frac{1}{L_0 \sqrt[3]{\beta}} < L_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\beta}} < L_0^2 \Rightarrow L_0 > \frac{1}{\sqrt[6]{\beta}}.$$

Portanto,

$$\int_0^{T/2} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt = 0, \quad (6.48)$$

para tais condições acima.

Por outro lado, consideremos a equação (6.42) aplicada na solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$. Diferenciando-a (através do software Mathematica) em relação a δG utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta G} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right) &= \frac{1}{a^4 e^3 (e \cos E - 1)^6} \left(2G^2 \left(\cos E (e^2 \cos 2E + 8e^2 - 7e \cos E + 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4e^3 + e \right) + 2ae^2 (\cos E - e) (e \cos E - 1)^2 + a^4 \beta e^2 (\cos E - e) \right. \\ &\quad \left. (e \cos E - 1)^5 + a^3 \beta G^2 (e \cos E - 1)^3 \right. \\ &\quad \left. (\cos E (e^2 + 2e \cos E (e \cos E - 2) + 1) - e^3 + e) \right), \end{aligned} \quad (6.49)$$

onde $a = L^2$. Após isso, avaliemos (6.49) na condição inicial $\mathbf{Y}_0^j$ e integremos (usando o software Mathematica) na variável E de 0 a π , utilizando a transformação de coordenadas $t = L_0^3(E - e_0 \sin E)$. Feito isso e simplificando a expressão, obtemos

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \delta G} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} L_0^3(1 - e_0 \cos E) dE = \frac{\pi (\beta G_0^2 L_0^3 |G_0| - 2)}{G_0^2 |G_0|}. \quad (6.50)$$

Avaliando a última igualdade da expressão acima em $G_0 = \pm G_0^*$ obtemos

$$\frac{\pi (\beta G_0^2 L_0^3 |G_0| - 2)}{G_0^2 |G_0|} \Big|_{G_0 = \pm G_0^*} = 3\pi \beta L_0^3 \neq 0,$$

desde que $\beta \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe duas famílias 1-parâmetro (em ϵ) de condições iniciais

$$\mathbf{Y}_\epsilon^j = (0, j\pi/2, L_0 + \Delta L^{(j)}(\epsilon), \pm G_0^* + \Delta G^{(j)}(\epsilon)), \quad j = 1, 2,$$

onde $G_0^* = \frac{1}{L_0 \sqrt[3]{-\beta}}$, tal que cada uma delas nos dá uma solução periódica S_j -simétrica com período $T = 2\pi L_0^3$. Portanto, concluímos a prova do item (a).

Caso 2: $\alpha = 6$:

Para $\alpha = 6$, a função Hamiltoniana $\mathcal{H}_1$ é dada por

$$\mathcal{H}_1 = -(\beta r + \frac{1}{r^6}) = -\beta L^2(1 - e \cos E) - \frac{1}{L^{12}(1 - e \cos E)^6}. \quad (6.51)$$

Diferenciando (6.51) (usando o software Mathematica) pela regra da cadeia e utilizando a expressão (6.39) obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G} = G \left(\frac{\cos E}{e} \left(\frac{6}{(L^2 - L_0^2 e \cos E)^7} - \beta \right) + \sin^2 E + \left(\frac{\beta}{1 - e \cos E} - \frac{6}{L^{14}(e \cos E - 1)^8} \right) \right) \quad (6.52)$$

Agora, avaliando $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}$ na solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$ e fazendo $\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G} \left(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} = & G_0 \left(\frac{\cos E}{e_0} \left(\frac{6}{(L_0^2 - L_0^2 e_0 \cos E)^7} - \beta \right) + \sin^2 E \right. \\ & \left. + \left(\frac{\beta}{1 - e_0 \cos E} - \frac{6}{L_0^{14}(e_0 \cos E - 1)^8} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.53)$$

onde $e_0 = \sqrt{1 - G_0^2/L_0^2}$. Agora integraremos a equação (6.53) com respeito t . Para isso, utilizamos a mudança de coordenadas dada por (6.40). Assim, integrando E de $E = 0$ a $E = \pi$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} L_0^3(1 - e_0 \cos E) dE \\ &= \frac{\pi (8\beta G_0^{10} L_0^7 |G_0| - 210 G_0^2 L_0^2 + 15 G_0^4 + 315 L_0^4)}{8 G_0^9 L_0^4 |G_0|}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Notemos que a equação (6.54) depende do sinal de G_0 , dessa forma, temos dois casos a considerar: $G_0 > 0$ e $G_0 < 0$. Consideremos $G_0 > 0$ e a seguinte equação polinomial:

$$p_1(G_0) = 8\beta L_0^7 G_0^{11} + 15 G_0^4 - 210 G_0^2 L_0^2 + 315 L_0^4, \quad (6.55)$$

definida no intervalo $[0, L_0]$. Temos que $p_1(0) = 315L_0^4 > 0$ e $p_1(L_0) = 8\pi L_0^4(\beta L_0^{14} + 15)$. Assim, se $\beta < 0$ e $L_0 > \sqrt[14]{15/(-\beta)}$ então $p_1(L_0) < 0$. Logo, pelo Teorema do valor intermediário, existe pelo menos um ponto $G_0^* \in (0, L_0)$ tal que $p(G_0^*) = 0$. Portanto,

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt \Big|_{G_0 = G_0^*} = 0. \quad (6.56)$$

