



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Conjuntos finos e potencial não-linear de Wolff-Hedberg estacionário e parabólico

Edilson Pereira dos Santos Filho

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PROMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO PPG-UFS

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Edilson Pereira dos Santos Filho

Conjuntos finos e potencial não-linear de Wolff-Hedberg estacionário e parabólico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, vinculado a Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida

UFS – São Cristóvão
Março de 2024

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237s Santos Filho, Edilson Pereira dos
Conjuntos finos e potencial não-linear de Wolff-Hedberg
estacionário e parabólico / Edilson Pereira dos Santos Filho;
orientador Marcelo Fernandes de Almeida. – São Cristóvão, 2024.
142 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2024.

1. Teoria do potencial (Matemática). 2. Teoria das medidas. 3.
Teoria dos conjuntos. I. Almeida, Marcelo Fernandes de orient. II.
Título.

CDU 51

Edilson Pereira dos Santos Filho

Dissertation submitted to the Graduate Program in Mathematics, linked to the Federal University of Sergipe – in accordance with the requirements of the Graduate Program in Mathematics, for the degree of Master in Mathematics.

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida

UFS – São Cristóvão
March 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

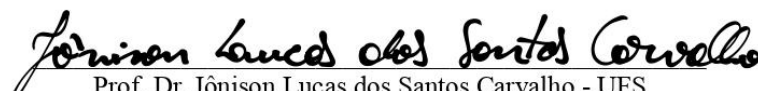
**Conjuntos finos e potencial não-linear de Wolff-Hedberg
estacionário e parabólico**

por

Edilson Pereira dos Santos Filho

Aprovada pela banca examinadora:


Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS
Orientador


Prof. Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira - UNICAMP
Segundo Examinador

São Cristóvão, 05 de Março de 2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais Dona Maisa e seu Edilson por sempre apoiarem e fortalecerem esta empreitada na matemática.

Agradeço a minha esposa Maria Paula por ter acreditado em mim em todos os momentos deste trabalho até mesmo naqueles em que eu mesmo não acreditei.

Agradeço a meu orientador professor e amigo Prof.Dr Marcelo Fernandes por todos esses anos de orientação profissional, pessoal e as portas que o senhor me abriu.

Agradeço aos meus amigos e colegas do PROMAT e DMA que tornaram esta labuta que em uma experiencia inesquecível obrigado a todos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

PEREIRA, EDILSON, DOS SANTOS. **Conjuntos finos e potencial não-linear de Wolff-Hedberg estacionário e parabólico**. 2024. 140 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2024.

Neste trabalho temos como objetivo demonstrar o critério de Wiener utilizando a noção de conjuntos finos para o potencial de Wolff, $W_{\alpha,q}$ e o potencial de Wolff parabólico $\dot{W}_{\Gamma^\alpha,q}$ associado ao núcleo de Riesz. Para isso, estudamos o conceito de capacidade associada a núcleos semi-contínuos inferiormente e positivos. Definimos o potencial não-linear de Havin-Mza'ya e em quais condições este admite medida capacitária. Provamos uma equivalência entre os potenciais de Wolff na forma contínua e na forma diádica para que pudéssemos demonstrar nosso primeiro objetivo. Em seguida nos perguntamos se poderíamos estender este resultado para a equação do calor. Utilizamos a solução fundamental do problema do calor, Γ como núcleo, que é semi-contínuo inferiormente e positivo. Definimos o núcleo Parabólico de Riesz Γ^α e mostramos que em certas condições este retorna a solução fundamental do problema do calor clássico. Provamos a equivalência entre os potenciais de Wolff na versão contínua e na versão diádica, só que agora associados ao núcleo parabólico de Riesz. Nosso segundo objetivo que era demonstrar a extensão do critério de Wiener utilizando a noção de conjuntos finos para o Potencial Wolff parabólico foi atingido. Além disso, este resultado resgata o resultado clássico de Evans e Gariepy, que demonstra o critério de Wiener para equação do calor.

Palavras-chave: Capacidade, Potencial não-linear, Potencial de Wolff, Conjuntos finos, Critério de Wiener, Potencial Parabólico, Medida capacitária, Núcleo de Riesz.

ABSTRACT

PEREIRA, EDILSON, DOS SANTOS. . 2024. 140 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2024.

In this work we have two goals, one of them is to demonstrate the Wiener criterion for Wolff's potential. The second one is to extend this result to the parabolic version of Wolff's potential, using the concept of thinn sets. To achieve that, we studied capacities associated with lower semi-continuous and positive kernels and defined the Havin-Mza'ya's non-linear potential and in which conditions it admits capacitary measures. After that, we demonstrated an equivalence between Havin-Mza'ya's non-linear potential and Wolff's potential. That equivalence was mandatory so we could accomplish our first goal. After fulfilling our first objective we started working on the parabolic case. We used the fundamental solutions for the heat equation as our lower semi-continuous and positive kernel in the capacity theory that we have developed in this work. We showed the Parabolic version of the Riesz Kernel and proved that it returns the fundamental solution of the heat equation, in certain conditions. Then, we defined the parabolic version of Wolff's potential associated with the parabolic Riesz's Kernel, demonstrated the equivalence between its continuous version and its diadic version. And finally, we were able to show our main duty, that it was to demonstrate the Wiener's criterion for the heat equation making use of the thinn sets theory and Wolff's potential. This same result returns the classical paper of Evans and Gariepy, where they showed the Wiener's criterion for the heat equation.

Keywords: Capacity, Non-linear potentials, Wolff's Potential, Thinn sets, Wiener's criterion, Parabolic Potential, Capacitary measure, Riesz's Kernel.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Caso estacionário	13
1.2	Caso parabólico	18
2	PRELIMINARES	25
2.1	Medidas de Radon e espaço de Lebesgue $L^p(d\mu)$	25
2.2	Semi-contiuidade	26
2.3	Capacidade	30
2.4	Convergência em Capacidade	32
2.5	Espaços uniformemente convexos	33
2.6	Potenciais de Riesz e Bessel	34
2.6.1	<i>Potenciais de Riesz</i>	34
2.6.2	<i>Potenciais de Bessel</i>	36
2.7	Espaço dos Potenciais de Bessel e Riesz	37
3	CAPACIDADE EM ESPAÇO DE LEBESGUE	39
3.1	A capacidade $\mathcal{C}_{K,p}$	39
3.2	Função e Potencial Capacitária	46
3.3	A capacidade dual de $\mathcal{C}_{K,p}$	49
3.4	A relação entre $\text{Cap}_{K,p}$ e $\mathcal{C}_{K,p}$	51
3.5	Potencial não-linear de Havin-Maz'ya	55
3.6	Relação entre Distribuições Capacitárias	58
4	CAPACIDADE DE BESSEL E POTENCIAL DE WOLFF	63
4.1	Capacidade de Bessel	63
4.2	Potencial de Wolff diádico	65
4.2.1	<i>Desigualdade de Wolff diádica para núcleos arbitrários</i>	66
4.2.2	<i>Desigualdade de Wolff - versão diádica</i>	73
4.3	Potencial e desigualdade de Wolff - versão contínua	74
5	CONJUNTOS FINOS E O CRITÉRIO DE WIENER	79
5.1	Conjuntos finos e potencial linear	79
5.2	Conjuntos finos e potencial de Havin-Maz'ya	81
5.3	Conjuntos finos e potencial de Wolff	82

5.4	Capacidade diádica de Bessel	85
5.4.1	Potencial Regularizado de Wolff-Hedberg	85
5.4.2	Medida extremal e capacitária	88
5.4.3	Caracterização de capacidade via potencial de Wolff	90
5.4.4	Medida extremal e capacitária para quaisquer conjuntos	92
5.5	Propriedade de Choquet	95
5.6	Caracterização de (α, q) -finos via potencial de Wolff	97
6	POTENCIAL DE WOLFF-HEDBERG PARABÓLICO	101
6.1	Critério de Wiener para a Equação do Calor	101
6.2	Espaços de Bessel e Riesz parabólicos	103
6.3	Potencial Parabólico de Riesz	103
6.4	Potencial parabólico de Havin-Maz'ya	106
6.5	Bola do calor parabólica fracionária e o potencial de Riesz	107
6.6	Potencial de Bessel Parabólico	108
6.7	Capacidades parabólicas e potenciais não-lineares	111
6.8	Medida capacitária do potencial não-linear parabólico	115
7	POTENCIAL DIÁDICO DE WOLFF PARABÓLICO	117
7.1	Retângulos diádicos	117
7.2	Potencial diádico de Wolff parabólico	119
7.3	Energia Parabólica	122
8	CONJUNTOS FINOS NO CASO PARABÓLICO	125
8.1	Medida Capacitária parabólica	125
8.2	O critério de Wiener versão parabólica	131
	REFERÊNCIAS	137

INTRODUÇÃO

1.1 Caso estacionário

O critério de Wiener é um resultado primordial no estudo de regularidade para o problema de Dirichlet. Demonstrado no trabalho, (WIENER, 1924), este resultado é o objeto central deste trabalho. Mais precisamente: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado com fronteira de classe C^k . Dizemos que $x \in \partial\Omega$ é um ponto regular para o problema de Dirichlet da equação de Laplace em Ω , se existe $f \in C(\partial\Omega)$ tal que o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sobre } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

tem solução. Dizemos que $x \in \partial\Omega$ é um ponto irregular para o problema (1.1), se existe $f \in C(\partial\Omega)$, mas o problema (1.1) não tem solução. Neste caso, dizemos que o conjunto $\Omega^c = \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ é um conjunto fino em x . O conceito de conjuntos finos é uma forma de generalizar a noção do conjunto dos pontos irregulares do Problema de Dirichlet. O conceito de conjuntos finos foi proposto por Brelot, veja (BRELOT, 1944). Mas antes de dizer o que são conjuntos finos para o nosso contexto precisamos falar sobre capacidade. No capítulo 3 nos baseamos no trabalhos de (MEYERS, 1970) e no livro (AIKAWA; ESSÉN, 2006) acerca da teoria de capacidades associadas a núcleos K semi-contínuos inferiormente positivos, que são definidos como

$$\mathcal{C}_{K,p}(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu(x) : f \geq 0, (T_K f)(x) \geq 1 \text{ em } A \right\}, \quad (1.2)$$

onde $A \subset \mathbb{R}^d$, μ é uma medida de Radon com suporte em A e $T_K f$ denota o potencial de f associado a um núcleo K ,

$$(T_K f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.3)$$

Mostramos que as capacidades associadas ao núcleo K são capacidades de Choquet, no sentido da Definição 2.3.2. A capacidade dual de $\mathcal{C}_{K,p}$ é definida por

$$\text{Cap}_{K,p}(A) = \sup\{\nu(A) : \nu \text{ está concentrada em } A, \|(\overset{\vee}{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \leq 1\}, \quad (1.4)$$

onde $1/p + 1/q = 1$ e $\overset{\vee}{T}_K \nu$ denota o operador

$$\overset{\vee}{T}_K \nu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) d\nu(x), \quad (1.5)$$

para toda medida de Radon não negativa $\nu \in \mathcal{M}^+$. O termo capacidade dual é usado em razão do seguinte resultado $[\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{\frac{1}{p}} = \text{Cap}_{K,p}(A)$ (veja Teorema 3.4.1). Para apresentar outro resultado relevante, deixe-nos definir uma noção de potencial $V_{K,p}$ não-linear Havin-Maz'ya associado a um núcleo K . Este potencial é definido por:

$$(V_{K,p}\nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) [(\overset{\vee}{T}_K \nu)(y)]^{q-1} dy,$$

para toda medida $\nu \in \mathcal{M}^+(A)$. Usando a noção de medida capacitária associada para o potencial de Havin-Maz'ya (veja Definição 3.5.1) e o conceito de ponto de sela para energia (veja Seção 3.6), no Teorema 3.5.2 caracterizamos a capacidade $\mathcal{C}_{K,p}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{C}_{K,p}(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{M}^+(A) \text{ e } (V_{K,p}\mu) \leq 1 \text{ no } \text{spt}(\mu)\}. \quad (1.6)$$

Esta caracterização foi crucial para compararmos a capacidade parabólica com a capacidade térmica associada ao núcleo de Riesz parabólico e consequentemente a capacidade clássica do calor. Estes são alguns dos resultados, mais importantes, do Capítulo 3. Considerando $K = G_\alpha$ o núcleo de Bessel, a capacidade $\mathcal{C}_{K,q}$ tem a forma

$$C_{\alpha,q}(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q dx : g \geq 0, (G_\alpha * g)(x) \geq 1 \text{ para todo } x \in A \right\}, \quad (1.7)$$

para todo $0 < \alpha < n$ e $1 < q \leq d/\alpha$. Desta forma, dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ é $(\alpha, 2)$ -fino em $x_0 \in \mathbb{R}^d$, se uma das alternativas são verdadeiras:

(i) Seja $B_r(x)$ uma bola aberta e $x \in \mathbb{R}^d$, então

$$\int_0^1 \frac{C_{\alpha,2}(A \cap B_r(x))}{r^{d-2\alpha}} \frac{dr}{r} < \infty. \quad (1.8)$$

(ii) Existe $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ tal que

$$G_{2\alpha} * \mu(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} G_{2\alpha} * \mu(x). \quad (1.9)$$

Duas importantes propriedades são derivadas destas definições, a saber,

- (i) $C_{\alpha,2}(e_{\alpha,2}(A) \cap A) = 0$ para todo $A \subset \mathbb{R}^d$.
- (ii) Para qualquer $A \subset \mathbb{R}^d$ e todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto G tal que $e_{\alpha,2}(A) \subset G$ e $C_{\alpha,2}(A \cap G) < \varepsilon$,

onde $e_{\alpha,2}(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : A \text{ é } (\alpha, 2)\text{-fino em } x\}$. Estas propriedades são chamadas de Propriedades de Kellogg e de Choquet, respectivamente. Agora considere $A = \Omega^c$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave. O critério de Wiener afirma o seguinte:

Teorema 1.1.1 (Critério de Wiener). *Seja $d > 2$. Um ponto $x \in \partial\Omega$ é regular para o problema de Dirichlet se, e somente se,*

$$\int_0^1 \frac{C_{1,2}(\Omega^c \cap B_r(x))}{r^{d-2}} \frac{dr}{r} = \infty.$$

Perceba que o Teorema 1.1.1 caracteriza pontos irregulares na fronteira de $\partial\Omega$ associado ao problema de Dirichlet (1.1). Como podemos notar, a definição de conjuntos finos estende a ideia de conjuntos irregulares do problema (1.1).

Nosso primeiro objetivo, neste trabalho, é estender o critério de Wiener para o caso não-linear $q \neq 2$ tal que $1 < q \leq \frac{d}{\alpha}$ para todo $0 < \alpha < d$. Para isto vamos usar noções de conjunto (α, q) -fino de um ponto x . Uma primeira tentativa seria utilizar esta noção associada ao potencial não-linear de Havin-Maz'ya, $V_{\alpha,q}\mu := V_{G_{\alpha,q}}\mu$. Neste caso, dizemos que um conjunto é (α, q) -fino em $x_0 \in \mathbb{R}^d$, quando uma das alternativas a seguir são verdadeiras:

- (i) Existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ tal que

$$(V_{\alpha,q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (V_{\alpha,q}\mu)(x).$$

- (ii) Existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ tal que $V_{\alpha,q}\mu$ é limitado e

$$(V_{\alpha,q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (V_{\alpha,q}\mu)(x).$$

Uma outra noção de conjunto (α, q) -fino em x_0 é descrita de acordo a seguinte definição.

- (iii) Dizemos que A é (α, q) -fino de x_0 , se $\alpha q \leq d$ e tem-se

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty$$

para todo $1/p + 1/q = 1$, $0 < \alpha < d$ e $1 < q < \infty$. O ideal seria que as três definições acima fossem equivalentes, como ocorre no caso linear $q = 2$, isto faria com que tivéssemos uma definição ótima para conjuntos (α, q) -finos. Infelizmente, estas equivalências são verdadeiras

somente para o caso $2 - \frac{\alpha}{d} < q \leq \frac{d}{\alpha}$. Pois a estimativa (veja (HEDBERG, 1972) e (ADAMS; MEYERS, 1972))

$$A_1 \int_0^\infty \left(\frac{\mu(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} e^{-b_1 \delta} \frac{d\delta}{\delta} \leq (V_{\alpha,q}\mu)(x) \leq A_2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} e^{-b_2 \delta} \frac{d\delta}{\delta}, \quad (1.10)$$

é verdadeira somente para $q > 2 - \frac{\alpha}{d}$. E para o caso $1 < q \leq 2 - \frac{\alpha}{d}$, a segunda desigualdade (1.10) é falsa. Para contornar estas dificuldades, fixamos a noção de conjuntos (α, q) -finos em x segundo o item (iii) e usando o potencial não-linear de Wolff-Hedberg $W_{\alpha,q}$ definido por:

$$(W_{\alpha,q}\mu)(x) := \int_0^1 \left(\frac{\mu(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta}, \quad 1 < q \leq \frac{d}{\alpha} \quad (1.11)$$

provamos que (iii) é equivalente (ii) substituindo $V_{\alpha,p}$ por $W_{\alpha,q}$. Para demonstrar este resultado precisamos introduzir a versão diádica do potencial de Wolff, a saber,

$$(\dot{W}_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu)(x) = \sum_{Q \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(Q)}{\ell^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x) \quad \text{e} \quad (W_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu)(x) = \sum_{\ell_Q \leq 1} \left(\frac{\mu(Q)}{\ell^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x) \quad (1.12)$$

bem como os conceitos de energia não-linear de uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+$

$$\dot{E}_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{I}_\alpha^\mathcal{D}\mu|^p dx \quad \text{e} \quad E_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{J}_\alpha^\mathcal{D}\mu|^p dx, \quad (1.13)$$

onde $\mathbf{I}_\alpha^\mathcal{D}$ e $\mathcal{J}_\alpha^\mathcal{D}$ denota as versões diádicas dos potenciais de Riesz e Bessel, respectivamente. Na Seção 4.2.2 mostramos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.2 (Desigualdade diádica de Wolff). *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+$ e $1 < q < \infty$. Se $0 < \alpha < d/q$, então*

$$\dot{E}_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^d} (\dot{W}_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu) d\mu. \quad (1.14)$$

Além disso, se $0 < \alpha \leq d/q$ então

$$E_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^d} (W_{\alpha,q}^\mathcal{D}\mu) d\mu. \quad (1.15)$$

Uma consequência do resultado anterior são as famosas desigualdades de Wolff (veja seção 4.3) descritas pelo teorema abaixo.

Teorema 1.1.3 (Desigualdade de Wolff). *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ e $1 < q < \infty$.*

(i) *Se $q = p'$ e $1 < q < d/\alpha$, então*

$$\dot{E}_{\alpha,q}\mu \simeq \int (\dot{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu. \quad (1.16)$$

(ii) Se $q = p'$ e $1 < q \leq d/\alpha$, então

$$E_{\alpha,q}\mu \simeq \int (W_{\alpha,q}\mu) d\mu. \quad (1.17)$$

Os teoremas acima nos permite utilizar uma definição equivalente dos funcionais

$$\mathcal{E}_{\alpha,q}\mu := \int (W_{\alpha,q}\mu) d\mu \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}\mu := \int (W_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}\mu) d\mu$$

como a energia não-linear de uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}^+$. E, assim, desenvolver uma teoria de potencial não-linear via o conceito de energia. De fato, para desenvolver um paralelo a teoria de capacidade apresentada no capítulo 3, precisaremos regularizar $W_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}\mu$ para torna-lo uma função semi-contínua inferiormente em $\mathbb{R}^d$. Para isto, seja $Q \in \mathcal{D}$ um cubo diádico e seja φ_Q uma função de corte do cubo Q tal que $\mathbb{1}_Q \leq \varphi_Q \leq \mathbb{1}_{\tilde{Q}}$. O potencial não-linear diádico e regularizado de Wolff, associado a núcleo de Bessel G_α , é definido por:

$$(\mathcal{W}\mu)(x) = \sum_{\ell_Q \leq 1} \left(\ell_Q^{\alpha q - d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_Q d\mu \right)^{p-1} \varphi_Q(x) \quad (1.18)$$

e sua energia regularizada de $\mu \in \mathcal{M}^+$ é definida por

$$\mathcal{E}\mu = \int (\mathcal{W}\mu) d\mu. \quad (1.19)$$

Portando, definimos a capacidade diádica $C = C_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}$ de um conjunto compacto K por:

$$[C(K)]^{1/q} = \sup\{\mu(K); \mu \in \mathcal{M}^+(K), \mathcal{E}\mu \leq 1\}. \quad (1.20)$$

Claro, usando a noção de capacidade exterior e interior, podemos estender esta capacidade diádica para quaisquer conjuntos. Note que as energias $\mathcal{E}\mu$ e $E_{\alpha,q}\mu$ são equivalentes (veja Lema 5.4.1), portanto as capacidades C e $C_{\alpha,q}$ são equivalentes. Na Seção 5.4 apresentamos uma teoria não-linear para a capacidade $C_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}$ em que essencialmente substituímos o potencial de Havin-Mazya $V_{\alpha,q}$ pelo potencial diádico de Wolff regularizado. Por exemplo, seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto qualquer tal que $0 < C(A) < \infty$. Então obtemos as seguintes caracterizações

$$C(A) = \inf\{\mathcal{E}(\mu) : \mu \in \mathcal{M}^+, (\mathcal{W}\mu)(x) \geq 1 \text{ C - a.e em } A\}.$$

E, além disso, temos que

$$C(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{M}^+(A), (\mathcal{W}\mu)(x) \leq 1 \forall x \in \text{spt}(\mu)\}.$$

Para demonstrar estes dois resultados foi crucial utilizar que o espaço de Lebesgue L^p é uniformemente convexo e utilizar as desigualdades de Clarkson.

Agora, vamos fixar o conceito de conjunto (α, q) -fino em x_0 conforme a definição:

Definição 1.1.1 (Conjunto (α, q) -fino em x_0). *Seja $1 < q = p' < \infty$ e $0 < \alpha < d$, $d > 2$. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ é (α, q) -fino em x_0 , com respeito a capacidade $C_{\alpha, q}$, se $\alpha q \leq d$ e*

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha, q}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty$$

e denote por $e_{\alpha, q}(A)$ o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^d$ tal que A é (α, q) -fino em x .

Na seção 5.5 demonstramos a famosa propriedade de Choquet para $e_{\alpha, q}(A)$, a saber, para qualquer $A \subset \mathbb{R}^d$ e $\varepsilon > 0$ existe um aberto G tal que

$$e_{\alpha, q}(A) \subset G \text{ e } C_{\alpha, q}(A \cap G) < \varepsilon.$$

Em particular, temos a propriedade de Kellogg. Finalmente, na Seção 5.6 mostramos que a Definição 1.1.1 é equivalente a

$$(W_{\alpha, q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (W_{\alpha, q}\mu)(x).$$

Mais precisamente, provamos o seguinte resultado:

Teorema 1.1.4. *Seja $\alpha > 0$ e $1 < q \leq \frac{d}{\alpha}$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ é (α, q) -fino em x_0 se, e somente se, existe $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ tal que*

$$(W_{\alpha, q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (W_{\alpha, q}\mu)(x).$$

1.2 Caso parabólico

Somente 60 anos após a publicação do Critério de Wiener que Evans e Gariepy demonstraram, veja (EVANS; GARIEPY, 1982), um resultado análogo foi obtido para o problema de Dirichlet da equação do calor. Mais precisamente, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um conjunto aberto e limitado e denote por $\partial\Omega$ sua fronteira. Dizemos que $u \in C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$ é a *temperatura* de Ω , se $Hu := (\partial_t - \Delta)u = 0 \forall X = (x, t) \in \Omega$. E dizemos que um conjunto aberto e limitado $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é *regular*, se $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função contínua especificada, então existe uma temperatura H_f^U de U tal que

$$\lim_{\substack{Y \rightarrow X \\ Y \in U}} H_f^U(Y) = f(X) \quad \text{para todo } X \in \partial U. \quad (1.21)$$

Agora seja $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ uma função dada. A solução do problema de Dirichlet do calor

$$Hu = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad u = f \quad \text{em } \partial\Omega \quad (1.22)$$

é definida por:

$$H_f^\Omega(X) = \inf\{u(X)\}, \quad \text{para cada } X \in \Omega \quad (1.23)$$

com ínfimo considerado sobre todas supertemperaturas u , veja (EVANS; GARIEPY, 1982), de Ω tal que

$$\liminf_{\substack{Y \rightarrow X_0 \\ Y \in \Omega}} H_f^U(Y) \geq f(X_0) \quad \text{para todo } X_0 \in \partial U. \quad (1.24)$$

Pode ocorrer que a temperatura H_f^Ω não convirja continuamente para um valor prescrito na fronteira $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Então, é natural, definir $X_0 \in \partial\Omega$ como um *ponto regular* de Ω , se

$$\lim_{\substack{Y \rightarrow X_0 \\ Y \in \Omega}} H_f^U(Y) = f(X_0) \quad \text{para todo } f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}). \quad (1.25)$$

Similarmente a abordagem de Wiener, os autores Evans e Gariepy apresentaram uma caracterização de pontos regulares na fronteira para o problema de Dirichlet do calor. De fato, seja

$$\Gamma(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{se } t > 0. \\ 0, & \text{se } t \leq 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

a solução fundamental da equação do calor. A bola do calor é definida por

$$\Omega_r(x, t) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : \Gamma(x - y, t - s) > (4\pi r)^{-d/2}\}. \quad (1.27)$$

Para $k \in \mathbb{N}$ denote por $\Omega_k(x, t) = \Omega_{2^{-k}}(x, t)$ e defina o anel $A_k(x, t) := \overline{\Omega_k(x, t)} \setminus \overline{\Omega_{k+1}(x, t)}$. Note que a bola do calor está entre os níveis $\Omega_k(x, t)$ e $\Omega_{k+1}(x, t)$. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$, o potencial do calor de μ é definido pelo operador

$$(\Gamma\mu)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma(x - y, t - s) d\mu(y, s). \quad (1.28)$$

Dado $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um conjunto compacto, defina a capacidade térmica por:

$$\text{Cap}^\mathcal{T}(K) := \sup\{\mu(\mathbb{R}^{d+1}) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), (\Gamma\mu)(x, t) \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^{d+1}\}, \quad (1.29)$$

Teorema 1.2.1 ((EVANS; GARIEPY, 1982)). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um conjunto aberto e limitado. Um ponto $X_0 \in \partial\Omega$ é regular para o problema de Dirichlet (1.22) se, e somente se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{dk/2} \text{Cap}^\mathcal{T}(\Omega^c \cap A_k(x, t)) = \infty. \quad (1.30)$$

Passado 6 anos, o Teorema 1.2.1 foi estendido para equações parabólicas com coeficientes variáveis por (GAROFALO; LANCONELLI, 1988). O conceito de conjunto fino para o problema de Dirichlet (1.1), proposto por Brelot em (BRELOT, 1944), foi estendido para o problema de

Dirichlet do calor (1.22) por (BRZEZINA, 1990). Além disso, este autor estendeu o Teorema 1.2.1 para conjuntos de Borel. Mais precisamente,

Teorema 1.2.2 (Miroslav Brzezina (BRZEZINA, 1990)). *Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um boreliano. Então A é fino em (x, t) se, e somente se,*

$$\int_0^1 \text{Cap}_E^T(A \cap \Omega_r(x, t)) r^{d/2+1} dr < \infty, \quad (1.31)$$

onde Cap_E^T denota a capacidade térmica exterior, veja (2.6).

Motivados por estes resultados e introduzindo uma definição apropriada de conjunto finos no sentido parabólico, nos perguntamos se podemos desenvolver uma teoria não linear a luz do caso estacionário dado pelo Teorema 1.1.4. Se a resposta for positiva, estão teríamos uma nova abordagem para caracterizar os conjuntos finos no caso parabólico e consequentemente uma abordagem nova para o critério de Wiener, mesmo no caso linear $q = 2$. Tendo isto em mente, observe que a solução fundamental do calor é semi-contínua inferiormente e positiva em $t > 0$. Desta forma, este núcleo se encaixa nas hipóteses do núcleo estudado no capítulo 3 à luz do trabalho de (MEYERS, 1970) e (AIKAWA; ESSÉN, 2006). Além disso, sabendo que a equação do calor

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^{d+1} \quad (1.32)$$

possui o seguinte “scaling” $X \mapsto \delta_\lambda(X) := (\lambda x, \lambda^2 t)$, precisamos considerar uma métrica $\mathbf{d}$ em $\mathbb{R}^{d+1}$ de forma que $\|\delta_\lambda(X)\| = \lambda \|X\|$. Para isto, sejam $X = (x, t)$ e $Y = (y, s)$ uma métrica em $\mathbb{R}^{d+1}$ definida pela equação

$$\mathbf{d}(X, Y) = |x - y| + |t - s|^{1/2}, \quad (1.33)$$

torna $(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbf{d})$ em um espaço homogêneo cuja a dimensão é dada por $d_H = d + 2$. Inspirados nos trabalhos de (SAMPSON, 1968) e (BAGBY, 1971), se $0 < \alpha < d_H$ então a versão parabólica do núcleo de Riesz é dada pela equação

$$\Gamma^\alpha(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} t^{-\frac{d_H - \alpha}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Perceba que Γ^2 é a solução fundamental do calor (1.26). Definimos também a versão parabólica do núcleo de Bessel, veja Lema 6.6.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$, a capacidade associada ao núcleo parabólico de Riesz é definida por

$$C_{\Gamma^\alpha, q}(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |f|^q dx dt : f \in \dot{\Omega}_A \right\}, \quad (1.35)$$

onde Ω_A denota o conjunto

$$\dot{\Omega}_A = \{f : f \in L^q_+(\mathbb{R}^{d+1}, dxdt), \Gamma^\alpha * f \geq \mathbf{1}_A\}.$$

e o potencial parabólico de Riesz

$$(\Gamma^\alpha \mu)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(x - y, t - s) d\mu(y, s), \quad 0 < \alpha < d_H. \quad (1.36)$$

Uma pergunta natural: a capacidade $C_{\Gamma^\alpha, q}$ é comparável com a capacidade térmica Cap^T ? No Teorema 6.8.1(iii), mostramos que se $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é compacto então

$$C_{\Gamma^\alpha, q}(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), (V_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) \leq 1, \forall X \in \text{spt}(\mu)\}, \quad (1.37)$$

onde $V_{\Gamma^\alpha, q}\mu$ denota a versão parabólica do potencial de Havin-Maz'ya. Como

$$(V_{\Gamma^\alpha, 2}\mu)(X) = \frac{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\alpha/2)^2}{\Gamma(\alpha)} (\Gamma^{2\alpha} \mu)(X).$$

Portanto, $C_{\Gamma, 2}(K) = \text{Cap}^T(K)$. Outra questão natural é como definir o potencial não-linear de Wolff na sua versão parabólica. Para sentir qual seria a definição natural, mostramos (veja Lema 6.5.1) que

$$(\Gamma^\alpha \mu)(X) = \int_0^\infty \frac{\mu(\Omega_r^\alpha(X))}{r^{\frac{(d_H - \alpha)}{2}}} \frac{dr}{r}, \quad 0 < \alpha < d_H, \quad (1.38)$$

onde Ω_r^α denota a bola do calor fracionária

$$\Omega_r^\alpha(x, t) = \{(y, s) : \Gamma^\alpha(x - y, t - s) > c_\alpha r^{-\frac{d_H - \alpha}{2}}\} \quad (1.39)$$

Inspirados na caracterização (1.38), definimos o potencial de Wolff parabólico associado ao núcleo de Riesz Γ^α por:

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(x, t) = \int_0^\infty \left(\frac{\mu(\Omega_\delta^\alpha(x, t))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta}, \quad \alpha q < d_H,$$

onde $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$. E sua versão diádica é definida por

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}\mu)(X) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \mathbf{1}_R(X), \quad (1.40)$$

onde $\mathcal{D} = \cup_j \mathcal{D}_j$ e $R_j \in \mathcal{D}_j$ denota o retângulo diádico no espaço homogêneo $(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbf{d})$ que nasce da composição entre a dilatação $\delta_{2^{-j}}(X) = (2^{-j}x, 4^{-j}t)$ e translação inteira $m \in \mathbb{Z}^{d+1}$ do

cubo unitário semi-aberto $[0, 1)^d \times [0, 1)$, ou seja,

$$\mathcal{D}_j = \left\{ \delta_{2^{-j}}([0, 1)^{d+1} + m) : m \in \mathbb{Z}^{d+1}, j \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (1.41)$$

A energia diádica parabólica associada ao núcleo de Riesz é definida por

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\Gamma_{\mathcal{D}}^\alpha \mu|^p dx dt, \quad (1.42)$$

onde $(\Gamma_{\mathcal{D}}^\alpha \mu)(X) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\ell_R^{\frac{\alpha-d_H}{2}} \mu(R) \right) \mathbb{1}_R(X)$ denota o núcleo de Riesz parabólico diádico. Nosso primeiro teorema, fundamental para desenvolver uma abordagem não-linear de conjuntos finos parabólicos ou critério de Wiener, é o seguinte:

Teorema 1.2.3. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ e $1 < q < \infty$.*

(i) *Se $q = p'$ e $\alpha > 0$ satisfaz $1 < q < \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}} \mu) d\mu. \quad (1.43)$$

(ii) *Se $q = p'$ e $\alpha > 0$ satisfaz $1 < q \leq \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$E_{\mathcal{G}^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (W_{\mathcal{G}^\alpha, q}^{\mathcal{D}} \mu) d\mu. \quad (1.44)$$

E sua versão contínua.

Teorema 1.2.4. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\alpha > 0$.*

(i) *Se $q = p'$ e $1 < q < \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q} \mu) d\mu. \quad (1.45)$$

(ii) *Se $q = p'$ e $1 < q \leq \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$E_{\mathcal{G}^\alpha, q}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (W_{\mathcal{G}^\alpha, q} \mu) d\mu. \quad (1.46)$$

Estes teoremas foram fundamentais para introduzir a capacidade diádica parabólica regularizada via o funcional energia regularizada

$$\dot{\mathcal{E}}\mu := \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{\mathcal{W}}\mu) d\mu := \sum_{R \in \mathcal{D}} \ell_R^{\frac{\alpha q - d_H}{2}(p-1)} [\mu(\varphi_R)]^p. \quad (1.47)$$

Da fato, a capacidade diádica parabólica de um compacto $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é definida por:

$$[\dot{\mathcal{C}}(K)]^{\frac{1}{q}} = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), \dot{\mathcal{C}}\mu \leq 1\}. \quad (1.48)$$

Estes conceitos nos permitiram demonstrar o Teorema 8.1.1, Teorema 8.1.2, Proposição 8.1.1 e o Teorema 8.1.3 de maneira análoga aos resultados apresentados no Capítulo 5. Gostaríamos de informar que, apesar de esperado, estes resultados não são encontrados na literatura e pretendemos publicar.

A etapa final de nosso trabalho é fundamental para apresentar uma caracterização para conjuntos (Γ^α, q) -finos no sentido parabólico. Inspirados na Proposição 1.2 do artigo (FABES; GAROFALO; LANCONELLI, 1989) e do Teorema 1.2.2 (BRZEZINA, 1990), dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é (Γ^α, q) -fino em X_0 se, $\alpha q < d_H$ e

$$\int_0^\infty \left(\frac{C_{\Gamma^\alpha, q}(A \cap \Omega_\delta^\alpha(X_0))}{\delta^{\frac{d_H - \alpha q}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Seja $e_{\alpha, q}^\mathcal{P}(A) = \{X \in \mathbb{R}^{d+1} : A \text{ é } (\Gamma^\alpha, q)\text{-fino em } X\}$ e assumamos que $\alpha q < d_H$. Dado $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um conjunto arbitrário mostramos, veja o Teorema 8.2.1, que existe um aberto G de $\mathbb{R}^{d+1}$ tal que

$$e_{\alpha, q}^\mathcal{P}(A) \subset G \quad \text{e} \quad \dot{\mathcal{C}}(A \cap G) < \varepsilon \quad (1.49)$$

para todo $\varepsilon > 0$. A desigualdade acima é chamada de propriedade de Choquet parabólica. Seja $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um aberto tal que $G \subset B(X_0, 2^{-N})$ bola parabólica de raio 2^{-N} centrada em X_0 e suponhamos que $N \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande. Mostramos que se γ é uma medida capacitária de $A \cap G$, então $\forall \varepsilon > 0$ tem-se, veja o Lema 8.2.1,

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X_0) < \varepsilon \quad \text{e} \quad (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X_0) \geq 1 \quad (\Gamma^\alpha, q)\text{-a.e. } X_0 \in A \cap G, \quad (1.50)$$

onde $X_0 \in e_{\alpha, q}^\mathcal{P}(A)$. Agora, fazendo uma adaptação no Lema de Cobertura de Vitalli para bolas parabólicas, mostramos que

$$\dot{\mathcal{C}}(\{\dot{\mathcal{W}}\mu(X) > \lambda\}) \lesssim \lambda^{1-q}\mu(K), \quad (1.51)$$

para qualquer medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ com $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ compacto, veja a Proposição 8.2.1. Por fim, adaptamos a prova do Teorema 1.1.4 para distância homogênea d e usando os resultados anteriores, provamos a seguinte caracterização de conjuntos (Γ^α, q) -finos em X_0 :

Teorema 1.2.5. *Seja $\alpha > 0$ e $1 < q < d_H/\alpha$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é (Γ^α, q) -fino em X_0 se, e somente se, existe $\mu \in \mathcal{M}^+$ tal que*

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X_0) < \liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X).$$

Este resultado que demonstramos resgata o Teorema [1.2.1](#) na versão integral, assim como na versão em série.

PRELIMINARES

As definições desta seção são baseadas no brilhante trabalho de (FUGLEDE, 1960), (MATTILA, 1999). Antes de começar a apresentar os resultados obtidos, vamos enunciar algumas informações importantes para o melhor entendimento deste trabalho.