Agora, consideremos $G_0 < 0$, por (6.54) obtemos

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt = -\frac{\pi(-8\beta G_0^{11} L_0^7 - 210G_0^2 L_0^2 + 15G_0^4 + 315L_0^4)}{8G_0^{10} L_0^4}. \quad (6.57)$$

Portanto, $\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt = 0$ se, e somente se,

$$p_2(G_0) = -8\beta G_0^{11} L_0^7 + 15G_0^4 - 210G_0^2 L_0^2 + 315L_0^4 = 0,$$

no intervalo $[-L_0, 0]$. Segue que $p_2(0) = 315L_0^4 > 0$ e $p_2(-L_0) = 8\pi L_0^4(\beta L_0^{14} + 15)$. Dessa forma, se $\beta < 0$ e $L_0 > \sqrt[14]{15/(-\beta)}$ então $p_2(-L_0) < 0$. Assim, através do Teorema do valor intermediário, existe pelo menos um ponto $G_0^{**} \in (-L_0, 0)$ tal que $p(G_0^{**}) = 0$.

Portanto, concluímos que

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt \Big|_{G_0 = G_0^{**}} = 0.$$

Por outro lado, consideremos a equação (6.52) aplicada na solução $\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)$. Diferenciando-a (por meio do software Mathematica) com respeito a δG através da regra da cadeia e utilizando (6.39) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta G} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right) &= \frac{1}{a^8 e^3 (e \cos E - 1)^{10}} \left(6G^2 (\cos E (e^2 \cos 2E + 16e^2 - 11e \cos E + 1) \right. \\ &\quad \left. - 8e^3 + e) + a^8 \beta e^2 (\cos E - e) (e \cos E - 1)^9 + 6a e^2 (\cos E - e) \right. \\ &\quad \left. (e \cos E - 1)^2 + a^7 \beta G^2 (e \cos E - 1)^7 \right. \\ &\quad \left. (\cos E (e^2 + 2e \cos E (e \cos E - 2) + 1) - e^3 + e) \right), \end{aligned} \quad (6.58)$$

onde $a = L^2$. Após ter feito isso, avaliemos (6.58) na condição inicial $\mathbf{Y}_0^j$ e integremos na variável E , utilizando a mudança de coordenadas $t = L_0^3(E - e_0 \sin E)$. Integrando e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \delta G} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} L_0^3 (1 - e_0 \cos E) dE \\ = \frac{\pi (4\beta G_0^{10} L_0^7 |G_0| - 15 (3G_0^4 - 56G_0^2 L_0^2 + 105L_0^4))}{4G_0^{10} L_0^4 |G_0|}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Observemos que $3G_0^4 - 56G_0^2 L_0^2 + 105L_0^4 > 0$ desde que $|G_0| < L_0$. De fato, consideremos a função

$$f(G_0) = 3G_0^4 - 56G_0^2 L_0^2 + 105L_0^4,$$

definida em $[-L_0, L_0]$. Temos que

$$f(-L_0) = f(L_0) = 52L_0^4 > 0,$$

e

$$f''(G_0) = 42G_0^2 - 112L_0^2 < 0,$$

Logo segue o resultado. Dessa forma, temos

$$\frac{\pi (4\beta G_0^{10} L_0^7 |G_0| - 15 (3G_0^4 - 56G_0^2 L_0^2 + 105L_0^4))}{4G_0^{10} L_0^4 |G_0|} < 0,$$

desde que $\beta < 0$ e $0 < |G_0| < L_0$. Assim,

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \delta G} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}(\varphi_0(t, \mathbf{Y}^j)) \right) \Big|_{\mathbf{Y}^j = \mathbf{Y}_0^j} dt \neq 0. \quad (6.60)$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe duas famílias 1-parâmetro (em ϵ) de condições iniciais

$$\mathbf{Y}_\epsilon^k = (0, k\pi/2, L_0 + \delta L(\epsilon), G_0 + \delta G(\epsilon)), \quad k = 1, 2,$$

tal que cada uma delas nos dá uma solução periódica S_j -simétrica com período $T = 2\pi L_0^3$. Assim, concluimos a prova do item (b). $\blacksquare$

6.2 O problema de um disco não homogêneo com densidade de massa radial

As Galáxias espirais como, por exemplo, a NGC 4565 têm a aparência de discos voadores se observadas de lado (veja Figura 6.1); elas compõem um disco fino e plano, com uma protuberância volumosa de estrelas no centro que se expande acima e abaixo do disco.

Pressupõe-se que estas protuberâncias exerçam um papel essencial na evolução das galáxias e estimulem o aumento dos buracos negros supermassivos nos centros da maioria das espirais. Apesar de não haver muita clareza sobre este aspecto, ou seja, há necessidade de mais observações neste campo, estudos propõem que certas protuberâncias galácticas podem ser estruturas compostas complexas, ao invés de simples, com uma mescla de elementos esféricos, semelhantes a discos ou quadrados, que podem resultar em uma ampla série de formas de protuberâncias no universo.

De acordo com [35], se estivermos interessados em galáxias, podemos tentar modelar uma galáxia, em uma primeira aproximação, como um núcleo esférico central de densidade λ e raio a_1 , além de um disco circular com uma certa densidade radial $\lambda(R)$ e raio a_2 .

Podemos considerar o estudo do problema de atração gravitacional devido a um disco circular de dimensão finita, cuja densidade não seja uniforme, mas que varia somente em relação a variável radial. Na verdade, aqui vamos supor que a densidade é linear em relação a variável radial R e é dada por

$$\lambda(R) = \lambda_0 \left(1 - \kappa \frac{R}{a} \right), \quad \kappa < 1, \quad (6.61)$$



Figura 6.1: *Ilustração da Galaxia NGC 4565.* <https://science.nasa.gov/ngc-4565-galaxy-edge>

onde λ_0 é uma constante positiva e a é o raio do disco circular.