Chamamos de Boreliano os conjuntos da menor σ -álgebra $\mathcal{B}$ que contém os compactos do espaço euclidiano.

2.1 Medidas de Radon e espaço de Lebesgue $L^p(d\mu)$

Definição 2.1.1. *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.*

- a) μ é localmente finita, se para todo $x \in X$, existe $r > 0$ tal que, $\mu(B_r(x)) < \infty$.
- b) μ é uma medida de Borel, se todo Boreliano é μ -mensurável.
- c) μ é borel regular, se μ é medida de Borel e para todo $A \subset X$, existe um Boreliano $B \subset X$, tal que $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.
- d) μ é medida de Radon, se μ é medida de Borel e satisfaz
 - i) $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$.
 - ii) $\mu(G) = \sup\{\mu(K); K \subset G, K \text{ é compacto}\}$ para abertos $G \subset X$.
 - iii) $\mu(E) = \inf\{\mu(G); E \subset G, G \text{ é aberto}\}$ para E um boreliano qualquer.

A Medida de Lebesgue no espaço euclidiano, por exemplo, é uma medida de Radon. Os itens (b) e (c) são chamados de regularidade exterior e inferior, respectivamente. A classe das medidas de Radon do espaço euclidiano será denotado por $\mathcal{M}$. Neste espaço a semi-norma

$\mu \mapsto \left| \int f d\mu \right|$ define a topologia vaga ou fraca. Neste trabalho escolhemos chamá-la de topologia fraca. Uma sequência de medidas de Radon $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ converge fracamente para $\mu \in \mathcal{M}$, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu, \quad \forall f \in C_0^\infty.$$

Aqui C_0^∞ denota o espaço das funções suaves de suporte compacto. Denotaremos esta convergência por $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Chamamos de $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ a classe das medidas de Radon não-negativas do espaço euclidiano. Esta classe equipada com a semi-norma que induz a topologia fraca é completo. Denotaremos o suporte de uma medida por $\text{spt}(\mu)$, definido usualmente $\text{spt}(\mu) = \overline{\{A \in \mathcal{B} | \mu(A) \neq 0\}}$. Chamaremos de $\mathcal{M}^+(F)$, o conjunto das medidas de Radon, $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ com $\text{spt}(\mu) \subset F$.

Uma função f é chamada de Boreliana quando sua imagem inversa é um boreliano. E dizemos que esta função p -integrável, ou μ -integrável com respeito a uma medida de Borel μ , se

$$\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \right]^{1/p} < \infty,$$

para todo $1 \leq p < \infty$.

2.2 Semi-continuidade

Definição 2.2.1. Uma função $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente se, o conjunto $\{x : f(x) > c\}$ é aberto para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, f é semi-contínua inferiormente se, existe uma sequência de funções $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ tais que $f = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j$.

Seja f uma função não-negativa semi-contínua inferiormente. A integral de f em relação a $\mu \in \mathcal{M}^+$ é definida por:

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu; g \in C_0^\infty, 0 \leq g \leq f \right\}. \quad (2.1)$$

O mapa $\mu \mapsto \int g d\mu$, para uma função g fixada, é semi-contínuo inferiormente na topologia fraca de $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Demonstraremos esta afirmação no Capítulo 3 na Proposição 3.1.1. Se μ tem suporte compacto é possível estender a Definição 2.1 para funções f que mudam de sinal. A medida de um conjunto é definida por

$$\mu(G) = \int \mathbb{1}_G d\mu = \int_G d\mu.$$

É imediato, que a função característica $\mathbb{1}_G$ é semi-contínua inferiormente. A integral acima está bem definida, pois μ é medida de Radon. Destacamos alguns lemas importantes.

Lema 2.2.1. Seja $\{\mu_k\}$ uma sequência em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\sup\{\mu_k(K_j); j = 1, 2, \dots\} < \infty$ para todo $K_j \subset \mathbb{R}^d$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, é possível extrair uma subsequência μ_{k_i} fracamente convergente. Quando isto ocorre dizemos que o conjunto é fracamente compacto.

Demonstração. Suponha que as medidas de Radon são finitas em $\mathbb{R}^d$, isto é,

$$\sup_k \mu_k(\mathbb{R}^d) = \sup_k \int_{\mathbb{R}^d} d\mu_k < \infty. \quad (2.2)$$

Seja $\mathcal{D} = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ um subconjunto denso de C_0^∞ . Note que $\{\int f_1 d\mu_j\}$ é uma sequência real limitada, portanto podemos extrair uma subsequência $\{\mu_{j,1}\}_{j=1}^\infty$ tal que $\{\int f_1 d\mu_{j,1}\} \rightarrow c_1$, onde $c_1 \in \mathbb{R}$. Seguindo este processo podemos extrair uma k -ésima subsequência $\{\mu_{j,k}\}_{j=1}^\infty$ de $\{\mu_{j,k-1}\}_{j=1}^\infty$ tal que $\{\int f_k d\mu_{j,k}\} \rightarrow c_k$. Defina a diagonal $\nu_j = \mu_{j,j}$ tal que

$$\int f_k d\nu_j \rightarrow c_k, \quad \forall k \geq 1 \text{ e } j \rightarrow \infty.$$

Defina o funcional linear $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_k d\nu_j = c_k.$$

Note que L é um funcional limitado por $L(f_k) \leq \|f_k\|_\infty M$, onde $M = \sup_k \mu_k(\mathbb{R}^d)$ e $\|f_k\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_\infty$. Perceba em particular que $\sup_k \nu_k(\mathbb{R}^d) \leq \sup_k \mu_k(\mathbb{R}^d)$. L pode ser estendida de forma única para o funcional $\bar{L} : C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}$. O Teorema da Representação de Riesz, veja (FOLLAND, 1999), garante a existência de uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\bar{L}(f) = \int f d\mu, \quad \forall f \in C_0^\infty.$$

Como $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ é denso em C_0^∞ , é possível extrair uma subsequência $f_{k_i} \rightarrow f$ convergindo uniforme em C_0^∞ . Escolha $\varepsilon > 0$ e $I \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq I$

$$\|f - f_{k_i}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4M},$$

onde $M = \sup_k \mu_k(\mathbb{R}^d)$. Agora tome $J \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq J$

$$\left| \int f_{k_i} d\nu_j - \int f_{k_i} d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $j \geq J$ temos que

$$\begin{aligned} \left| \int f d\nu_j - \int f d\mu \right| &\leq \left| \int f d\nu_j - \int f_{k_i} d\nu_j \right| + \left| \int f_{k_i} d\nu_j - \int f_{k_i} d\mu \right| \\ &\leq \left| \int f d\nu_j - \int f_{k_i} d\nu_j \right| + \left| \int f_{k_i} d\nu_j - \int f_{k_i} d\mu \right| + \left| \int f_{k_i} d\mu - \int f d\mu \right| \\ &\leq M\|f - f_{k_i}\|_\infty + M\|f - f_{k_i}\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Quando (2.2) falha, basta definirmos $\mu_{k,l} = \mu_k|_{(\mathbb{R}^d \cap B[l])}$, onde $B[l]$ é a bola fechada de centro na origem e raio l , refazer a demonstração para $\mu_{k,l}$. Notando é claro que a restrição de uma medida

de Radon é medida de Radon. □

Utilizando a decomposição canônica de Jordan podemos definir as partes positivas e negativas das medidas de Radon, quando $\mu \in \mathcal{M}$.

$$\mu^+ = \max\{\mu, 0\}, \mu^- = \max\{-\mu, 0\}.$$

Podemos fazer uso desta decomposição para definir mensurabilidade e integrabilidade de medidas com sinal variado e utilizar a definição desenvolvida para as partes positiva e negativa. Para qualquer função $f - \mu$ mensurável definimos a integral

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ + \int f d\mu^-, \quad (2.3)$$

esta definição é válida para funções semi-continuas inferiormente aos moldes da Definição (2.1). Esta decomposição, (2.3) define uma norma

$$\|\mu\| = \mu^+ + \mu^-$$

chamada norma de variação total. Com esta norma é possível ver as medidas de Radon, como funções de L^1 , já que localmente, $\mu(K) < \infty$ para toda $\mu \in \mathcal{M}$ e $K \subset \mathbb{R}^d$.

Lema 2.2.2. *Se $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \rightharpoonup \mu$ tal que $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, então*

$$\|\mu\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\|.$$

Demonstração. Em outras palavras este resultado nos diz que a norma de variação total é semi-contínua inferiormente. Pelo Teorema da Representação de Riesz podemos descrever a norma em questão como sendo

$$\|\mu\| = \sup \left\{ \int f d\mu : f \in C_0^\infty, 0 \leq f \leq 1. \right\}.$$

Esta caracterização pode ser encontrada em (FOLLAND, 1999). Denote por $V = \{f \in C_0^\infty, 0 \leq f \leq 1\}$ e escolha $\psi \in V$. Tome $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência de medidas de Radon que converge fracamente para $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Então, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq J$ tem-se que

$$\int f \mu_j = \int f d\mu, \quad \forall f \in C_0^\infty.$$

Escolha $j \geq J$ e note que

$$\left| \int \psi d\mu_j \right| \leq \|\mu_j\|,$$

o que implica

$$\int \psi d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|\mu_j\|.$$

Tomando o $\sup_{\psi \in V} \int f d\mu$ temos o resultado desejado,

$$\|\mu\| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|\mu_j\|.$$

□

Dizemos que $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge fracamente para f em $L^p(d\mu)$, se para toda $g \in L^q(d\mu)$ temos que:

$$\int f_j g d\mu \rightarrow \int f g d\mu.$$

Quando $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge fracamente para f denotaremos por $f_j \rightharpoonup f$.

Lema 2.2.3. Se $f_j \in L^p(d\mu)$ converge fracamente para $f \in L^p(d\mu)$, então

$$\|f\|_p \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_j\|_p$$

Demonstração. Escolha $g \in L^q(d\mu)$ tal que $\|g\|_q \leq 1$. Lembremos que, se $f \in L^p_+(\mathbb{R}^d)$, então

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int f g dx \right|.$$

Esta identidade foi demonstrada em (AIKAWA; ESSÉN, 2006, Lema 3.1.1). Utilizando a convergência fraca e a desigualdade de Hölder temos:

$$\|f\|_p \leq \left| \int f g d\mu \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int f_j g d\mu \right| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_j\|_p \|g\|_q \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_j\|_p.$$

□

O produto $\mu \otimes \nu$ de duas medidas de Radon no espaço euclidiano é definido como a única medida no espaço produto $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tal que

$$\int (\varphi \otimes \psi)(\mu \otimes \nu) = \int \varphi d\mu \int \psi d\nu$$

Para toda $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ definimos $\varphi \otimes \psi := \varphi(x)\psi(y) \in C_0^\infty$. O Teorema de Fubini afirma que

$$\int f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x).$$

Estamos interessados no caso em que f é semi-contínua inferiormente. Neste caso para que o Teorema de Fubini se verifique é necessário que f seja não negativa e que a integral com relação a $\mu \otimes \nu$ esteja bem definida. Caso f tenha sinal variado, é necessário que as medidas μ, ν tenham suporte compacto. Em ambos os casos as integrais interiores são semi-contínuas inferiormente. Esta definição será importante para que a Energia generalizada esteja bem definida.

Esta construção do teorema de Fubini para funções semicontínuas inferiormente foi baseada em (FUGLEDE, 1971).

2.3 Capacidade

O conceito de capacidade foi inicialmente utilizado como uma função de conjuntos com o objetivo de fornecer um número real positivo, mas a princípio, restrita a conjuntos compactos. Assim como a teoria da medida estava para medida de Lebesgue, a capacidade estava para o potencial newtoniano, que hoje é conhecida como capacidade de Wiener ou capacidade logarítmica. Mas assim como a teoria de medida, o estudo acerca de capacidade foi expandido para outros potenciais e espaços de funções, como espaços de Sobolev, espaços de Bessel, Morrey, entre outros. À título de curiosidade estas e outras capacidades podem ser encontradas em (ADAMS; HEDBERG, 1999), (PONCE, 2016) (ADAMS, 2015). O matemático francês Gustave Choquet foi responsável por expandir o conceito de capacidade para conjuntos mais gerais. Outra contribuição importante foi feita pelo matemático Wiener, que utilizou o conceito de capacidade para medir a regularidade de certos conjuntos em problemas de Dirichlet. Além destes outros matemáticos terem relevante contribuição ao estudo de capacidades, matemáticos estes, utilizados como referência neste trabalho (FUGLEDE, 1960), (MEYERS, 1970), (MAZ'YA; KHAVIN, 1972). Afim de exemplificar algumas capacidades utilizadas, temos por exemplo, capacidade de Sobolev associada aos espaços de Sobolev $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\alpha \in \mathbb{N}$ definida num conjunto K como sendo

$$C_{W^{\alpha,p}}(K) = \inf \{ \|\varphi\|_{W^{\alpha,p}} : \varphi \in C_0^\infty, \varphi \geq 1 \text{ em } K \},$$

onde $\|\cdot\|_{W^{\alpha,p}}$ denota a norma usual dos espaços de Sobolev

$$\|\varphi\|_{W^{\alpha,p}} = \left(\sum_{\|\sigma\| \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\sigma \varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

D^σ denota o operador derivada parcial fraca ou no sentido de distribuições. Para uma abordagem mais aprofundada indicamos a leitura de (ADAMS; FOURNIER, 2003).

Outra capacidade muito utilizada na teoria de Capacidades e potenciais é a capacidade de Hausdorff. Dado $d \in (0, n]$ podemos definir a capacidade d-dimensional de Hausdorff do conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ como sendo

$$\mathcal{H}^d(E) = \inf \left\{ \sum_j r_j^d : E \subset \cup_j B(x_j, r_j), j = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad (2.4)$$

isto é, E é coberto por bolas de centro x_j e raio r_j . Para uma abordagem mais rigorosa vide (PONCE, 2016).

Definição 2.3.1 (Capacidade). *Seja A uma família de conjuntos e $C : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que C é uma capacidade, se*

- a) $C(\emptyset) = 0$;
- b) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow C(E_1) \leq C(E_2)$;
- c) Se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos, então

$$C\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j C(A_j).$$

Esta função é normalmente definida para conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$. Uma maneira de estender a definição para uma classe maior de conjuntos é definindo a noção de capacidade interior, $C_I(E)$ e capacidade exterior, $C_E(E)$, a saber,

$$C_I(A) = \sup\{C(K) : K \subset A\} \text{ } K \text{ é compacto de } \mathbb{R}^d. \quad (2.5)$$

$$C_E(A) = \inf\{C(G) : A \subset G\} \text{ } G \text{ é aberto de } \mathbb{R}^d. \quad (2.6)$$

Quando estas capacidades coincidem dizemos que o conjunto A é capacitável. Perceba que, se A é um conjunto aberto $C_E(A) = C_I(A)$, mas o que acontece quando A é um boreliano, ou um conjunto analítico? Esta resposta foi dada por Choquet, veja (CHOQUET, 1954).

Teorema 2.3.1 (Teorema de Choquet). *Os conjuntos Analíticos do espaço euclidiano são capacitáveis.*

Choquet demonstrou que os conjuntos analíticos são capacitáveis, em particular que os Borelianos também são. Mais precisamente, Choquet demonstrou este resultado em um contexto ainda mais geral do que o espaço euclidiano. Originalmente, considerou apenas um espaço Hausdorff, localmente compacto com uma base enumerável. Uma demonstração deste resultado está em, vide (AIKAWA; ESSÉN, 2006) Capítulo 10 apêndice: Teorema de Capacitabilidade de Choquet. Agora nos voltamos ao conceito de Capacidade no sentido de Choquet.

Definição 2.3.2. *Dizemos que C é uma Capacidade de Choquet, se satisfaz as seguintes propriedades*

- a) (Convergência por baixo). Se $K_j \subset \mathbb{R}^d$ é uma sequência decrescente de conjuntos compactos, então

$$C\left(\bigcap_j K_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} C(K_j). \quad (2.7)$$

- b) (Convergência por cima). Se $E_j \subset \mathbb{R}^d$ é uma sequência crescente, então

$$C\left(\bigcup_j E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} C(E_j). \quad (2.8)$$

A capacidade de Hausdorff mencionada anteriormente, (2.4), não é uma capacidade no sentido de Choquet, à título de curiosidade a demonstração desta afirmação pode ser encontrada (ADAMS, 2015). Já a capacidade de Sobolev é de Choquet (PONCE, 2016). Se C é capacidade de Choquet, então os conjuntos analíticos, em particular os borelianos, são capacitáveis.

Observação 2.3.1. *Não definiremos de maneira precisa o conceito de conjuntos analíticos afim de não desviarmos o foco. À título de ilustração, os conjuntos analíticos foram descobertos por Suslin em 1927 (LUSIN, 1927), um estudante do matemático N. N. Luzin, quando este encontrou um equívoco de Lebesgue. Lebesgue tinha provado de maneira incorreta que os borelianos são fechados por projeção. A classe dos conjuntos analíticos é estritamente maior que a classe dos borelianos e podemos reconhecê-los de uma maneira simplificada como sendo conjuntos obtidos através de projeções de borelianos em $\mathbb{R}^{N+1}$. Um conjunto analítico é um boreliano se, e somente se, seu complementar é um conjunto analítico. Este equívoco de Lebesgue foi descrito pelo próprio matemático francês no prefácio do livro de Luzin (LUSIN, 1927). Para uma abordagem mais aprofundada de conjuntos analíticos vide (AIKAWA; ESSÉN, 2006).*

2.4 Convergência em Capacidade

Dizemos que uma certa propriedade, como uma convergência, ocorre $C - a.e.$, se é verdadeira com exceção de um conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $C(A) = 0$. Seja $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência de funções e f uma função. Dizemos que f_j converge em capacidade para f , se para todo $\varepsilon > 0$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j > J$ temos

$$C\{x; |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Dizemos que f_j converge para f , $C - a.u.$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto A_ε tal que $C(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e $f_j \rightarrow f$ uniforme em A_ε^c . Mais a frente demonstraremos um resultado que estende o teorema de Egoroff para capacidades.

Definição 2.4.1 (Quasi-continuidade). *Seja f uma função real. Dizemos que f é C -quasi-continua, se $\forall \varepsilon > 0$ existe um aberto A_ε satisfazendo $C(A_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $f|_{A_\varepsilon^c}$ é contínua.*

Proposição 2.4.1. *Seja $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência de funções e f uma função. Se para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto A_ε de $\mathbb{R}^d$ satisfazendo $C(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tal que $f_j \rightarrow f$ uniformemente sobre A_ε^c , então $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ converge em capacidade para f .*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e um aberto A_ε de $\mathbb{R}^d$ tal que $C(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ de forma que $f_j \rightarrow f$ uniformemente em A_ε^c . Note que por definição de convergência uniforme $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A_\varepsilon^c$. Portanto, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j > J$, temos que

$$C(A_\varepsilon) = \{x : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon.$$

Por definição $f_j \rightarrow f$ em capacidade. □

2.5 Espaços uniformemente convexos

Esta seção é baseada do livro de (ADAMS; HEDBERG, 1999, Seção 1.3).

Definição 2.5.1. *Seja X um espaço vetorial normado $\|\cdot\|$ e completo, isto é, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Dizemos que X é uniformemente convexo se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\|f\| < 1 + \delta$, $\|g\| < 1 + \delta$ e $\|1/2(f + g)\| \geq 1$, então $\|f - g\| < \varepsilon$.*

Teorema 2.5.1 (Desigualdades de Clarkson (CLARKSON, 1936)). *O espaço $L^p(dx)$ é uniformemente convexo. Listaremos as desigualdades que garantem este resultado.*

a) Para $2 \leq p < \infty$,

$$2^{1-p}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \leq \left\| \frac{1}{2}(f - g) \right\|_p^p + \left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

b) Para $1 < p \leq 2$,

$$2^{1-p}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \geq \left\| \frac{1}{2}(f - g) \right\|_p^p + \left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\|_p^p \geq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

c) Para $1 < p \leq 2$,

$$\left\| \frac{1}{2}(f - g) \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \right)^{p'-1}$$

d) Para $2 \leq p < \infty$,

$$\left\| \frac{1}{2}(f - g) \right\|_p^p + \left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p.$$

Corolário 2.5.1. *Seja B um espaço de Banach uniformemente convexo e seja $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência em B tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 1$ e*

$$\liminf_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2}(f_n + f_m) \right\| \geq 1.$$

Então existe $g \in B$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0$.

Teorema 2.5.2 (Banach-Saks). *Toda sequência limitada de funções $f_n \in L^p$, $1 < p < \infty$, possui uma subsequência f_{n_j} tal que, $N^{-1} \sum_{j=1}^N f_{n_j}$ converge em norma, ou fortemente.*

2.6 Potenciais de Riesz e Bessel

Discutiremos algumas definições e propriedades importantes acerca da transformada de Fourier, afim de definir os potenciais de Riesz e Bessel.

2.6.1 Potenciais de Riesz

Seja $f \in L^1$, a sua transformada de Fourier é definida por:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Denotaremos por $\mathcal{F}$ o mapa transformada de Fourier. Se $\hat{f} \in L^1$, então a fórmula da transformada inversa de Fourier de f é válida e dada por:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Denotaremos o operador inverso da transformada de Fourier por $\mathcal{F}^{-1}$.

Proposição 2.6.1. *Seja $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

- (i) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$
- (ii) $\mathcal{F}(\partial_j g(\xi)) = i\xi_j \hat{g}(\xi)$, onde ξ_j é a j -ésima coordenada de $\xi \in \mathbb{R}^d$.
- (iii) O mapa $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ é uma bijeção.
- (iv) *Fórmula de Parseval* $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-d/2} \|\hat{f}\|_2$.

Isto implica que $\mathcal{F}$ pode ser estendida de forma contínua para L^2 , sendo este mapa também uma bijeção.

À luz da teoria de distribuições podemos definir a transformada de Fourier para distribuições temperadas $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ da seguinte maneira:

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

onde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ denota o espaço das distribuições temperadas. Esta definição implica que o mapa $\mathcal{F}$ é uma bijeção também em $\mathcal{S}'$.

Seja $0 < \alpha < d$ e perceba que a função $|\xi|^{-\alpha}$ é suave fora da vizinhança da origem. Portanto, podemos vê-la como um elemento de $\mathcal{S}'$. O operador de Riesz $I_\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é definido por:

$$I_\alpha(f) = (-\Delta)^{-\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha} \hat{f})$$

O núcleo de Riesz é definido por $I_\alpha = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha})$ no sentido de distribuições. Manipulando esta identidade, veja (STEIN, 1970, Cap 5, Lema 2), concluiremos que

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} |x|^{\alpha-d},$$

onde $\gamma(\alpha)$ é uma constante positiva.

Definição 2.6.1. *Seja μ uma medida de Radon e $0 < \alpha < d$. O potencial de Riesz I_α de μ é definido por :*

$$(I_\alpha \mu)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}.$$

Quando $d\mu = f dx$, $f \in \mathcal{S}$ temos que

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy.$$

Lema 2.6.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Então, para todo $\delta > 0$*

$$(i) \int_{|x-y| < \delta} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} = (d-\alpha) \int_0^\delta \frac{\mu(B(x,r))}{r^{d-\alpha}} \frac{dr}{r} + \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{d-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < d.$$

$$(ii) \int_{|x-y| \geq \delta} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} = (d-\alpha) \int_\delta^\infty \frac{\mu(B(x,r))}{r^{d-\alpha}} \frac{dr}{r} - \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{d-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < d.$$

Demonstração. Sejam $H(r) = \int_{|x-y| < r} d\mu(y)$ e $F(r) = r^{\alpha-d}$. Então, utilizando a técnica de integração por partes para integrais de Lebesgue-Stieltjes, ver (FOLLAND, 1999), percebe-se que $dF(r) = (\alpha-d)r^{\alpha-d-1}$ e $H(r) = \mu(B(x,r))$ e temos que

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| < \delta} \frac{d\mu}{|x-y|^{d-\alpha}} &= \int_0^\delta F(r) dH(r) = F(r)H(r) \Big|_0^\delta - \int_0^\delta H(r) dF(r). \\ &= F(\delta)H(\delta) - \int_0^\delta \mu(B(x,r)) dF(r) \\ &= \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{d-\alpha}} + (d-\alpha) \int_0^\delta \frac{\mu(B(x,r))}{r^{d-\alpha}} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

(ii) Tomando as mesmas $H(r)$ e $F(r)$ temos, analogamente, que

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| \geq \delta} \frac{d\mu}{|x-y|^{d-\alpha}} &= \int_\delta^\infty F(r) dH(r) = F(r)H(r) \Big|_\delta^\infty - \int_\delta^\infty H(r) dF(r). \\ &= -F(\delta)H(\delta) + \int_\delta^\infty \mu(B(x,r)) dF(r) = \int_\delta^\infty \frac{\mu(B(x,r))}{r^{d-\alpha}} \frac{dr}{r} - \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{d-\alpha}}. \end{aligned}$$

□

Usando o Lema 2.6.1 podemos definir o potencial de Riesz de $\mu \in \mathfrak{M}^+$, da seguinte forma:

$$(I_\alpha \mu)(x) = \int_0^\infty \frac{\mu(B_\delta(x))}{r^{d-\alpha}} \frac{d\delta}{\delta}. \quad (2.9)$$

2.6.2 Potenciais de Bessel

O potencial de Bessel nasce como “suavização” do potencial de Riesz I_α , visto que este último tem uma singularidade na origem. Portanto o núcleo de Riesz $I_\alpha \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, isso faz com que o operador $g \rightarrow I_\alpha * g$ não seja limitado em L^p . Para contornar esta situação, é necessário acelerar o decaimento de I_α e tomar o produto deste núcleo com uma função de decaimento rápido no infinito. Para isso, o caminho mais simples e natural é substituir o laplaciano $-\Delta$, na definição do potencial de Riesz, pelo operador $(\mathbb{I} - \Delta)$ e definir o potencial de Bessel por:

$$\mathcal{J}_\alpha = (\mathbb{I} - \Delta)^{-\alpha/2},$$

onde $\mathbb{I}$ denota o operador identidade.

Definição 2.6.2. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, núcleo de Bessel é definido por:*

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2} \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{\pi|x|^2/\delta} e^{-\delta/4\pi} \delta^{(\alpha-d)/2} \frac{d\delta}{\delta}. \quad (2.10)$$

Proposição 2.6.2 (Proposição 2, (STEIN, 1970)). *Seja $\alpha > 0$. Então*

- (i) $G_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\int G_\alpha(x) dx = 1$.
- (ii) $\widehat{G}_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$.

Dado uma medida de Radon μ , o potencial de Bessel de uma medida μ é definido por:

$$(\mathcal{J}_\alpha \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_\alpha(x - y) d\mu(y).$$

Quando $d\mu = f dx$, onde $f \in \mathcal{S}$, escrevemos

$$\mathcal{J}_\alpha f = (\mathbb{I} - \Delta)^{-\alpha/2} f = G_\alpha * f. \quad (2.11)$$

Os núcleos que definimos até aqui são semi-contínuos inferiormente e positivos. De fato, pela Definição 2.6.2, o núcleo de Bessel é semi-contínuo inferiormente e positivo. De forma similar, o núcleo de Riesz é semi-contínuo inferiormente em razão da identidade

$$I_\alpha(x) = a_0 \int_0^\infty t^{\alpha-d/2} e^{\frac{-\pi|x|^2}{t}} \frac{dt}{t}, \quad 0 < \alpha < d, \quad (2.12)$$

onde a_0 é uma constante positiva. É possível ver pelas formulações integrais que $0 < G_\alpha(x) < I_\alpha(x)$ para $0 < \alpha < d$.

Proposição 2.6.3. (i) *Para $0 < \alpha < d$ e em $\mathbf{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(0,0)\}$ o núcleo de Riesz I_α é semi-contínuo inferiormente e positivo.*

(ii) Para $0 < \alpha \leq d$ e em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(0,0)\}$ o núcleo de Bessel G_α é positivo e semi-contínuo inferiormente.

O resultado segue da identidade (2.12) e das Definições 2.6.2 e 2.6.1.

2.7 Espaço dos Potenciais de Bessel e Riesz

O espaço de Sobolev é o espaço das funções $f \in L^p$, cujas derivadas fracas $D^\sigma f$, ou derivadas no sentido de distribuições, com $|\sigma| \leq \alpha \in \mathbb{N}$, pertencem a L^p . Em outras palavras, existe uma função $g_\sigma \in L^p$, com $|\sigma| \leq \alpha$ tal que

$$\int f D^\sigma \varphi = (-1)^{|\sigma|} \int g_\sigma \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Chamamos $g_\sigma = D^\sigma f$ a derivada fraca de f . A norma deste espaço é dada por

$$\|\varphi\|_{W^{\alpha,p}}^p = \sum_{\|\sigma\| \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\sigma \varphi|^p dx.$$

Definição 2.7.1. Sejam G_α e I_α os núcleos de Bessel e Riesz, respectivamente. Definimos os espaços potenciais de Bessel e Riesz como sendo:

$$L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d) = \{f : f = G_\alpha * g, \quad g \in L^p(\mathbb{R}^d)\}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

$$\dot{L}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d) = \{f : f = I_\alpha * g, \quad g \in L^p(\mathbb{R}^d)\}, \quad 0 < \alpha < d. \quad (2.14)$$

As normas são dadas por $\|f\|_{\alpha,p} = \|g\|_p$. Esta definição não quer dizer que estas normas coincidem. Denotaremos por $L^{-\alpha,q}$ como sendo o espaço dual de $L^{\alpha,p}$. Dizemos que $\mu \in L^{-\alpha,q}$ se existe $f \in L^q$ tal que

$$\mu = \mathcal{J}_{-\alpha} f, \quad \text{ou } f = \mathcal{J}_\alpha \mu,$$

onde $\mathcal{J}_{-\alpha} = \mathcal{J}_\alpha^{-1}$ denota o operador inverso de Bessel.

Um dos principais resultados da teoria de potenciais de Bessel é devido a (CALDERÓN, 1961), que estabelece a equivalência entre o espaço de Bessel e o espaço de Sobolev.

Teorema 2.7.1. Sejam $\alpha \in \mathbb{N}$ e $W^{\alpha,p}$ e $L^{\alpha,p}$ espaços de Sobolev e Bessel tais que $1 < p < \infty$. Então, $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d) = L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ e existe uma constante A tal que para toda f

$$A^{-1} \|f\|_{\alpha,p} \leq \|f\|_{W^{\alpha,p}} \leq A \|f\|_{\alpha,p}.$$

CAPACIDADE EM ESPAÇO DE LEBESGUE

Este capítulo é baseado no (MEYERS, 1970) e nos livros (ADAMS; HEDBERG, 1999) e (AIKAWA; ESSÉN, 2006). O objetivo é desenvolver as principais propriedades de algumas capacidades e introduzir os conceitos de distribuição capacitária, medida capacitária e potenciais não lineares. Para isso iremos demonstrar algumas propriedades de $\mathcal{C}_{K,p}$, que tem como objeto central funções em L^p_+ e concluir que, $\mathcal{C}_{K,p}$ é uma capacidade de Choquet. Em seguida introduzimos uma nova capacidade $\text{Cap}_{K,p}$ tendo agora como elemento central $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Mostraremos que estas capacidades estão intimamente relacionadas, semelhante a dualidade entre os espaços C_0^∞ e $\mathcal{M}^+$. Por fim, traremos uma breve discussão acerca de potenciais não lineares, sendo este, objeto central de estudo desta dissertação.

3.1 A capacidade $\mathcal{C}_{K,p}$

Nesta seção introduzimos o conceito de Capacidade $\mathcal{C}_{K,p}(\cdot)$ associada a um núcleo $K : \mathbf{M} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$. Mostraremos que $\mathcal{C}_{K,p}(\cdot)$ é uma capacidade no sentido de Choquet. Além disso, quando $K = G_\alpha$ ou $K = I_\alpha$ mostraremos que

$$\mathcal{C}_{K,p} = \mathcal{C}_{\alpha,p} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{I_\alpha,p} = \dot{\mathcal{C}}_{\alpha,p}.$$

Definição 3.1.1. *Seja $\mathbf{M}$ um espaço equipado com uma medida positiva ν e uma família de conjuntos ν -mensuráveis. Um núcleo $K : \mathbb{R}^d \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função não negativa tal que*

(i) $K(\cdot, y)$ é s.c.i em $\mathbb{R}^d$, para cada elemento $y \in \mathbf{M}$ fixado.

(ii) $K(x, \cdot)$ é uma função mensurável em $\mathbf{M}$ para cada elemento $x \in \mathbb{R}^d$ fixado.

Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ e f uma função não-negativa ν -mensurável. O potencial de μ

associado ao núcleo K é definido por

$$(\check{T}_K \mu)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) d\mu(x), \quad y \in \mathbf{M}.$$

E o potencial de f associado K é definido por

$$(T_K f)(x) = \int_{\mathbf{M}} K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Note que $f d\nu$ define uma medida em $\mathcal{M}$. Se $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ e K é simétrico, isto é, $K(x, y) = K(y, x)$, então,

$$\begin{aligned} (T_K f d\nu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) d\nu(y). \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(y, x) f(y) d\nu(y). \\ &= (\check{T}_K f d\nu)(x). \end{aligned}$$

Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ e ν uma medida não-negativa em $\mathbf{M}$. A energia mútua de μ e ν é definida por:

$$E_K(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbf{M}} K(x, y) d\nu(y) d\mu(x). \quad (3.1)$$

Usando o Teorema de Fubini concluímos que

$$E_K(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} (T_K \nu)(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{M}} (\check{T}_K \mu)(y) d\nu(y).$$

Proposição 3.1.1. *Seja $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ um núcleo e sejam $\nu, \mu \in \mathcal{M}^+$. Para cada $y \in \mathbb{R}^d$ fixado temos:*

- (i) *A aplicação $x \mapsto (T_K \nu)(x)$ é semi-contínua inferiormente, (s.c.i), em $\mathbb{R}^d$;*
- (ii) *A aplicação $\mu \mapsto (\check{T}_K \mu)(y)$ é semi-contínua inferiormente na topologia fraca- $\star$ de $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$;*
- (iii) *Seja $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ fixado, então a aplicação $\mu \mapsto E_K(\nu, \mu)$ é s.c.i na topologia fraca de $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração.

Prova de (i): Quando nos referirmos a funções semi-contínuas inferiormente, escreveremos s.c.i. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{R}^d$ tal que $\lim_{x_j \rightarrow x_0} (T_K \nu)(x_j) = (T_K \nu)(x_0)$. Como

$K(\cdot, y)$ é s.c.i para cada $y \in \mathbf{M}$ fixado, então pelo Lema de Fatou temos:

$$\begin{aligned} (T_K \nu)(x_0) &:= \int_{\mathbf{M}} K(x_0, y) d\nu(y) \stackrel{s.c.i}{\leq} \int_{\mathbf{M}} \liminf_{j \rightarrow \infty} K(x_j, y) d\nu(y) \\ &\stackrel{\text{Lema de Fatou}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{M}} K(x_j, y) d\nu(y) = \liminf_{x \rightarrow x_0} (T_K \nu)(x). \end{aligned}$$

Prova de (ii): Seja $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de medidas tal que $\mu_i \rightharpoonup \mu$ fracamente. Como o núcleo $K(x, \cdot)$ é s.c.i para cada $x \in \mathbb{R}^d$ fixado, usando a Definição 2.2.1, existe uma sequência $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ crescente de funções contínuas com suporte compacto tal que h_n converge pontualmente para $K(x, y)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_n d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} h_n d\mu_i \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) d\mu_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} (\bigvee_{K} \mu_i)(y). \quad (3.2)$$

Portanto, pelo **Teorema da Convergência Monótona**, temos

$$(\bigvee_{K} \mu)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) d\mu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} h_n d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} (\bigvee_{K} \mu_i)(y). \quad (3.3)$$

Prova de (iii): Escolha $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ como no item anterior. O item (i) garante que $(T_K \mu)(x)$ é s.c.i, portanto existe uma sequência $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ crescente de funções contínuas com suporte compacto tal que $h_n \rightarrow (T_K \nu)(x)$. Dito isso temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_n d\mu(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} h_n d\mu_i(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (T_K \nu)(x) d\mu_i(x).$$

Pelo **Teorema da Convergência Monótona**

$$E_K(\mu, \nu) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} h_n d\mu(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (T_K \nu)(x) d\mu_i(x) = \liminf_{i \rightarrow \infty} E_K(\mu_i, \nu).$$

□

Definição 3.1.2. Seja K um núcleo e $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto. A capacidade de A em $L^p(d\mu)$ associada ao núcleo K é definida por

$$\mathcal{C}_{K,p}(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu(x) : f \geq 0, (T_K f)(x) \geq 1 \text{ em } A \right\} \quad (3.4)$$

Seja $\Omega_A = \{f : f \in L^p_+(d\mu), (T_K f)(x) \geq 1, \text{ em } A\}$. f é função teste para A se $f \in \Omega_A$. Se $\Omega_A = \emptyset$, definimos $\mathcal{C}_{K,p}(A) = \infty$.