Desta forma, para seguir o modelo proposto por [35] é necessário primeiro estudar o potencial de um disco circular não homogêneo com densidade de massa dada por (6.61). Como uma primeira aproximação de um problema de uma galáxia, vamos estudar as soluções periódicas no problema de um disco com raio a e com densidade $\lambda(R)$.

6.2.1 Formulação do problema do movimento de uma partícula devido a força gravitacional do disco circular com densidade radial

A Lei Universal da Gravitação, formulada por Isaac Newton, descreve a magnitude da força gravitacional F entre dois corpos de massas m_1 e m_2 separados por uma distância r :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (6.62)$$

onde G é a constante gravitacional. Essa lei estabelece que qualquer objeto com massa exerce uma atração gravitacional proporcional à sua massa e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros de massa dos objetos.

Consideraremos a atração de uma partícula material P e um anel circular massivo $\mathcal{A}$ com raio a , densidade de massa radial $\lambda(R)$ e com centro de massa O no sistema euclidiano tridimensional $Oxyz$.

Para obter uma expressão para o campo gravitacional gerado pelo anel circular $\mathcal{A} = \{(R, \theta, 0); 0 \leq R \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ consideramos o seguinte procedimento. Imaginemos o anel massivo subdividido em sub-retângulos (polares) R_{ij} por meio da sub-divisão do intervalo $[0, a]$ em m subintervalos $[R_{i-1}, R_i]$ de comprimento $\Delta R = a/m = R_i - R_{i-1}$ e sub-divisão do intervalo $[0, 2\pi]$ em n subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ de comprimento $\Delta\theta = 2\pi/n = \theta_i - \theta_{i-1}$. Então

os círculos $r = r_i$ ($i = 1, \dots, m$) e as retas $\theta = \theta_j$ ($j = 1, \dots, n$) dividem o disco $\mathcal{A}$ em $m \cdot n$ sub-retângulos R_{ij} . Veja Figura 6.2.

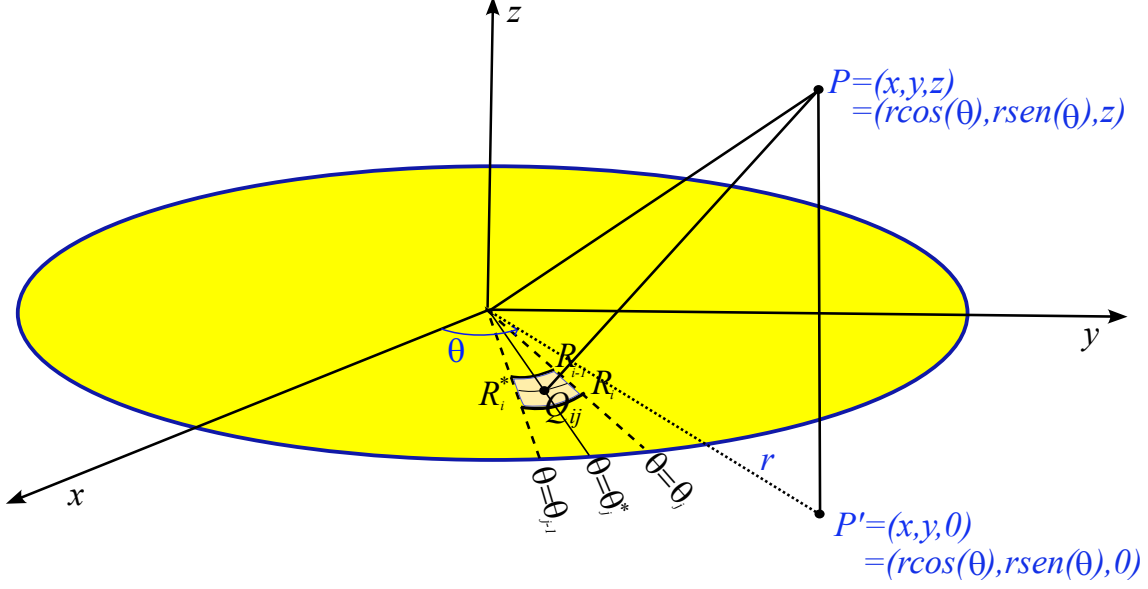


Figura 6.2: Esquemática do anel circular: A partícula localizada no ponto P sofre influência gravitacional do sub-retângulo R_{ij} que contém o ponto Q_{ij} .

Observe que cada sub-retângulo R_{ij} tem área igual a

$$A(R_{ij}) = \frac{1}{2} \Delta(R_i^2 - R_{i-1}^2). \quad (6.63)$$

Seja $Q_{ij} = (R_i^*, \theta_j^*, 0) = (\frac{R_i + R_{i-1}}{2}, \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}, 0) \in R_{ij}$. Desde que a função densidade $\lambda(R)$ é contínua e supondo que o retângulo R_{ij} seja suficientemente pequeno, a densidade não pode sofrer grandes variações em R_{ij} , e desta forma, vamos aproximar a densidade em R_{ij} pelo valor constante $\lambda^* = \lambda(R_i^*)$. Portanto a massa do sub-retângulo R_{ij} pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} M_{ij} &\approx \frac{1}{2} \Delta \theta (R_i^2 - R_{i-1}^2) \lambda(R_i^*) \\ &= \Delta \theta (R_i - R_{i-1}) \frac{R_i + R_{i-1}}{2} \lambda(R_i^*) \\ &= R_i^* \lambda(R_i^*) \Delta R \Delta \theta. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Seja $D_{ij} = \sqrt{(x - R_i^* \cos \theta_j^*)^2 + (y - R_i^* \sin \theta_j^*)^2 + z^2}$ a distância entre os pontos P e Q_{ij} . Pela lei de gravitação universal, a força agindo sobre a partícula P (massa m) pelo sub-retângulo R_{ij} (visto como uma partícula pontual de massa M_{ij}) pode ser aproximada por

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{m M_{ij}}{D_{ij}^3} (\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{P}),$$

onde estamos supondo que a constante de gravitação $G = 1$.