Teorema 3.1.1. A capacidade $\mathcal{C}_{K,p}(\cdot)$ é capacidade exterior, isto é,

$$(i) \quad \mathcal{C}_{K,p}(\emptyset) = 0;$$

$$(ii) \quad \text{Se } A \subset B, \text{ então } \mathcal{C}_{K,p}(A) \leq \mathcal{C}_{K,p}(B);$$

$$(iii) \quad \text{Se } \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ é uma sequência de conjuntos de } \mathbb{R}^d, \text{ então } \mathcal{C}_{K,p}(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_{K,p}(A_j);$$

(iv) Se $A \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto qualquer, então:

$$\mathcal{C}_{K,p}(A) = \inf \{ \mathcal{C}_{K,p}(G) : A \subset G \} \quad G \text{ é aberto de } \mathbb{R}^d.$$

Demonstração. Claro que $\mathcal{C}_{K,p}(\emptyset) = 0$ e $\mathcal{C}_{K,p}(E_1) \leq \mathcal{C}_{K,p}(E_2)$, se $E_1 \subset E_2$, seguem trivialmente da Definição 3.1.2. Quanto a subaditividade assuma que $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_{K,p}(A_j) < \infty$. Isto nos diz, que $\mathcal{C}_{K,p}(A_j)$ é finito para todo j . Portanto, existe $\varepsilon > 0$ e funções testes f_j tais que,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_j|^p d\mu \leq \mathcal{C}_{K,p}(A_j) + \varepsilon/2^j.$$

Chame $f = \sup_j f_j$. Então $(f(x))^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x))^p$ o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_j|^p d\mu \leq \sum_j \mathcal{C}_{K,p}(A_j) + \varepsilon. \quad (3.5)$$

Por fim, note que $(T_K f)(x) \geq (T_K f_j)(x) \geq 1$ em A_j para todo j . Isto implica, que f é uma função teste para $\mathcal{C}_{K,p}(\cup_{j=1}^{\infty} A_j)$ e portanto

$$\mathcal{C}_{K,p}(\cup_j A_j) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \leq \sum_j \mathcal{C}_{K,p}(A_j) + \varepsilon.$$

Como queríamos mostrar. Agora vamos mostrar Teorema 3.1.1(iv). Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathcal{C}_{K,p}(A) < \infty$. Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe função teste f de $\mathcal{C}_{K,p}(A)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \leq \mathcal{C}_{K,p}(A) + \varepsilon.$$

Seja $f_\varepsilon = f/(1 - \varepsilon)$ e defina $G = \{x : (T_K f_\varepsilon)(x) > 1\}$. O conjunto G é não vazio. De fato, como $(T_K f) \geq \mathbb{1}_A$, então:

$$(T_K f_\varepsilon)(x) = T_K \left(\frac{f}{1 - \varepsilon} \mu \right) (x) = \frac{T_K(f\mu)(x)}{1 - \varepsilon} \geq \frac{1}{1 - \varepsilon} > 1.$$

Portanto, $A \subset G$. Além disto, como K é s.c.i, G é um aberto. Assim f_ε é uma função teste de $\mathcal{C}_{K,p}(G)$ e temos:

$$\mathcal{C}_{K,p}(G) \leq \|f_\varepsilon\|_{L^p(d\mu)}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu (1 - \varepsilon)^{-p} \leq (\mathcal{C}_{K,p}(A) + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-p}.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $\mathcal{C}_{K,p}(G) \leq \mathcal{C}_{K,p}(A)$. Consequentemente, tomando o ínfimo de $\mathcal{C}_{K,p}(G)$ sobre abertos G contendo A temos

$$\inf \{ \mathcal{C}_{K,p}(G) : G \supset A, G \text{ aberto} \} \leq \mathcal{C}_{K,p}(A).$$

A desigualdade contrária é imediata pela sub-aditividade. □

Teorema 3.1.2. *Se $f \in L^p(d\mu)$ e $0 < a < \infty$, então*

$$\mathcal{C}_{K,p}(\{x : |(T_K f)(x)| \geq a\}) \leq a^{-p} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu. \quad (3.6)$$

Demonstração. Denote $G_a = \{x; |(T_K f)(x)| \geq a\}$. Note que $|(T_K f)(x)| \leq (T_K |f|)(x)$. Lembrando que K é não-negativo, é suficiente demonstrarmos para $f \in L_+^p(d\mu)$. Note que $a^{-1}f$ é função teste do conjunto G_a . Com efeito, seja $g = a^{-1}f$ temos que $g \geq 0$ e

$$(T_K g)(x) = \int_{\mathbf{M}} K(x, y)g(y)d\mu(y) = a^{-1} \int_{\mathbf{M}} K(x, y)f(y)d\mu(y) = \frac{1}{a}(T_K f)(x) \geq a^{-1}a = 1,$$

se $x \in G_a$. □

Teorema 3.1.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$. Então $\mathcal{C}_{K,p}(A) = 0$ se, e somente se, existe $f \in L_+^p(d\mu)$ tal que $A \subset \{x; (T_K f)(x) = +\infty\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.2, temos que

$$\mathcal{C}_{K,p}(\{x; (T_K f)(x) \geq a\}) \leq a^{-p} \int_{\mathbf{M}} |f|^p d\mu, \quad (3.7)$$

para todo $a \in (0, \infty)$ e $f \in L_+^p(d\mu)$. Então, $\mathcal{C}_{K,p}(\{x : (T_K f)(x) = +\infty\}) = 0$. Portanto, se $A \subset \{x : (T_K f)(x) = +\infty\}$, então $\mathcal{C}_{K,p}(A) = 0$. Reciprocamente suponha que $\mathcal{C}_{K,p}(A) = 0$ e seja $\{f_j\}_{j=1}^\infty$, sequência de, funções testes de $\mathcal{C}_{K,p}(A)$ e $\int_{\mathbf{M}} |f_j|^p d\mu < 2^{-jp}$. A função $f = \sum_{j=1}^\infty f_j$ tem as propriedades desejadas. □

Podemos estender a definição de potenciais para funções μ -mensuráveis com valores em $\mathbb{R}$ da seguinte maneira

$$(T_K f)(x) = (T_K f^+)(x) + (T_K f^-)(x), \quad (3.8)$$

onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$. Os potenciais acima estão definidos quando pelo menos um dos termos a direita é finito. O Teorema 3.1.3 garante que o potencial definido em (3.10) está bem definido $\mathcal{C}_{K,p}$ - a.e. A seguir um resultado que estende o Teorema de Egoroff

Teorema 3.1.4. *Seja $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $L^p(d\mu)$ que converge para f . Então $(T_K f_n)(x)$ converge em capacidade para $(T_K f)(x)$. Além disso, é possível extrair uma subsequência f_{n_j} tal que $(T_K f_{n_j})(x)$ converge $\mathcal{C}_{K,p}$ - a.u. Em particular, esta convergência é também $\mathcal{C}_{K,p}$ - a.e.*

Demonstração. Primeiro, perceba que os potenciais $(T_K f_n)(x)$, $(T_K f)(x)$ estão bem definidos e são finitos $\mathcal{C}_{K,p}$ - a.e, isto é, fora de um conjunto F com $\mathcal{C}_{K,p}(F) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ defina $E_\varepsilon = \{x : |(T_K f_n)(x) - (T_K f)(x)| > \varepsilon\}$. Pelo Teorema 3.1.2, temos

$$\mathcal{C}_{K,p}(E_\varepsilon) \leq \varepsilon^{-p} \|f_n - f\|_{L^p(d\mu)}^p.$$

Mas f_n converge para f em $L^p(d\mu)$, então a primeira afirmação segue. Agora escolha uma subsequência f_{n_j} tal que $\|f_{n_j} - f\|_{L^p(d\mu)}^p < 4^{-jp}$. Denote por $E_j = \{x : (T_K(|f_{n_j} - f|))(x) > 2^{-j}\}$ e seja $G_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$. Usando o Teorema 3.1.2, obtemos

$$\mathcal{C}_{K,p}(E_j) \leq 2^{jp} \int_{E_j} |f_{n_j} - f|^p d\mu < 2^{-jp}.$$

E pela subaditividade de $\mathcal{C}_{K,p}$, temos

$$\mathcal{C}_{K,p}(G_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-jp}.$$

Como

$$\mathcal{C}_{K,p}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) \leq \mathcal{C}_{K,p}(G_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-jp} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

então,

$$\mathcal{C}_{K,p}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) = 0.$$

Escolha $x \notin G_k \cup F$ e perceba

$$|(T_K f_{n_j})(x) - (T_K f)(x)| \leq (T_K |f_{n_j} - f|)(x) \leq 2^{-j},$$

para todo $j \geq k$. Isto nos garante a convergência de forma uniforme para um conjunto $G_k \cup F$ de capacidade pequena. Note que, se há convergência $\mathcal{C}_{K,p} - a.u.$, então temos convergência $\mathcal{C}_{K,p} - a.e$ em particular pela Proposição 2.4.1. $\square$

Teorema 3.1.5. *Suponha que $f_n \rightharpoonup f$. Então*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (T_K f_n)(x) = (T_K f)(x) \quad \text{para todo } x \text{ } \mathcal{C}_{K,p} - a.e.$$

Demonstração. Note que, se $f_n \rightharpoonup f$ fracamente, então $f_n \mu \rightharpoonup f \mu$. A Proposição 3.1.1 item (ii) garante que $(T_K f_n)(x)$ é s.c.i., então $(T_K f)(x) \leq (T_K f_n \mu)(x)$ $\mu - a.e$ em $\mathbb{R}^d$. Esta afirmação implica que é suficiente demonstrar $\liminf_{n \rightarrow \infty} (T_K f_n)(x) \leq (T_K f)(x)$ $\mathcal{C}_{K,p} - a.e$. Para tanto, tome uma sequência $f_n \rightharpoonup f$. O Teorema de Banach-Saks 2.5.2 garante a existência de uma subsequência $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$g_j = j^{-1} \sum_{n=1}^j f'_n$$

converge fortemente para $f \in L^p(d\mu)$. Usando o Teorema 3.1.4, seja $\{g'_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma subsequência tal que

$$(T_K f)(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} (T_K g'_j)(x) \quad \mathcal{C}_{K,p} - a.e$$

O resultado segue do fato

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (T_K f_n)(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (T_K f'_n)(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (T_K g_j)(x) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (T_K g'_j)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_K f)(x) \quad \mathcal{C}_{K,p} - a.e. \end{aligned}$$

□

Afim de facilitar a notação, dizemos que uma sequência de conjuntos $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge por cima para A $A_j \uparrow A$, quando $A_j \subset A_{j+1}$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A$. Similarmente denotaremos por $A_j \downarrow A$, quando $A_{j+1} \subset A_j$ e $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A$.

Teorema 3.1.6. *Sejam $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos e $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos compactos. Então:*

(i) Se $A_n \uparrow A$, então

$$\mathcal{C}_{K,p}(A) = \mathcal{C}_{K,p}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{K,p}(A_n);$$

(ii) Se $B_n \downarrow B$, então

$$\mathcal{C}_{K,p}(B) = \mathcal{C}_{K,p}(\bigcap_n B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{K,p}(B_n).$$

Demonstração. (i) Seja f_n uma sequência de funções teste de $\mathcal{C}_{K,p}(A_n)$, isto é, $f_n \geq 0$ tal que $(T_K f_n)(x) \geq 1$ em A_n . Como $A_n \subset A_{n+1}$, pela monotonicidade de $\mathcal{C}_{K,p}$ podemos assumir sem perda de generalidade que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{K,p}(A_n) = \delta$. Pela definição de capacidade $\mathcal{C}_{K,p}$, existe função teste f_n tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \leq \mathcal{C}_{K,p}(A_n) + 1/n \leq \delta \quad \text{sempre que } n > N_0.$$

Como f_n é limitada em $L^p(d\mu)$, então existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $f_{n_j} \rightharpoonup f$ em $L^p_+(d\mu)$. O Lema 2.2.3 implica

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_{n_j}|^p d\mu = \delta.$$

Pelo Teorema 3.1.5,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (T_K f_{n_j})(x) = (T_K f)(x) \quad \mathcal{C}_{K,p} - a.e.$$

Consequentemente, $(T_K f)(x) \geq 1$ $\mathcal{C}_{K,p} - a.e.$, isto é, existe um subconjunto $B \subset A$ tal que $\mathcal{C}_{K,p}(A \setminus B) = 0$ e $(T_K f)(x) \geq 1$ em B , logo f é uma função teste para $\mathcal{C}_{K,p}(B)$. Usando a subaditividade de $\mathcal{C}_{K,p}$

$$\mathcal{C}_{K,p}(A) \leq \mathcal{C}_{K,p}(B) + \mathcal{C}_{K,p}(A \setminus B) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \leq \delta.$$

(ii) Perceba que este resultado é válido para capacidade exterior C_E . Note que $\mathcal{C}_{K,p}(K) \leq \mathcal{C}_{K,p}(B_n)$. Como $\mathcal{C}_{K,p}$ é capacidade exterior, veja Teorema 3.1.1, existe um aberto G contendo B tal que $\mathcal{C}_{k,p}(G) \leq \mathcal{C}_{k,p}(B_n) + \varepsilon$. Existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $B_n \subset G \ \forall n \geq N$. Com efeito, se a afirmação for falsa, então a coleção $\{B_n \setminus G\}$ é decrescente e possui a propriedade da interseção finita, isto é, toda subcoleção finita de $\{B_n \setminus G\}$ possui interseção não vazia. Portanto $B \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{B_n \setminus G\} \neq \emptyset$, que é uma contradição. A monotonicidade de $\mathcal{C}_{K,p}$ nos diz

$$\mathcal{C}_{K,p}(B_n) \leq \mathcal{C}_{K,p}(G) \leq \mathcal{C}_{K,p}(K) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário o resultado segue. $\square$

O Teorema anterior motiva uma propriedade, que pode ser vista como um resultado análogo ao Lema de Fatou para capacidades.

Corolário 3.1.1. *Se (E_n) é uma sequência arbitrária de conjuntos, então*

$$\mathcal{C}_{K,p}(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{K,p}(E_n).$$

Demonstração. Defina

$$B = \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} E_k \text{ e } B_i = \bigcup_{j=1}^i \bigcap_{k=j}^{\infty} E_k.$$

Perceba, que B é o limite inferior dos conjuntos B_i . Portanto $B_i \uparrow B$. Podemos utilizar o teorema anterior para concluir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{K,p}(E_n) = \mathcal{C}_{K,p}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{K,p}(B_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{K,p}(E_n).$$

$\square$

3.2 Função e Potencial Capacitária

O Teorema 3.1.6 garante que $\mathcal{C}_{K,p}$ é uma capacidade de Choquet. Este resultado define as classes de conjuntos que são $\mathcal{C}_{K,p}$ -capacitáveis que nos permite estender os resultados, até agora construídos em conjuntos compactos, para conjuntos analíticos e em particular os borelianos. O interessante deste resultado é observar a capacitabilidade de uma coleção mais geral de conjuntos do que somente os borelianos. Afinal existem conjuntos analíticos que são capacitáveis, mas não são borelianos. Por exemplo, a projeção de borelianos sobre o espaço euclidiano são conjuntos analíticos, mas não são borelianos. Agora daremos atenção à uma discussão sobre funções capacitárias e potências de $\mathcal{C}_{K,p}$.

Definição 3.2.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto tal que $0 < \mathcal{C}_{K,p}(A) < \infty$. Dizemos que uma função $f \in L_+^p(d\mu)$ é uma $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária de A se,

$$(i) \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu = \mathcal{C}_{K,p}(A);$$

$$(ii) (T_K f)(x) \geq 1 \text{ em } A \text{ } \mathcal{C}_{K,p} - a.e \text{ em } A.$$

Se f^A é uma $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária de A , chamamos $(T_K f^A)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f^A(y) d\mu(y)$ de potencial capacitário de A .

Teorema 3.2.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ tal que $0 < \mathcal{C}_{K,p}(A) < \infty$. Então existe uma única $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária f^A de A . Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f^A(x))^{p-1} g(x) d\mu(x) \geq 0,$$

para qualquer $g \in L^p(d\mu)$ tal que

$$(T_K g)(x) \geq 0 \text{ } \mathcal{C}_{K,p} - a.e \text{ em } A$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em 2 etapas, primeiro mostraremos a existência da função capacitária e utilizaremos a unicidade do limite para concluir que a função capacitária é única. Em seguida demonstraremos a desigualdade destacada no enunciado.

Etapa (1): Seja $\mathcal{C}_{K,p}(A) = \alpha$ e seja $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência de funções teste de A tal que $\int_{\mathbb{R}^d} |f_j|^p d\mu \rightarrow \alpha$. A existência desta sequência é devido ao Teorema 3.1.6 (i). Mostraremos que $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L_+^p(d\mu)$. Note que $(T_K \frac{1}{2}(f_i + f_j))(x) \geq 1$ em A . Consequentemente

$$\left\| \frac{1}{2}(f_i + f_j) \right\|_{L^p(d\mu)} \geq \alpha.$$

Utilizando o Teorema 2.5.1 (Desigualdade de Clarkson), para $p \geq 2$, temos que

$$\left\| \frac{1}{2}(f_i - f_j) \right\|_{L^p(d\mu)} \leq \left\| \frac{1}{2}f_j \right\|_{L^p(d\mu)} + \left\| \frac{1}{2}f_i \right\|_{L^p(d\mu)} - \left\| \frac{1}{2}(f_i + f_j) \right\|_{L^p(d\mu)} \leq 0.$$

Logo,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2}(f_i - f_j) \right\|_{L^p(d\mu)} \leq 0,$$

isto é, $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ é sequência de Cauchy em $L^p(d\mu)$. Portanto existe $f \in L_+^p(d\mu)$ tal que $f_j \rightarrow f$ em $L_+^p(d\mu)$. Afirmação:

$$\|f\|_{L^p(d\mu)} = \alpha = \mathcal{C}_{K,p}(A).$$

De fato, pelo Teorema 3.1.4, $(T_K f_j) \rightarrow (T_K f)$ $\mathcal{C}_{K,p} - a.e$ sobre o conjunto A . Portanto, $(T_K f)(x) \geq 1$ $\mathcal{C}_{K,p} - a.e$ em A e a unicidade do limite garante a unicidade da função capacitária.

Etapa (2): Seja $g \in L^p(d\mu)$ tal que $(T_K g)(x) \geq 0$ em $A \setminus \mathcal{C}_{K,p} - a.e.$ Perceba que $f + tg$ é função teste de A , quando $t \geq 0$. Com efeito,

$$(T_K(f + tg))(x) = (T_K f)(x) + (T_K(tg))(x) \geq (T_K f)(x) \geq 1 \text{ em } A. \quad (3.9)$$

Tomando a derivada com relação a t em $t = 0$ na expressão (3.9) temos que

$$p \int f(x)^{p-1} g(x) d\mu(x) \geq 0.$$

□

Corolário 3.2.1. *Seja $0 < \mathcal{C}_{K,p}(A) < \infty$ e seja f sua $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária. Então,*

$$\left| \int f(x)^{p-1} g(x) d\mu(x) \right| \leq \mathcal{C}_{K,p}(A) \sup_A |(T_K g)(x)| \quad \forall g \in L^p(d\mu).$$

Demonstração. Quando $\sup_A |(T_K g)(x)|$ é zero ou não é finito, então a desigualdade segue trivialmente. Então, suponha que $\sup_A |(T_K g)(x)|$ é finito, digamos $\sup_A |(T_K g)(x)| = c$. Como $(T_K f)(x)$ é o potencial capacitário de A , então $(T_K(f - c^{-1}g))(x) \geq 0$ em $A \setminus \mathcal{C}_{K,p} - a.e.$ Com efeito,

$$(T_K(f - c^{-1}g))(x) = (T_K f)(x) - (T_K(c^{-1}g))(x) \geq 1 - (T_K(c^{-1}g))(x) = 1 - c^{-1}(T_K g)(x) \geq 0.$$

À luz do Teorema, 3.2.1 substituindo g por $f - c^{-1}g$ concluímos que

$$\begin{aligned} \int f(x)^{p-1} (f(x) - c^{-1}g(x)) d\mu(x) &\geq 0. \\ \int f(x)^p d\mu(x) - c^{-1} \int f(x)^{p-1} g(x) d\mu(x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Isto implica:

$$\int (f(x))^{p-1} g(x) d\mu(x) \leq c \int (f(x))^p d\mu(x) = \mathcal{C}_{K,p}(A) \sup_A |(T_K g)(x)|.$$

Refazendo a demonstração com $-g$ de maneira análoga concluímos o resultado. □

Corolário 3.2.2. *Seja $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência arbitrária de conjuntos e A um conjunto qualquer com funções capacitárias f_n e f respectivamente. Se $A \subset \liminf A_n$ e $\lim \mathcal{C}_{K,p}(A_n) = \mathcal{C}_{K,p}(A)$, então f_n converge em norma, ou fortemente, para $f \in L^p(d\mu)$.*

Demonstração. Note que os f_n formam uma sequência limitada, então é possível extrair uma subsequência $f_{n_j} \rightharpoonup g \in L^p(d\mu)$. O Teorema 3.1.5 garante que g é uma função teste de A e portanto $(T_K g)(x) \geq 1$ em A . Utilizando a Proposição 2.2.3 temos que $\|g\|_{L^p(d\mu)} \leq$

$\liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_{n_j}\|_{L^p(d\mu)}$. Por construção temos que

$$\mathcal{C}_{K,p}(A) \leq \mathcal{C}_{K,p}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathcal{C}_{K,p}(A_n) = \lim \mathcal{C}_{K,p}(A_n) = \mathcal{C}_{K,p}(A).$$

Isto nos diz que $\|g\|_{L^p(d\mu)} \leq \mathcal{C}_{K,p}(A) = \|f\|_{L^p(d\mu)}$, e como f^A é $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária de A segue que $\|f_{n_j}\|_{L^p(d\mu)} \rightarrow \|f\|_{L^p(d\mu)}$ fortemente. $\square$

3.3 A capacidade dual de $\mathcal{C}_{K,p}$

Nesta seção vamos definir a capacidade dual de $\mathcal{C}_{K,p}$ e desenvolver os principais resultados à luz do que foi desenvolvido na seção anterior. Dizemos que uma medida está concentrada em um conjunto A , se $\mu(B) = 0$ para todo conjunto $B \subset \mathbb{R}^d \setminus A$. Por exemplo, se $\text{spt}(\mu) \subset K$, então μ está concentrada em K . Mas $\mu(B) = 0 \forall B \subset \mathbb{R}^d \setminus A$, não implica que $\text{spt}(\mu) \subset A$.

Definição 3.3.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ e $\mathcal{F}_1$ a σ -álgebra de conjuntos ν -mensuráveis. Seja $A \in \mathcal{F}_1$. Definimos a capacidade dual de $\mathcal{C}_{K,p}(A)$ por:*

$$\text{Cap}_{K,p}(A) = \sup\{\nu(A) : \nu \text{ está concentrada em } A \text{ } \|(\overset{\vee}{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \leq 1\}.$$

Uma medida ν concentrada em A satisfazendo $\|(\overset{\vee}{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \leq 1$ será chamada de medida teste de $\text{Cap}_{K,p}(A)$, ou simplesmente medida teste de A .

Teorema 3.3.1. *A capacidade dual de $\mathcal{C}_{K,p}$ é uma Capacidade interior sobre $\mathcal{F}_1$, isto é,*

- (i) $\text{Cap}_{K,p}(\emptyset) = 0$;
- (ii) Se $A_1 \subset A_2$, então $\text{Cap}_{K,p}(A_1) \leq \text{Cap}_{K,p}(A_2)$;
- (iii) Seja $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{F}_1$. Então $\text{Cap}_{K,p}(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \text{Cap}_{K,p}(A_j)$;
- (iv) Se $A \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto, então:

$$\text{Cap}_{K,p}(A) = \sup\{\text{Cap}_{K,p}(K) : K \subset A \text{ } K \text{ é compacto}.$$

Demonstração. Pela Definição 3.3.1, é claro que $\text{Cap}_{K,p}(\emptyset) = 0$ e $\text{Cap}_{K,p}(A) \leq \text{Cap}_{K,p}(B)$, se $A \subset B$ e $A, B \in \mathcal{F}_1$.

A seguir, vamos mostrar a subaditividade. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que a sequência de conjuntos $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ é disjunta, já que dada uma família de conjuntos é sempre possível reescrevê-la como uma família disjunta. Dito isso, seja $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ e denote por ν uma medida teste para $\text{Cap}_{K,p}(A)$. Note que a restrição $\nu_j = \nu|_{A_j}$ é uma medida teste de $\text{Cap}_{K,p}(A_j)$. Como estes conjuntos são disjuntos, podemos escrever

$$\nu = \sum_{j=1}^\infty \nu_j.$$

Consequentemente,

$$\nu(A) = \int_A d\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} d\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{Cap}_{K,p}(A_j),$$

pois $\nu_j(A_j) \leq \text{Cap}_{K,p}(A_j)$ para todo j .

Agora resta mostrar que $\text{Cap}_{K,p}(A) = \sup\{\text{Cap}_{K,p}(K) : K \subset A\}$. Considere ν uma medida teste de $\text{Cap}_{K,p}(A)$. Tome $K \subset A$ e denote por ν_K a restrição de ν ao compacto K . Como no caso anterior perceba que ν_K é uma medida teste de K . Utilizando a regularidade das medidas de Radon, Definição 2.1.1 item (ii), temos que

$$\nu(A) = \sup\{\nu(K), K \subset A\} \leq \text{Cap}_{K,p}(K).$$

Então,

$$\nu(A) \leq \sup\{\text{Cap}_{K,p}(K) : K \subset A\}.$$

Como ν é uma medida teste para $\text{Cap}_{K,p}(A)$, basta utilizar a definição de supremo para concluir que

$$\text{Cap}_{K,p}(A) \leq \sup\{\text{Cap}_{K,p}(K) : K \subset A\}.$$

Por outro lado $\text{Cap}_{K,p}(K) \leq \text{Cap}_{K,p}(A)$ o que nos leva a conclusão.

□

Como fizemos na seção anterior, queremos construir a noção de função capacitária e potencial capacitário para $\text{Cap}_{K,p}$. Em alguns problemas estaremos trabalhando com funções capacitárias e potencias dos dois tipos. Afim de diferencia-los, colocaremos a capacidade a qual estamos nos referindo explicitamente.

Definição 3.3.2. *Seja $A \in \mathcal{F}_1$ tal que $\text{Cap}_{K,p}(A) < \infty$. Dizemos que ν é $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária de A , se ν é uma medida teste de A e*

$$\nu(A) = \text{Cap}_{K,p}(A).$$

Quando ν é $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária, o potencial $(\bigvee_K \nu)(\cdot)$ é chamado de potencial capacitário

Teorema 3.3.2. *Seja A um conjunto fechado tal que $\text{Cap}_{K,p}(A) < \infty$. Se*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Cap}_{K,p}(A_r) = 0, \quad A_r = (A \cap \{x \in \mathbb{R}^d : |x| > r\}),$$

então A admite uma $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária. Em particular, se B é compacto tal que $\text{Cap}_{K,p}(B) < \infty$, então B possui uma $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária.

Demonstração. Como A é um conjunto fechado, então existe uma sequência de conjuntos compactos $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B_i \uparrow A$. Com efeito, denote por $B[i]$ a bola fechada de centro na origem e raio $i \in \mathbb{N}$. Chame $B_i = A \cap B[i]$. Note que B_i é compacto para todo $i \in \mathbb{N}$ e

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = A.$$

Pelo Teorema 3.3.1 existe um compacto $K \subset A$ tal que

$$\text{Cap}_{K,p}(A) = \sup\{\text{Cap}_{K,p}(B) : B \subset A\}.$$

Por esta razão, existem ν_i medidas testes dos $\text{Cap}_{K,p}(B_i)$ tais que $\nu_i(B_i) \uparrow \text{Cap}_{K,p}(A) = \sup\{\text{Cap}_{K,p}(B) : B \subset A\}$. As medidas teste ν_i formam uma sequência limitada, então pelo Lema 2.2.1 é possível extrair uma subsequência, ν_{i_j} , que converge na topologia fraca de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ para uma medida teste ν de $\text{Cap}_{K,p}(A)$. O objetivo é mostrar que $\nu(A) = \text{Cap}_{K,p}(A)$. Note que $A_r \subset A$, então $\nu_{i_j}|_{A_r}$ é uma medida teste de $\text{Cap}_{K,p}(A_r)$. Por hipótese, $\lim_{r \rightarrow \infty} A_r = \emptyset$, então $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_r \leq \varepsilon$. Consequentemente,

$$\nu_{i_j}|_{A_r}(A_r) \leq \text{Cap}_{K,p}(A_r) \leq \varepsilon, \quad \forall r \geq N.$$

Escreva $A = (A_r) \cup (A \setminus A_r)$. Logo

$$\text{Cap}_{K,p}(A) \leq \nu_{i_j}(A) \leq \nu_{i_j}(A \setminus A_r) + \frac{1}{j}, \quad \text{escolhendo } \varepsilon = \frac{1}{j}.$$

Agora basta tomar o limite $\lim_{j \rightarrow \infty}$ e concluir

$$\text{Cap}_{K,p}(A) - \varepsilon \leq \nu(A \setminus A_r).$$

Por monotonicidade $\nu(A) \geq \nu(A \setminus A_r)$, consequentemente

$$\text{Cap}_{K,p}(A) - \varepsilon \leq \nu(A).$$

Por fim, nos resta mostrar que ν é medida teste de A . Pela Proposição 3.1.1, temos que

$$\|(\check{T}_K \nu)(x)\|_{L^q(d(\mu))} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|(\check{T}_K \nu_j)(x)\|_{L^q(d(\mu))} \leq 1.$$

Segue o resultado. □

3.4 A relação entre $\text{Cap}_{K,p}$ e $\mathcal{C}_{K,p}$

Nesta seção estamos interessados na relação entre as duas capacidades. Fuglede (FUGLEDE, 1965) utilizou o Teorema Minimax de Von Neumann (NEUMANN, 1928) de teoria

dos jogos para mostrar que estas capacidades coincidem com algumas condições específicas. O objetivo desta seção é mostrar quais são estas condições, e em particular mostrar que $\text{Cap}_{K,p}$ é capacidade de Choquet. A estratégia adotada é enunciar o Teorema Minimax e uma sequência de lemas, que darão suporte teórico para a demonstração do Teorema 3.4.1.

Teorema 3.4.1. *Se $1 < p < \infty$ e $A \in \mathcal{F}_1$, então $[\text{Cap}_{K,p}(A)]^p = \mathcal{C}_{K,p}(A)$.*

Antes de demonstrar o resultado vamos enunciar o Teorema Minimax veja (ADAMS; HEDBERG, 1999, Teorema 2.4.1) e uma sequência de lemas.

Lema 3.4.1 (Teorema Minimax). *Suponha que X é um espaço compacto de Hausdorff e Y um conjunto arbitrário. Considere φ uma função real satisfazendo $-\infty < \varphi(x, y) \leq +\infty$ em $X \times Y$ tal que $\varphi(\cdot, y)$ semi-contínua inferiormente em x para cada y fixado, convexa em X e $\varphi(x, \cdot)$ côncava em Y . Então,*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \varphi(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \varphi(x, y).$$

Iremos aplicar o Teorema Minimax ao funcional bilinear $E_K(\nu, f\mu)$ sobre $X \times Y$, onde $X = \{\nu : \nu \in \mathcal{M}^+(A), \nu(A) = 1\}$ e $Y = \{f \in L^p_+(d\mu), \|f\|_{L^p(d\mu)}^p \leq 1\}$. Claro que X e Y são convexos. Para cada $f\mu$ fixado o funcional $\nu \mapsto E_K(\nu, f\mu)$ é s.c.i pela Proposição 3.1.1 item (i) e X é compacto na topologia fraca de $\mathcal{M}^+(A)$ pelo Lema 2.2.1.

Lema 3.4.2. $Y = \{f \in L^p_+(d\mu); \|f\|_{L^p(d\mu)}^p \leq 1\}$. Então,

$$[\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{-1/p} = \sup_{f \in Y} \inf_{x \in A} (T_K f)(x).$$

Demonstração. Suponha que

$$\sup_{f \in Y} \inf_{x \in A} (T_K f)(x) = \alpha,$$

e seja g uma função teste de A , isto é, $g \geq 0$ e $(T_K g) \geq 1$ em A . Defina $f = g/\|g\|_{L^p(d\mu)}$ e note que $(T_K f)(x) \geq 1/\|g\|_{L^p(d\mu)}$ e $\|f\|_{L^p(d\mu)}^p = 1$. Então $f \in Y$ e consequentemente $\alpha \geq 1/\|g\|_p$. Como g é uma função teste escolhida arbitrariamente, então $\alpha \geq [\mathcal{C}_{K,p}(K)]^{-1/p}$.

Por outro lado tome $f \in Y$ e seja $m = \inf_{x \in A} (T_K f)(x) > 0$. Denote por $g = f/m$ e perceba que g é função teste de A . Por definição,

$$\mathcal{C}_{K,p}(A)^{1/p} \leq \|g\|_p = \frac{\|f\|_p}{m} \leq \frac{1}{m}.$$

Portanto, $\mathcal{C}_{K,p}(A)^{-1/p} \geq m \forall f \in Y$. Consequentemente, $\mathcal{C}_{K,p}(A)^{-1/p} \geq \alpha$. $\square$

Lema 3.4.3. *Seja $X = \{\nu \geq 0; \nu(A) = 1, \text{spt}(\nu) \subset A\}$. Então,*

$$\mathcal{C}_{K,p}(A)^{-1/p} = \sup_{f \in Y} \inf_{\nu \in X} E_K(\nu, f\mu).$$

Demonstração. Denote por δ_x a medida Dirac de x . Então, $(T_K f)(x) = E_K(\delta_x, f\mu)$. Como $\delta_x \in X$, para $x \in A$, então pelo Lema 3.4.2,

$$E_K(\delta_x, f\mu) \leq [\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{-1/p}.$$

Por outro lado note que

$$E_K(\nu, f\mu) = \int (T_K f)(x) d\nu(x) \geq \inf_{x \in A} (T_K f)(x) \int_{\mathbb{R}^d} d\nu = \inf_{x \in A} (T_K f)(x).$$

Tomando em ambos os lados $\sup_{f \in Y}$ e utilizando o Lema 3.4.2

$$\sup_{f \in Y} E_K(\nu, f\mu) \geq \sup_{f \in Y} \inf_{x \in A} (T_K f)(x) = [\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{-1/p}.$$

Como a desigualdade acima é válida para toda $\nu \in X$, então em particular

$$\inf_{\nu \in X} \sup_{f \in Y} E(\nu, f\mu) \geq [\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{-1/p}.$$

□

Lema 3.4.4.

$$[Cap_{K,p}(A)]^{-1} = \inf_{\nu \in X} \sup_{f \in Y} E(\nu, f\mu).$$

Demonstração. Denote

$$\beta = \inf_{\nu \in X} \sup_{f \in Y} E(\nu, f\mu).$$

Seja $\lambda \neq 0$ uma medida teste de A e escreva $\nu = \lambda / \|\lambda\|$. Isto nos diz que $\nu \in X$ e

$$\|(\check{T}_K \nu)(y)\|_{L^q(d\mu)} \leq 1 / \|\lambda\|.$$

Usando a dualidade em $L^p(d\mu)$, podemos escrever

$$\|f\|_{L^p(d\mu)} = \sup_{\|g\|_{L^q(d\mu)} \leq 1} \left| \int f g dx \right|, \quad (3.10)$$

onde o supremo é tomado de $\{g \in L^q_+ : \|g\|_{L^q(d\mu)} \leq 1\}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Este resultado está em (AIKAWA; ESSÉN, 2006, Lema 3.1.1). Utilizando a identidade 3.10 para energia associada ao núcleo K , temos que

$$\begin{aligned} \|(\check{T}_K \nu)(y)\|_{L^q(d\mu)} &= \sup_{\|f\|_{L^p(d\mu)} \leq 1} \int (\check{T}_K \nu)(y) f(y) d\mu(y). \\ &= \sup_{f \in Y} \int \left(\int K(x, y) d\nu(x) \right) f(y) d\mu(y). \\ &\stackrel{Fubini}{=} \sup_{f \in Y} E_K(\nu, f\mu) \leq 1 / \|\lambda\|, \quad \forall \nu \in X. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\beta \leq \inf_{\nu \in X} \sup_{f \in Y} E_K(\nu, f\mu) \leq 1/\|\lambda\|.$$

Como λ é medida teste para A segue que $\beta \leq [\text{Cap}_{K,p}(A)]^{-1}$. Por outro lado, tome $\nu \in X$. Defina $\lambda = \nu / \|(\bigvee_K \nu)(y)\|_{L^q(d\mu)}$. Perceba que λ é uma medida teste de A . Utilize novamente (3.10), para obter $(\bigvee_K \nu)$

$$\text{Cap}_{K,p}(A) \geq \|\lambda\| = 1/\|(\bigvee_K \nu)(y)\|_{L^q(d\mu)} = \left[\sup_{f \in Y} E(\nu, f\mu) \right]^{-1}.$$

Como ν é uma medida teste arbitrária basta tomar o supremo. $\square$

Demonstração Teorema 3.4.1. Utilizaremos os Lemas 3.4.3 e 3.4.4 juntamente com o Teorema 3.4.1 para concluir o resultado desejado. Aplicando o Teorema sobre a energia mútua associada ao núcleo K sobre $X \times Y$ temos que

$$\inf_{\nu \in X} \sup_{f \in Y} E_K(\nu, f\mu) = \sup_{f \in Y} \inf_{\nu \in X} E_K(\nu, f\mu). \quad (3.11)$$

O Lema 3.4.3 implica

$$\mathcal{C}_{K,p}(A)^{-1/p} = \sup_{f \in Y} \inf_{\nu \in X} E_K(\nu, f\mu)$$

e o Lema 3.4.4 conclui

$$[\text{Cap}_{K,p}(A)]^{-1} = \inf_{\nu \in X} \sup_{f \in Y} E(\nu, f\mu).$$

Utilizando (3.11) temos a identidade desejada

$$\mathcal{C}_{K,p}(A)^{-1/p} = \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1}.$$

$\square$

Observação 3.4.1. É possível estender o Teorema 3.4.1 definindo a capacidade dual exterior de $\mathcal{C}_{K,p}(\cdot)$.

Definição 3.4.1. Seja $\text{Cap}_{K,p}$ a capacidade dual de $\mathcal{C}_{K,p}$. A capacidade exterior de $\text{Cap}_{K,p}$ é definida por

$$\text{Cap}_{K,p}^*(A) = \inf\{\text{Cap}_{K,p}(G), A \subset G\}, G \text{ aberto de } \mathbb{R}^d.$$

Teorema 3.4.2. $[\text{Cap}_{K,p}^*(A)]^p = \mathcal{C}_{K,p}(A)$, para qualquer conjunto A .

Demonstração. Mostraremos que o Teorema 3.4.1 implica este teorema, quando A é compacto. Com efeito, $\text{Cap}_{K,p}$ é capacidade interior pelo Teorema 3.3.1, portanto $[\text{Cap}_{K,p}(G)]^p = [\text{Cap}_{K,p}^*(G)]^p = \mathcal{C}_{K,p}(G)$, quando G é um aberto de $\mathbb{R}^d$ que é $\mathcal{C}_{K,p}$ -capacitável. Além disso, $\text{Cap}_{K,p}^*$ e $\mathcal{C}_{K,p}$ são capacidades exteriores, então pelo Teorema 3.1.1 e a Definição 3.4.1

$[\text{Cap}_{K,p}^*(A)]^p = \mathcal{C}_{K,p}(A)$, quando A arbitrário. Logo, o Teorema de Capacitabilidade de Choquet (CHOQUET, 1959) garante que os conjuntos analíticos são $\text{Cap}_{K,p}$ -capacitáveis, o que implica $[\text{Cap}_{K,p}(A)]^p = \mathcal{C}_{K,p}(A)$, quando A é analítico, em particular $\text{Cap}_{K,p}$ é capacidade de Choquet. $\square$

O Teorema 3.4.1 nos permite definir a capacidade $\mathcal{C}_{K,p}(\cdot)$ via a sua capacidade dual $\text{Cap}_{K,p}(\cdot)$, a saber, dado $A \subset \mathbb{R}^d$ subconjunto compacto temos que

$$\mathcal{C}_{K,p}(A)^{\frac{1}{p}} = \sup\{\nu(A) : \nu \text{ concentrada em } A \text{ e } \|(\overset{\vee}{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \leq 1\}, \text{ onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O Teorema 3.4.1 também nos permite representar a função capacitária f^A , de um conjunto compacto A , via uma medida capacitária de μ^A de A . Para introduzir o conceito de medida capacitária μ^A , precisaremos introduzir primeiro o conceito de potencial não-linear de Havin-Maz'ya associada ao núcleo K .

3.5 Potencial não-linear de Havin-Maz'ya

Seja $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, potencial não-linear de de Havin-Maz'ya associado a K é definido por:

$$\begin{aligned} (V_{K,p}\nu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) [(\overset{\vee}{T}_K \nu)(y)]^{q-1} dy. \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) d\nu(x) \right)^{q-1} dy, \end{aligned}$$

onde $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Usando o Teorema de Fubini, note que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (V_{K,p}(\mu)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} [(\overset{\vee}{T}_K \mu)(y)]^q dy.$$

Definição 3.5.1 (Medida Capacitária). *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ tal que $0 < \mathcal{C}_{K,p}(A) < \infty$. Dizemos que γ^A é medida capacitária de A , se $\text{spt}(\gamma^A) \subset \bar{A}$ e*

- (i) $\gamma^A(A) = \mathcal{C}_{K,p}(A)$;
- (ii) $(V_{K,p}\gamma^A)(x) \geq 1$ $\mathcal{C}_{K,p}$ -a.e em A ;
- (iii) $(V_{K,p}\gamma^A)(x) \leq 1$ no $\text{spt}(\gamma^A)$.

O conteúdo do nosso próximo Teorema, afirma que conjuntos compactos admitem medida capacitária. No entanto, para mostrar este resultado precisaremos de uma relação explícita entre funções capacitárias f^A e $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária ν de A , a saber,

$$f^A(y) = \text{Cap}_{K,p}(A) [(\overset{\vee}{T}_K \nu)(y)]^{\frac{1}{p-1}}, \quad (3.12)$$

se A for um conjunto compacto. Vamos provar (3.12) na última seção deste capítulo.

Teorema 3.5.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto tal que $0 < \mathcal{C}_{K,p}(A) < \infty$. Então, A admite uma medida capacitária γ^A .*

Demonstração. Usando os Teoremas 3.2.1 e 3.3.2 sabemos que existe uma função capacitária f^A de A e uma $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária ν de A , respectivamente. Mas usando o Teorema 3.6.1, temos que f^A e ν estão relacionadas por

$$(a) \quad f^A = \text{Cap}_{K,p}(A) (\check{T}_K \nu)^{\frac{1}{p-1}} \text{ a.e em } \mathbb{R}^d.$$

$$(b) \quad (T_K f^A \mu) \geq 1 \mathcal{C}_{K,p} - \text{a.e em } A.$$

Considere a medida de equilíbrio de ν .

$$\gamma^A = [\text{Cap}_{K,p}(A)]^{p-1} \nu = [\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{\frac{p-1}{p}} \nu = [\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{\frac{1}{q}} \nu,$$

pois $[\text{Cap}_{K,p}(A)]^p = \mathcal{C}_{K,p}(A)$. Queremos mostrar que γ^A é medida capacitária de A . Claro que $\text{spt}(\gamma^A) = \text{spt}(\nu) \subset A$. Como ν é uma $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária de A , então

$$(i) \quad \gamma^A(A) = [\text{Cap}_{K,p}(A)]^{p-1} \nu(A) = [\text{Cap}_{K,p}(A)]^p = \mathcal{C}_{K,p}(A).$$

Notando que

$$\begin{aligned} f^A(y) &= \text{Cap}_{K,p}(A) [(\check{T}_K \nu)(y)]^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \text{Cap}_{K,p}(A) \left\{ \check{T}_K \left(\frac{\gamma^A}{[\text{Cap}_{K,p}(A)]^{p-1}}(y) \right) \right\}^{\frac{1}{p-1}} \\ &= (\check{T}_K \gamma^A)^{\frac{1}{p-1}}(y) = (\check{T}_K \gamma^A)^{q-1}, \text{ pois } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Então, usando o item (b) e a definição de potencial não-linear de Havin-Maz'ya, segue que

$$\begin{aligned} (V_{K,p} \gamma^A)(x) &= \int K(x, y) \left(\int K(x, y) d\gamma^A(x) \right)^{q-1} dy \\ &= \int K(x, y) [(\check{T}_K \gamma^A)(y)]^{q-1} dy \\ &= (T_K f^A dy)(x) \geq 1 \mathcal{C}_{K,p} - \text{a.e em } A. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Se olharmos com cuidado a prova do Teorema anterior, podemos notar que se A é compacto e $1 < p < \infty$, então temos que

$$f^A = (\check{T}_K \gamma^A)^{\frac{1}{p-1}} \text{ e } \gamma^A(A) = \mathcal{C}_{K,p}(A).$$

Além disto, veremos no teorema abaixo,

$$(V_{K,p}\gamma^A)(x) \leq 1, \text{ no } \text{spt}(\gamma^A).$$

Teorema 3.5.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ compacto e $1 < p < \infty$. Então existe uma medida $\gamma^A \in \mathcal{M}^+(A)$ tal que $f^A = (\check{T}_K \gamma^A)^{\frac{1}{p-1}}$,*

$$(i) \quad \gamma^A(A) = \mathcal{C}_{K,p}(A);$$

$$(ii) \quad (T_K f^A)(x) = (V_{K,p}\gamma^A)(x) \leq 1 \text{ no } \text{spt}(\gamma^A);$$

$$(iii) \quad \mathcal{C}_{K,p}(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{M}^+(A) \text{ e } (V_{K,p}\mu)(x) \leq 1 \text{ em } \text{spt}(\mu)\}.$$

Demonstração. Basta demonstrar o item (ii) e o item (iii).

Demonstração item (ii): Primeiro vamos assumir que a medida γ^A é absolutamente contínua com respeito a capacidade $\mathcal{C}_{K,p}(\cdot)$, isto é, se $A \subset \mathbb{R}^d$ satisfaz $\mathcal{C}_{K,p}(A) = 0$, então $\gamma^A(A) = 0$. Em outras palavras, se uma propriedade $P(x)$ é válida $\mathcal{C}_{K,p}$ - a.e então $P(x)$ é válida γ^A - a.e. Suponha que $(T_K f^A)(x_0) > 1$, então usando a Proposição 3.1.1 item (a) existe $\delta > 0$ tal que $(T_K f^A)(x) \geq 1 + \delta$ em uma vizinhança aberta G de x_0 . Na prova do Teorema 3.6.1 vimos que $(T_K f^A)(x) \geq 1$ $\mathcal{C}_{K,p}$ - a.e em A . Como γ^A é absolutamente contínua com respeito a $\mathcal{C}_{K,p}(\cdot)$, então $(T_K f^A)(x) \geq 1$ γ^A - a.e em A . Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K,p}(A) = \gamma^A(A) &\stackrel{*}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} (T_K f^A) d\gamma^A \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\check{T}_K \gamma^A) f^A d\mu \stackrel{**}{\leq} \| \check{T}_K \gamma^A \|_{L^q(d\mu)} \| f^A \|_{L^p(d\mu)}. \\ &= \| (\check{T}_K \gamma^A) \|_{L^q(d\mu)} \| (\check{T}_K \gamma^A) \|_{L^q(d\mu)}^{\frac{q}{p}} = \int | \check{T}_K \gamma^A |^q d\mu, \end{aligned}$$

pois $f^A = (\check{T}_K \gamma^A)^{\frac{1}{p-1}}$ o que implica $\| f^A \|_{L^p(d\mu)} = \| \check{T}_K \gamma^A \|_{L^q(d\mu)}^{\frac{q}{p}}$. A desigualdade (*) se deve ao fato de que $(T_K f^A) \geq 1$ γ^A - a.e em A e (**) é a desigualdade de Hölder. Agora relembre que $\gamma^A = [\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{\frac{1}{q}} \nu$, onde ν é uma $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária de A . Em particular $\| \check{T}_K \nu \|_{L^q(d\mu)} \leq 1$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K,p}(A) = \gamma^A &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (T_K f^A) d\gamma^A \\ &\leq \int | \check{T}_K \gamma^A |^q d\mu = \mathcal{C}_{K,p}(A) \int | \check{T}_K \nu |^q d\mu \\ &\leq \mathcal{C}_{K,p}(A) = \gamma^A(A). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{K,p}(A) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\check{T}_K f^A) d\gamma^A \\
 &= \int_G (\check{T}_K f^A) d\gamma^A + \int_{A \setminus G} (\check{T}_K f^A) d\gamma^A. \\
 &\geq (1 + \delta)\gamma^A(G) + \gamma^A(A \setminus G) \\
 &= \delta\gamma^A(G) + \gamma^A(A). \\
 &= \delta\gamma^A(G) + \mathcal{C}_{K,p}(A).
 \end{aligned}$$

Isto prova que $\gamma^A(G) = 0$, ou seja $x_0 \notin \text{spt}(\gamma^A)$. Logo

$$(T_K f^A)(x) = (V_{K,p}\gamma^A)(x) \leq 1, \quad \forall x \in \text{spt}(\gamma^A).$$

Demonstração item (iii): Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ e assumamos que $(V_{K,p}\mu)(x) \leq 1$ no $\text{spt}(\mu)$. Então,

$$\mu(A) \geq \int_A (V_{K,p}\mu) d\mu = \|(\check{T}_K \mu)\|_{L^q(d\mu)}^q. \quad (3.13)$$

Por outro lado, se $f \in \Omega_A$, isto é, $f \geq 0$ e $(T_K f\mu)(x) \geq 1$ em A , então

$$\mu(A) \leq \int (T_K f\mu) d\mu = \int (\check{T}_K \mu) f d\mu \leq \|(\check{T}_K \mu)\|_{L^q(d\mu)} \|f\|_{L^p(d\mu)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \mu(A) &\leq \|(\check{T}_K \mu)\|_{L^q(d\mu)} [\mathcal{C}_{K,p}(A)]^{\frac{1}{p}} \\
 &\stackrel{(3.13)}{\leq} \mu(A)^{\frac{1}{q}} \mathcal{C}_{K,p}(A)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mu(A) \leq \mathcal{C}_{K,p}(A)$ e obtemos

$$\sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{M}^+(A) \text{ e } (V_{K,p}\mu)(x) \leq 1 \text{ no } \text{spt}(\mu)\} \leq \mathcal{C}_{K,p}(A).$$

Seja $\mu = \gamma^A$ e note que $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ e $(V_{K,p}\mu) \leq 1$ sobre o suporte $\text{spt}(\mu)$. Como $\mu(A) = \mathcal{C}_{K,p}(A)$, então a prova do item (iii) é finalizada como desejado. $\square$

3.6 Relação entre Distribuições Capacitárias

Como antecipa o título desta sessão, estamos interessados na conexão entre as $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária e $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária. Para construirmos esta conexão precisaremos de uma informação referente a espaços convexos, que são os pontos de sela. Os pontos de sela são pontos críticos em funções de duas variáveis, onde seguindo a direção de um dos eixos coordenados há um ponto de mínimo local e ao seguir o eixo coordenado restante há um ponto

de máximo local. O ponto de sela recebe este nome devido ao formato do gráfico ao redor deste ponto

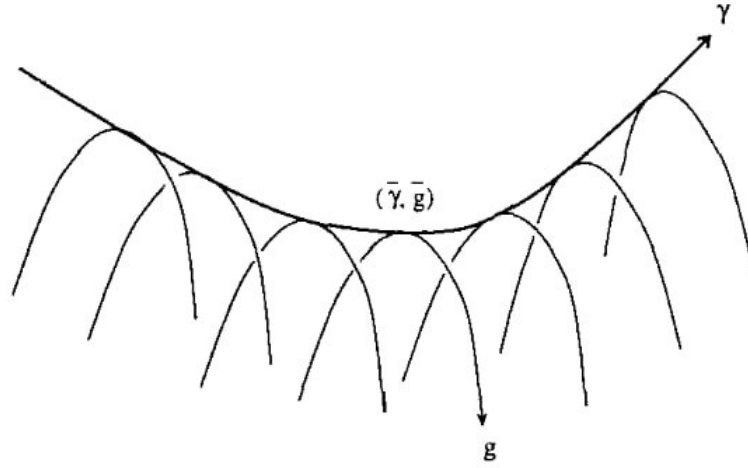


Imagem acima retirada de (AIKAWA; ESSÉN, 2006)[Cap 3, Seção 7]. No nosso caso dizemos que $(\bar{\gamma}, \bar{g})$ é ponto de sela da energia mútua associada ao núcleo K , se $E_K(\bar{\gamma}, g) \leq E_K(\bar{\gamma}, \bar{g}) \leq E_K(\gamma, \bar{g})$ para qualquer $\bar{g} \in Y$ e qualquer $\bar{\gamma} \in X$ tal que $\|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} < \infty$. Lembrando que $X = \{\nu \geq 0; \nu(A) = 1, \text{spt}(\nu) \subset A\}$, onde $A \in \mathcal{F}_1$ definido no Lema 3.4.3. Esta seção tem como objetivo mostrar a relação entre as $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária e $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária com o ponto de sela de

$$\sup_{g \in Y} \inf_{\gamma \in X} E_K(\gamma, g\mu) = \inf_{\gamma \in X} \sup_{g \in Y} E_K(\gamma, g\mu). \quad (3.14)$$

Tal que $\|(\check{T}_K \bar{\gamma})\|_{L^q(d\mu)} < \infty$. Antes de partirmos para o resultado de fato, demonstraremos um lema.

Lema 3.6.1. *Seja $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} < \infty$. Então, ν é absolutamente contínua com relação a $\mathcal{C}_{K,p}$.*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que se uma certa propriedade é válida $\mathcal{C}_{K,p}$ - a.e., então esta mesma propriedade é válida ν - a.e. Tome $\varepsilon > 0$ e seja $A \subset \mathbb{R}^d$. Como $\mathcal{C}_{K,p}(A) = 0$, existe uma função teste $f \in L^p_+(d\mu)$ tal que $\|f\|_{L^p(d\mu)} < \varepsilon$. Usando o Teorema de Fubini e a

desigualdade de Hölder e o fato que $(T_K f) \geq 1$ em A temos que

$$\begin{aligned} \nu(E) &\leq \int_E (T_K f)(x) d\nu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (T_K f)(x) d\nu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (K(x, y) d\nu(x)) f(y) d\mu(y) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\check{T}_K \nu)(y) f(y) d\mu(y) \\ &\leq \|f\|_{L^p(d\mu)} \|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \\ &< \varepsilon \|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)}. \end{aligned}$$

Tomando ε suficientemente pequeno, temos que $\nu(E) = 0$. □

Teorema 3.6.1. *Seja A um conjunto analítico tal que $0 < \mathcal{C}_{K,p}(A) < \infty$. Seja f^A a $\mathcal{C}_{K,p}$ -função capacitária e ν $\text{Cap}_{K,p}$ -distribuição capacitária. Então*

- (i) $f^A(y)^{p-1} = \text{Cap}_{K,p}(A)^{p-1} (\check{T}_K \nu)(y)$ a.e em y .
- (ii) ν esta concentrada em $B = \{x : (T_K f)(x) = 1\} \cap A$.
- (iii) $\mathcal{C}_{K,p}(A) = \mathcal{C}_{K,p}(B)$.

Além disso, (3.14) possui um ponto de sela $(\bar{\gamma}, \bar{g})$ tal que,

$$\begin{aligned} E_K(\bar{\gamma}, \bar{g}) &= \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} \\ f^A &= \text{Cap}_{K,p}(A) \bar{g} \\ \nu &= \text{Cap}_{K,p}(A) \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas etapas. Primeiro vamos mostrar a existência do ponto de sela para (3.14) e em seguida mostraremos a relação entre f^A e ν .

(1) Chame $\bar{g} = \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} f^A$, $\bar{\gamma} = \text{Cap}_{K,p}(A) \nu$. Pelo Teorema 3.4.1 temos,

$$\|\bar{g}\|_{L^p(d\mu)} = \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} \|f^A\|_{L^p(d\mu)} = \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} \mathcal{C}_{K,p}(A)^{1/p} = 1.$$

Por construção $\text{spt}(\bar{\gamma}) = \text{spt}(\nu)$ e

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(A) &= \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} \nu(A) = \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} \text{Cap}_{K,p}(A) = 1 \\ \|(\check{T}_K \bar{\gamma})\|_{L^q(d\mu)} &= [\text{Cap}_{K,p}(A)]^{-1} \|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \leq \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto $\bar{\gamma} \in X$ tal que $\|(\check{T}_K \bar{\gamma})\|_{L^q(d\mu)} < \infty$ e $\|\bar{g}\|_{L^p(d\mu)} = 1$. Agora perceba que

$$(T_K \bar{g} \mu) = \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} (T_K f^A \mu) \geq \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1} \mathcal{C}_{K,p} - \text{a.e em } A.$$

Escolha $\gamma \in X$ tal que $\|(\check{T}_K \gamma)\|_{L^q(d\mu)} < \infty$. O Lema 3.6.1 nos diz que, se a propriedade

é válida $\mathcal{C}_{K,p} - a.e$, então é também válida $\gamma - a.e$, o que implica

$$E_K(\gamma, \bar{g}\mu) = \int_A (T_K \bar{g}\mu)(x) d\gamma(x) \geq (T_K \bar{g}\mu)(y) \geq \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1}.$$

Por outro lado, para qualquer $g \in Y$, temos pela desigualdade de Hölder

$$E_K(\bar{\gamma}, g\mu) \leq \|g\|_{L^p(d\mu)} \|(\check{T}_K \bar{\gamma})\|_{L^q(d\mu)} \leq \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1}.$$

Em particular $E_K(\bar{\gamma}, \bar{g}) = \text{Cap}_{K,p}(A)^{-1}$ e portanto $(\bar{\gamma}, \bar{g})$ é ponto de sela da energia mútua associada ao núcleo K .

(2) Para concluir utilize os pontos de sela $(\bar{\gamma}, \bar{g})$ e conclua

$$E_K(\nu, f^A\mu) = \text{Cap}_{K,p}(A)^2 E(\bar{\gamma}, \bar{g}\mu) = \frac{\text{Cap}_{K,p}(A)^2}{\text{Cap}_{K,p}(A)} = \text{Cap}_{K,p}(A) = \|f^A\|_{L^p(d\mu)} = \nu(A) \quad (3.15)$$

Usando a Desigualdade de Hölder temos

$$\|f^A\|_{L^p(d\mu)} = E_K(\nu, f^A\mu) \leq \|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \|f^A\|_{L^p(d\mu)} \leq \|f^A\|_{L^p(d\mu)}.$$

Esta informação nos dá na verdade que a Desigualdade de Hölder é uma identidade e esta identidade nos diz que existe uma constante $\kappa = \|f^A\|_{L^p(d\mu)}^{p-1} = \text{Cap}_{K,p}(A)^{p-1}$ tal que $\kappa(\check{T}_K \nu)(y) = f^A(y)^{p-1}$ $a.e$ em y . De fato, basta tomar $(\check{T}_K \nu)(y) = \left(\frac{f^A(y)}{\|f^A\|_{L^p(d\mu)}} \right)^{p-1}$ e utilizar o fato de que $\|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} = 1$. Agora lembre que ν está concentrada em A e $(T_K f^A) \geq 1$ $\mathcal{C}_{K,p} - a.e$ em A . Como $\|(\check{T}_K \nu)\|_{L^q(d\mu)} \leq 1 < \infty$ o Lema 3.6.1 nos diz que $(T_K f^A) \geq 1$ $\nu - a.e$. Utilizando (3.15) temos

$$\nu(A) \leq \int_A (T_K f^A)(x) d\nu(x) = E_K(\nu, f^A\mu) = \nu(A).$$

Novamente a desigualdade é uma identidade o que implica que e a medida do conjunto $\nu(\{x \in A; K(x, f^A) > 1\}) = 0$ ou ν está concentrada em $B = \{x \in A : K(x, f^A) = 1\}$. Por definição $\text{Cap}_{K,p}(B) \geq \nu(A) = \text{Cap}_{K,p}(A)$. Mas B é um subconjunto de A , e daí $\text{Cap}_{K,p}(B) \leq \text{Cap}_{K,p}(A)$, em particular $\text{Cap}_{K,p}(B) = \text{Cap}_{K,p}(A)$ o que conclui a demonstração.

□

CAPACIDADE DE BESSEL E POTENCIAL DE WOLFF

Este capítulo é baseado nos trabalhos de Wolff e Hedberg ([HEDBERG; WOLFF, 1983](#), Teorema 1) e de Cascante, Ortega e Verbitsky ([CASCANTE; ORTEGA; VERBITSKY, 2004](#)).

4.1 Capacidade de Bessel

Definição 4.1.1. *Seja $\alpha q \leq d$ defina a capacidade de Bessel como sendo:*

$$C_{\alpha,q}(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g^q dx : g \geq 0, G_\alpha * g \geq 1 \text{ para todo } x \in A \right\}.$$

Nas preliminares mostramos que o núcleo de Bessel G_α é positivo e semi-contínuo inferiormente, veja a Proposição [2.6.3](#). Portanto, pela Proposição [3.1.1](#) o potencial de Bessel $\mathcal{J}_\alpha \mu$ é semi-contínuo inferiormente. O núcleo de Bessel verifica as propriedades da Definição [3.1.1](#), então a capacidade de Bessel, $C_{\alpha,q}$, herda os resultados construídos no capítulo [3](#). O objetivo desta seção é elencar os resultados que utilizaremos no futuro.

Observação 4.1.1. *Similarmente é possível definir a capacidade Riesz, a saber, seja $0 < \alpha q < d$ a capacidade de Riesz é definida como:*

$$\dot{C}_{\alpha,q} = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g^q dx : g \geq 0, I_\alpha * g \geq 1 \text{ para todo } x \in A \right\}. \quad (4.1)$$

O núcleo de Riesz, excluindo a diagonal, também é um núcleo s.c.i e positivo, veja Proposição [2.6.3](#).

O Teorema [3.2.1](#) é válido para $C_{\alpha,q}$, isto é, dado $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto tal que $0 < C_{\alpha,p}(A) < \infty$, existe $f^A \in L_+^{\alpha,q}$ tal que

- (i) $\|f\|_{\alpha,q}^q = \|g\|_q^q = C_{\alpha,q}(A)$;
- (ii) $(G_\alpha * \mu g) \geq 1 - C_{\alpha,q} - a.e$ em A .

Lembrando que $L_+^{\alpha,q}$ denota o espaço dos potenciais de Bessel, podemos definir a capacidade dual de Bessel. Seja $A \in \mathcal{F}_1$ defina

$$\text{Cap}_{\alpha,q}(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \text{ está concentrada em } A, \|G_\alpha * \mu\|_p \leq 1\}, \text{ onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Quando A um conjunto compacto tal que $\text{Cap}_{\alpha,q}(A) < \infty$, existe $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ uma medida teste para $\text{Cap}_{\alpha,q}(A)$ tal que

- (i) $\mu^A(A) = \text{Cap}_{\alpha,q}(A)$.
- (ii) $\|G_\alpha * \mu\|_p \leq 1$, $\text{Cap}_{\alpha,q} - a.e$ em A .

A medida μ^A é chamada de $C_{\alpha,q}$ -distribuição capacitária. Pelo Teorema 3.1.6 a capacidade de Bessel, $C_{\alpha,q}$, é capacidade de Choquet, portanto suas capacidades exteriores e interiores coincidem em conjuntos Analíticos. Pelo Teorema 3.4.1 juntamente com o Teorema Minimax 3.4.1 a equivalência das capacidades de Bessel é dada por

$$[C_{\alpha,q}(A)]^q = \text{Cap}_{\alpha,q}(A).$$

Por fim, podemos definir o potencial não linear do núcleo de Bessel. Tome $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ medida de Radon e defina o potencial não-linear de Havin-Maz'ya

$$(V_{\alpha,q}\nu)(x) = G_\alpha * (G_\alpha * \nu)^{p-1}. \quad (4.2)$$

Utilizando o Teorema de Fubini temos que

$$\int (V_{\alpha,q}\nu)(x) d\nu(x) = \int (G_\alpha * \nu)^p dy. \quad (4.3)$$

Definição 4.1.2. Dizemos que $\gamma^A \in \mathcal{M}^+(\overline{A})$ é medida capacitária de $C_{\alpha,q}(A)$, se

- (i) $\gamma^A(\overline{A}) = C_{\alpha,q}(A)$;
- (ii) $(V_{\alpha,q}\gamma^A)(x) \geq 1 - C_{\alpha,q} - a.e$ em A ;
- (iii) $(V_{\alpha,q}\gamma^A)(x) \leq 1$ em $\text{spt}(\gamma^A)$.

O Teorema 3.5.1 garante a existência de medida capacitária para o capacidade de Bessel. Em particular, o resultado acima nos permite definir de forma equivalente a $C_{\alpha,q}$, utilizando o

potencial não-linear de Havin Maz'ya como sendo:

$$C_{\alpha,q}(A) = \sup\{\mu(A); \mu \in \mathcal{M}^+(A), (V_{\alpha,q}\mu)(x) \leq 1 \forall x \in \text{spt}(\mu)\}. \quad (4.4)$$

4.2 Potencial de Wolff diádico

Primeiro vamos introduzir o conceito de cubo diádico em $\mathbb{R}^d$. Para isto, seja $[0, 1)^d$ um cubo unitário aberto a direita. Denote por $\mathcal{D}_0$, a coleção de cubos em $\mathbb{R}^d$ congruentes a $[0, 1)^d$ cujo seus vértices pertencem a $\mathbb{Z}^d$. Dilatando estes cubos por um fator 2^{-k} , $k \in \mathbb{Z}$, e trasladando por $m \in \mathbb{R}^d$ obtemos uma nova coleção de cubos abertos a direita, denotada por $\mathcal{D}_k$, cujo os vértices são pontos adjacentes do conjunto $(2^{-k}\mathbb{Z})^d$. Em outras palavras, obtemos a coleção de cubos congruentes a

$$\mathcal{D}_k := \{2^{-k}[0, 1)^d + m : m \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Os cubos da coleção $\mathcal{D} = \bigcup_k \mathcal{D}_k$ são chamados de cubos diádicos em $\mathbb{R}^d$. Desta definição temos algumas propriedades que caracterizam cubos diádicos.

- (i) Dado $x \in \mathbb{R}^d$ existe um único cubo $Q \in \mathcal{D}_k$ que contem este ponto;
- (ii) Se $Q, Q' \in \mathcal{D}$, então ou $Q \cap Q' = \emptyset$ ou um dos cubos está contido no outro;
- (iii) Um cubo diádico da coleção $\mathcal{D}_k$ está contido em um único cubo da coleção $\mathcal{D}_j$, com $j < k$, e contêm 2^n cubos diádicos da coleção $\mathcal{D}_{k+1}$. Dizemos que a coleção $\mathcal{D}_{k+1}$ é um refinamento de $\mathcal{D}_k$.

Em resumo, $\mathcal{D} = \{Q\}$ denota a coleção de cubos diádicos em $\mathbb{R}^d$ centrados em $x_Q = 2^{-k}m$ e com comprimento das arestas é dado por $\ell_Q = 2^{-k}$.

O potencial de Riesz diádico $I_\alpha^{\mathcal{D}}$ de uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ é definido por:

$$(I_\alpha^{\mathcal{D}}\mu)(x) = \sum_{Q \in \mathcal{D}} \ell_Q^{\alpha-d} \mu(Q) \mathbb{1}_Q(x) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < d. \quad (4.5)$$

Seja $0 < \alpha < d/p$ e $1 < p < \infty$. O potencial não-linear diádico de Wolff-Hedberg $\mathbf{W}_{I_\alpha, q}^{\mathcal{D}}\mu$, associado a capacidade $\dot{C}_{\alpha, q}$, veja (4.1), é definido por

$$(\mathbf{W}_{I_\alpha, p}^{\mathcal{D}}\mu)(x) = \sum_{Q \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(Q)}{\ell_Q^{d-\alpha p}} \right)^{p'-1} \mathbb{1}_Q(x). \quad (4.6)$$

Note que $\mathbf{W}_{I_\alpha, 2}^{\mathcal{D}}\mu = I_{2\alpha}^{\mathcal{D}}\mu$. A energia não-linear de μ associada a capacidade $\dot{C}_{\alpha, q}$ é definida por

$$\mathbf{E}_{I_\alpha, q}^{\mathcal{D}}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |I_\alpha^{\mathcal{D}}\mu|^p dx, \quad (4.7)$$

para $q = p' = p/(p-1)$ e $1 < p < \infty$. O potencial de Bessel diádico $\mathcal{J}_\alpha^\mathcal{D}$ é definido de forma similar, mas para cubos diádicos $Q \in \mathcal{D}$ tal que $\ell_Q \leq 1$. Mais precisamente, seja $\alpha > 0$ definimos o potencial de Bessel diádico pela soma

$$(\mathcal{J}_\alpha^\mathcal{D}\mu)(x) := \sum_{\ell_Q \leq 1} \ell_Q^{\alpha-d} \mu(Q) \mathbb{1}_Q(x). \quad (4.8)$$

E, similarmente, podemos definir a energia $E_{\mathcal{J}_\alpha, q}^\mathcal{D}\mu$ e o potencial não-linear $W_{\mathcal{J}_\alpha, p'}^\mathcal{D}\mu$ associados a capacidade de Bessel $C_{\alpha, q}$. Precisamente, potencial de Wolff-Hedberg $W_{\mathcal{J}_\alpha, q}^\mathcal{D}\mu$ é definido por,

$$(W_{\mathcal{J}_\alpha, q}^\mathcal{D}\mu)(x) = \sum_{\ell_Q \leq 1} \left(\frac{\mu(Q)}{\ell_Q^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x). \quad (4.9)$$

sempre que $0 < \alpha \leq d/q$ e $1 < q < \infty$.

Nesta seção, nosso interesse é mostrar uma desigualdade conhecida como desigualdade de Wolff. Mais precisamente,

Teorema 4.2.1 (Desigualdade diádica de Wolff). *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ e $1 < q < \infty$. Se $0 < \alpha < d/q$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$E_{\mathcal{I}_\alpha, q}^\mathcal{D}\mu \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (W_{\mathcal{I}_\alpha, q}^\mathcal{D}\mu) d\mu. \quad (4.10)$$

Além disso, se $0 < \alpha \leq d/q$ então

$$E_{\mathcal{J}_\alpha, q}^\mathcal{D}\mu \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (W_{\mathcal{J}_\alpha, q}^\mathcal{D}\mu) d\mu. \quad (4.11)$$

As desigualdades contrárias do Teorema 4.2.1 são relativamente simples de provar, como veremos. Dado a importância do Teorema 4.2.1 para caracterizar capacidade de Bessel via energia não-linear diádica e nosso interesse em obter um teorema similar para núcleo de Bessel parabólico, vamos apresentar uma prova deste teorema no contexto mais geral inspirados no artigo (CASCANTE; ORTEGA; VERBITSKY, 2004) e no livro de Aikawa (AIKAWA; ESSÉN, 2006).

4.2.1 Desigualdade de Wolff diádica para núcleos arbitrários

Seja $\mathcal{D} = \{Q\}$ coleção de cubos diádicos e $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função. O núcleo diádico $K_\mathcal{D}(\cdot, \cdot)$ em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ é definido por

$$K_\mathcal{D}(x, y) = \sum_Q K(Q) \mathbb{1}_Q(x) \mathbb{1}_Q(y). \quad (4.12)$$

Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, definimos o operador $T_{K_{\mathcal{D}}} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$(T_{K_{\mathcal{D}}}\mu)(x) = \sum_{Q \in \mathcal{D}} K(Q)\mu(Q)\mathbf{1}_Q(x). \quad (4.13)$$

Seja $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ e $1 < p < \infty$, a energia não-linear associada a K é definida por:

$$E_{K,\sigma,p}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (T_{K_{\mathcal{D}}}\mu)^{p'} d\sigma(x). \quad (4.14)$$

A média diádica de K é definida pela função

$$\bar{K}(Q)(x) = \frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} K(Q')\sigma(Q')\mathbf{1}_{Q'}(x). \quad (4.15)$$

Claro que o suporte de $\bar{K}$ está contido em Q . Se $d\sigma = dx$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e K depende somente do volume de Q , isto é, existe uma função decrescente $k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $K(Q) = k(\ell_Q)$ então (veja a Proposição 4.2.1)

$$\bar{K}(Q) \simeq \bar{k}(\ell_Q) := \ell_Q^{-n} \int_0^{\ell_Q} k(t)t^{n-1} dt.$$

O potencial diádico de Wolff-Hedberg associado a capacidade $\text{Cap}_{K,p}$ é definido pela função

$$(\mathbf{W}_{K,p,\sigma}^{\mathcal{D}}\mu)(x) = \sum_{Q \in \mathcal{D}} K(Q)\sigma(Q) \left(\int_Q \bar{K}(Q)(y) d\mu(y) \right)^{p'-1} \mathbf{1}_Q(x). \quad (4.16)$$

Finalmente, a função máxima diádica associada ao núcleo $K_{\mathcal{D}}$ é definida por:

$$\mathbf{M}_{K,\sigma}^{\mathcal{D}}\mu = \sup_{x \in Q} \frac{1}{\sigma(Q)} \left(\sum_{Q' \subset Q \in \mathcal{D}} K(Q')\sigma(Q')\mu(Q') \right). \quad (4.17)$$

Para não carregar tanto a notação, vamos remover o subscrito σ . O teorema principal desta seção é o seguinte:

Teorema 4.2.2 (Desigualdade de Wolff). *Se $1 < p < \infty$ e $\mu, \sigma \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Então são equivalentes:*

$$E_{K,p}\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{W}_{K,p}^{\mathcal{D}}\mu) d\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{M}_K^{\mathcal{D}}\mu)^{p'} d\sigma. \quad (4.18)$$

Para provar este teorema precisaremos de dois lemas. O primeiro é um resultado simples e o segundo é o coração deste resultado.

Lema 4.2.1. *Seja $s \geq 1$ e $\{a_j\}_j$ uma sequência real, então*

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^s \leq s \sum_{i=1}^N a_i \left(\sum_{j \geq 1} a_j \right)^{s-1}. \quad (4.19)$$

Demonstração. A prova deste lema é por indução. Claro que o resultado é verdadeiro para $N = 1$. Então assuma que

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^s \leq s \sum_{i=1}^N a_i \left(\sum_{j \geq 1} a_j \right)^{s-1}, \text{ para } N = 1, \dots, k.$$

Usando a desigualdade $b^s - a^s \leq s(b-a)b^{s-1}$ para $0 \leq a \leq b$ e $1 \leq b < \infty$ concluímos que $(b+a)^s \leq as(b+a)^{s-1} + a^s$. Então, para $N = k+1$ obtemos,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i \right)^s &= \left(a_1 + \sum_{i=1}^k a_{i+1} \right)^s \leq s a_1 \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i \right)^{s-1} + \left(\sum_{i=1}^k a_{i+1} \right)^s \\ &\leq s a_1 \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i \right)^{s-1} + s \sum_{i=1}^k a_{i+1} \left(\sum_{j \geq 1} a_j \right)^{s-1} \\ &= s a_1 \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i \right)^{s-1} + s \sum_{i=2}^{k+1} a_1 \left(\sum_{j \geq 1} a_j \right)^{s-1} \\ &= s \sum_{i=1}^{k+1} a_i \left(\sum_{j \geq 1} a_j \right)^{s-1}, \end{aligned}$$

como desejado. □

Para enunciar nosso próximo lema, vamos fixar algumas notações. Seja $1 \leq s < \infty$ e $\Lambda = (\lambda_Q)_{Q \in \mathcal{D}}$ uma sequência de números positivos. Seja $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ e defina

$$\begin{aligned} A_1(\Lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbb{1}_Q(x) \right)^s d\sigma(x) \\ A_2(\Lambda) &= \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} \\ A_3(\Lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^s d\sigma(x). \end{aligned}$$

Lema 4.2.2. *Se $1 < s < \infty$ e $\Lambda = \{\lambda_Q\} \subset \mathbb{R}_+$, então existem constantes positivas $c_i > 0$ tais que*

$$A_1(\Lambda) \leq c_1 A_2(\Lambda) \leq c_2 A_3(\Lambda) \leq c_3 A_1(\Lambda).$$

Demonstração. A demonstração deste lema é dividida em 4 passos.