Portanto a força induzida pelo corpo massivo sobre a partícula pontual P é aproximada por

$$\mathbf{F} \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{m M_{ij}}{D_{ij}^3} (\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{P}).$$

Desde que $\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{P} = (R_i^* \cos \theta_j^* - x, R_i^* \sin \theta_j^* - y, -z)$ e tomando uma partição com o números de sub-retângulos R_{ij} tendendo ao infinito (ou equivalente, tomando $i, j \rightarrow \infty$) e desta maneira passando ao processo do limite, obtemos que as componentes da força Gravitacional $\mathbf{F}$ são dadas por

$$\begin{aligned} F_x &= \lim_{i,j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{m(R_i^* \cos \theta_j^* - x) \lambda(R_i^*) R_i^* \lambda(R_i^*) \Delta R \Delta \theta}{D_{ij}^3} = m \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(R \cos \theta - x)}{D^3} R \lambda(R) dR d\theta, \\ F_y &= \lim_{i,j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{m(R_i^* \sin \theta_j^* - y) \lambda(R_i^*) R_i^* \lambda(R_i^*) \Delta R \Delta \theta}{D_{ij}^3} = m \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(R \sin \theta - y)}{D^3} R \lambda(R) dR d\theta, \\ F_z &= \lim_{i,j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{-mz \lambda(R_i^*) R_i^* \lambda(R_i^*) \Delta R \Delta \theta}{D_{ij}^3} = -mz \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{D^3} R \lambda(R) dR d\theta. \end{aligned} \quad (6.65)$$

onde $D = \sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + z^2}$.

De acordo com a segunda lei de Newton, se $\mathbf{q} = (x, y, z)$ denota a posição da partícula P então devemos ter

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{F}.$$

Desta maneira, o potencial gravitacional da partícula $P = (x, y, z)$ atraída pela força gravitacional $\mathbf{F}$ associada ao anel $\mathcal{A}$ é dado por

$$V(x, y, z) = - \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{R \lambda(R) dR d\theta}{\sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + z^2}}. \quad (6.66)$$

Obs 6.1 Observe que na dedução acima, a função densidade somente necessita ser uma função contínua no intervalo $[0, a]$.

Em nossa aproximação vamos supor que o disco $\mathcal{A}$ está girando em torno de seu centro de massa com velocidade angular ω constante . Devido a simetria axial do problema, aqui é recomendando a introdução de um sistema de coordenadas sinoidal. Ou seja, se em um sistema inercial $OXYZ$ o disco $\mathcal{A}$ está situado sobre o plano XY com seu centro coincidindo com a origem O e efetua uma rotação uniforme com velocidade angular ω em torno do eixo OZ , definimos o sistema de eixo sinoidal $Oxyz$ definido por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ p_X \\ p_Y \\ p_Z \end{pmatrix}, \quad (6.67)$$

onde $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$. Desta forma, tomando em conta a fórmula da aceleração com respeito ao sistema móvel, a equação de movimento na forma vetorial de uma partícula no sistema móvel é

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{q} = -\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}), \quad (6.68)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y, z)$. Vamos supor que o disco gira com velocidade angular uniforme e unitária. Desta maneira, as componentes cartesianas da equação (6.68) são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = x - V_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = y - V_y \\ \ddot{z} = -V_z. \end{cases} \quad (6.69)$$

As equações de movimento (6.69) podem ser escritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com três graus de liberdade, dado pelo sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}}, \end{cases} \quad (6.70)$$

onde $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ é o momento conjugado e a função Hamiltoniana associada é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{R\lambda(R)dRd\theta}{\sqrt{(x - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2 + z^2}}. \quad (6.71)$$

O espaço de fase do sistema (6.70) é dado por

$$\Omega = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3); \mathbf{q} \notin \mathcal{A}\}, \quad (6.72)$$

e o espaço de configurações é $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}$.

O subespaço $U_2 = \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z); z = p_z = 0\}$ (plano xy) é um conjunto invariante pelo fluxo de (6.70). De fato, $z = 0$ and $p_z = 0$ implica que $\dot{z} = \dot{p}_z = 0$. Desta maneira, podemos considerar o sub-problema planar (plano equatorial). Mais precisamente, vamos considerar o problema de uma partícula $P = (x, y)$ contida no plano que contem o disco $\mathcal{A}$ de raio a , densidade radial $\lambda(R)$ dada por (6.61), cujo centro coincide com a origem do plano.