Passo 1: Se $s \geq 1$, então

$$\left(\sum_Q \lambda_Q \mathbb{1}_Q(x) \right)^s \leq s \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \mathbb{1}_Q(x) \left(\sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \mathbb{1}_{Q'}(x) \right)^{s-1}. \quad (4.20)$$

Este passo é consequência imediata do Lema 4.2.1. De fato, basta considerar $a_i = \lambda_Q \mathbb{1}_Q$, substituir $\sum_{i=1}^N a_i$ por $\sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \mathbb{1}_Q(x)$ e substituir $\sum_{j \geq 1}^N a_j$ por $\sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \mathbb{1}_{Q'}(x)$.

Passo 2: Existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$A_1(\Lambda) \leq c_1 A_2(\Lambda). \quad (4.21)$$

Vamos dividir a prova deste passo em dois casos.

Caso 1: $1 < s \leq 2$. Assuma $\lambda_Q \neq 0$. Usando a desigualdade (4.20) e a desigualdade de Hölder em $L^p(d\sigma)$ com $p = \frac{1}{s-1}$ (note que $p \geq 1 \Leftrightarrow s \leq 2$) temos

$$\begin{aligned} A_1(\Lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbb{1}_Q(x) \right)^s d\sigma(x) \\ &\stackrel{(4.20)}{\leq} s \sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_{Q'}}{\sigma(Q')} \mathbb{1}_{Q'}(x) \right)^{s-1} \mathbb{1}_Q d\sigma(x) \\ &= s \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \left[\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_{Q'}}{\sigma(Q')} \mathbb{1}_{Q'}(x) \right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_Q^{\frac{1}{p'}} d\sigma(x) \right], \quad \text{pois } p = 1/(s-1) \\ &\leq C s \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \left[\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_{Q'}}{\sigma(Q')} (\mathbb{1}_{Q'}(x)) \right) d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q d\sigma \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &= s \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \left[\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_{Q'}}{\sigma(Q')} \mathbb{1}_{Q'}(x) \right) d\sigma \right]^{s-1} \\ &= s \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} = s A_2(\Lambda). \end{aligned}$$

Caso 2: $s > 2$. Seja $k = 2, 3, \dots$ tal que $k-1 < s \leq k$. Pelo caso 1, temos que a desigualdade (4.21) é válida para $k = 2$. Assuma (4.21) para todo $k-1 < s \leq k$. Queremos mostrar que ela é válida para $k < s \leq k+1$. E, consequentemente, concluímos que (4.21) é verdadeira para todo $2 < s < \infty$. Usando o Lema 4.2.1 (como fizemos no passo 1) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbb{1}_Q \right)^s d\sigma \leq s \sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_{Q'}}{\sigma(Q')} \mathbb{1}_{Q'} \right)^{s-1} \mathbb{1}_Q d\sigma := sA. \quad (4.22)$$

Agora, pela hipótese de indução para $k-1 < s-1 \leq k$ (assumiremos que $\lambda_{Q'} = 0$, se $Q' \subsetneq Q$)

obtemos

$$\begin{aligned}
A &\leq (s-1) \sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \left[\sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \left(\frac{1}{\sigma(Q')} \sum_{Q'' \subset Q'} \lambda_{Q''} \right)^{s-2} \right] \\
&= (s-1) \left[\sum_{Q'} \lambda_{Q'} \left(\frac{1}{\sigma(Q')} \sum_{Q'' \subset Q'} \lambda_{Q''} \right)^{s-2} \sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \right] \\
&= (s-1) \left[\sum_{Q'} \lambda_{Q'}^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{\sigma(Q')} \sum_{Q'' \subset Q'} \lambda_{Q''} \right)^{s-2} \lambda_{Q'}^{\frac{1}{p}} \sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \right], \quad p = s-1 > 1 \\
&\lesssim (s-1) \left(\sum_{Q'} \lambda_{Q'} \left(\frac{1}{\sigma(Q')} \sum_{Q'' \subset Q'} \lambda_{Q''} \right)^{(s-2)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{Q'} \lambda_{Q'} \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

$$= (s-1) \left[\sum_{Q'} \lambda_{Q'} \left(\frac{1}{\sigma(Q')} \sum_{Q'' \subset Q'} \lambda_{Q''} \right)^{s-1} \right]^{\frac{s-1}{s-2}} \left[\sum_{Q'} \lambda_{Q'} \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \right)^{s-1} \right]^{\frac{1}{s-1}}. \quad (4.24)$$

Em (4.23) usamos a desigualdade de Hölder para seqüências

$$\sum_k |x_k y_k| \leq \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.25)$$

com expoente $p = s-1$ e $q = p' = (s-1)/(s-2)$. Observando que

$$A = \sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_{Q'}}{\sigma(Q')} \mathbf{1}_{Q'} \right)^{s-1} \mathbf{1}_Q d\sigma = \sum_Q \lambda_Q \left(\sum_{Q' \subset Q} \frac{\lambda_{Q'}}{\sigma(Q')} \mathbf{1}_{Q'} \right)^{s-1}$$

e substituindo A em (4.24) obtemos,

$$A \leq (s-1) \left[\sum_{Q'} \lambda_{Q'} \left(\frac{1}{\sigma(Q')} \sum_{Q'' \subset Q'} \lambda_{Q''} \right)^{s-1} \right]^{\frac{s-2}{s-1}} A^{\frac{1}{s-1}}.$$

Portanto,

$$A \leq (s-1)^{\frac{s-1}{s-2}} \sum_{Q'} \lambda_{Q'} \left(\frac{1}{\sigma(Q')} \sum_{Q'' \subset Q'} \lambda_{Q''} \right)^{s-1} \cong \sum_Q \lambda_Q \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.22) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q \right)^s d\sigma \leq cs(s-1)^{\frac{s-1}{s-2}} \sum_Q \lambda_Q \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1},$$

para todo $k < s \leq k+1$, como desejado.

Passo 3: $A_1(\Lambda) \simeq A_3(\Lambda)$. Usando que o operador maximal de Hardy-Littlewood $M_\sigma(f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{\sigma(Q)} \int f d\sigma$ é contínuo de $L^s(d\sigma)$ para $L^s(d\sigma)$, então

$$\begin{aligned}
 A_3(\Lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^s d\sigma(x). \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(M_\sigma \left[\left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q \right) \right] \right)^s d\sigma(x) \\
 &\leq c \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q(x) \right)^s d\sigma(x) \\
 &= cA_1(\Lambda).
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Resta demonstrar que $A_1(\Lambda) \leq cA_3(\Lambda)$ para $1 < s < \infty$. Pela desigualdade (4.21), pela desigualdade de Hölder em L^s e a desigualdade (4.27) temos, respectivamente, que

$$\begin{aligned}
 A_1(\Lambda)s &\leq \sum_Q \lambda_Q \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} \\
 &= s \int_{\mathbb{R}^d} \sum_Q \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} \mathbf{1}_Q d\sigma(x) \\
 &\leq s \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_Q \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q \right) \left(\sup_{x \in Q} \frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} d\sigma \\
 &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_Q \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q \right)^s d\sigma \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left[M_\sigma \left(\sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right) \right]^{(s-1)s'} d\sigma \right)^{\frac{1}{s}} \\
 &= A_1(\Lambda)^{\frac{1}{s}} A_3(\Lambda)^{\frac{1}{s'}} \\
 &\leq cA_1(\Lambda)^{\frac{1}{s}} A_1(\Lambda)^{\frac{1}{s'}} = CA_1(\Lambda),
 \end{aligned}$$

com desejamos provar.

Passo 4: $A_2(\Lambda) \leq cA_3(\Lambda)$.

$$\begin{aligned}
A_2(\Lambda) &= \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} := \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \mu_Q \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_Q \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mu_Q \mathbf{1}_Q \right) d\sigma(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q(x) \right) \left(\sup_x \mu_Q \right) d\sigma(x) \\
&\lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_Q \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q \right)^s d\sigma \right]^{\frac{1}{s}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sup_x \mu_Q \right)^{s'} d\sigma \right]^{\frac{1}{s'}} \\
&= A_1(\Lambda)^{\frac{1}{s}} A_3(\Lambda)^{\frac{1}{s'}} \simeq A_3(\Lambda)^{\frac{1}{s}} A_3(\Lambda)^{\frac{1}{s'}} = A_3(\Lambda),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. $\square$

Agora estamos em condições de provar o Teorema 4.2.2.

Prova do Teorema 4.2.2. Relembre que

$$\begin{aligned}
A_1(\{\lambda_Q\}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\lambda_Q}{\sigma(Q)} \mathbf{1}_Q(x) \right)^s d\sigma(x), \quad A_2(\{\lambda_Q\}) = \sum_{Q \in \mathcal{D}} \lambda_Q \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^{s-1} \text{ e} \\
A_3(\{\lambda_Q\}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^s d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Escolhendo $s = p'$ e $\lambda_Q = K(Q)\mu(Q)\sigma(Q)$ segue que $E_{K,p}\mu = A_1(\{\lambda_Q\})$ e

$$\begin{aligned}
A_2(\{\lambda_Q\}) &= \sum_{Q \in \mathcal{D}} K(Q)\mu(Q)\sigma(Q) \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} K(Q')\sigma(Q')\mu(Q') \right)^{p'-1} \\
&= \sum_{Q \in \mathcal{D}} K(Q)\mu(Q)\sigma(Q) \left(\int_Q \bar{K}(Q) d\mu \right)^{p'-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q \in \mathcal{D}} K(Q)\sigma(Q) \left(\int_Q \bar{K}(Q) d\mu \right)^{p'-1} \mathbf{1}_Q d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{W}_{K,p}^{\mathcal{D}} \mu) d\mu.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$A_3(\{\lambda_Q\}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} \lambda_{Q'} \right)^s d\sigma(x) = \int (\mathbf{M}_K^{\mathcal{D}} \mu)^{p'} d\sigma. \quad (4.28)$$

Portanto, o resultado é uma consequência imediata do Lema 4.2.2. $\square$

4.2.2 Desigualdade de Wolff - versão diádica

Nesta seção, nosso objetivo é apresentar uma prova do Teorema 4.2.3. Começamos pela seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. *Seja $d\sigma = dx$ e $K(Q)$ é uma função radial, então*

$$\bar{K}(Q) \simeq \ell_Q^{-n} \int_0^{\ell_Q} k(t) t^{n-1} dt.$$

Em particular, se $K(\ell_Q) = \ell_Q^{\alpha-n}$ é o núcleo de Riesz diádico, então

$$\bar{K}(Q) \simeq \ell_Q^{\alpha-n}.$$

Demonstração. Seja $Q \in \mathcal{D}$ e $x \in Q$. Então existe um único cubo diádico $Q_j \subset Q$ tal que $x \in Q_j$ e $\ell_{Q_j} = 2^{-j} \ell_Q$. Como K é radial, então existe k decrescente tal que $K(Q) = k(\ell_Q)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{K}(Q) &:= \frac{1}{\sigma(Q)} \sum_{Q' \subset Q} K(Q') \sigma(Q') \mathbf{1}_{Q'}(x) \\ &= \frac{1}{|Q|} \sum_{Q' \subset Q} K(Q') |Q'| \mathbf{1}_{Q'}(x) = \frac{1}{\ell_Q^n} \sum_{Q' \subset Q} k(\ell_{Q'}) \ell_{Q'}^n \mathbf{1}_{Q'}(x) \\ &= \frac{1}{\ell_Q^n} \sum_{j \geq 0} k(2^{-j} \ell_Q) (2^{-j} \ell_Q)^n \\ &\simeq c \frac{1}{\ell_Q^n} \int_0^{\ell_Q} k(t) t^{n-1} dt, \end{aligned}$$

como desejamos mostrar. □

Usando a Proposição 4.2.1 e o Teorema 4.2.2, podemos provar a desigualdade clássica de Wolff na sua versão diádica, que a enunciaremos novamente para facilitar a leitura.

Teorema 4.2.3 (Desigualdade diádica de Wolff). *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ e $1 < q < \infty$. Se $0 < \alpha < d/q$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$E_{I_\alpha, q}^D \mu \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (W_{I_\alpha, q}^D \mu) d\mu. \quad (4.29)$$

Além disso, se $0 < \alpha \leq d/q$ então

$$E_{J_\alpha, q}^D \mu \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (W_{J_\alpha, q}^D \mu) d\mu. \quad (4.30)$$

Demonstração. Usando a Proposição 4.2.1 com $K(Q) = I_\alpha(Q) = \ell_Q^{\alpha-d}$, núcleo de Riesz

diádico, temos que

$$\begin{aligned}
 (W_{I_\alpha, p'} \mu)(x) &:= \sum_{Q \in \mathcal{D}} \ell_Q^{\alpha-d} \sigma(Q) \left(\int_Q \bar{K}(Q)(y) d\mu(y) \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x) \\
 &= \sum_{Q \in \mathcal{D}} \ell_Q^{\alpha-d} |Q| \left(\int_Q \ell_Q^{\alpha-d} d\mu \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x) \\
 &= \sum_{Q \in \mathcal{D}} \ell_Q^{\alpha+(\alpha-d)(q-1)} \mu(Q)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x) \\
 &= \sum_{Q \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(Q)}{\ell^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x),
 \end{aligned}$$

quando $d - \alpha q > 0$ com $q = p'$. Agora notando que

$$E_{I_\alpha, q}^\mathcal{D} \mu = \int |I_\alpha^\mathcal{D} \mu|^p dx = \int \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \ell_Q^{\alpha-d} \mu(Q) \mathbb{1}_Q \right)^p dx \quad (4.31)$$

então, pelo Teorema 4.2.2, obtemos a desigualdade (4.29). $\square$

4.3 Potencial e desigualdade de Wolff - versão contínua

Nesta seção nosso objetivo é demonstrar a versão contínua do Teorema 4.2.3.

Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, $0 < \alpha < d$ e $1 < q < \infty$. O potencial não-linear de Wolff-Hedberg associado ao núcleo de Riesz $I_\alpha(x, y) = |x - y|^{\alpha-d}$, fora da diagonal $\{(x, x)\}$ é definido por:

$$(\dot{W}_{\alpha, q} \mu)(x) := \int_0^\infty \left(\frac{\mu(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \quad (4.32)$$

sempre que $q = p'$ e $1 < q < \frac{d}{\alpha}$. O potencial não-linear de Wolff-Hedberg associado ao núcleo de Bessel G_α é um truncamento de (4.32), a saber,

$$(W_{\alpha, q} \mu)(x) := \int_0^1 \left(\frac{\mu(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta}, \quad 1 < q \leq \frac{d}{\alpha}. \quad (4.33)$$

Se $q > 2 - \frac{\alpha}{d}$, então é possível mostrar que existem constantes, veja (HEDBERG, 1972), $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que

$$c_1(W_{\alpha, q} \mu)(x) \leq (V_{\alpha, q} \mu)(x) \leq c_2(W_{\alpha, q} \mu)(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d. \quad (4.34)$$

Associada ao núcleo G_α , defina a energia não-linear $E_{\mathcal{J}_{\alpha, q}}(\mu)$ de uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ por:

$$E_{\mathcal{J}_{\alpha, q}}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} (G_\alpha * \mu)^p dx. \quad (4.35)$$

Consequentemente,

$$\int (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu \simeq \int (V_{\alpha,q}\mu) d\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^d} (G_\alpha * \mu)^p dx = E_{\mathcal{J}_{\alpha,q}}(\mu). \quad (4.36)$$

No entanto, quando $1 < q \leq 2 - \frac{\alpha}{d}$ somente a primeira desigualdade de (4.34) é verdadeira. Nesta seção, o nosso objetivo é demonstrar a estimativa (4.36) para todo $1 < q \leq \alpha/d$. Mais precisamente,

Teorema 4.3.1. *Seja μ uma medida de Radon não-negativa em $\mathbb{R}^d$ e $1 < p < \infty$.*

(i) *Se $q = p'$ e $1 < q < d/\alpha$, então*

$$E_{\mathbf{I}_{\alpha,q}}(\mu) \simeq \int (\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu) d\mu. \quad (4.37)$$

(ii) *Se $q = p'$ e $1 < q \leq d/\alpha$, então*

$$E_{\mathcal{J}_{\alpha,q}}(\mu) \simeq \int (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu. \quad (4.38)$$

Demonstração.

Prova do Item (i): Denote por $B_n(x) = B(x, 2^{-n})$ uma bola aberta em $\mathbb{R}^d$ centrada em x e com raio $r_n = 2^{-n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Então, dado $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, temos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_{\alpha}\mu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} = \int_{B(x,1)} \frac{d\mu}{|x-y|^{d-\alpha}} + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,1)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} \\ &= \int_{|x-y|<1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{y: 2^{n-1} \leq |x-y| < 2^n\}} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{y: 2^{-n-1} \leq |x-y| < 2^{-n}\}} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{y: 2^{n-1} \leq |x-y| < 2^n\}} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} \\ &\simeq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(d-\alpha)} \mu(B_n(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(d-\alpha)} \mu(B_{2^n}(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(d-\alpha)} \mu(B_n(x)) + \sum_{n=-\infty}^0 2^{n(d-\alpha)} \mu(B_n(x)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{n(d-\alpha)} \mu(B_n(x)). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Denote por $\tilde{Q} = 3Q$ um cubo diádico com o mesmo centro de $Q \in \mathcal{D}$ tal que $\ell_{\tilde{Q}} = 3\ell_Q$. Assuma que $\ell_Q = 2^{-n}$. Então, dado $x \in Q$ temos que $B_n(x) \subset \tilde{Q}$. Portanto, pela desigualdade (4.39),

para $x \in Q$ tem-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_\alpha \mu)(x) &\simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{n(d-\alpha)} \mu(B_n(x)) \\ &\leq c \sum_Q \frac{\mu(\tilde{Q})}{\ell_Q^{d-\alpha}} \mathbf{1}_Q(x) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\leq c \sum_{\tilde{Q}} \frac{\mu(\tilde{Q})}{\ell_{\tilde{Q}}^{d-\alpha}} \mathbf{1}_{\tilde{Q}}(x). \quad (4.41)$$

Dado $x \in Q$, cubo com lado $\ell_Q = 2^{-n}$ note que $B_{2^{-n}}(x) \supset Q$. Assim, pela definição do potencial $\dot{W}_{\alpha,q}\mu$ temos

$$(\dot{W}_{\alpha,q}\mu)(x) \simeq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(2^{n(d-\alpha q)} \mu(B_{2^{-n}}(x)) \right)^{p-1} \gtrsim \sum_{Q \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(Q)}{\ell_Q^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbf{1}_Q(x) = (\mathbf{W}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}} \mu)(x). \quad (4.42)$$

Agora usando a desigualdade (4.42), Teorema 4.2.3(i) e a desigualdade (4.41) obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\dot{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu &\gtrsim \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{W}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}} \mu) d\mu \stackrel{(4.29)}{\simeq} \mathbf{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}} \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{\tilde{Q}} \frac{\mu(\tilde{Q})}{\ell_{\tilde{Q}}^{d-\alpha}} \mathbf{1}_{\tilde{Q}}(x) \right)^p dx \\ &\gtrsim \mathbf{E}_{\alpha,q}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{I}_\alpha \mu|^p dx. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para obter a desigualdade contrária, basta observar $(\dot{W}_{\alpha,q}\mu)(x) \leq c(\dot{V}_{\alpha,q}\mu)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\dot{W}_{\alpha,q}\mu)(x) d\mu(x) \leq c \int_{\mathbb{R}^d} (\dot{V}_{\alpha,q}\mu) d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{I}_\alpha \mu|^p dx.$$

Como desejamos mostrar. □

Corolário 4.3.1. *Uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+ \cap L^{-\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se, $\int (W_{\alpha,q}\mu) d\mu < \infty$.*

Demonstração. Suponha que $\mu \in \mathcal{M}^+ \cap L^{-\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$. Então existe $f \in L^p$ tal que $\mu = G_{-\alpha} * f$ ou $f = G_\alpha * \mu$, onde G_α denota o núcleo de Bessel inverso, isto é, $G_{-\alpha} = G_\alpha^{-1}$. Então pelo lema 4.3.1 existe uma constante $A \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\int (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu \leq A \int (V_{\alpha,q}\mu) d\mu = \int (G_\alpha * \mu)^p dx = \int (f)^p = \|f\|_p^p < \infty.$$

Agora suponha que $\int (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu < \infty$. Sabemos pelo Teorema 1 que existe uma constante $A \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\int (V_{\alpha,q}\mu) d\mu \leq A \int (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu.$$

Consequentemente temos

$$\int (V_{\alpha,q}\mu) d\mu = \int (G_\alpha * \mu)^p dx = \|G_\alpha * \mu\|_p^p \leq A \int (W_{\alpha,q}\mu) d\mu < \infty.$$

Isto implica, $G_\alpha * \mu \in L^p$. Então existe $f \in L^p$ tal que $f = G_\alpha * \mu$, $\mu - a.e.$ Por definição $f \in L^{\alpha,p}$ e concluímos que de fato $\mu = G_{-\alpha} * f$, ou seja, $\mu \in L^{-\alpha,p}$. $\square$

CONJUNTOS FINOS E O CRITÉRIO DE WIENER

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar potencial de Wolff em suas versões contínuas e diádicas, construir a medida capacitária do caso diádico e utilizar as equivalências construídas no capítulo 4 para demonstrar o Teorema 5.6.1 que mencionamos na introdução.

5.1 Conjuntos finos e potencial linear

Definição 5.1.1 (Ponto regular para o Problema de Dirichlet). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado com fronteira de classe C^k . Dizemos que $x \in \partial\Omega$ é um ponto regular para o problema de Dirichlet da equação de Laplace em Ω , se existe $f \in C(\partial\Omega)$ tal que o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sobre } \Omega \\ \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} u(y) = f(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

tem uma solução. Dizemos que $x \in \partial\Omega$ é um ponto irregular para (5.1), se existe $f \in C(\partial\Omega)$, mas (5.1) não tem solução. Neste caso, dizemos que o conjunto Ω^c é um conjunto fino em x .

Na teoria de potenciais lineares clássica o critério de Wiener é um resultado primordial para a caracterização de regularidade de funções harmônicas com valores na fronteira. Mais precisamente, o critério de Wiener, ver (WIENER, 1924), é o seguinte.

Teorema 5.1.1 (Critério de (WIENER, 1924)). *Um ponto $x \in \partial\Omega$ é regular para (5.1) se, e somente se,*

$$\int_0^1 \frac{C_{1,2}(\Omega^c \cap B_r(x))}{r^{d-2}} \frac{dr}{r} = \infty.$$

O conceito de conjuntos finos é uma forma de generalizar a noção do conjunto dos pontos irregulares do problema de Dirichlet. À luz dos trabalhos de (HEDBERG; WOLFF, 1983) e (ADAMS; HEDBERG, 1999) definimos o conceito de conjuntos finos para o caso linear.

Definição 5.1.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$. Dizemos que A é fino num ponto x_0 , se existe $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ tal que*

$$G_{2\alpha} * \mu(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} G_{2\alpha} * \mu(x),$$

onde $G_{2\alpha} * \mu = G_\alpha * (G_\alpha * \mu)$ no caso linear. Se A não é fino em x_0 dizemos que A é grosso em x_0

Perceba que, se $x_0 \notin \overline{E}$, então automaticamente A é fino em x_0 . Lembremos, veja Proposição 3.1.1, que o potencial de Bessel $G_{2\alpha} * \mu$ é s.c.i, portanto

$$G_{2\alpha} * \mu(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} G_{2\alpha} * \mu(x).$$

Denote $e_{\alpha,2}(A) = \{x : A \text{ é } (\alpha, 2) - \text{fino em } x\}$ o conjunto dos pontos tal que A é fino e denote por $b_{\alpha,2}(A)$ o complementar de $e_{\alpha,2}(A)$. Claramente, temos as seguintes inclusões

$$\text{int}(A) \subset b_{\alpha,2}(A) \subset \overline{A} \text{ e } (\overline{A})^c \subset e_{\alpha,2}(A) \subset (\text{int}(E))^c.$$

A seguir uniremos em um resultado afirmações equivalentes acerca de conjuntos finos no contexto de $(\alpha, 2)$.

Teorema 5.1.2 (Veja Teorema 6.3.2 em (ADAMS; HEDBERG, 1999)). *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ tal que $d \geq 2$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $0 < \alpha \leq 2$. Então, são equivalentes:*

(a) *A é fino em x_0 .*

(b) *Seja G uma vizinhança de x_0 e μ medida capacitária de $A \cap G$. Se G é suficientemente pequena, então*

$$(V_{\alpha,2}\mu)(x_0) = G_{2\alpha} * \mu(x_0) < 1.$$

(c) *Seja $B_\delta(x_0)$ uma bola aberta e $C_{\alpha,2}$ capacidade de Bessel, então*

$$\int_0^1 \frac{C_{\alpha,2}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-2\alpha}} \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Observação 5.1.1. *Seja $B_n(x_0) = B_{2^{-n}}(x_0)$, então o Teorema 5.1.2(c) pode ser reescrito na forma equivalente*

$$\int_0^1 \frac{C_{\alpha,2}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-2\alpha}} \frac{d\delta}{\delta} \simeq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(d-2\alpha)} C_{\alpha,2}(A \cap B_n(x_0)) < \infty. \quad (5.2)$$

O conceito de conjuntos finos é uma forma de generalizar o critério de Wiener para conjuntos quaisquer. Basta perceber que tomando $A = \Omega^c$, sendo Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, no Teorema 5.1.2 temos, em particular, o Critério de Wiener, Teorema 5.1.1. O resultado acima foi estendido para $0 < \alpha \leq d/2$ por (FUGLEDE, 1971).

A seguir enunciaremos dois resultados importantes para a caracterização de conjuntos finos, foram demonstrados por (BRELOT, 1944), (BRELOT, 2006), (CHOQUET, 1959) e (FUGLEDE, 1971).

Teorema 5.1.3 ((Propriedade de Kellogg e Choquet). *Seja $0 < \alpha \leq d/2$ tal que $d \geq 2$ e seja $C_{\alpha,2}$ a capacidade de Bessel. Então,*

- (i) $C_{\alpha,2}(e_{\alpha,2}(A) \cap A) = 0$ para todo $A \subset \mathbb{R}^d$.
- (ii) Para qualquer $A \subset \mathbb{R}^d$ e todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto G tal que $e_{\alpha,2}(A) \subset G$ e $C_{\alpha,2}(A \cap G) < \varepsilon$.

5.2 Conjuntos finos e potencial de Havin-Maz'ya

Um trabalho que visou estender o critério de Wiener para potenciais não-lineares foi proposto por V.G Maz'ya em (MAZIA, 1970). Neste trabalho Maz'ya estudou o problema de Dirichlet utilizando uma classe de funções elípticas quasi-linear, incluindo o operador do p-Laplaciano

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(\nabla u |\nabla u|^{p-2}) = 0$$

e definiu o que seriam pontos regulares de fronteira para soluções fracas em $W^{1,p}$ para o problema de Dirichlet associado.

Teorema 5.2.1 (Veja (MAZIA, 1970)). *Seja $1 < p \leq d$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado e suave. Um ponto $x \in \partial\Omega$ é regular para o problema de Dirichlet da equação $\Delta_p u = 0$ se,*

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{1,p}(\Omega^c \cap B_r(x))}{r^{N-p}} \right)^{p-1} \frac{dr}{r} = \infty.$$

A recíproca deste resultado foi demonstrada por (KILPELÄINEN; MALÝ, 1994).

Nesta seção, nosso objetivo é demonstrar que a extensão do conceito de conjuntos finos (consequentemente do critério de Wiener) para o potencial de Havin-Maz'ya, $V_{\alpha,q}$, é natural. Ao mesmo tempo, este potencial se mostra insuficiente para estendermos o conceito de conjuntos finos. Exporemos esta insuficiência a seguir.

Definição 5.2.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ arbitrário. Dizemos que A é um conjunto (α, q) -fino no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^d$, quando uma das alternativas é verdadeira.*

(i) Existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ tal que

$$(V_{\alpha,q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (V_{\alpha,q}\mu)(x).$$

(ii) Existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$ tal que $V_{\alpha,q}\mu$ é limitada e

$$(V_{\alpha,q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (V_{\alpha,q}\mu)(x).$$

(iii) Para $\alpha > 0$ e $1 < q \leq \frac{d}{\alpha}$, tem-se

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Claro que (i) é equivalente a (ii). Usando o Teorema 4 em (HEDBERG, 1972), temos que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) se $2 - \frac{\alpha}{d} < q \leq \frac{d}{\alpha}$. No entanto, se $1 < q < 2 - \frac{\alpha}{d}$ (iii) $\nRightarrow$ (ii). Além disso, se $q > 2 - d/\alpha$ existem estimativas, veja (ADAMS; MEYERS, 1972)

$$A_1 \int_0^\infty \left(\frac{\mu(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} e^{-b_1 \delta} \frac{d\delta}{\delta} \leq (V_{\alpha,q}\mu)(x) \leq A_2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} e^{-b_2 \delta} \frac{d\delta}{\delta}.$$

Porém, quando $1 < q \leq 2 - \frac{\alpha}{d}$ apenas a primeira desigualdade é verdadeira. Com efeito, considere a medida de Dirac $\mu = \delta_x$ e realizar uma simples integração por partes para concluir que $V_{\alpha,q}\mu = \infty$. Isto mostra que a escolha da Definição 5.2.1(i) para conjuntos (α, q) -finos não é uma boa definição, quando temos o caso não-linear $q \neq 2$.

5.3 Conjuntos finos e potencial de Wolff

Nosso objetivo é mostrar que a Definição 5.2.1 item (iii) serve como uma boa definição para conjuntos (α, q) -finos, no sentido que temos propriedade de Kellogg (veja Teorema 5.3.1), a saber,

$$C_{\alpha,q}(e_{\alpha,q}(A) \cap A) = 0 \text{ para todo } A \subset \mathbb{R}^d. \quad (5.3)$$

Definição 5.3.1. Seja $1 < p < \infty$, $q = p'$ e $0 < \alpha < d$, $d \geq 2$. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ é (α, q) -fino em x_0 , com respeito a capacidade de Bessel $C_{\alpha,q}$, se $\alpha q \leq d$ e

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Para provar a propriedade de Kellogg usaremos o seguinte lema.

Lema 5.3.1. *Seja $0 < \alpha < d$ e $1 < q \leq d/\alpha$. Se (5.3) é falso para algum $A \subset \mathbb{R}^d$, então existe um conjunto compacto $A_\varepsilon \subset A$ tal que $C_{\alpha,q}(A_\varepsilon) > 0$ e*

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A_\varepsilon \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \varepsilon, \text{ para todo } x \in A_\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Denote por $C(A, \delta, x) = (\delta^{\alpha q - d} C_{\alpha,q}(A \cap B_\delta(x)))^{p-1} \delta^{-1}$ e suponha que

$$\int_0^1 C(A, \delta, x) d\delta < \infty$$

para todo $x \in A' = A \cap e_{\alpha,q}(A)$ tal que $C_{\alpha,q}(A') > 0$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente grande e um conjunto $A_{\varepsilon_0} \subset A'$ tal que $\int_0^1 C(A_{\varepsilon_0}, \delta, x) d\delta < \varepsilon_0$ e $C_{\alpha,q}(A_{\varepsilon_0}) > 0$. É suficiente assumir que A_{ε_0} é compacto. Escolha A_{ε_0} tal que $C_{\alpha,q}(A_{\varepsilon_0} \cap B(x, \delta)) > 0$ para todo $x \in A_{\varepsilon_0}$ e $0 < \delta < 1$. Denotando

$$W(x) = \int_0^1 C(A_{\varepsilon_0}, \delta, x) d\delta$$

e notando $W(x) < \varepsilon_0$ para todo $x \in A_{\varepsilon_0}$, então $\sup_{x \in A_{\varepsilon_0}} W(x)$ existe. Assim, usando a propriedade do supremo, é possível encontrar $a \in A_{\varepsilon_0}$ tal que

$$W(a) > \sup_{x \in A_{\varepsilon_0}} W(x) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Escolha $\gamma > 0$ tal que

$$\int_\gamma^1 C(A_{\varepsilon_0}, \delta, x) d\delta > W(a) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tome $2\rho < \gamma$, então $\forall x \in \overline{B_\rho(a)}$

$$\int_\gamma^1 C(A_{\varepsilon_0}, \delta, x) d\delta > W(a) - \frac{\varepsilon}{4} > \sup_{x \in A_{\varepsilon_0}} W(x) - \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Consequentemente,

$$\int_0^\gamma C(A_{\varepsilon_0}, \delta, x) d\delta = W(x) - \int_\gamma^1 C(A_{\varepsilon_0}, \delta, x) d\delta < W(x) - \sup_{x \in A_{\varepsilon_0}} W(x) + \frac{3\varepsilon}{4} \leq \frac{3\varepsilon}{4}, \forall x \in \overline{B_\rho(a)}. \quad (5.4)$$

Defina $A_\varepsilon = A_{\varepsilon_0} \cap \overline{B_\rho(a)}$. Claro que A_ε é compacto e $C_{\alpha,q}(A_\varepsilon) \geq C_{\alpha,q}(A_{\varepsilon_0}) > 0$. Escreva,

$$\int_0^1 C(A_\varepsilon, \delta, x) d\delta = \int_0^\gamma C(A_\varepsilon, \delta, x) d\delta + \int_\gamma^1 C(A_\varepsilon, \delta, x) d\delta := I_1 + I_2.$$

Claramente $I_1 < \frac{3\varepsilon}{4}$. Quanto a I_2 perceba que

$$I_2 = \int_\gamma^1 C(A_\varepsilon, \delta, x) d\delta \leq C_{\alpha,q}(\overline{B_\rho(a)})^{p-1} \int_\gamma^1 \left(\frac{1}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta}.$$

Dividiremos o controle de I_2 em duas etapas, considerando $\alpha q < d$ e $\alpha q = d$. Primeiro observe que $2\rho < \delta$ e $x \in \overline{B_\rho(a)}$, implica $\overline{B_\rho(a)} \subset B_\delta(x)$. De fato,

$$y \in \overline{B_\rho(a)} \Rightarrow |y - x| \leq |y - a| + |x - a| \leq 2\rho < \delta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_\gamma^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A_\varepsilon \cap B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} &\leq [C_{\alpha,q}(\overline{B_\rho(a)})]^{p-1} \int_\gamma^1 \delta^{-(d-\alpha q)(p-1)-1} d\delta \\ &= c[C_{\alpha,q}(\overline{B_\rho(a)})]^{p-1} (1 - \gamma^{-(d-\alpha q)(p-1)}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Caso 1: Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno e $\alpha q < d$, temos $C_{\alpha,q}(\overline{B_\rho(a)}) = C_{\alpha,q}(\overline{B_1(a)})\rho^{d-\alpha q}$. Portanto, assumindo que $\rho < \gamma$ e usando a desigualdade (5.5) obtemos

$$\int_\gamma^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A_\varepsilon \cap B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq C_2[1 - \rho^{(d-\alpha q)(p-1)}].$$

Caso 2: Se $\alpha q = d$, então $C_{\alpha,q}(\overline{B_\rho(a)}) \simeq [\log(\frac{c}{\rho})]^{1-q}$, $c > 1$ e $0 < \rho \leq 1$. Então,

$$\int_\gamma^1 [C_{\alpha,q}(E_\varepsilon \cap B_\delta(x))]^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq [C_{\alpha,q}(\overline{B_\rho(a)})]^{p-1} \int_\gamma^1 \frac{d\delta}{\delta} \lesssim [\log(\frac{c}{\rho})]^{(p-1)(1-q)} (-\log \gamma).$$

As estimativas acerca da capacidade $C_{\alpha,q}(B_r)$ podem ser encontradas no livro de (ADAMS; HEDBERG, 1999). Em ambos os casos acima, assumindo que $\rho > 0$ é suficientemente pequeno temos que $I_2 < \frac{\varepsilon}{4}$, como desejamos. $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar a Propriedade de Kellogg para conjuntos (α, q) -finos.

Teorema 5.3.1 (Propriedade de Kellogg). *Seja $\alpha > 0$ e $1 < q \leq d/\alpha$. Então,*

$$C_{\alpha,q}(e_{\alpha,q}(A) \cap A) = 0 \text{ para todo } A \subset \mathbb{R}^d.$$

Demonstração. Suponha que a propriedade Kellogg é falsa, ou seja, existe $A \subset \mathbb{R}^d$ tal que $C_{\alpha,q}(e_{\alpha,q}(A) \cap A) \neq 0$. Seja E_ε o conjunto compacto do Lema 5.3.1. Então E_ε admite uma medida capacitária μ . Assim,

$$\mu(E_\varepsilon) \leq \int_{E_\varepsilon} (V_{\alpha,q}\mu) d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (G_\alpha * \mu)^p dx \leq A \int_{E_\varepsilon} (W_{\alpha,q}\mu) d\mu.$$

Lembrando que $C_{\alpha,q}(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{M}^+(A) \text{ e } (V_{\alpha,q}\mu)(x) \leq 1 \ \forall x \in \text{spt}(\mu)\}$, claro que $\mu(E_\varepsilon \cap B_\delta(x)) \leq C_{\alpha,q}(E_\varepsilon \cap B_\delta(x))$. Então, usando o Lema 5.3.1, obtemos

$$(W_{\alpha,q}\mu)(x) \leq \int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(E_\varepsilon \cap B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \varepsilon \quad \text{em } x \in E_\varepsilon.$$

Unindo as estimativas concluímos que $\int (V_{\alpha,q}\mu)d\mu < A\varepsilon\mu(E_\varepsilon)$. Porém observe que se tomarmos $A\varepsilon < 1$ isto implica $\int (V_{\alpha,q}\mu)d\mu < \mu(E_\varepsilon)$ que é uma contradição. $\square$

5.4 Capacidade diádica de Bessel

Nesta seção, nosso objetivo é definir uma capacidade diádica $C = C_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}$ equivalente a capacidade de Bessel $C_{\alpha,q}$ de forma que podemos demonstrar a existência de medida capacitária associada ao potencial de Wolff diádico e não precisaremos mostrar a existência de funções capacitária. Além disso, vamos obter um resultado similar ao Teorema 3.5.2 caracterizando a capacidade C via o potencial de Wolff diádico.

5.4.1 Potencial Regularizado de Wolff-Hedberg

Seja Q um cubo diádico e seja φ_Q uma função de corte do cubo Q tal que $\mathbb{1}_Q \leq \varphi_Q \leq \mathbb{1}_{\tilde{Q}}$. Assuma que $1 < q \leq d/\alpha$ e $\alpha > 0$. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+$, o potencial diádico de Wolff regularizado e associado a núcleo de Bessel G_α é definido por:

$$(\mathcal{W}\mu)(x) = \sum_{\ell_Q \leq 1} \left(\ell_Q^{\alpha q - d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_Q d\mu \right)^{p-1} \varphi_Q(x). \quad (5.6)$$

Como φ_Q é regular, segue que $(\mathcal{W}\mu)(\cdot)$ é uma função semi-contínuo inferiormente, que será importante para mostrar a existência de medida extremal. Esta foi a principal razão de regularizar o potencial diádico de Wolff. Usando o Teorema 4.2.3, podemos definir a energia diádica regularizada de $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ por:

$$\mathcal{E}(\mu) = \int (\mathcal{W}\mu) d\mu. \quad (5.7)$$

Lembremos que os cubos diádicos são disjuntos dois a dois, portanto podemos escrever a energia diádica regularizada da seguinte maneira

$$\mathcal{E}(\mu) = \int (\mathcal{W}\mu) d\mu = \sum_{\ell_Q \leq 1} \ell_Q^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(\varphi_Q)^p := \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q [\mu(\varphi_Q)]^p,$$

acima denotamos $\mu(\varphi_Q) = \int \varphi_Q d\mu$. Inspirados no Teorema 3.4.1 e o Teorema 4.3.1, podemos definir uma capacidade diádica C equivalente a $C_{\alpha,q}$.

Observação 5.4.1. Se $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ for uma medida com sinal, então podemos definir o potencial diádico regularizado de Wolff-Hedberg e a energia regularizada da seguinte maneira:

$$(\mathcal{W}\mu)(x) = \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q |\mu(\varphi_Q)|^{p-2} \mu(\varphi_Q) \varphi_Q(x) \quad e \quad \mathcal{E}(\mu) = \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q |\mu(\varphi_Q)|^p,$$

onde $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ denota a variação total de μ .

Observação 5.4.2. *Similarmente podemos definir o potencial diádico regularizado de Wolff-Hedberg associado ao núcleo de Riesz, assim como a energia diádica regularizada, a saber*

$$\dot{\mathcal{E}}(\mu) = \int (\dot{W}\mu) d\mu. \quad (5.8)$$

Definição 5.4.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto e $1 < q \leq d/\alpha$ para $\alpha > 0$. A capacidade diádica de K é definida por:*

$$[\mathcal{C}(K)]^{1/q} = \sup\{\mu(K); \mu \in \mathcal{M}^+(K), \mathcal{E}(\mu) \leq 1\}.$$

Usando o Teorema 4.2.3 e o Teorema 4.3.1, podemos mostrar as seguintes equivalências.

Lema 5.4.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+$ e $1 < q < \infty$.*

(i) *Se $0 < \alpha < d/q$, então*

$$\dot{\mathcal{E}}(\mu) \simeq \dot{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \dot{E}_{\alpha,q}(\mu) = \int |\mathbf{I}_{\alpha}\mu|^p dx.$$

(ii) *Se $0 < \alpha \leq d/q$, então*

$$\mathcal{E}(\mu) \simeq E_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq E_{\alpha,q}(\mu) = \int |\mathcal{J}_{\alpha}\mu|^p dx.$$

Demonstração. Dado $x \in Q$ cubo diádico, note que $Q \subset B(x, 2^{-n}) \subset \tilde{Q}$. Então, pela desigualdade (4.42), obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{\mathbf{I}_{\alpha,q}}^{\mathcal{D}}\mu)(x) &\lesssim (\dot{W}_{\alpha,q}\mu)(x) \lesssim \sum_{Q \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(\tilde{Q})}{\ell_Q^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x) \simeq \sum_{Q \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(\tilde{Q})}{\ell_{\tilde{Q}}^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x) \\ &= \sum_{\tilde{Q}} \left(\frac{\mu(\tilde{Q})}{\ell_{\tilde{Q}}^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_Q(x). \end{aligned}$$

Então, obtemos

$$\sum_Q \ell_Q^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(Q)^p \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} (\dot{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu \lesssim \sum_{\tilde{Q}} \ell_{\tilde{Q}}^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(\tilde{Q})^p. \quad (5.9)$$

Usando a desigualdade diádica de Wolff (veja Teorema 4.2.3), vimos que a energia diádica $\dot{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}$ de μ satisfaz

$$\dot{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{W}_{\mathbf{I}_{\alpha,q}}^{\mathcal{D}}\mu) d\mu = \sum_Q \ell_Q^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(Q)^p.$$

Usando a desigualdade (5.9) e a versão contínua da desigualdade de Wolff (veja Teorema 4.3.1(i)), respectivamente, obtemos

$$\dot{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^d} (\dot{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu \simeq \int |\mathbf{I}_{\alpha}\mu|^p dx. \quad (5.10)$$

Como a energia regularizada $\dot{\mathcal{E}}(\mu)$ é dada por

$$\dot{\mathcal{E}}(\mu) = \sum_Q \ell_Q^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(\varphi_Q)^p, \quad \text{com} \quad \mathbb{1}_Q \leq \varphi_Q \leq \mathbb{1}_{\tilde{Q}}.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}(\mu) &\simeq \sum_Q \ell_Q^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(Q)^p \leq \dot{\mathcal{E}}(\mu) \leq \sum_Q \ell_Q^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(\tilde{Q})^p \\ &\simeq \sum_{\tilde{Q}} \ell_{\tilde{Q}}^{(d-\alpha q)(1-p)} \mu(\tilde{Q})^p \\ &\simeq \dot{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}(\mu). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\dot{\mathcal{E}}(\mu) \simeq \dot{E}_{\alpha,q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int |\mathbf{I}_{\alpha}\mu|^p dx$ como desejamos mostrar. $\square$

Agora fica evidente, usando o Teorema 3.4.1 e o Lema 5.4.1, que $C_{\alpha,q}(A) \simeq \mathbf{C}(A)$, sempre que $1 < q \leq d/\alpha$ e $\alpha > 0$. Existe outra forma equivalente de definir $\mathbf{C}$ usando o ínfimo de $[\mathcal{E}(\mu)]^{q-1}$ sobre o conjunto $\mathcal{M}_1^+(K)$ que, sabidamente, é fracamente compacto.

Lema 5.4.2. *Seja K compacto e $\mathcal{M}_1^+(K) = \{\mu \in \mathcal{M}^+(K); \mu(K) = 1\}$, então*

$$\mathbf{C}(K) = \frac{1}{\inf\{[\mathcal{E}(\mu)]^{q-1}; \mu \in \mathcal{M}_1^+(K)\}}.$$

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ tal que $\mathcal{E}(\mu) \leq 1$. Defina $\nu = \frac{\mu}{\mu(K)}$ e perceba que $\nu(K) = 1$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\nu) &= \mu(K)^{-p} \mathcal{E}(\mu) \leq \frac{1}{\mu(K)^p} \implies \mu(K) \leq (\mathcal{E}(\nu))^{-1/p} \\ &\implies \mathbf{C}(K)^{1/q} \leq (\mathcal{E}(\nu))^{-1/p} \\ &\implies (\mathcal{E}(\nu))^{q-1} = (\mathcal{E}(\nu))^{q/p} \leq [\mathbf{C}(K)]^{-1} \\ &\implies \inf_{\nu \in \mathcal{M}_1^+} (\mathcal{E}(\nu))^{q-1} \leq [\mathbf{C}(K)]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

pois $q-1 = q/p$, quando $1/p + 1/q = 1$. Quanto a desigualdade contrária, tome $\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ tal que $\nu(K) = 1$. Defina $\mu = (\mathcal{E}(\nu))^{-1/p} \nu$ e perceba que

$$\mathcal{E}(\mu) = [(\mathcal{E}(\nu))^{-1/p}]^p \mathcal{E}(\nu) = 1 \quad \text{e} \quad \mu(K) = (\mathcal{E}(\nu))^{-1/p} \nu(K) = (\mathcal{E}(\nu))^{-1/p}.$$

Então $\mathbf{C}(K)^{1/q} \geq \mu(K) = (\mathcal{E}(\nu))^{-1/p}$. Isto implica na desigualdade contrária a de (5.11). $\square$

5.4.2 Medida extremal e capacitária

Nesta seção vamos provar três proposições que servirão de base para mostrar a existência de medida capacitária para conjuntos compactos.

Definição 5.4.2 (Medida extremal). *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ e $\mu_A \in \mathcal{M}^+$. Assuma que $\alpha > 0$ e $0 < q \leq d/\alpha$. Dizemos que μ_A é uma medida extremal (associada a $\mathbb{C}$) de A , se $\text{spt}(\mu_A) \subset \overline{A}$, a medida μ_A minimiza a energia $\mathcal{E}$ sobre o conjunto $\mathcal{M}_1^+(A) = \{\mu \in \mathcal{M}^+(A) : \mu(A) = 1\}$ e temos que*

$$\mathcal{E}(\mu_A) = [\mathbb{C}(A)]^{1-q'}. \quad (5.12)$$

Uma pergunta surge naturalmente. Existe medida extremal μ_A que minimiza a energia regularizada $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{M}_1^+(A)$ tal que

$$\mathcal{E}(\mu_A) = \mathbb{C}(A)^{1-p}?$$

O próximo resultado, garante a existência de tal medida suportada em conjuntos compactos.

Lema 5.4.3. *Existe uma medida extremal μ_K de um compacto K .*

Demonstração. Como $x \mapsto (\mathcal{W}\mu)(x)$ é s.c.i. em $\mathbb{R}^d$. Então, emulando a prova da Proposição 3.1.1(iii), podemos mostrar que o mapa $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{W}\mu) d\mu$ é s.c.i. na topologia fraca de $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Perceba, pelo Lema 2.2.1, que $\mathcal{M}_1^+(K)$ é fracamente compacto. Portanto, existe uma medida minimizante $\gamma_K \in \mathcal{M}_1^+(K)$ tal que $\mathcal{E}(\gamma_K) \leq \mathcal{E}(\mu)$, $\forall \mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$. Agora, utilizando o Lema 5.4.2 o resultado segue. $\square$

Definição 5.4.3. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$ tal que $1 < q \leq d/\alpha$. Suponha que $0 < \mathbb{C}(E) < \infty$. Uma medida $\mu^E \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ é chamada de medida $\mathbb{C}$ -capacitária para E , se $\text{spt}(\mu^E) \subset \overline{E}$ e satisfaz*

- (i) $\mu^E(\overline{E}) = \mathbb{C}(E)$;
- (ii) $(\mathcal{W}\mu^E)(x) \geq 1$ $\mathbb{C}$ -a.e $x \in E$;
- (iii) $(\mathcal{W}\mu^E)(x) \leq 1$ $\forall x \in \text{spt}(\mu^E)$.

Nosso objetivo é construir uma medida capacitária para conjuntos compactos. Para isto, precisaremos das seguintes proposições.

Proposição 5.4.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto. Então existe $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(K)$ tal que $(\mathcal{W}\gamma) \geq \mathcal{E}(\gamma)$, $\mathbb{C}$ -a.e em K .*

Demonstração. Seja γ medida extremal e suponha que $(\mathcal{W}\gamma)(x) < \mathcal{E}(\gamma)$. Então existe $\varepsilon > 0$ e um compacto $F \subset K \cap \{x; (\mathcal{W}\gamma)(x) < \mathcal{E}(\gamma) - \varepsilon\}$, onde $\mathbb{C}(F) > 0$. Tome $\tau \in \mathcal{M}_1^+(F)$ com $\mathcal{E}(\tau) < \infty$ e defina

$$\mu_\delta = (1 - \delta)\gamma + \delta\tau, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Note, por construção, que $\mu_\delta \in \mathcal{M}_1^+(K)$ e como γ é uma medida extremal, segue que $\mathcal{E}(\gamma) \leq \mathcal{E}(\mu_\delta)$. Vamos mostrar que isto implica numa contradição. De fato, considere a energia regularizada de μ_δ e escreva

$$\mathcal{E}(\mu_\delta) = \mathcal{E}([1 - \delta]\gamma + \delta\tau) = \sum_{\ell(Q) \leq 1} a_Q \overbrace{(\gamma(\varphi_Q) + \delta(\tau(\varphi_Q) - \gamma(\varphi_Q)))^p}^{(*)}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio temos:

$$(*) = \gamma(\varphi_Q) + \delta(\tau(\varphi_Q) - \gamma(\varphi_Q))p(\gamma(\varphi_Q) + \xi_Q(\tau(\varphi_Q) - \gamma(\varphi_Q)))^{p-1}, \quad 0 < \xi_Q < \delta.$$

Substituindo $(*)$ em $\mathcal{E}(\mu_\delta)$ obtemos:

$$\mathcal{E}(\mu_\delta) = \mathcal{E}(\gamma) + \delta p \sum_{\ell(Q) \leq 1} a_Q (\tau(\varphi_Q) - \gamma(\varphi_Q)) (\gamma(\varphi_Q) + \xi_Q(\tau(\varphi_Q) - \gamma(\varphi_Q)))^{p-1}. \quad (5.13)$$

Como $0 \leq \gamma(\varphi_Q) + \xi_Q(\tau(\varphi_Q) - \gamma(\varphi_Q)) \leq \gamma(\varphi_Q) + \tau(\varphi_Q)$ e $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ para $a, b \geq 0$. Então, podemos majorar a soma em (5.13) por:

$$\sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q (\gamma(\varphi_Q) + \tau(\varphi_Q))^p \lesssim \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q (\gamma(\varphi_Q))^p + \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q (\tau(\varphi_Q))^p.$$

Portanto, fazendo $\xi_Q \rightarrow 0$ em (5.13) e lembrando que $F \subset K \cap \{x; (\mathcal{W}\gamma)(x) < \mathcal{E}(\gamma) - \varepsilon\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mu_\delta) &= \mathcal{E}(\gamma) + \delta p \left(\sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q \gamma(\varphi_Q)^{p-1} \tau(\varphi_Q) - \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q \gamma(\varphi_Q)^p \right) + o(\delta). \\ &= \mathcal{E}(\gamma) + \delta p \left\{ \int_F ((\mathcal{W}\gamma)d\tau) - \mathcal{E}(\gamma) \right\} + o(\delta). \\ &\leq \mathcal{E}(\gamma) - \delta p\varepsilon + o(\delta) < \mathcal{E}(\gamma), \end{aligned}$$

quando $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. □

Proposição 5.4.2. *Se γ é uma medida $\mathbb{C}$ -extremal para um compacto K , então $(\mathcal{W}\gamma)(x) \leq \mathcal{E}(\gamma)$ $\forall x \in \text{spt}(\gamma)$.*

Demonstração. Seja γ uma medida extremal de K e suponha $(\mathcal{W}\gamma)(x_0) > \mathcal{E}(\gamma)$ para algum $x_0 \in \text{spt}(\gamma)$. Então, pela semi-continuidade inferior de $(\mathcal{W}\gamma)(\cdot)$ em $\mathbb{R}^d$, existe uma vizinhança aberta G de x_0 , tal que

$$(\mathcal{W}\gamma)(x) > \mathcal{E}(\gamma) \quad \forall x \in G. \quad (5.14)$$

Se $x_0 \in \text{spt}(\gamma)$, então $\gamma(G) > 0$. A Proposição 5.4.1 nos diz $(\mathcal{W}\gamma)(x) \geq \mathcal{E}(\gamma)$, $\mathbb{C}$ -a.e em K ,

o que implica que esta propriedade é válida também $\gamma - a.e$ em K . Tome $x \in G$ e temos que

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int (\mathcal{W}\gamma) d\gamma = \int_G (\mathcal{W}\gamma) d\gamma + \int_{\text{spt}(\gamma) \setminus G} (\mathcal{W}\gamma) d\gamma > \mathcal{E}(\gamma).$$

O que é uma contradição. □

Agora utilizando as Proposições 5.4.1 e 5.4.2 podemos mostrar a existência de medida capacitária para conjuntos compactos.

Teorema 5.4.1. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto, $1 < q < \infty$ e $0 < \alpha \leq d/q$. Suponha que $0 < C(K) < \infty$. Então existe $\gamma^K \in \mathcal{M}^+(K)$ medida capacitária de K .*

Demonstração. Seja $\gamma \in \mathcal{M}^+(K)$ a medida extremal de K e defina a medida de equilíbrio $\gamma^K = C(K)\gamma$. Claro que, $\text{spt}(\gamma^K) \subset K$ e $\gamma^K(K) = C(K)$. Note que

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}\gamma^K)(x) &= \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q \gamma^K(\varphi_Q)^{p-1} = [C(K)]^{p-1} \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q \gamma(\varphi_Q)^{p-1} \\ &= [C(K)]^{p-1} (\mathcal{W}\gamma)(x) \\ &= [\mathcal{E}(\gamma)]^{-1} (\mathcal{W}\gamma)(x), \end{aligned}$$

pois $\mathcal{E}(\gamma) = [C(K)]^{1-p}$. Agora invocando as Proposições 5.4.1 e 5.4.2, concluímos que

$$(\mathcal{W}\gamma^K)(x) \geq 1, \quad C - a.e \quad x \in K \tag{5.15}$$

$$(\mathcal{W}\gamma^K)(x) \leq 1, \quad \forall x \in \text{spt}(\gamma^K), \tag{5.16}$$

como desejamos mostrar. □

5.4.3 Caracterização de capacidade via potencial de Wolff

Como fizemos no Teorema 3.5.2, usando existência de pontos de sela. Nesta seção, nosso objetivo é mostrar as seguintes caracterizações

$$C(K) = \inf \{ \mathcal{E}(\mu), \mu \in \mathcal{M}^+, (\mathcal{W}\mu)(x) \geq 1 \text{ } C - a.e \text{ em } K \}$$

para todo compacto K . E, além disso, mostraremos que

$$C(K) = \sup \{ \mu(K), \mu \in \mathcal{M}^+(K), (\mathcal{W}\mu)(x) \leq 1 \forall x \in \text{spt}(\mu) \}.$$

Observação 5.4.3. *Seja $\varepsilon > 0$ e considere o conjunto $E_\varepsilon = \{x : (\mathcal{W}\mu)(x) > \varepsilon\}$. Perceba, pela semi-continuidade inferior de $\mathcal{W}\mu$ em $\mathbb{R}^d$, que E_ε é um conjunto aberto. Então usando o Teorema 3.1.6, temos E_ε é capacitável com relação $C_{\alpha,q}$. Mas as capacidades C e $C_{\alpha,q}$ são*

equivalentes, portanto podemos escrever

$$C(E_\varepsilon) = \sup_{K \subset E_\varepsilon} C(K).$$

Proposição 5.4.3. *Seja K um conjunto compacto tal que $K \subset E_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Se $\alpha > 0$ e $1 < q \leq d/\alpha$, então $C(K) \leq \varepsilon^{-q} \mathcal{E}(\mu)$. Em particular, temos que*

$$C(E_\varepsilon) \leq c\varepsilon^{-q} \mathcal{E}(\mu). \quad (5.17)$$

Consequentemente, $C\{x; (\mathcal{W}\mu)(x) = \infty\} = 0$.

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+$ e defina σ uma medida de probabilidade tal que $\mathcal{E}(\sigma) < \infty$ e $\text{spt}(\sigma) \subset E_\varepsilon$. Então, usando a desigualdade de Hölder em ℓ^p , obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \int (\mathcal{W}\mu) d\sigma = \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q [\mu(\varphi_Q)]^{p-1} \sigma(\varphi_Q) = \sum_{\ell_Q \leq 1} \left(a_Q^{\frac{1}{q}} [\mu(\varphi_Q)]^{p-1} \right) \left(a_Q^{\frac{1}{p}} \sigma(\varphi_Q) \right) \\ &\leq \left(\sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q [\mu(\varphi_Q)]^p \right)^{1/q} \left(\sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q [\sigma(\varphi_Q)]^q \right)^{1/p} \\ &= [\mathcal{E}(\mu)]^{1/q} [\mathcal{E}(\sigma)]^{1/p}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Portanto, $[\mathcal{E}(\sigma)]^{1-q} \leq \varepsilon^{-q} \mathcal{E}(\mu)$. Agora considere $\sigma = \sigma_K$ uma medida extremal para conjunto compacto $K \subset E_\varepsilon$, então

$$C(K) = [\mathcal{E}(\sigma_K)]^{-\frac{1}{p-1}} = [\mathcal{E}(\sigma_K)]^{1-q} \leq \varepsilon^{-q} \mathcal{E}(\mu).$$

Agora, pela observação anterior, concluímos que $C(E_\varepsilon) \leq c\varepsilon^{-q} \mathcal{E}(\mu)$. Em particular, $C\{x : (\mathcal{W}\mu)(x) = \infty\} = 0$. O caso em que μ é medida com sinal segue de maneira análoga. $\square$

Proposição 5.4.4. *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um compacto. Então,*

$$C(K) = \inf \{ \mathcal{E}(\mu) : \mu \in \mathcal{M}^+ \text{ e } (\mathcal{W}\mu)(x) \geq 1, \text{ C-a.e em } K \}.$$

Demonstração. Usando a Proposição 5.4.3 para compactos $K \subset \{x : (\mathcal{W}\mu)(x) > 1\}$ temos que $C(K) \leq \mathcal{E}(\mu)$. Em particular,

$$C(K) \leq \inf \mathcal{E}(\mu),$$

onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto $\mu \in \mathcal{M}^+$ tal que $(\mathcal{W}\mu)(x) \geq 1$ C-a.e $x \in K$. Quanto ao outro lado, escolha γ^K uma medida capacitária de K . Então, $(\mathcal{W}\gamma^K)(x) \geq 1$ C-a.e $x \in K$. Em particular, $(\mathcal{W}\gamma^K)(x) \geq 1$ γ^K -a.e $x \in K$. Então,

$$\mathcal{E}(\gamma^K) = \int (\mathcal{W}\gamma^K) d\gamma^K = \int_{\text{spt}(\gamma^K)} (\mathcal{W}\gamma^K) d\gamma^K \leq \gamma^K(K).$$

Por outro lado, temos que

$$\mathcal{E}(\gamma^K) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{W}\gamma^K) d\gamma^K \geq \int_K (\mathcal{W}\gamma^K) d\gamma^K \geq \int_K d\gamma^K = \gamma^K(K).$$

Deste forma, existe uma medida $\gamma^K \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo $\mathcal{W}\gamma^K(x) \geq 1$ $\mathbb{C}$ -a.e em K tal que $\mathbb{C}(K) = \gamma^K(K) = \mathcal{E}(\gamma^K)$. Isto finaliza nossa prova. $\square$

Proposição 5.4.5. *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto. Então,*

$$\mathbb{C}(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), (\mathcal{W}\mu)(x) \leq 1, \forall x \in \text{spt}(\mu)\}.$$

Demonstração. Quando $\mu = \gamma$ é uma medida capacitária de K , o supremo $\sup \mu(K)$ é atingido. Portanto, basta mostrar que $\mu(K) \leq \mathbb{C}(K)$. Para isto, seja $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ tal que $(\mathcal{W}\mu) \leq 1$ no $\text{spt}(\mu)$. Então,

$$\mathcal{E}(\mu) = \int_{\text{spt}(\mu)} (\mathcal{W}\mu) d\mu \leq \mu(K).$$

Vimos que $(\mathcal{W}\gamma) \geq 1$ γ -a.e em K , pois $\gamma \ll \mathbb{C}_{\alpha,q}^D$, isto é, absolutamente contínua. Então, imitando a prova da desigualdade (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \int_K d\mu \leq \int (\mathcal{W}\gamma) d\mu = \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q [\gamma(\varphi_Q)]^{p-1} \mu(\varphi_Q) \leq (\mathcal{E}(\gamma))^{1/q} (\mathcal{E}(\mu))^{1/p} \\ &\leq [\mathbb{C}(K)]^{1/q} \mu(K)^{1/p}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mu(K) \leq \mathbb{C}(K)$ e o resultado segue. $\square$

5.4.4 Medida extremal e capacitária para quaisquer conjuntos

Vamos iniciar esta seção mostrando que o potencial de Wolff, $\mathcal{W}\mu$ é $\mathbb{C}$ -quase contínuo, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $G \subset \mathbb{R}^d$ satisfazendo $\mathbb{C}(G) < \varepsilon$ e tal que $(\mathcal{W}\mu)|_{G^c}$ é contínua.

Proposição 5.4.6. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ tal que $\mathcal{E}(\mu) < \infty$, então $\mathcal{W}\mu$ é $\mathbb{C}$ -quase-contínuo.*

Demonstração. Relembre que $(\mathcal{W}\mu)(x) = \sum_{\ell_Q \leq 1} a_Q [\mu(\varphi_Q)]^{p-1} \varphi_Q(x)$ e defina

$$(\mathcal{W}_n \mu)(x) = \sum_{2^{-n} \leq \ell_Q \leq 1} a_Q [\mu(\varphi_Q)]^{p-1} \varphi_Q(x)$$

de forma que $(\mathcal{W}_n \mu)(\cdot)$ seja contínua em $\mathbb{R}^d$. Então,

$$\int (\mathcal{W}\mu - \mathcal{W}_n \mu) d\mu = \sum_{\ell_Q \leq 2^{-n}} a_Q \mu(\varphi_Q)^p = \varepsilon_n \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja $E_\lambda = \{x; (\mathcal{W}\mu)(x) - (\mathcal{W}_{n_j}\mu)(x) > \lambda\}$. Pela Proposição 5.4.3, sabemos que $C(E_\lambda) \leq \lambda^{-q}\varepsilon_n$. Seja $\varepsilon > 0$ e escolha $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ e $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ de forma que $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{-q}\varepsilon_{n_j} < \varepsilon$, quando $n_j \rightarrow \infty$ e $\lambda_j \rightarrow 0^+$. Considere $G = \bigcup_{j=1}^\infty E_{\lambda_j}$ e perceba que G é aberto. Além disso,

$$C(G) \leq \sum_{j=1}^\infty C(E_{\lambda_j}) \leq \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{-q}\varepsilon_{n_j} < \varepsilon.$$

No complementar de G , temos que

$$0 \leq (\mathcal{W}\mu)(x) - (\mathcal{W}_{n_j}\mu)(x) \leq \lambda_j, \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R}^d \setminus G.$$

Portanto, $(\mathcal{W}\mu)(x)$ é o limite uniforme de $(\mathcal{W}_{n_j}\mu)(x)$ quando $n_j \rightarrow \infty$. Em particular, $(\mathcal{W}\mu)(x)$ é uma função contínua em G^c . $\square$

Proposição 5.4.7. *Seja $G \subset \mathbb{R}^d$ um aberto e $0 < C(G) < \infty$. Então, existe $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(\overline{G})$ uma medida extremal de G tal que*

$$(i) \quad (\mathcal{W}\gamma)(x) \geq \mathcal{E}(\gamma) \quad C - a.e \quad x \in G;$$

$$(ii) \quad (\mathcal{W}\gamma)(x) \leq \mathcal{E}(\gamma) \quad \forall x \in \text{spt}(\gamma).$$

Demonstração. Seja $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência crescente de conjuntos compactos tais que $K_n \nearrow G = \bigcup_n K_n$. Então, usando o Teorema 3.1.6, obtemos

$$C(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(K_n). \quad (5.19)$$

Seja $\gamma_n \in \mathcal{M}_1^+(K_n)$ medida capacitária de K_n . Como $\gamma_n(K_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então usando o Lema 2.2.1 (compacidade fraca) podemos extrair uma subsequência $\{\gamma_{n_j}\}$ tal que $\gamma_{n_j} \rightharpoonup \gamma \in \mathcal{M}^+(\overline{G})$. Iremos omitir o índice j para não carregar a notação. A Proposição 3.1.1(iii) implica que o mapa $\mu \mapsto \mathcal{E}(\mu)$ é s.c.i na topologia fraca de $\mathcal{M}^+$, isto é,

$$\mathcal{E}(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\gamma_n).$$

Como $\mathcal{M}_1^+(K_n)$ é conjunto convexo, claro que $\frac{1}{2}(\gamma_m + \gamma_n) = \frac{1}{2}\gamma_m + (1 - \frac{1}{2})\gamma_n \in \mathcal{M}_1^+(K_n)$. Em particular, $\mathcal{E}\left(\frac{\gamma_m + \gamma_n}{2}\right) \geq \mathcal{E}(\gamma_n)$ pois medida capacitária minimiza a energia $\mathcal{E}$. Pela relação (5.19) segue que $\mathcal{E}(\gamma_n)$ decresce para $C(G)^{1-p}$. De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [C(K_n)]^{1-p} = [C(G)]^{1-p} \quad (5.20)$$

Queremos mostrar que $\mathcal{E}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\gamma_n)$. Com efeito, lembre que $\mathcal{E}(\mu) \simeq \int |\mathcal{G}_\alpha \mu|^p dx$ e L^p é uniformemente convexo, $1 < p < \infty$. Então, pelo Teorema 2.5.1 (desigualdades de

Clarkson), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(\frac{\gamma_m - \gamma_n}{2}\right) &\lesssim \mathcal{E}\left(\frac{\gamma_n}{2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{\gamma_m}{2}\right) - \mathcal{E}\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\right) \\ &\leq \mathcal{E}\left(\frac{\gamma_n}{2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{\gamma_m}{2}\right) - \mathcal{E}(\gamma_n) \leq 0, \text{ para } n, m \text{ suficientemente grande.} \end{aligned}$$

Em particular, $\mathcal{E}\left(\frac{\gamma_m - \gamma_n}{2}\right) \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$. Portanto, existe $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(\bar{G})$ tal que

$$\mathcal{E}(\gamma_n - \gamma) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\gamma_m - \gamma_n) < \varepsilon. \quad (5.21)$$

Falta mostrar os itens (i) e (ii). Defina $E_\lambda = \{x \in G : [\mathcal{W}(\gamma_{n_j} - \gamma)](x) > \lambda\}$. Então, usando a Proposição 5.4.3 e em vista da desigualdade (5.21), obtemos

$$\mathcal{C}(E_\lambda) \leq \lambda^{-q} \mathcal{E}(\gamma_{n_j} - \gamma) := \lambda^{-q} \varepsilon_{n_j} \rightarrow 0, \text{ quando } n_j \rightarrow \infty \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Seja $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{\lambda_j}$ e note que $\mathcal{C}(O) \leq \sum_j \lambda_j^{-q} \varepsilon_{n_j} < \varepsilon$ quando $\lambda_j \rightarrow 0$ e $n_j \rightarrow \infty$. Logo, $\mathcal{C}(O) = 0$ e para $x \in G \setminus O$ obtemos

$$[\mathcal{W}(\gamma_{n_j} - \gamma)](x) \leq \lambda_j. \quad (5.22)$$

Portanto, $(\mathcal{W}\gamma_{n_j})(x) \rightarrow (\mathcal{W}\gamma)(x)$ uniforme $\mathcal{C} - a.e$ $x \in G$. Assim, aplicando a Proposição 5.4.1 sobre compactos K_n , obtemos

$$(\mathcal{W}\gamma)(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\mathcal{W}\gamma_{n_j})(x) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\gamma_{n_j}) = \mathcal{E}(\gamma) \quad \mathcal{C} - a.e \quad x \in G. \quad (5.23)$$

De maneira análoga, a desigualdade (5.23), obtemos $(\mathcal{W}\gamma)(x) \leq \mathcal{E}(\gamma) \quad \forall x \in \text{spt}(\gamma)$, basta utilizar a Proposição 5.4.2 sobre o suporte $\text{spt}(\gamma_{n_j})$. $\square$

Proposição 5.4.8. *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto qualquer tal que $0 < \mathcal{C}(A) < \infty$. Então, existe uma medida extremal $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(\bar{A})$ de A tal que*

$$(i) \quad (\mathcal{W}\gamma)(x) \geq \mathcal{E}(\gamma) \quad \mathcal{C} - a.e \quad x \in A;$$

$$(ii) \quad (\mathcal{W}\gamma)(x) \leq \mathcal{E}(\gamma) \quad \forall x \in \text{spt}(\gamma).$$

Demonstração. Seja $G_n \subset \mathbb{R}^d$ uma sequência decrescente de conjuntos abertos contendo A tais que $\bar{G}_{n+1} \subset G_n$ e $\bar{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n$. Então, $\mathcal{C}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}(G_n)$. Agora, usando a Proposição 5.4.7, seja $\gamma_n \in \mathcal{M}_1^+(\bar{G}_n)$ medida extremal de G_n . Como vimos na proposição anterior, se $m < n$, então $\mathcal{E}(\gamma_m) \leq \mathcal{E}(\gamma_n)$. Além disso, $\frac{1}{2}(\gamma_m + \gamma_n) \in \mathcal{M}_1^+(\bar{G}_m)$. Portanto, $\mathcal{E}\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\right) \geq \mathcal{E}(\gamma_m)$, pois γ_m é um medida extremal de G_m . Novamente, usando as desigualdades de Clarkson e que $\mathcal{E}(\gamma_m)$ decresce para $[\mathcal{C}(A)]^{1-p}$, concluiremos que $\mathcal{E}(\gamma_m - \gamma_n) \rightarrow 0$ e existe $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(\bar{A})$ tal que $\mathcal{E}(\gamma_m - \gamma) \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$. Agora, procedendo como fizemos na Proposição 5.4.7, podemos concluir que $(\mathcal{W}\gamma) \geq \mathcal{E}(\gamma)$, $\mathcal{C} - a.e$ $x \in A$ e $(\mathcal{W}\gamma) \leq \mathcal{E}(\gamma) \quad \forall x \in \text{spt}(\gamma)$. $\square$

5.5 Propriedade de Choquet

Relembre que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ é chamado de (α, q) -fino em x_0 , se

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty \quad (5.24)$$

sempre que $\alpha q \leq d$. Relembre que $e_{\alpha,q}(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : A \text{ é } (\alpha, q)\text{-fino em } x\}$. No Teorema 5.3.1 (propriedade de Kellogg) vimos que

$$C_{\alpha,q}(e_{\alpha,q}(A) \cap A) = 0 \text{ para todo } A \subset \mathbb{R}^d,$$

sempre que $1 < q \leq d/\alpha$ e $\alpha > 0$. Nesta seção, nosso objetivo é mostrar que existe um aberto G contendo $e_{\alpha,q}(A)$ tal que

$$C_{\alpha,q}(G \cap A) < \varepsilon \quad (5.25)$$

para todo $\varepsilon > 0$. A desigualdade (5.25) é chamada de *propriedade de Choquet*, que claramente implica na propriedade de Kellogg.

Proposição 5.5.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto arbitrário tal que $0 < C(A) < \infty$. Se μ é uma medida capacitária de A , então $\mu(S) \leq C(A \cap S)$ para todo conjunto de Borel S .*

Demonstração.