Desta maneira, vamos considerar o problema planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y, & \dot{p}_x &= p_y - \frac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{y} &= p_y - x, & \dot{p}_y &= -p_x - \frac{\partial V}{\partial y}; \end{aligned} \quad (6.73)$$

onde

$$V(x, y) = - \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0(1 - \frac{kr}{a})RdRd\psi}{\sqrt{(x - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2}}. \quad (6.74)$$

6.2.2 O problema como perturbação do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Desde que estamos interessados em analisar a existência de soluções periódicas simétricas no problema do disco não homogêneo com densidade radial, usando os resultados desenvolvidos nas seções anteriores, precisamos introduzir um parâmetro perturbador e descrever o problema como uma perturbação do problema de Kepler.

Considere a partícula infinitesimal no ponto $P' = (x, y)$ no plano xy com coordenadas polares (r, ϕ) e o ponto Q sobre o disco $\mathcal{A}$ cujas coordenadas polares são (R, θ) . Então a distância Δ de P' a Q é dada por

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2} = \sqrt{x^2 - 2xR \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta + y^2 - 2yR \sin \theta + R^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + R^2 - 2R(x \cos \theta + y \sin \theta)} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2R(r \cos \phi \cos \theta + r \sin \phi \sin \theta)} \\ &= \sqrt{r^2(1 + R^2/r^2 - 2Rr/r^2 \cos(\theta - \phi))} = r\sqrt{1 + R^2/r^2 - 2(R/r) \cos(\theta - \phi)}.\end{aligned}\tag{6.75}$$

Desta maneira temos que

$$\frac{1}{\sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/r^2 - 2(R/r) \cos(\theta - \phi)}}.\tag{6.76}$$

Se considerarmos $R/r < 1$ então a última expressão da equação (6.76) acima pode ser escrito em série de potenciais em termos de R/r da seguinte maneira.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2(R/r) \cos(\theta - \phi) + (R/r)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta - \phi)) \left(\frac{R}{r}\right)^n,\tag{6.77}$$

onde $P_n(x)$ é um polinômio de grau n em x denominado n -ésimo polinômio de Legendre. Veja tabela 6.1 com os polinômios de Legendre com grau até 5.

n	Polinômio de Legendre $P_n(x)$
0	$P_0(x) = 1$
1	$P_1(x) = x$
2	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Tabela 6.1: Polinômios de Legendre.

Podemos observar que como $R/r < 1$, segue que o ponto P' está no exterior da esfera com centro na origem e raio a . Isto significa que a partícula infinitesimal, deve ficar suficientemente afastada do disco circular, para que seja válida a expressão em série dada acima.

Usando a expressão para o potencial dada em (6.74) e as expressões dadas em (6.76) e (6.77) obtemos:

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= - \int_0^{2\pi} \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0 \left(1 - \frac{\kappa R}{a}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos(\theta - \phi)) dR d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^a \lambda_0 \left(1 - \frac{\kappa R}{a}\right) \left(\frac{R}{r} P_0(\cos(\theta - \phi)) + \frac{R^2}{r^2} P_1(\cos(\theta - \phi)) + \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos(\theta - \phi)) + \dots\right) dR d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^a \lambda_0 \left(1 - \frac{\kappa R}{a}\right) \left(\frac{R}{r} + \frac{R^2}{r^2} (\cos(\theta - \phi)) + \frac{R^3}{r^3} \left[\frac{1}{2}(3 \cos^2(\theta - \phi) - 1)\right] + \dots\right) dR d\theta \\
&= \lambda_0 \frac{\pi a^2 (-3 + 2\kappa)}{2r} + 0 + \lambda_0 \pi a^4 \frac{4\kappa - 5}{40r^3} + \mathcal{O}(a^6).
\end{aligned} \tag{6.78}$$

A massa do anel $\mathcal{A}$ é dada por $M = \int_0^a \int_0^{2\pi} \lambda(R) R dR d\theta = \frac{1}{3} \lambda_0 a^2 \pi (3 - 2\kappa)$. Desta forma $\lambda_0 = \frac{3M}{a^2 \pi (3 - 2\kappa)}$. Substituindo esta última expressão na equação (6.78), obtemos:

$$V(x, y) = -\frac{M}{r} - a^2 \frac{3M(4k - 5)}{40(2k - 3)r^3} + \mathcal{O}(a^4). \tag{6.79}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vamos introduzir o parâmetro perturbador $\epsilon = a^2$. Desta maneira, o problema planar do disco não homogêneo com densidade radial λ dada como em (6.61) é dado pela função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \epsilon \frac{C}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{6.80}$$

onde $C := \frac{3M(4k-5)}{40(2k-3)}$.

Definimos agora a mudança de coordenadas $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow M^{1/3}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}_x, \tilde{p}_y)$ a qual é $M^{-2/3}$ simplética. Então nas novas coordenadas a função Hamiltoniana (6.80) (após eliminar o til) se escreve como

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (xp_y - yp_x) - \epsilon \frac{C_1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{6.81}$$

onde $C_1 = \frac{C}{M^{5/3}}$.

Então, de acordo com a notação do capítulo 5, a função Hamiltoniana associado a equação (6.81) assume a forma

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon K_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{6.82}$$

onde

$$K_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (xp_y - yp_x)$$

e

$$K_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{C_1}{\|\mathbf{q}\|^3}. \tag{6.83}$$

6.2.3 Soluções periódicas simétricas no problema planar do disco não homogêneo girante

Nas variáveis de Delaunay a função Hamiltoniana (6.82) é escrita na forma

$$K(\ell, g, L, G, \epsilon) = -\frac{1}{2L^2} - G + \epsilon \frac{C_1}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.84)$$

Nas variáveis de Poincaré-Delaunay a função Hamiltoniana (6.82) é reescrita como:

$$K(Q_1, Q_2, P_1, P_2, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2} + \epsilon \frac{C_1}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.85)$$

Usando os resultados do capítulo 5, obtemos o seguinte resultado a respeito das soluções periódicas simétricas no problema (6.81).