Etapa 1: Suponha que A é um conjunto aberto. Seja $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de conjuntos compactos tais que $F_n \subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja μ_n medida capacitária de F_n . Então, pela compacidade fraca de medidas (veja Lema 2.2.1), existe $\mu \in \mathcal{M}^+(F_n)$ tal que $\mu_{n_j} \rightarrow \mu$. Seja K um subconjunto compacto de S . Então a medida $\sigma_n = \mu_n|_K$ satisfaz $(\mathcal{W}\sigma_n)(x) = \mathcal{W}(\mu_n|_K)(x) \leq 1 \quad \forall x \in \text{spt}(\sigma_n) = K \cap \text{spt}(\mu_n) \subset K \cap F_n$. Portanto, pela Proposição 5.4.5, obtemos

$$\mu_n(K) = \sigma_n(K) \leq C(K \cap F_n) \leq C(S \cap A).$$

Agora usando a convergência fraca $\mu_{n_j} \rightarrow \mu$, obtemos $\mu(K) \leq C(S \cap A)$. Como S é boreliano e μ é uma medida de Radon, segue que

$$\mu(S) = \sup_{K \subset S} \mu(K) \leq C(S \cap A).$$

Etapa 2: Considere A um conjunto qualquer. Lembrando que $C(A) = \inf\{C(G) : A \subset G, G \text{ aberto}\}$. Seja V uma vizinhança aberta de $S \cap A$ tal que $C(V) < C(S \cap A) + \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$. Seja $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de conjuntos abertos contendo A tal que $C(G_n) \rightarrow C(A)$ e $S \cap G_n \subset V$. Agora seja μ_n medida capacitária de G_n e suponha que $\mu_n \rightarrow \mu$. Pelo argumento da etapa anterior, segue que $\mu_n(S) \leq C(S \cap G_n) \leq C(V) < C(S \cap A) + \varepsilon$. Portanto, $\mu(S) < C(S \cap A) + \varepsilon$. $\square$

Proposição 5.5.2. *Seja A um conjunto e $x_0 \in e_{\alpha,q}(A) \cap \bar{A}$. Suponha que $0 < C(A \cap G) < \infty$, para qualquer vizinhança pequena e aberta G de x_0 . Então a medida capacitária μ de $A \cap G$ satisfaz*

$$(\mathcal{W}\mu)(x_0) < \varepsilon \text{ e } (\mathcal{W}\mu)(x_0) \geq 1 \quad C - a.e \quad x_0 \in A \cap G.$$

Demonstração. Usando a equivalência de (4.42) para o potencial $\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu$ associado ao núcleo de Bessel e notando que $(\mathbf{W}_{\mathcal{J}_{\alpha,q}}^{\mathcal{D}}\mu)(x) \lesssim (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x)$ (basta observar que a diferença $(\mathbf{W}_{\mathcal{J}_{\alpha,q}}^{\mathcal{D}}\mu)(x) - (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) \leq c$), então

$$(\mathcal{W}\mu)(x_0) \leq A \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n(d-\alpha q)} \mu(B_{2^{-n}}(x_0)))^{p-1}.$$

Como $x_0 \in \bar{A} \cap e_{\alpha,q}(A)$, escolha $\varepsilon' > 0$ e N suficientemente grande tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(2^{n(d-\alpha q)} C(A \cap B_{2^{-n}}(x_0)) \right)^{p-1} < \varepsilon'. \quad (5.26)$$

Assumindo $G \subset B_{2^{-N}}(x_0)$ para $N > n$ e usando a Proposição 5.5.1 segue que

$$\mu(B_{2^{-N}}(x_0)) \leq C(A \cap G \cap B_{2^{-N}}(x_0)) \leq C(A \cap G) \leq C(A \cap B_{2^{-N}}(x_0)).$$

Portanto,

$$(\mathcal{W}\mu)(x_0) \lesssim \sum_{n=0}^{N-1} (2^{N(d-\alpha q)} C(A \cap B_{2^{-N}}(x_0)))^{p-1} + \varepsilon' \lesssim \varepsilon', \quad (5.27)$$

quando N é suficientemente grande. De fato, usado a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n(d-\alpha q)} C(A \cap B_{2^{-N}}(x_0)) \right)^{p-1} \quad (5.28)$$

segue que $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(2^{N(d-\alpha q)} C(A \cap B_{2^{-N}}(x_0)) \right)^{p-1} = 0$ para todo $\alpha q \leq d$. Como desejado. $\square$

Teorema 5.5.1 (Propriedade de Choquet). *Seja $\alpha > 0$ e $1 < q \leq d/\alpha$. Para qualquer $A \subset \mathbb{R}^d$ e todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto G tal que*

$$e_{\alpha,q}(A) \subset G \text{ e } C_{\alpha,q}(A \cap G) < \varepsilon \quad (5.29)$$

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ e seja $\{O_{r_n}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ uma coleção enumerável de bolas racionais, isto é, $(O_{r_n}(x_n)) = \{x; |x_n - x| < r_n\}$, que intesectam A . Para não carregar a notação denotaremos as bolas racionais apenas como O_n . Seja $\mathcal{W}_n$ o potencial capacitário de $A \cap O_n$ e defina $A_n = \{x \in \bar{A} \cap O_n; \mathcal{W}_n(x) < 1\}$. Em particular, quando $C(A \cap O_n) = 0$ temos que $A_n = \bar{A} \cap O_n$. Perceba, pela Proposição 5.5.2, que $e_{\alpha,q}(A) \cap \bar{A} \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Visto que $\mathcal{W}_n(x) \geq 1 \quad C - a.e \quad x \in A \cap O_n$ e $\mathcal{W}_n$ é C -quase-contínua (veja Proposição 5.4.6), então $\forall \varepsilon > 0$

existe um aberto Ω_n tal que $C(\Omega_n) < \varepsilon 2^{-n}$ e a função $\mathcal{W}_n|_{\Omega_n^c}$ é contínua. Assim, $\mathcal{W}_n(x) \geq 1$ sobre $A \cap O_n \cap \Omega_n^c$. Seja $F = E \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n)$ e note que $\bar{F} \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n) = \emptyset$. Mostraremos que $G = \bar{F}^c$ cumpre os requisitos (5.29). De fato, primeiro note que $\mathcal{W}_n(x)$ é contínua sobre $\bar{F}$ e $\mathcal{W}_n(x) \geq 1 \forall x \in F \cap O_n$. Por continuidade, $\mathcal{W}_n(x) \geq 1$ em $\bar{F} \cap O_n$ e, portanto, $\bar{F} \cap A_n = \emptyset$. Consequentemente, $e_{\alpha,q}(A) \subset \bar{F}^c = G$. Além disso, temos que $\bar{F}^c \cap A \subset F^c \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Portanto,

$$C(\bar{F}^c \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(\Omega_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} < \varepsilon.$$

□

5.6 Caracterização de (α, q) -finos via potencial de Wolff

Como a energia $\mathcal{E}(\mu)$ não é finita em geral, precisamos de um resultado que substitua a Proposição 5.4.3. Mais precisamente, se $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ então mostraremos que

$$C(\{(\mathcal{W}\mu)(x) > \lambda\}) \lesssim \lambda^{1-q} \mu(K), \quad (5.30)$$

para todo $0 < \alpha < d/q$ e $1 < q < \infty$. A estimativa (5.30) é falsa, se substituirmos $\mathcal{W}\mu$ por $V_{\alpha,q}\mu$ quando $1 < q < 2 - \frac{\alpha}{d}$. A razão é a seguinte: $\mathcal{V}_{\alpha,q}\mu = \infty$ quando $\mu = \delta_x$ é a medida de Dirac. No entanto, quando $q \geq 2$ (ADAMS; MEYERS, 1972, Proposição 4.4) a estimativa é verdadeira e foi estendida para $q > 2 - \frac{\alpha}{d}$ por (ADAMS; HEDBERG, 1984, Lema 4). De qualquer forma, fica claro a desvantagem em usar o potencial de Havin-Maz'ya nesta desigualdade e consequentemente na caracterização de conjuntos (α, q) -finos via o potencial $V_{\alpha,q}$.

Proposição 5.6.1. *Seja $0 < \alpha < d/q$ e $1 < q < \infty$ e $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Então,*

$$C(\{(\mathcal{W}\mu)(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{A}{\lambda^{q-1}} \mu(K). \quad (5.31)$$

Demonstração. Como $(\mathcal{W}\mu)(x) \lesssim (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x)$ é suficiente demonstrar esta desigualdade para $\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu$. Seja γ a medida capacitária de um compacto $K \subset \{(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) > \lambda\}$. Como $\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu$ é s.c.i em $\mathbb{R}^d$, então o conjunto $\{(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) > \lambda\}$ é aberto. Defina a função maximal $M_\gamma\mu(x) = \sup_{r>0} \frac{\mu(B_{r/5}(x))}{\gamma(B_r(x))}$. Se $x \in \text{spt}(\gamma)$, então

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) &= \int_0^1 \left(\frac{\mu(B_r(x))}{r^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{dr}{r} \lesssim [M_\gamma\mu(x)]^{p-1} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma)(x) \\ &\lesssim [M_\gamma\mu(x)]^{p-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{spt}(\gamma) \subset \{[M_\gamma\mu(x)]^{p-1} > \lambda\} = \{M_\gamma\mu(x) > \lambda^{q-1}\}.$$

Usando o Lema de cobertura de Vitali (veja (STEIN, 1970, Cap. I. 1.6)), podemos cobrir o

compacto $K \supset \text{spt}(\gamma)$ pela união de bolas $B_{r_i}(x_i)$ tal que $B_{r_i/5}(x_i)$ são disjuntas e satisfaz

$$\frac{\mu(B_{r_i/5}(x_i))}{\gamma(B_{r_i}(x_i))} > \lambda^{q-1}.$$

Então,

$$\mathbf{C}(K) = \gamma(K) \leq \sum_i \gamma(B_{r_i}) < \lambda^{1-q} \sum_i \mu(B_{r_i/5}) \leq \lambda^{q-1} \mu(K).$$

□

Teorema 5.6.1. *Seja $\alpha > 0$ e $1 < q \leq d/\alpha$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ é (α, q) -fino no ponto $x_0 \in \bar{A}$ se, e somente se, existe $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ tal que*

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x).$$

Demonstração. Suponha que $x_0 \in e_{\alpha,q}(A) \cap \bar{A}$. Se A é fino em x_0 , então existe um aberto $G \subset \mathbb{R}^d$ contendo $A \setminus \{x_0\}$ tal que G é fino em x_0 e

$$G \cap B_\delta(x_0) \subset A \cap B_\delta(x_0).$$

Com efeito, seja $G_n = \{x \in A; 2^{-(n+1)} \leq |x - x_0| < 2^{-n}, n \in \mathbb{Z}\}$. Note que $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ é aberto e cobre $A \setminus \{x_0\}$. A intersecção $G \cap B_\delta(x_0)$ não é vazia. De fato, para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-(n+1)} \leq |x - x_0| < 2^{-n} < \delta$, isto é, $x \in G_n \cap B_\delta(x_0)$. Como A é (α, q) -fino em x_0 , então

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(G \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq \int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Mas, pela Proposição 5.5.2, existe uma vizinhança aberta G e uma medida capacitária μ de $A \cap G$ tal que

$$(\mathcal{W}\mu)(x_0) < \varepsilon \text{ e } (\mathcal{W}\mu)(x_0) \geq 1 \text{ C - a.e em } A \cap G,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\mu(A \cap G) = \mathbf{C}(A \cap G) > 0$ segue que

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x_0) < \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x).$$

Reciprocamente, seja $x_0 \in \bar{A} \subset \mathbb{R}^d$ e $\mu \in \mathcal{M}^+$ tal que

$$\liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) - (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x_0) = \eta.$$

queremos mostrar que $x_0 \in e_{\alpha,q}(A)$, isto é,

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(A \cap B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty \quad (5.32)$$

Afirmção: Para todo $\varepsilon > 0$ e $r > 0$ existe $\gamma \in \mathcal{M}^+(B_r(x_0))$ tal que $(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma)(x_0) < \varepsilon$ e

$$\liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma)(x) \geq 1.$$

De fato, seja $r > 0$ e considere $\mu_r = \mu|_{B_r(x_0)}$. Seja $x \in B_{r/2}(x_0)$ e perceba que $\mu_r(B_\delta(x)) = \mu(B_\delta(x))$, se $\delta < \frac{r}{2}$. Consequentemente,

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) - (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_r)(x) = \int_{r/2}^1 \frac{[\mu(B_\delta(x))]^{p-1} - [\mu_r(B_\delta(x))]^{p-1}}{\delta^{(d-\alpha q)(p-1)}} \frac{d\delta}{\delta}$$

é uma função contínua no ponto x . Assim,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_r)(x) - (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_r)(x_0) = \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) - (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x_0) = \eta.$$

Por outro lado, perceba que $(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_r)(x_0) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, então escolhendo $r > 0$ suficientemente pequeno temos que $(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_r)(x_0) < \eta\varepsilon$. Agora considere a medida $\gamma = \eta^{1-q}\mu_r$ e defina $\gamma_\rho = \gamma|_{B_\rho(x_0)}$ tal que $\gamma = \gamma_\rho + \gamma'_\rho$, para $0 < \rho < r$. Seja $x \in B_{\rho/2}(x_0)$ e perceba que $\gamma'_\rho(B_\delta(x)) = 0$, se $\delta < \rho/2$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho)(x) &= \int_{\rho/2}^1 \left(\frac{\gamma'_\rho(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\ &\leq \int_{\rho/2}^{2r} \left(\frac{\gamma(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} + \int_{2r}^1 \left(\frac{\gamma(B_\delta(x))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\ &:= I + J \end{aligned} \tag{5.33}$$

Note que $B_\delta(x) \subset B(x_0, c\delta)$. Com efeito, dado $y \in B_\delta(x)$ e $x \in B_{\rho/2}(x_0)$ temos que $|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < \delta + \rho/2 < c\delta$. Então,

$$I \lesssim \int_{2r}^1 \left(\frac{\gamma(B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq \int_0^1 \left(\frac{\gamma(B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} = (\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma)(x_0). \tag{5.34}$$

Agora perceba que $B_\delta(x) \subset B_{2\delta}(x_0)$ para todo $\rho/2 < \delta < 2r$. De fato, seja $y \in B_\delta(x)$ e $x \in B_{\rho/2}(x_0)$, então $|y - x_0| \leq |x - x_0| + |y - x| < \rho/2 + \delta < 2\delta$, isto é, $y \in B_{2\delta}(x_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} J &\leq \int_{\rho/2}^{2r} \left(\frac{\gamma(B_{2\delta}(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \simeq \int_\rho^{4r} \left(\frac{\gamma(B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{\gamma(B_\delta(x_0))}{\delta^{d-\alpha q}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} = (\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma)(x_0). \end{aligned} \tag{5.35}$$

Unindo as estimativas acima e lembrando $(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_r)(x_0) < \eta\varepsilon$ concluímos,

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho)(x) \leq c\varepsilon.$$

Mas $(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma)(x) \leq c_1(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma_\rho)(x) + (\mathbf{W}\gamma'_\rho)(x)$. Então, para todo $x \in B_{\rho/2}(x_0) \cap A$ tem-se

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma_\rho)(x) \geq c_1^{-1}(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma)(x) - (\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho)(x) \geq \frac{\eta + \varepsilon}{c_1} - c\varepsilon > \frac{1}{c_2},$$

para $\rho > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Agora, lembrando que $\liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) - (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x_0) = \eta$, segue que

$$\liminf_{x \rightarrow x_0, x \in A \setminus \{x_0\}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x) \geq 1.$$

Pela Proposição 5.6.1, temos que

$$\mathcal{C}(B_{\rho/2}(x_0) \cap A) \leq \mathcal{C}(\{(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma_\rho)(x) > \frac{1}{c_2}\}) \leq \frac{c_3}{(1/c_2)^{q-1}} \gamma_\rho(K) \simeq \gamma(B_\rho(x_0)) < \infty.$$

□

POTENCIAL DE WOLFF-HEDBERG PARABÓLICO

Neste Capítulo nosso objetivo é introduzir as versões parabólicas, diádicas e contínuas, do potencial de Wolff-Hedberg. Além disso, queremos apresentar o espaço de Bessel na versão parabólica.

6.1 Critério de Wiener para a Equação do Calor

O objetivo desta seção é introduzir historicamente o conceito de conjuntos finos e o critério de Wiener para a equação do calor. Citaremos os trabalhos e os resultados mais relevantes, que motivaram a nossa abordagem. Esta seção introdutória é baseada no trabalho de (BRZEZINA, 1990). Demonstrado em 1924 no trabalho (WIENER, 1924), o critério de Wiener foi um trabalho pioneiro na demonstração de condições geométricas para problemas de fronteira na equação de Laplace. Foi somente 50 anos mais tarde em (EVANS; GARIEPY, 1982), que Evans e Garipey demonstraram um resultado análogo ao critério de Wiener para a equação do calor. Os resultados de (EVANS; GARIEPY, 1982) generalizados para equações parabólicas com coeficientes variáveis podem ser encontrados em (GAROFALO; LANCONELLI, 1988). Dado o devido panorama histórico, vamos enunciar algumas definições e resultados para o caso linear do critério de Wiener e conjuntos finos para o problema do calor. A definição de conjunto regular, ou ponto de fronteira, ser regular para o problema Dirichlet, para a equação de Laplace ou equação do calor foi feita na seção Caso Parabólico no capítulo de introdução, veja 1.2. Seja Γ a solução fundamental da equação do calor

$$\Gamma(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{se } t > 0. \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $r \in \mathbb{R}_+$. Defina a bola do calor como sendo

$$\Omega_r(x, t) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : (\Gamma(x - y, t - s) > (4\pi r)^{-d/2})\}. \quad (6.2)$$

Para $k \in \mathbb{N}$ denote por $\Omega_k(x, t) = \Omega_{2^{-k}}(x, t)$, afim de não carregar a notação, e defina

$$A_k(x, t) := \overline{\Omega_k(x, t)} \setminus \overline{\Omega_{k+1}(x, t)} = \{(y, s) : (4\pi 2^{k+1})^{-d/2} \geq (\Gamma(x - y, t - s) \geq (4\pi 2^k)^{-d/2})\}, \quad (6.3)$$

a bola do calor entre os níveis $\Omega_k(x, t)$ e $\Omega_{k+1}(x, t)$. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ defina o potencial do calor como sendo

$$(\Gamma\mu)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma(x - y, t - s) d\mu(y, s). \quad (6.4)$$

Como a solução fundamental do calor (6.1) é s.c.i e positiva a Proposição 3.1.1 garante que o potencial do calor é s.c.i.

Definição 6.1.1 (Capacidade Térmica). *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto, defina a capacidade térmica como sendo*

$$\text{Cap}^\mathcal{T}(K) := \sup\{\mu(\mathbb{R}^{d+1}) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), (\Gamma\mu)(x, t) \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^{d+1}\}. \quad (6.5)$$

Propriedades fundamentais desta capacidade podem ser encontradas em (LANCONELLI, 1973). Assim como fizemos no caso elíptico, veja (2.5) e (2.6), podemos definir as capacidades exterior e interior de $\text{Cap}^\mathcal{T}$.

Teorema 6.1.1 (Evans e Gariepy (EVANS; GARIEPY, 1982)). *Um ponto $X_0 \in \partial\Omega$ é regular para o problema de Dirichlet da equação do calor se, e somente se,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{dk/2} \text{Cap}^\mathcal{T}(\Omega^c \cap A_k(x, t)) = \infty, \quad (6.6)$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^{d+1}$. Em (BRZEZINA, 1990) Miroslav Brzezina estende este resultado. Lembremos do capítulo 5 que conjuntos finos é uma forma de generalizar o critério de Wiener para conjuntos quaisquer. Em particular, é válido para o problema de Dirichlet da equação do calor.

Teorema 6.1.2 (Miroslav Brzezina (BRZEZINA, 1990)). *Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um subconjunto e $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Então A é fino em (x, t) se, e somente se,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{dk/2} \text{Cap}_E^\mathcal{T}(A \cap A_k(x, t)) < \infty. \quad (6.7)$$

$\text{Cap}_E^\mathcal{T}$ é a capacidade exterior parabólica.

De forma equivalente o (6.7) é formulado na forma integral.

Teorema 6.1.3 (Miroslav Brzezina ([BRZEZINA, 1990](#))). *Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um boreliano. Então A é fino em (x, t) se, e somente se,*

$$\int_0^1 \text{Cap}_E^T(A \cap \Omega_r(x, t)) r^{d/2+1} dr < \infty. \quad (6.8)$$

6.2 Espaços de Bessel e Riesz parabólicos

Relembre que o núcleo de Bessel é definido via transformada de Fourier, veja [2.6.2](#), por:

$$\widehat{G_\alpha f} = (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \widehat{f} \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \quad (6.9)$$

para todo $\alpha > 0$. Assim, dizemos que $f \in L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$, espaço potencial de Bessel, se existe $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que $f = \mathcal{J}_\alpha g$ e uma norma em $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ é definida por:

$$\|f\|_{L^{\alpha,p}} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$, sabemos que $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ coincide com o espaço de Sobolev $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$.

Observação 6.2.1. *O espaço potencial de Riesz é definido de forma similar, basta ter cuidado e perceber que o produto $\widehat{\mathcal{I}_\alpha f} = |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi)$ precisa ser interpretado em $\mathcal{S}'/\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, a saber, dado $f \in \mathcal{S}/\mathcal{P}$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$\langle |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \widehat{f}, \eta(\frac{\xi}{\varepsilon}) |\xi|^{-\alpha} \widehat{\varphi}(\xi) \rangle,$$

onde η é uma função de corte em $\mathbb{R}^d$ tal que $\eta(\xi) = 1$ em $|\xi| \geq 2$ e $\eta(\xi) = 0$ em $|\xi| \leq 1$. Para uma abordagem completa sobre o assunto vide ([GRAFAKOS, 2009](#)).

Problema: Quais são os núcleos adequados para definir a versão parabólica do espaço de Bessel $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ e do espaço de Riesz $\dot{L}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$? Note que $f \in L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$, se existe $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que $f = G_\alpha * g$. Portanto, $g = G_{-\alpha} * f = (\mathbb{I} - \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f$ e no caso do espaço $\dot{L}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ teremos que $g = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f$, onde $(\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ denotao Laplaciano fracionário de f . Portanto, para a versão parabólica o substituto natural é o operador do calor $L = \partial_t - \Delta$.

6.3 Potencial Parabólico de Riesz

Definição 6.3.1 (Potencial Parabólico de Riesz). *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$. Defina o potencial de Riesz parabólico como sendo*

$$\widehat{\mathcal{I}_\alpha f}(\xi, \tau) = (i\tau + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \widehat{f}(\xi, \tau),$$

onde $\widehat{f}(\xi, \tau)$ denota a transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$.

Note que $(i\tau + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ é limitado fora da origem em $\mathbb{R}^{d+1}$ e decai a zero quando $|(\xi, \tau)| \rightarrow +\infty$. Além disso, temos que:

Proposição 6.3.1. *Se $0 < \alpha < d + 2$, então*

$$(i\tau + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Demonstração. Primeiro vamos utilizar o teorema de coordenadas polares adequado ao "scaling" parabólico

$$(x, t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0.$$

Seja $\Omega = \{(x, t) : \sum_{i=1}^d x_i^4 + t^2 = 1\}$. Dado $(x, t) \in \Omega$ escreva $\rho = (\sum_{i=1}^d x_i^4 + t^2)^{\frac{1}{2}}$ e $\rho\Omega = \{(\rho x, \rho^2 t) : (x, t) \in \Omega\}$ dilatação anisotrópica.

Coordenadas Polares: Se $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$, então existe uma medida de superfície $d\sigma$ sobre Ω tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x, t) dx dt = \int_0^\infty \int_\Omega f(\rho x, \rho^2 t) \rho^{d_H-1} d\sigma d\rho, \quad d_H = d + 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} (i\tau + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} d\xi d\tau &= \int_0^R \int_\Omega (|\rho\xi|^2 + i\rho^2\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} d\sigma d\rho \\ &= \int_0^R \int_\Omega (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \rho^{d+1-\alpha} d\sigma d\rho \\ &= \int_\Omega (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^R \rho^{d+1-\alpha} d\rho \right) d\sigma \\ &= CR^{d+2-\alpha}, \quad \text{se } 0 < \alpha < d + 2. \end{aligned}$$

□

Por conseguinte é razoável encontrar uma função $\Gamma^\alpha(x, t)$ tal que

$$\hat{\Gamma}^\alpha(\xi, \tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

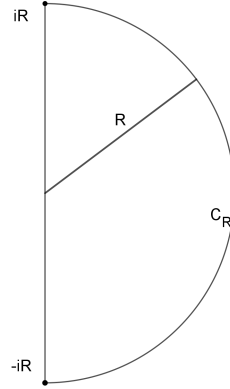
Proposição 6.3.2. *Seja $0 < \alpha < d + 2$ e*

$$\Gamma^\alpha(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & , \text{ se } t > 0 \\ 0 & , \text{ se } t \leq 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Então, $\hat{\Gamma}^\alpha(\xi, \tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}$.

Observação 6.3.1. *Perceba que quando $\alpha = 2$ temos que $\Gamma^\alpha = \Gamma$ solução fundamental do calor no caso linear 6.1.*

Demonstração. Considere o semi-círculo C_R no plano complexo



Utilizando uma versão do Teorema dos Resíduos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} (|\xi|^2 + s)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{ts} ds = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t|\xi|^2},$$

se $\alpha/2$ é par e $s = \sigma + i\tau$. Usando as estimativas de Cauchy note que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} (|\xi|^2 + s)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{ts} ds \rightarrow 0.$$

Portanto, para $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{it\tau} d\tau &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} (|\xi|^2 + s)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{ts} ds \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t|\xi|^2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, quando $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{i(x\xi + t\tau)} d\xi d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2} e^{ix\xi} d\xi \\ (|\xi|^2 + i\tau)^\vee(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1} t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Portanto, usando $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$.

$$\mathcal{I}_\alpha f(x, t) = (\Gamma^\alpha * f)(x, t), \quad f \in \mathcal{S}.$$

Lembrando que a convolução destacada acima é feita em $\mathbb{R}^{d+1}$.

□

Lema 6.3.1. *Esta sequência de resultados é encontrada em (SAMPSON, 1968, Lema 2.1.).*

- (i) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Gamma^\alpha(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{\alpha-(d+2)} \Gamma^\alpha(x, t)$, $\lambda > 0$;
- (ii) $|x|^{|\beta|} t^\gamma \Gamma^\alpha(x, t)$ é integrável em $\mathbb{R}^d \times (\delta_1, \delta_2)$, tal que $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty$;
- (iii) $\Gamma^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$, se $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$;
- (iv) Se $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < d + 2$, então $\hat{\Gamma}^\alpha$ é uma função e

$$\hat{\Gamma}^\alpha(\xi, \tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}};$$

- (v) Se $\alpha, \beta > 0$, então

$$(\Gamma^\alpha * \Gamma^\beta)(x, t) = (4\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})} \Gamma^{\alpha+\beta}(x, t).$$

6.4 Potencial parabólico de Havin-Maz'ya

Definição 6.4.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ o potencial de Riesz parabólico de μ é definido por*

$$(\Gamma^\alpha \mu)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(x - y, t - s) d\mu(y, s), \quad 0 < \alpha < d + 2. \quad (6.11)$$

Quando $\alpha = 1$ o potencial parabólico de Riesz retorna o Potencial do calor clássico 6.1.

Definição 6.4.2. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ e $1 < q < \infty$. O potencial parabólico de Havin-Maz'ya é definido por:*

$$\begin{aligned} (V_{\Gamma^\alpha, q} \mu)(x, t) &= \Gamma^\alpha * (\Gamma^\alpha \mu)^{p-1}(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(x - y, t - s) \left(\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(y - z, s - \tau) d\mu(z, \tau) \right)^{p-1} dy ds. \end{aligned}$$

Perceba que usando o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} (V_{\Gamma^\alpha, 2} \mu)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left(\int \Gamma^\alpha(x - y, t - t_0) \Gamma^\alpha(y - z, t_0 - \tau) dy dt_0 \right) d\mu \\ &= \frac{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})^2}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^{2\alpha}(x - z, t - \tau) d\mu(z, \tau) \\ &= \frac{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})^2}{\Gamma(\alpha)} (\Gamma^{2\alpha} \mu)(x, t). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Veremos que $\operatorname{Cap}_{\mathcal{T}}(A) = \{\mu(A) : \mu(A^c) = 0, (V_{\Gamma^\alpha, 2} \mu)(x) \leq 1 \text{ no } \operatorname{spt}(\mu)\}$, pois de acordo com o Lema 6.3.1 item (v) temos $\Gamma^\alpha * \Gamma^\beta = C_{\alpha, \beta} \Gamma^{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta > 0$. Novamente usando o Teorema

de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^{d+1}} V_{\Gamma^\alpha, q} d\mu &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(x-y, t-t_0) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(y-z, t_0-\tau) d\mu(z, \tau) \right)^{p-1}}_{[(\Gamma^\alpha \mu)(y, t_0)]^{p-1}} d\mu(x, t) \right] dy dt_0 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} [(\Gamma^\alpha \mu)(y, t_0)]^p dy dt_0 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\mathcal{I}_\alpha \mu)^p dy dt_0.
 \end{aligned}$$

Sempre que $0 < \alpha < d+2$.

6.5 Bola do calor parabólica fracionária e o potencial de Riesz

O objetivo desta seção é reescrever $(\Gamma^\alpha \mu)$ em função da bola fracionária do calor

$$\Omega_r^\alpha(x, t) = \{(y, s) : \Gamma^\alpha(x-y, t-s) > c_\alpha r^{-\frac{d+2-\alpha}{2}}\}, \quad (6.13)$$

onde $c_\alpha = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} [\Gamma(\frac{\alpha}{2})]^{-1}$. Note que, quando $\alpha = 2$ a bola fracionária do calor corresponde a bola do calor clássica definida em (6.2).

Lema 6.5.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ e $0 < \alpha < d+2$. Então,*

$$(\Gamma^\alpha \mu)(x) = \int_0^\infty \frac{\mu(\Omega_\delta^\alpha(x, t))}{\delta^{\frac{d+2-\alpha}{2}}} \frac{d\delta}{\delta}$$

Demonstração. Relembre que, se $0 < q < \infty$ e denotando $X = (x, t)$, então

$$\int_X |f(x)|^q d\mu = p \int_0^\infty r^{q-1} \mu(\{x : |f(x)| > r\}) dr.$$

Portanto,

$$(\Gamma^\alpha \mu)(X) = \int_0^\infty \mu(\{(y, s) : \Gamma^\alpha(x-y, t-s) > r\}) dr$$

Fazendo a mudança de variável $r = c_\alpha \delta^{-\frac{d+2-\alpha}{2}}$ temos que

$$dr = c_\alpha \delta^{-\frac{d+2-\alpha}{2}-1} d\delta = c_\alpha \delta^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} \frac{d\delta}{\delta}.$$

Desta forma

$$(\Gamma^\alpha \mu)(x, t) = \frac{1}{c_\alpha} \int_0^\infty \delta^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} \mu(\Omega_\delta^\alpha(x, t)) \frac{d\delta}{\delta} = \frac{1}{c_\alpha} \int_0^\infty \frac{\mu(\Omega_\delta^\alpha(x, t))}{\delta^{\frac{(d+2-\alpha)}{2}}} \frac{d\delta}{\delta}.$$

□

Observação 6.5.1. Nas próximas seções vamos definir o potencial não-linear parabólico, que é de extrema importância em nossa abordagem na caracterização de conjuntos finos $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ associado ao potencial parabólico de Bessel. Motivados pelo Lema 6.3.1, definimos o potencial de Wolff associado ao núcleo parabólico de Riesz, de $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ por:

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(x, t) = \int_0^\infty \left(\frac{\mu(\Omega_\delta^\alpha(x, t))}{\delta^{\frac{(d+2-\alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta},$$

sempre que $\alpha q < d + 2$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Em particular

$$\begin{aligned} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, 2}\mu)(x, t) &= \int_0^\infty \frac{\mu(\Omega_\delta^\alpha(x, t))}{\delta^{\frac{d+2-2\alpha}{2}}} \frac{d\delta}{\delta} \\ &= (\mathcal{I}_{2\alpha}\mu). \end{aligned}$$

6.6 Potencial de Bessel Parabólico

Esta seção é inspirada nos artigos de Richard J. Bagby (BAGBY, 1971) e Charles H. Sampson (SAMPSON, 1968). Não entramos em detalhes nas seções anteriores sobre o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$, mas este espaço é definido de maneira usual. Mais precisamente, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ e existe uma constante $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1 + |(x, t)|^\alpha)^{d+1} |D_x^\alpha D_t^j f(x, t)| \leq c_0,$$

$$\text{onde } D_x^\alpha D_t^j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j.$$

Com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. O espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}^{d+1}$ é definido por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$. A transformada de Fourier em $\mathcal{S}'$ é definida de maneira usual.

Definição 6.6.1 (Potencial de Bessel parabólico). Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ uma distribuição temperada. O potencial de Bessel parabólico é uma distribuição $\mathcal{J}_\alpha T \in \mathcal{S}'$ tal que

$$\widehat{\mathcal{J}_\alpha T}(\xi, \tau) = (1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \hat{T} \text{ em } \mathcal{S}', \quad (6.14)$$

onde

$$(1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} := e^{\{-\frac{\alpha}{2} \ln |1 + |\xi|^2 + i\tau| + i \arg(1 + |\xi|^2 + i\tau)\}} \quad (6.15)$$

com $-\frac{\pi}{2} < \arg(1 + |\xi|^2 + i\tau) < \frac{\pi}{2}$.

Note que $\mathcal{J}_{\alpha+\beta} = \mathcal{J}_\alpha \mathcal{J}_\beta$ e formalmente

$$\mathcal{J}_\alpha = (1 + \partial_t - \Delta_x)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Definição 6.6.2. Seja $1 \leq q \leq \infty$ e $T \in \mathcal{S}'$. Dizemos que $T \in \mathfrak{L}_\alpha^q(\mathbb{R}^{d+1})$, se existe $H = \mathcal{J}_{-\alpha}T \in L^q$ tal que

$$\|T\|_{\mathfrak{L}_\alpha^q(\mathbb{R}^{d+1})} = \|\mathcal{J}_{-\alpha}T\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}.$$

O espaço $\mathfrak{L}_\alpha^q(\mathbb{R}^{d+1})$ é chamado de espaço de Bessel parabólico.

À título de curiosidade, uma consequência do Teorema de Mikkilin-Hormander, veja (BAGBY, 1971) Teorema 1.5, é a seguinte.

Proposição 6.6.1. Se $\operatorname{Re}(\alpha > 0)$ e $1 < q < \infty$, então $\mathcal{J}_\alpha$ é um operador limitado de L^q para L^q . Em outras palavras, $\mathfrak{L}_\alpha^q = \mathfrak{L}_{\operatorname{Re}(\alpha)}^q$, se $1 < q < \infty$.

Lema 6.6.1. Seja $\alpha > 0$ e defina a função

$$\mathcal{G}_\alpha(x, t) = \begin{cases} c_\alpha t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{\{-t - \frac{|x|^2}{4t}\}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Então,

$$(i) \quad \mathcal{G}_\alpha \in L^1 \text{ e } \int \mathcal{G}_\alpha(x, t) dx dt = 1;$$

$$(ii) \quad \widehat{\mathcal{G}}_\alpha(\xi, t) = (1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}};$$

(iii) Se $0 < \alpha < d + 2$, então

$$(a) \quad |\{(x, t) : \mathcal{G}_\alpha(x, t) > \eta\}| \leq c\eta^{-\frac{d+2}{d+2-\alpha}}, \quad \eta > 0;$$

$$(b) \quad \mathcal{G}_\alpha \in L^r(\mathbb{R}^{d+1}), \text{ se } 1 \leq r < \frac{d+2}{d+2-\alpha};$$

$$(iv) \quad \mathcal{G}_\alpha \in L^\infty, \text{ se } \alpha \geq d + 2.$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é baseada nos trabalhos (BAGBY, 1971, Lema 1.6) e (JONES, 1968).

(i) Perceba que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathcal{G}_\alpha(x, t) dx dt &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty c_\alpha t^{\frac{\alpha-d-2}{2}} e^{-t - \frac{|x|^2}{4t}} dt dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii) Na prova da Proposição 6.3.2 vimos que, se $\alpha > 0$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{i\tau t} d\tau = \begin{cases} \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} e^{-ta} t^{\frac{\alpha}{2}-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Portanto, a transformada de Fourier inversa de $(1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{G}}_{\alpha})(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \widehat{\mathcal{G}}_{\alpha}(\xi, \tau) e^{i\xi x + i\tau t} d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{i\tau t} d\tau \right) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} e^{-t-|\xi|^2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1} e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2} e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo $\xi \mapsto \frac{\xi}{\sqrt{t}}$ e $d\xi \mapsto t^{-\frac{d}{2}} d\xi$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{G}}_{\alpha})(x, t) &= \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1} e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{d}{2}} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\xi|^2} e^{ix \frac{\xi}{\sqrt{t}}} d\xi \\ &= \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1} t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

(iii) Para $t > 0$, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha}(\lambda x, \lambda^2 t) &= c_{\alpha} \lambda^{\alpha-d-2} t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{-\lambda^2 t - \frac{|x|^2}{4t}} \\ &\leq c_{\alpha} \lambda^{\alpha-d-2} t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Se $\delta_{\lambda} = (\lambda x, \lambda^2 t)$ denota a dilatação parabólica, a medida de Lebesgue de $|\delta_{\lambda} \Omega| = \lambda^{d+2} |\Omega|$.

Assim,

$$\begin{aligned} |\{(x, t) : \mathcal{G}(x, t) > \eta\}| &= \lambda^{-d-2} |\{(x, t) : \mathcal{G}_{\alpha}(\lambda x, \lambda^2 t) > \eta\}| \\ &\leq \lambda^{-d-2} |\{(x, t) : t > 0, c_{\alpha} t^{\frac{\alpha-d-2}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} > \eta \lambda^{d+2-\alpha}\}| \\ &= \eta^{-\frac{d+2}{d+2-\alpha}} |\{(x, t) : t > 0, c_{\alpha} t^{\frac{\alpha-d-2}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} > 1\}| \\ &= c_{\alpha, d} \eta^{-\frac{d+2}{d+2-\alpha}}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda = \eta^{\frac{1}{d+2-\alpha}}$.

□

Os próximos três resultados são baseados no trabalho de (BAGBY, 1971).

Teorema 6.6.1. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

- (i) $\mathfrak{L}_\alpha^q \hookrightarrow \mathfrak{L}_\beta^q$, se $\alpha > \beta$ e $\mathfrak{L}_\alpha^q \subset L^q$, $\alpha > 0$;
- (ii) Se $1 < p < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha-\beta}{d}$, então $\mathfrak{L}_\alpha^p \subset \mathfrak{L}_\beta^q$;
- (iii) Se $1 \leq p < q \leq \infty$ satisfaz $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha-\beta}{d+2}$, então $\mathfrak{L}_\alpha^p \subset \mathfrak{L}_\beta^q$.

Teorema 6.6.2. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $1 < q < \infty$. Então $\mathfrak{L}_\alpha^q$ é reflexivo e seu dual é dado por $\mathfrak{L}_{-\alpha}^p$ via o par de dualidade*

$$(\phi, \psi) = \int \int \phi(x, y) \psi(-x, -t) dx dt,$$

para $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Teorema 6.6.3. *Se $1 < q < \infty$ e $\alpha = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_\alpha^q} \simeq \underbrace{\sum_{|\gamma|+2j \leq 2k} \|D_x^\gamma D_t^j f\|_{L^q}}_{\text{Espaço de Sobolev } W_q^{2k,k}(\mathbb{R}^{d+1})}.$$

6.7 Capacidades parabólicas e potenciais não-lineares

O objetivo desta seção é definir e desenvolver as capacidades associadas aos núcleos Γ^α e $\mathcal{G}_\alpha$, à luz da Definição 3.1.1 e dos resultados construídos no capítulo 3.