Teorema 6.3 (Soluções periódicas próximas a círculos) *Dado $m \in \mathbb{N}$ e $p_1 \in \mathbb{R}^+$ escolhidos de forma conveniente. Então, para o problema do disco não homogêneo plano (6.85), obtemos os seguintes resultados:*

a) *Existem condições iniciais (dadas em nas variáveis PD), que dependem de ϵ , que dão origem a famílias de soluções periódicas S_1 -simétricas e S_2 -simétricas (mas não simultaneamente) próximas ao círculo com raio p_1^2 ; e com período $T = 2\pi m p_1^3 / (1 - p_1^3)$, desde que $p_1^3 / (1 - p_1^3) \notin \mathbb{Q}^+$.*

b) *Existem condições iniciais, que dependem de ϵ , que dão origem a famílias a 1-parâmetro de soluções periódicas dupla simétricas próximas ao círculo com raio p_1^2 ; e com período $T = 2\pi m p_1^3 / (1 - p_1^3)$, desde que $p_1^3 / (1 - p_1^3) \neq \frac{2k+1}{m}$ para todo $k, m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Aplicando o Teorema 5.1, obtemos condições iniciais que dependem de ϵ que dão origem às soluções S_1 -simétricas. Aplicando o Teorema 5.2, obtemos condições iniciais dependentes de ϵ que dão origem às soluções S_2 -simétricas. Finalmente, do Teorema 5.3, obtemos condições iniciais dependentes de ϵ que dão origem às soluções duplas simétricas. ■

Teorema 6.4 (Soluções periódicas próximas a elipses) *Dado $m \in \mathbb{N}$ e $L_0 \in \mathbb{R}^+$ escolhidos de maneira adequada. Então, para o problema do disco não homogêneo plano (6.84), obtemos o seguinte resultado:*

a) *Existem condições iniciais, que dependem de ϵ e de δG , que levam a famílias de soluções periódicas S_1 -simétricas e S_2 -simétricas (mas não simultaneamente) próximas a elipse com eixo maior L_0^2 ; e com período $\tau = \tau(\epsilon, \delta G)$ próximo a $T = 2\pi m L_0^3$, desde que $L_0^3 = k/m$ para algum $k \in \mathbb{N}$.*

b) *Existem condições iniciais, que dependem de ϵ e de δG , que levam a famílias de soluções periódicas dupla simétricas próximas a elipse com eixo maior L_0^2 ; e com período $\tau = \tau(\epsilon, \delta G)$ próximo a $T = 4\pi m L_0^3$, desde que $L_0^3 = 4k + 2/4m$ para algum $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Aplicando o Teorema 5.4, obtemos condições iniciais dependentes de ϵ que dão origem às soluções $\mathcal{S}_i$ -simétricas. Por último, aplicando o Teorema 5.5, obtemos condições iniciais dependentes de ϵ que dão origem às soluções duplas simétricas. ■

Capítulo 7

Apêndice

Neste capítulo iremos apresentar algumas expansões convergentes para as transformações simpléticas entre as coordenadas polares e as coordenadas de Poincaré-Delaunay para uma partícula infinitesimal.

7.0.1 A vizinhança de algumas soluções do problema de Kepler

Neste momento, vamos descrever uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler em PD-coordenadas. Como vamos utilizar os elementos orbitais clássicos, apresentaremos a seguir algumas definições e fórmulas que serão usadas para obter nossos resultados.

A anomalia excêntrica E é ângulo entre o perigeu e a projeção da posição q da partícula no círculo com raio igual ao semi-eixo maior da elipse. Este ângulo é medido no centro da elipse ou do círculo. Como vimos na seção 2.2 do Capítulo 2, temos a seguinte relação envolvendo a anomalia excêntrica:

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{f}{2}, \quad (7.1)$$

onde e é a excentricidade da elipse e f é a anomalia verdadeira. A distância entre a partícula, com posição q , e o centro da elipse é dada por

$$\|\mathbf{q}\| = a(1 - e \cos E). \quad (7.2)$$

Por sua vez, o ângulo θ é dado por

$$\theta = f + g, \quad (7.3)$$

onde o ângulo g , como vimos anteriormente, é o argumento do perigeu. Relacionamos a anomalia média ℓ com a anomalia excêntrica E através da seguinte equação:

$$\ell = E - e \sin E. \quad (7.4)$$

Agora, definimos a função

$$F(e) = -\ell + E(e) - e \sin E(e), \quad E(0) = \ell. \quad (7.5)$$

Observemos que

$$F'(e) = E'(e) - e \ell \sin E(e) E'(e) - \sin E(e) \Rightarrow F'(0) = E'(0) - \sin \ell, \quad (7.6)$$

e

$$\begin{aligned} F''(e) &= E''(e) + e(\sin E(e)E'(e) + e \cos E(e)E''(e)) - 2 \cos E(e)E'(e) \\ \Rightarrow F''(0) &= E''(0) - 2 \cos \ell E'(0), \end{aligned} \quad (7.7)$$

o que implica em

$$E'(0) = \sin \ell \quad \text{e} \quad E''(0) = 2 \cos \ell E'(0). \quad (7.8)$$

Assim, desenvolvendo a função $E(e)$ em séries de Taylor em torno de $e = 0$, temos que

$$\begin{aligned} E(e) &= E(0) + eE'(0) + \frac{e^2 E''(0)}{2!} + \mathcal{O}(e^3) \\ &= \ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Agora, vamos escrever a função

$$G(e) = e \cos E = e \cos(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3)) \quad (7.10)$$

em série de Taylor e também em torno de $e = 0$. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} G'(e) &= \cos(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3)) \\ &\quad - e \sin(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2)) \\ \Rightarrow G'(0) &= \cos \ell. \\ G''(e) &= -\sin(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2)) \\ &\quad - \sin(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2)) \\ &\quad - e \left(\cos(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2))^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e)) \right) \\ \Rightarrow G''(0) &= -2(\sin \ell)^2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Logo, segue que

$$e \cos E = 0 + e \cos \ell - e^2 (\sin \ell)^2 + \mathcal{O}(e^3). \quad (7.12)$$

Analogamente, desenvolveremos a função

$$F(e) = e \sin E = e \sin(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3)), \quad (7.13)$$

em série de Taylor em torno de $e = 0$. Com efeito, como

$$\begin{aligned}
F'(e) &= \sin(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3)) \\
&\quad + e \cos(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2)) \\
\Rightarrow F'(0) &= \sin \ell. \\
F''(e) &= \cos(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2)) \\
&\quad + \cos(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2)) \\
&\quad + e \left(-\sin(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(\sin \ell + 2e \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^2))^2 \right. \\
&\quad \left. + \cos(\ell + e \sin \ell + e^2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e^3))(2 \cos \ell \sin \ell + \mathcal{O}(e)) \right) \\
\Rightarrow F''(0) &= 2 \cos \ell \sin \ell.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Dessa forma, obtemos

$$e \sin E = 0 + e \sin \ell + e^2 \sin \ell \cos \ell + \mathcal{O}(e^3). \tag{7.15}$$

Agora, passaremos das coordenadas polares para PD-coordenadas. Uma vez que $Q_1 = \ell + g$, isolando ℓ , temos $\ell = Q_1 - g$. Além disso, como $Q_2 = -\sqrt{2(L-G)} \sin g$ e $P_2 = \sqrt{2(L-G)} \cos g$, então $\sqrt{Q_2^2 + P_2^2} = \sqrt{2(L-G)}$, logo, segue que

$$\sin g = -\frac{Q_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}} \quad \text{e} \quad \cos g = \frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}. \tag{7.16}$$

Já sabemos também que em PD-coordenadas a excentricidade e é dada por

$$e = \frac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L} = \frac{\sqrt{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}}{2P_1}.$$

Assim, em PD-coordenadas, podemos escrever

$$\begin{aligned}
e \cos \ell &= e \cos(Q_1 - g) = \cos(Q_1)e \cos(g) + \sin(Q_1)e \sin(g) \\
&= \cos(Q_1) \left(\frac{\sqrt{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}}{2P_1} \right) \left(\frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}} \right) \\
&\quad - \sin(Q_1) \left(\frac{\sqrt{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}}{2P_1} \right) \left(\frac{Q_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}} \right) \\
&= \left(\frac{P_2 \cos(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} \\
&\quad - \left(\frac{Q_2 \sin(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

e

$$\begin{aligned}
e \sin \ell &= e \sin(Q_1 - g) = \sin(Q_1)e \cos(g) - \cos(Q_1)e \sin(g) \\
&= \sin(Q_1) \left(\frac{\sqrt{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}}{2P_1} \right) \left(\frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}} \right) \\
&\quad + \cos(Q_1) \left(\frac{\sqrt{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}}{2P_1} \right) \left(\frac{Q_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}} \right) \\
&= \left(\frac{P_2 \sin(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} \\
&\quad + \left(\frac{Q_2 \cos(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)}.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Diante disso, temos que

$$\begin{aligned}
r = \|\mathbf{q}\| &= a(1 - e \cos E) \\
&= L^2(1 - e \cos \ell + (e \sin \ell)^2 + \mathcal{O}(e^3)) \\
&= P_1^2 \left(1 - \left(\frac{P_2 \cos(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} - \left(\frac{Q_2 \sin(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{P_2 \sin(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} + \left(\frac{Q_2 \cos(Q_1)}{2P_1} \right) \sqrt{4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2)} \right)^2 \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(e^3).
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Desenvolvendo $\|\mathbf{q}\|$ em série de Taylor, em torno de $Q_2 = 0$, $P_2 = 0$ e $P_1 = p_1$, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q}\| &= p_1^2 + \sqrt{p_1^3} Q_2 \sin Q_1 - \sqrt{p_1^3} P_2 \cos Q_1 + 2p_1(P_1 - p_1) + p_1 Q_2^2 \cos^2 Q_1 \\
&\quad + \frac{3}{2} \sqrt{p_1} Q_2 (P_1 - p_1) \sin Q_1 + 2p_1 Q_2 P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - p_1)^2 - \frac{3}{2} \sqrt{p_1} (P_1 - p_1) P_2 \cos Q_1 \\
&\quad + p_1 P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3),
\end{aligned}$$

onde $X = (\delta Q_2, \delta P_1, \delta P_2) = (Q_2, P_1 - p_1, P_2)$.

Bibliografia

- [1] Alberti A., *Dinâmica de uma Partícula Infinitesimal Atraída pela força Gravitacional de Corpos Maciços na Forma de anel ou Disco*, Tese de doutorado, Departamento de Matemática, UFPE, 2007.
- [2] Alberti, A., Periodic orbits and KAM tori in the generalized Anisotropic two-body problem under the Buckingham potential. Preprint (2023).
- [3] Alberti A. e Vidal C., Continuation of circular and elliptic orbits of the Kepler problem for different types of symmetric perturbations in the planar case and applications to gravitational potential of an axially symmetric body. Preprint.
- [4] Alberti A. e Vidal C., First Kind symmetric periodic solutions and their stability for the Kepler problem as anisotropic Kepler problem plus generalized anisotropic perturbations, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **58**, 103238 (2021).
- [5] Abouelmagd, E.I., Guirao, J.L.G. and Llibre, J., Periodic orbits for the perturbed planar circular restricted 3-body problem, *Discrete Cont. Dyn. Syst. Ser. B* **24** (2019), 1007-1020.
- [6] Barbosu, M., Mioc, V., Pasca, D. e Szenkovits, F., The two-body problem with generalized Lennard- Jones potential. *J. Math. Chem.* 49(9), 1961-1975 (2011).
- [7] Barrabés, E., Cors, J. M., e Pinyol, C., J_2 - Effect and elliptic inclined periodic orbits in the collision restricted three-body problem, *Journal Applied Dynamical Systems* **7**(1), 1–17 (2008).
- [8] Boccaletti, D. and Pucacco, G., *Theory of orbits*, **vol 1**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (2004).
- [9] Buckingham, R.A., The classical equation of state of gaseous helium. Neon and Argon, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences* 168, 264-283 (1938).
- [10] Cabral, H. e Vidal, C., *Introdução à Mecânica Celeste*. Recife: Notas de aula, 1999.
- [11] Cabral, H. e Vidal, C., Periodic solutions of symmetric perturbations of the Kepler problem, *J. Diff. Eqs.* **163** (2000), 76-88.

- [12] Diacu, F., Near-collision dynamics for particle systems with quasihomogeneous potentials, J. Diff. Eqn. 128 (1996), 58-77.
- [13] Diacu, F., Mioc V. and C. Stoica, Phase-space structure and regularization of Manev type problems, Nonlinear Analysis, 41, 1029-1055 (2000).
- [14] Frenkel, D., Smit, B., Understanding Molecular Simulation, 2nd edn. (Academic Press, San Diego, California, USA, 2002) .
- [15] Gutzwiller, M., The anisotropic Kepler problem in two dimensions, J. Math. Phys. 14, 139-152.
- [16] Gutzwiller, M., Bernoulli sequences and trajectories in the anisotropic Kepler problem, J. Math. Phys. 18, 806-823 (1977).
- [17] Jensen, F., Introduction to Computational Chemistry, 2nd edn. (Wiley, Hoboken, 2007).
- [18] Lennard-Jones, J.E., Cohesion. Proc. Phys. Soc. 43, 461-482 (1931).
- [19] McKinley, D., Pasca, D., Stoica, C., Notes on relative equilibria of isosceles molecules in classical approximation. J. Math. Phys. 60, 012901-012925 (2019).
- [20] Meyer K.R., Hall G.R., Offin D., *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N-Body Problem* third ed. in: Applied Mathematical Sciences, **90**, New York, (2017).
- [21] Palacián, J.F., Vidal, C., Vidarte, J. and Yanguas, P., Dynamics in the charged restricted circular three-body problem, *J. Dyn. Diff. Equat.* **30** (2018), 1757-1774.
- [22] Pasca, D.; Stoica C.; Valls C.; Anisotropic two-body problem under the Buckingham potential. *J. Math. Chem.* , **59** (2021), 1368–1377.
- [23] Pasca, D., Santoprete, M., Stoica, C., Escape dynamics in a collinear atomic-like three mass point systems. Phys. D 239(16), 1516-1526 (2010).
- [24] Pasca, D., Valls, C., Qualitative analysis of the anisotropic two-body problem with generalized Lennard- Jones potential. J. Math. Chem. 50(10), 2671-2688 (2012).
- [25] Pérez-Chavela E. and Vela-Arévalo, L.V., Triple collision in the quasihomogeneous collinear three-body problem, J. Diff. Eqn. 148, 186-211 (1998).
- [26] Price, S.L., Anisotropic atom-atom potentials. Philosoph. Magaz. B 73(1), 95-106 (1996).
- [27] Popescu, E., Equilibria and central configurations in a Buckingham type problem. Astrophys. Space Sci. 363, 10 (2018).
- [28] Pricopi, D., Popescu, E., Phase-space structure of the Buckingham's two-body problem. Astrophys. Space Sci. 361, 190 (2016).

- [29] Santoprete, M., Symmetric periodic solutions of the anisotropic Manev problem, *J. Math. Phys.* **43** (2002), 3207.
- [30] Siegel, C., Moser J., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York, (1971).
- [31] Stone, A.J., Price, S.L., Some new ideas in the theory of intermolecular forces: anisotropic Atom- Atom. *J. Phys. Chem* 92, 3325-3335 (1988).
- [32] Szebehely, V., *Theory of Orbits*, New York, Academic Press, (1967).
- [33] Vidal, C., Periodic solutions for any planar symmetric perturbation of the Kepler problem, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **80** (2001), 119-132.
- [34] Vidal, C., Periodic solutions of symmetric perturbations of gravitational problems, *J. Dynam. Differential Equations* **17**(1) (2005), 85-114.
- [35] Tatum, J.B.: (1976): *Celestial Mechanics*, <http://orca.phys.uvic.ca/~tatum/celmechs.html>.