Seja $1 \leq q < \infty$, $\alpha > 0$ e $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Defina $\Omega_A \subset L^q(\mathbb{R}^{d+1}, dx dt)$ por

$$\Omega_A = \{f : f \in L_+^q(\mathbb{R}^{d+1}, dx dt), \mathcal{G}_\alpha * f \geq \mathbb{1}_A\},$$

onde

$$\mathcal{G}_\alpha(x, t) = \begin{cases} c_\alpha t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{\{-t - \frac{|x|^2}{4t}\}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

A capacidade parabólica de Bessel é definida por:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{G}_\alpha, q}(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |f|^q dx dt : f \in \Omega_A \right\}. \quad (6.16)$$

Quando $\Omega_A = \emptyset$ definimos que $\mathbf{C}_{\mathcal{G}_\alpha, q}(A) = \infty$. Agora seja

$$\dot{\Omega}_A = \{f : f \in L_+^q(\mathbb{R}^{d+1}, dx dt), \Gamma^\alpha * f \geq \mathbb{1}_A\},$$

onde

$$\Gamma^\alpha(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

A capacidade parabólica de Riesz é definida por:

$$C_{\Gamma^\alpha, q}(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |f|^q dx dt : f \in \dot{\Omega}_A \right\}. \quad (6.17)$$

Observação 6.7.1. Afim de facilitar o entendimento, defina $X = (x, t)$ e $Y = (y, s)$ e perceba que $\mathcal{G}_\alpha(X, Y)$ é um núcleo de convolução, a saber

$$\mathcal{G}_\alpha(X, Y) = \begin{cases} c_\alpha (t - s)^{-\frac{d+2-\alpha}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} & , t > s \\ 0 & , t \leq s. \end{cases}$$

Claro que $\mathcal{G}_\alpha(\cdot, Y)$ é s.c.i, para $Y \in \mathbb{R}^{d+1}$ fixado e $\mathcal{G}_\alpha(X, \cdot)$ é mensurável em $\mathbb{R}^{d+1}$, para cada X fixado.

Pelo Teorema 3.1.1, a capacidade parabólica de Bessel é uma capacidade exterior. Mais precisamente.

Proposição 6.7.1. (i) $C_{\mathcal{G}_\alpha, q}(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $A_1 \subset A_2$, então $C_{\mathcal{G}_\alpha, q}(A_1) \leq C_{\mathcal{G}_\alpha, q}(A_2)$;

(iii) Seja $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}^{d+1}$ tal que $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Então

$$C_{\mathcal{G}_\alpha, q}(A) \leq \sum_{j=1}^\infty C_{\mathcal{G}_\alpha, q}(A_j);$$

(iv) Para $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ temos que

$$C_{\mathcal{G}_\alpha, q}(A) = \inf \{ C_{\mathcal{G}_\alpha, p}(E) : A \subset E, E \text{ é aberto de } \mathbb{R}^{d+1} \}.$$

Relembre que a bola fracionária do Calor é dada por:

$$\Omega_r^\alpha(x, t) = \{(y, s) : \Gamma^\alpha(x - y, t - s) > c_\alpha r^{-\frac{d+2-\alpha}{2}}\}, \text{ onde } c_\alpha = \frac{(4\pi)^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.$$

Note que

$$(\delta_\lambda \Gamma^\alpha)(x, t) := \Gamma^\alpha(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{\alpha-(d+2)} \Gamma^\alpha(x, t). \quad (6.18)$$

Com esta propriedade, dizemos que Γ^α é um núcleo homogêneo.

Proposição 6.7.2. Seja $\Omega_r^\alpha(x, t) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ uma bola fracionária do calor e seja $r > 0$. Se $0 < \alpha < d + 2$ e $1 < q < \frac{(d+2)}{\alpha}$, então $C_{\Gamma^\alpha, q}(\Omega_r^\alpha) > 0$ e

$$C_{\Gamma^\alpha, q}(\Omega_r^\alpha) = r^{\frac{d+2-\alpha q}{2}} C_{\Gamma^\alpha, q}(\Omega_1^\alpha). \quad (6.19)$$

Demonstração. Primeiro note que $\int_{|(x,t)|>1} [\Gamma^\alpha(x,t)]^q dx dt = \infty$, se $\alpha q \geq d+2$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{|(x,t)|>1} [\Gamma^\alpha(x,t)]^p dx dt &= c \int_1^\infty t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}p} \left(\int_{|x|>1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \right) dt \\ &\quad \text{fazendo } y = \frac{x}{\sqrt{t}} \text{ portanto } dy = t^{-\frac{d}{2}} dx \text{ tem-se} \\ &= c \int_1^\infty t^{-\frac{d+2-\alpha}{2}p + \frac{d}{2}} \left(\int_{|y|>t^{-\frac{1}{2}}} e^{-|y|^2} dy \right) dt \\ &= ct^{\frac{d}{2} - \frac{d+2-\alpha}{2}p + 1} \Big|_1^\infty = \infty, \end{aligned}$$

se $\frac{d+2-\alpha}{2}p \leq \frac{d+2}{\alpha}$. Perceba que $\frac{d+2-\alpha}{2}p \leq \frac{d+2}{\alpha}$ é equivalente a

$$\begin{aligned} (d+2-\alpha)p \leq d+2 &\Leftrightarrow \alpha p \geq (d+2)(p-1) \\ &\Leftrightarrow \geq (d+2)(p-1)(q-1) = d+2. \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.6.1 item (b) de (ADAMS; HEDBERG, 1999), $C_{\Gamma^\alpha, q}(\Omega_r^\alpha) = 0$ para todo $r > 0$. Isto justifica a condição $\alpha q < d+2$.

Seja $h \in L_+^q(\mathbb{R}^{d+1})$ tal que $\mathcal{I}_\alpha h = \Gamma^\alpha * h \geq \mathbf{1}_{\Omega_1^\alpha}$. Note que

$$(\delta_\lambda \mathcal{I}_\alpha h)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(\lambda x - y, \lambda^2 t - s) h(y, s) dy ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $(y, s) = (\lambda z, \lambda^2 \tau)$ o que implica $dy = \lambda^{d+2} dz d\tau$ e usando o fato que Γ^α é homogêneo, veja (6.18), temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_\alpha h)(\lambda x, \lambda^2 t) &= \lambda^{\alpha-(d+2)} \lambda^{d+2} \int \Gamma^\alpha(x - z, t - \tau) h(yz, \lambda^2 \tau) dz d\tau \\ &= \lambda^\alpha (\mathcal{I}_\alpha \delta_\lambda h)(x, t) = \mathcal{I}_\alpha (\lambda^\alpha \delta_\lambda h)(x, t). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, suponha que Ω_1^α esta centrada na origem de $\mathbb{R}^{d+1}$,

$$\Omega_1^\alpha(0, 0) = \{(y, s) : \Gamma^\alpha(-y, -s) > c_\alpha\}.$$

E seja $h \in L_+^q(\mathbb{R}^{d+1})$ tal que $(\mathcal{I}_\alpha h)(x, t) \geq 1, \forall (x, t) \in \Omega_1^\alpha(0, 0)$. Perceba que

$$\begin{aligned} \Omega_r^\alpha(0, 0) &= \{(y, s) : \Gamma^\alpha(-y, -s) > c_\alpha r^{\frac{\alpha-d-2}{2}}\} \\ &= \{(\lambda y, \lambda^2 s) : \Gamma^\alpha(-\lambda y, -\lambda^2 s) > c_\alpha r^{\frac{\alpha-d-2}{2}}\} \\ &= \{(\lambda y, \lambda^2 s) : \Gamma^\alpha(-y, -s) > c_\alpha r^{\frac{\alpha-d-2}{2}} \lambda^{d+2-\alpha}\} \\ &= \{(\sqrt{r}y, rs) : \Gamma^\alpha(-y, s) > c_\alpha\}, \quad \lambda = r^{\frac{1}{2}} \\ &= \delta_{\sqrt{r}} \Omega_1^\alpha(0, 0), \end{aligned}$$

com $\delta_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$. Assim, $(\mathcal{I}_\alpha h)(x) \geq 1$ em $(x, t) \in \Omega_1^\alpha(0, 0)$ se, e somente se,

$\delta_\lambda(\mathcal{I}_\alpha h)(x, t) \geq 1$ em $(x, t) \in \Omega_r^\alpha(0, 0)$. Como

$$\delta_\lambda(\mathcal{I}_\alpha h)(x, t) = \mathcal{I}_\alpha(\lambda^\alpha \delta_\lambda h)(x, t)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\delta_\lambda h|^q dx dt = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |h(\lambda x, \lambda^2 t)|^q dx dt = \lambda^{-(d+2)} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |h|^q dx dt.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\lambda^\alpha \delta_\lambda h|^q dx dt = \lambda^{\alpha q - (d+2)} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |h|^q dx dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} C_{\Gamma^\alpha, q}(\Omega_r^\alpha) &= \inf \left\{ \int |f|^q dx dt : f \geq 0, (\mathcal{I}_\alpha f) \geq \mathbf{1}_{\Omega_r^\alpha} \right\} \\ &= \inf \left\{ \int |\lambda^\alpha \delta_\lambda h|^q : h \geq 0, (\mathcal{I}_\alpha \lambda^\alpha \delta_\lambda h) \geq \mathbf{1}_{\Omega_r^\alpha} \right\} \\ &= \lambda^{\alpha q - (d+2)} \inf \left\{ \int |h|^q dx dt : h \geq 0, (\mathcal{I}_\alpha h) \geq 0, \mathbf{1}_{\Omega_1^\alpha} \right\} \\ &= r^{\frac{d+2-\alpha q}{2}} C_{\Gamma^\alpha, q}(\Omega_1^\alpha), \end{aligned}$$

pois $\lambda = r^{\frac{1}{2}}$. □

No caso da capacidade de Bessel parabólica podemos incluir o caso $\alpha q = d_H = d + 2$. Mais precisamente

Proposição 6.7.3. *Se $0 < \alpha < \frac{d_H}{q}$, $1 < q < \infty$. Então,*

$$C_{\mathcal{G}_{\alpha, q}}(\Omega_r^\alpha) \leq r^{\frac{d_H - \alpha q}{2}} C_{\mathcal{G}_{\alpha, q}}(\Omega_1^\alpha), \text{ se } 0 < r < 1 \text{ e } 0 < \alpha < \frac{d_H}{q}. \quad (6.20)$$

$$C_{\mathcal{G}_{\alpha, q}}(\Omega_r^\alpha) \simeq c \log \left(\frac{1}{r} \right)^{\frac{1-q}{2}}, \quad 0 < r < 1. \quad (6.21)$$

Para demonstrar esta proposição, vamos caracterizar $C_{\Gamma^\alpha, q}$ e $C_{\mathcal{G}_{\alpha, q}}$ via o potencial não-linear parabólico de Havin-Maz'ya. Como vimos na seção 3.5, caracterizamos a capacidade $\mathcal{C}_{K, p}$ via potencial não-linear $(V_{K, q} \mu) = K * (K * \mu)^{p-1}$, quando K é s.c.i e não-negativa. Este resultado pode ser aplicado quando K é o núcleo de Riesz ou Bessel parabólico, porém precisamos estar atentos que $\mathbb{R}^{d+1}$ agora é munido da distância homogênea

$$\mathbf{d}(X, Y) = |x - y| + |t - s|^{\frac{1}{2}},$$

para $X = (x, t)$ e $Y = (y, s)$. Desta forma, a norma em $\mathbb{R}^{d+1}$ é definida pela função:

$$||x|| = \mathbf{d}(X, 0) = |x| + |t|^{\frac{1}{2}},$$

de tal forma que a dilatação parabólica, dilatação não-isotrópica, $\delta_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$ satisfaz

$$\|\delta_\lambda X\| = \lambda|x| + \lambda|t|^{\frac{1}{2}} = \lambda\|X\|.$$

O espaço $\mathbb{R}^{d+1}$ com a métrica d (quase-métrica) é chamado de espaço homogêneo no sentido de Coifman-Weis (COIFMAN; WEISS, 2006), cuja dimensão homogênea é dada por $d_H = d + 2$. Note que

$$\Gamma^\alpha(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{\alpha-d_H} \Gamma^\alpha(x, t),$$

isto é, o núcleo Γ^α é uma função homogênea de grau $\alpha - d_H$. No entanto, $\mathcal{G}_\alpha$ não é uma função homogênea.

6.8 Medida capacitária do potencial não-linear parabólico

Definição 6.8.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $0 < C_{\Gamma^\alpha, q}(K) < \infty$. Dizemos que γ^K é medida capacitária de K se $\text{spt}(\gamma^K) \subset \overline{K}$ e*

- (i) $\gamma(K) = C_{\Gamma^\alpha, q}(K)$;
- (ii) $(V_{\Gamma^\alpha, q} \gamma^K)(X) \geq 1$ $C_{\Gamma^\alpha, q}$ -a.e em K ;
- (iii) $(V_{\Gamma^\alpha, q} \gamma^K)(X) \leq 1 \forall X \in \text{spt}(\gamma^K)$.

Com a exposição feita na seção anterior, veja a parte final da seção 6.7, e usando o Teorema 3.5.2 item (iii) temos o seguinte resultado:

Teorema 6.8.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ conjunto compacto tal que $0 < C_{\Gamma^\alpha, q}(K) < \infty$, $0 < \alpha < \frac{d_H}{q}$ e $1 < q < \infty$. Então*

- (i) K admite γ^K medida $C_{\Gamma^\alpha, q}$ -capacitária;
- (ii) $f^K = (\bigvee \mathcal{I}_\alpha \gamma^K)^{\frac{1}{q-1}}$ é uma função capacitária tal que

$$(\bigvee \mathcal{I}_\alpha \gamma^K)(X) = (V_{\Gamma^\alpha, q} \gamma^K)(X) \leq 1, \quad X \in K;$$

- (iii) Além disso, temos que

$$C_{\Gamma^\alpha, q}(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K) \text{ e } (V_{\Gamma^\alpha, q} \mu)(X) \leq 1 \text{ } x \in \text{spt}(\mu)\}.$$

Perceba, que o item (i) do Teorema 6.8.1, é consequência imediata do Teorema de existência de medida capacitária para conjuntos compactos, veja o Teorema 3.5.1 no capítulo 3.

Relembre que $(\check{\mathcal{I}}_\alpha \mu)(X)$ é definido por:

$$(\check{\mathcal{I}}_\alpha \mu)(X) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(x-y, t-s) d\mu(x, t).$$

Na seção Potencial parabólico de Havin-Maz'ya, veja (6.12), vimos que

$$(V_{\Gamma^\alpha, 2} \mu)(X) = \frac{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\alpha/2)^2}{\Gamma(\alpha)} (\Gamma^{2\alpha} \mu)(X), X \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Portanto, a capacidade $\dot{C}_{\Gamma^\alpha, 2}(K)$ coincide com a capacidade termina 6.1.1 do caso clássico linear com $\alpha = 1$, isto é,

$$\dot{C}_{\Gamma^\alpha, 2}(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K) \text{ e } (\Gamma^{2\alpha} \mu)(X) \leq 1 \text{ em } K\}.$$

Ajustando o Teorema 3.1.1 para o núcleo homogêneo $K(X, Y) = \Gamma^\alpha(x-y, t-s)$, $X, Y \in \mathbb{R}^{d+1}$, temos que dado $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ a capacidade parabólica associada ao núcleo homogêneo é uma capacidade exterior, isto é,

$$C_{\Gamma^\alpha, q}(A) = \inf\{C_{\Gamma^\alpha, q}(G) : A \subset G, G \text{ aberto de } \mathbb{R}^{d+1}\}. \quad (6.22)$$

POTENCIAL DIÁDICO DE WOLFF PARABÓLICO

O objetivo deste capítulo é definir o conceito de cubos diádicos e do potencial de Wolff parabólico diádico, afim de concluir o que seria um boa definição para o conceito de conjuntos finos à luz do que foi feito no capítulo 5. Iniciaremos esta discussão trazendo para o contexto parabólico o conceito de cubos diádicos.

7.1 Retângulos diádicos

Relembre que $\mathbb{R}^{d+1}$ munido da norma

$$\|X\| = |x| + |t|^{1/2}, \quad X = (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} \quad (7.1)$$

e munido da métrica

$$\mathbf{d}(X, Y) = \|X - Y\| \quad (7.2)$$

é um espaço métrico homogêneo, cuja dimensão $d_H = d + 2$.

Definição 7.1.1. *Uma bola em $\mathbb{R}^{d+1}$, chamamos de bola parabólica, é definida por:*

$$\begin{aligned} B(X, \rho) &= \{Y : \mathbf{d}(X, Y) < \rho\}, \quad \rho > 0. \\ &= \{(y, s) : |x - y| < \rho, |t - s| < \rho^2\}. \end{aligned}$$

$B(X, \rho)$ é também chamado de "full cilindro". No caso de $t - s > 0$, escreva

$$\tilde{B}(X, \rho) = \{(y, s) : |x - y| < \rho, t - \rho^2 < s < t + \rho^2\}. \quad (7.3)$$

Note que $B(X, \rho) = D(x, \rho) \times (t - \rho^2, t + \rho^2)$, onde $D(x, \rho) = \{y : |y - x| < \rho\} \subset \mathbb{R}^d$.

Seja Q um cubo diádico contendo $x \in \mathbb{R}^d$. Um retângulo parabólico aberto centrado em X é definido por:

$$R(X) = Q \times (t - \ell_Q^2, t + \ell_Q^2), \quad (7.4)$$

onde ℓ_Q denota o lado do Cubo Q . Iremos chamar $R(X)$ de cubo parabólico aberto.

Como estamos considerando $\mathbb{R}^{d+1}$ com a distância parabólica $\mathbf{d}(\cdot, \cdot)$, definimos um cubo parabólico aberto a direita com lado $\ell_R = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, da seguinte maneira.

Definição 7.1.2. Denote por d_E a distância euclidiana. Um cubo diádico $Q \in \mathcal{D}_k$ da geração $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^d, d_E)$. Um cubo diádico parabólico é dado por

$$R = Q \times [4^{-k}\rho_{d+1}, 4^{-k}(\rho_{d+1} + 1)], \quad (7.5)$$

onde $\rho_i \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, \dots, d+1$. Perceba que

$$Q = \prod_{i=1}^d [2^{-k}\rho_i, 2^{-k}(\rho_{i+1})] \quad (7.6)$$

Elencaremos algumas propriedades dos Cubos parabólicos diádicos

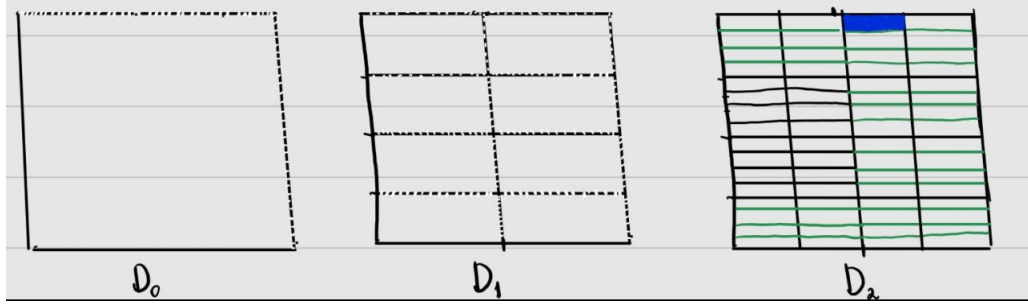
- (i) Seja R_1 e R_2 dois cubos parabólicos diádicos, se $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, então $R_1 \subset R_2$ ou $R_2 \subset R_1$.
- (ii) Qualquer cubo parabólico diádico R de lado $\ell_R > 0$ é coberto por 2^{d+1} cubos parabólicos diádicos disjuntos dois a dois.
- (iii) Dado $X \in \mathbb{R}^{d+1}$ existe um único cubo parabólico diádico $R \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^{d+1}, d_H)$ contendo $X = (x, t)$.

Exemplo: O plano π com a distância parabólica

$$\mathbf{d}(X, Y) = |x - y| + |t - s|^{1/2}, \quad x, y \in \pi.$$

admite uma coleção de cubos parabólicos diádicos, da seguinte maneira:

- (i) Seja $\mathcal{D}_0(\pi) = \{p + [0, 1)^2 : p \in \mathbb{Z}\}$ os cubos de $\mathcal{D}_{j+1}(\pi)$ são obtido de $Q \in \mathcal{D}_j(\pi)$, $j \geq 0$



dividindo cada retângulo Q em duas partes iguais verticalmente e quatro partes iguais horizontalmente, como na imagem acima. Por exemplo, o retângulo parabólico

$$Q_j[0, 2^{-j}] \times [0, 4^{-j}] \in \mathcal{D}_j(\pi)$$

e todos elementos de $\mathcal{D}_j(\pi)$ são translações em $\mathbb{Z}^2$ de Q_j .

(ii) Note que $\delta_{2^{-j}}([0, 1]^2) = [0, 2^{-j}] \times [0, 4^{-j}]$, onde $\delta_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_j(\pi) &= \left\{ \delta_{2^{-j}}([0, 1]^2 + p) : p \in \mathbb{Z}^2, j \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= [2^{-j}\rho_1, 2^{-j}(\rho_1 + 1)] \times [4^{-j}\rho_2, 4^{-j}(\rho_2 + 1)], \end{aligned}$$

onde $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Depois deste pequena introdução de cubos diádicos parabólicos e bolas parabólicas, estamos prontos para definir o potencial de Wolff associado ao núcleo de Riesz parabólico.

7.2 Potencial diádico de Wolff parabólico

Definição 7.2.1. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\alpha q < d_H$ sendo $\alpha > 0$. Defina o potencial de Wolff associado ao núcleo de Riesz parabólico como sendo

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) = \int_0^\infty \left(\frac{\mu(\Omega_\rho^\alpha(X))}{\rho^{\frac{d_H - \alpha q}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\rho}{\rho}, \quad X \in \mathbb{R}^{d+1}. \quad (7.7)$$

Lema 7.2.1. Existem raios r_1 e r_2 tais que

$$B(X, \sqrt{r_1}\rho) \subset \Omega_\rho^\alpha(X) \subset B(X, \sqrt{r_2}\rho) \quad (7.8)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $\rho > 0$.

Demonstração. Considere a bola fracionária do calor de raio ρ

$$\Omega_\rho^\alpha(x, t) = \{(y, s) : \Gamma^\alpha(x - y, t - s) > c_\alpha \rho^{-\frac{d+2-\alpha}{2}}\}, \quad (7.9)$$

onde $\Gamma^\alpha(X) = C_\alpha t^{-\frac{d_H - \alpha}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4t}}$, $t > 0$. Como $\Gamma^\alpha(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{\alpha - d_H} \Gamma^\alpha(x, t)$, temos

$$\begin{aligned} \delta_{\sqrt{\rho}} \Omega_1^\alpha(X) &= \{(\sqrt{\rho}\eta, \rho\delta) : \Gamma^\alpha(-\eta, \delta) \geq c_\alpha, \delta < 0\}. \\ &= \{(y, s) : \Gamma^\alpha(-\frac{y}{\sqrt{\rho}}, -\frac{s}{\rho}) \geq c_\alpha, s < 0\}. \\ &= \{(y, s) : \rho^{-\frac{\alpha - d_H}{2}} \Gamma^\alpha(-y, -s) \geq c_\alpha, s < 0\}. \\ &= \{(y, s) : \Gamma^\alpha(-y, -s) \geq c_\alpha \rho^{\frac{\alpha - d_H}{2}}, s < 0\}. \\ &= \Omega_\rho^\alpha(0), \end{aligned}$$

portanto

$$\Omega_\rho^\alpha(x, t) = \tau_X(\delta_{\sqrt{\rho}} \Omega_1^\alpha(0)), \quad (7.10)$$

onde $\tau_X E := E - (x, t)$ denota o operador translação. Com esta caracterização é suficiente mostrar que existem $r_1, r_2 > 0$ tais que

$$B(0, \sqrt{r_1}) \subset \Omega_1^\alpha(0) \subset B(0, \sqrt{r_2}). \quad (7.11)$$

Dividiremos o restante da demonstração em dois casos.

Caso (i): Existe $r_1 > 0$ tal que $B(0, \sqrt{r_1}) \subset \Omega_1^\alpha(0)$.

Note que

$$\begin{aligned} \Omega_1^\alpha(0) &= \{(\eta, \delta) : \delta < 0, \Gamma^\alpha(-\eta, \delta) \geq c_\alpha\}. \\ &= \{(\eta, \delta) : \delta < 0, (-\delta)^{-\frac{d_H - \alpha}{2}} e^{\frac{|\eta|^2}{4\delta}} \geq 1\}. \\ &= \{(\eta, \delta) : \delta < 0, \left(\frac{1}{-\delta}\right)^{-\frac{d_H - \alpha}{2}} \leq e^{\frac{|\eta|^2}{4\delta}}\}. \\ &= \{(\eta, \delta) : \delta < 0, \frac{|\eta|^2}{4\delta} \leq \frac{\alpha - d_H}{2} \ln\left(\frac{1}{-\delta}\right)\}. \\ &= \{(\eta, \delta) : \delta < 0, |\eta|^2 \leq 2(\alpha - d_H)\delta \ln\left(\frac{1}{-\delta}\right)\}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Em (7.12) utilizamos o fato de que a função $\ln$ é decrescente se, $0 < r < 1$. Assim, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k > 0$ tal que

$$-k < \delta < 0 \Rightarrow 2(\alpha - d_H)\delta \ln\left(-\frac{1}{\delta}\right) > \varepsilon,$$

isto é,

$$\begin{aligned} B(0, \sqrt{\varepsilon}) &\subseteq \{(\eta, \delta) : |\eta| < \sqrt{\varepsilon}, (-\delta)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\varepsilon}, \delta < 0\} \\ &\subseteq \{(\eta, \delta) : |\eta|^2 < 2(\alpha - d_H)\delta \ln\left(-\frac{1}{\delta}\right), \delta < 0\} = \Omega_1^\alpha(0). \end{aligned}$$

Caso (ii): Existe r_2 tal que $\Omega_1^\alpha(0) \subset B(0, \sqrt{r_2})$.

Perceba, que existe k_2 tal que

$$k_2 < \delta < 0 \Rightarrow 2(\alpha - d_H)\delta \ln\left(-\frac{1}{\delta}\right) > \varepsilon,$$

pois $0 < \alpha < d_H$ e $\lim_{\delta \rightarrow -\infty} \delta \ln\left(-\frac{1}{\delta}\right) = -\infty$. Escolhendo $\sqrt{r_2} < 2(\alpha - d_H)\delta \ln\left(-\frac{1}{\delta}\right)$ e pela caracterização (7.10) segue que $\Omega_1^\alpha(0) \subset B(0, \sqrt{r_2})$, como desejado. $\square$

Pelo Lema 7.2.1, é suficiente trabalhar com o potencial de Wolff associado ao núcleo de Riesz parabólico, utilizando bolas parabólicas, veja Definição 7.1.1, utilizando a mesma notação

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) = \int_0^\infty \left(\frac{\mu(B_\rho(X))}{\rho^{\frac{d_H - \alpha q}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\rho}{\rho}, \quad X \in \mathbb{R}^{d+1}. \quad (7.13)$$

Defina a versão diádica do núcleo parabólico de Riesz por:

$$(\Gamma_{\mathcal{D}}^\alpha \mu)(X) := \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{\frac{(d_H - \alpha)}{2}}} \right) \mathbb{1}_R(X), \quad (7.14)$$

sempre que $0 < \alpha < d_H$. O potencial de Wolff associado a versão diádica do núcleo parabólico de Riesz, é definido por:

$$(\dot{W}_{\Gamma_{\mathcal{D}}^\alpha, q}^\mathcal{D} \mu)(X) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{\frac{d_H - \alpha q}{2}}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_R(X). \quad (7.15)$$

onde a soma é sobre todos os retângulos diádicos parabólicos em $\mathbb{R}^{d+1}$, isto é,

$$R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1}) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_j(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Observação 7.2.1. *O potencial de Wolff, associado ao núcleo parabólico de Bessel, pode ser definido da mesma forma, assim como pode ser definida a versão diádica do núcleo parabólico de Bessel, porém para bolas $B_\rho(X)$ com raios $0 < \rho < 1$ ou retângulos diádicos com $\ell_R \leq 1$. Mais precisamente, se $\alpha > 0$ e $\alpha q \leq d_H$ temos*

$$(W_{\mathcal{G}_{\alpha, q}}\mu)(X) := \int_0^1 \left(\frac{\mu(B_\rho(X))}{\rho^{\frac{d_H - \alpha q}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\rho}{\rho}, \quad X \in \mathbb{R}^{d+1}. \quad (7.16)$$

$$(\mathcal{G}_\alpha^\mathcal{D} \mu)(X) := \sum_{\ell_R \leq 1} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{\frac{d_H - \alpha}{2}}} \right) \mathbb{1}_R(X) \quad (7.17)$$

$$(W_{\mathcal{G}_{\alpha, q}}^\mathcal{D} \mu)(X) := \sum_{\ell_R \leq 1} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{\frac{d_H - \alpha q}{2}}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_R(X). \quad (7.18)$$

7.3 Energia Parabólica

Definição 7.3.1. *Defina as energias associadas aos núcleos de Riesz e Bessel parabólicos, respectivamente, por:*

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\Gamma^\alpha \mu|^p dx \quad (7.19)$$

$$E_{\mathcal{G}^\alpha, q}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\mathcal{G}^\alpha \mu|^p dx. \quad (7.20)$$

Nosso objetivo é demonstrar as equivalências

(i)

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q} \mu) d\mu \quad (7.21)$$

(ii)

$$E_{\mathcal{G}^\alpha, q}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (W_{\mathcal{G}^\alpha, q} \mu) d\mu \quad (7.22)$$

Para provar este resultado, como vimos no capítulo 4, precisaremos da versão diádica do operador de Riesz parabólico. Vimos no Lema 6.5.1 que

$$(\Gamma^\alpha \mu)(X) = \frac{1}{c_\alpha} \int_0^\infty \frac{\mu(\Omega_\delta^\alpha(x, t))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha)}{2}}} \frac{d\delta}{\delta}. \quad (7.23)$$

Defina a Energia associada a versão diádica do núcleo parabólico de Riesz por:

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\Gamma_{\mathcal{D}}^\alpha \mu|^p dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Observação 7.3.1. *Podemos definir de maneira similar a energia associada a versão diádica do núcleo parabólico de Bessel, denotado por $E_{\mathcal{G}^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu)$.*

Teorema 7.3.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ e $1 < q < \infty$.*

(i) *Se $q = p'$ e $\alpha > 0$ satisfaz $1 < q < \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}} \mu) d\mu; \quad (7.24)$$

(ii) *Se $q = p'$ e $\alpha > 0$ satisfaz $1 < q \leq \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$E_{\mathcal{G}^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (W_{\mathcal{G}^\alpha, q}^{\mathcal{D}} \mu) d\mu. \quad (7.25)$$

Demonstração. Basta observar que a versão diádica do núcleo parabólico de Riesz é radial

$\Gamma_{\mathcal{D}}^{\alpha}(R) = \ell_R^{(\alpha-d_H)/2}$, portanto pela Proposição 4.2.1, trocando d por $d_H = d + 2$, temos que

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{\mathcal{D}}^{\alpha} &\simeq \ell_R^{-d_H} \int_0^{\ell_R} K(s) s^{d_H-1} ds \\ &= \ell_R^{-d_H} \int_0^{\ell_R} s^{\frac{(\alpha-d_H)}{2}} s^{d_H-1} ds \\ &= \ell_R^{\frac{\alpha-d_H}{2}}.\end{aligned}$$

Assim basta aplicar o Teorema 4.2.3, trocando d por $d_H = d + 2$, para obtermos as equivalências desejadas. $\square$

Teorema 7.3.2. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\alpha > 0$.*

(i) *Se $q = p'$ e $1 < q < \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$\dot{E}_{\Gamma^{\alpha},q}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{W}_{\Gamma^{\alpha},q}\mu) d\mu; \quad (7.26)$$

(ii) *Se $q = p'$ e $1 < q \leq \frac{d_H}{\alpha}$, então*

$$E_{\mathcal{G}^{\alpha},q}(\mu) \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (W_{\mathcal{G}^{\alpha},q}\mu) d\mu. \quad (7.27)$$

Demonstração. Demonstração item (i): Seja $B(X, r_j)$ bola parabólica aberta centrada em X e raio $r_j = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}(\Gamma^{\alpha}\mu)(X) &\simeq \int_0^{\infty} \frac{\mu(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{d_H-\alpha}{2}}} \frac{d\delta}{\delta} \\ &\simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(\frac{d_H-\alpha}{2})} \mu(B(X, 2^{-j})).\end{aligned} \quad (7.28)$$

Relembre que a coleção $\mathcal{D}_j$ de retangulos diádicos parabólicos centrado em X e raio 2^{-j} é dada por

$$\mathcal{D}_j = \{(x_1, \dots, x_d, t) : \rho_j 2^{-j} \leq x_j < (\rho_j + 1) 2^{-j}, \rho_{d+1} 4^{-j} < t < (\rho_{d+1} + 1) 4^{-j}\}$$

Afirmação: Se $X \in R \subset \mathcal{D}_j$, então

$$B(X, 2^{-j}) \subset \delta_3 R \subset 9R \quad (7.29)$$

onde δ_3 denota a dilatação parabólica.

Denote $\tilde{R} = 9R$, com $R \in \mathcal{D}_j$. Usando 7.28 temos que(relembre da desigualdade (4.36))

$$(\Gamma^{\alpha}\mu)(X) \simeq \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{\frac{(d_H-\alpha)}{2}}} \right) \mathbf{1}_R(X). \quad (7.30)$$

Agora observando que $B(X, 2^{-j}) \supset R$ e que

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{j \frac{(d_H - \alpha q)}{2}} \mu(B(X, 2^{-j})) \right)^{p-1}.$$

Obtemos a desigualdade

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) \gtrsim \sum_{K \in \mathcal{D}} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{\frac{d_H - \alpha q}{2}}} \right)^{p-1} \mathbb{1}_R(X) = (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}\mu)(X).$$

Portanto, pelo Teorema 7.3.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu) d\mu &\gtrsim \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}\mu) d\mu \stackrel{7.3.1}{\simeq} \dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}^{\mathcal{D}}(\mu). \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\Gamma_{\mathcal{D}}^\alpha \mu|^p dx. \\ &\stackrel{7.30}{\gtrsim} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\Gamma^\alpha \mu|^p dx. \end{aligned}$$

Como desejamos verificar. Quanto ao item (ii) basta lembrar da observação que $(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) \lesssim (\dot{V}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X)$ e

$$\dot{E}_{\Gamma^\alpha, q}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{V}_{\Gamma^\alpha, q}\mu) d\mu. \quad (7.31)$$

□

CONJUNTOS FINOS NO CASO PARABÓLICO

O objetivo deste capítulo é demonstrar os resultados que foram feitos no capítulo 5, mas trazendo para o contexto parabólico. Algumas demonstrações seguirão de forma análoga e portanto serão apenas mencionadas. As demonstrações que não seguem de forma análoga mostraremos como contornamos as dificuldades apresentadas. Por fim, temos como objetivo demonstrar o Teorema 5.6.1 para potencial de Wolff diádico parabólico. Inciaremos esta discussão pela existência de medidas capacitárias para a capacidade diádica parabólica e a definição que utilizaremos para conjuntos finos.

Definição 8.0.1. *Seja $1 < q < \infty$ e $0 < \alpha < d_H$. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é (Γ^α, q) -fino em X_0 se, $1 < \alpha q < d_H/2$ e*

$$\int_0^\infty \left(\frac{C_{\Gamma^\alpha, q}(A \cap \Omega_\delta^\alpha(X_0))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Denotaremos por $e_{\alpha, q}^\mathcal{P}(A)$ o conjunto dos pontos onde A é fino e denotaremos por $b_{\alpha, q}^\mathcal{P}(A)$ seu complementar.

8.1 Medida Capacitária parabólica

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar que podemos construir uma medida capacitária associada ao potencial $\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}^\mathcal{D}$. Como este potencial diádico parabólico não é s.c.i, é necessário fazer uma regularização.

Definição 8.1.1. *Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ tal que $1_R(X) \leq \varphi(X) \leq 1_{\bar{R}}(X)$ e denote $\int \varphi_R d\mu = \mu(\varphi_R)$. Definimos o potencial de Wolff regularizado associado a versão diádica do núcleo*

parabólico Riesz como sendo:

$$(\mathcal{W}\mu) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\ell_R^{\frac{(\alpha q - d_H)}{2}} \mu(\varphi_R) \right)^{p-1} \varphi_R(X). \quad (8.1)$$

Defina juntamente a energia não linear regularizada por:

$$\dot{\mathcal{E}}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\mathcal{W}\mu) d\mu := \sum_{R \in \mathcal{D}} \ell_R^{\frac{(\alpha q - d_H)(p-1)}{2}} \mu(\varphi_R)^p := \sum_{R \in \mathcal{D}} b(R) \mu(\varphi_R)^p. \quad (8.2)$$

Observação 8.1.1. É possível definir de maneira similar o potencial de Wolff regularizado associado a versão diádica do núcleo parabólico Bessel, $\mathcal{W}$ e sua energia associada $\dot{\mathcal{E}}$.

Lema 8.1.1. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\alpha > 0$.

(i) Se $1 < q < \frac{d_H}{\alpha}$, então

$$\dot{\mathcal{E}}(\mu) \simeq \dot{E}_{\Gamma^{\alpha,q}}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq \dot{E}_{\Gamma^{\alpha,q}}(\mu) \quad (8.3)$$

(ii) Se $1 < q \leq \frac{d_H}{\alpha}$, então

$$\mathcal{E}(\mu) \simeq E_{\mathcal{G}^{\alpha,q}}^{\mathcal{D}}(\mu) \simeq E_{\mathcal{G}^{\alpha,q}}(\mu). \quad (8.4)$$

Demonstração. A demonstração é exatamente a mesma do Lema 5.4.1 com as devidas substituições. $\square$

Definição 8.1.2. Se $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ compacto, $\alpha > 0$ e $1 < q < d_H/2$. A capacidade diádica parabólica de Riesz de K é definida por:

$$[\dot{\mathcal{C}}(K)]^{\frac{1}{q}} = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), \dot{\mathcal{E}}(\mu) \leq 1\}. \quad (8.5)$$

Pelo Lema 8.1.1 e lembrando, veja 3.3.1, temos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}_{\Gamma^{\alpha,q}}(K)^{\frac{1}{q}} &= \dot{\text{Cap}}_{\Gamma^{\alpha,q}}(K) \\ &= \sup\{\mu(K) : \mu(K^c) = 0, \dot{E}_{\Gamma^{\alpha,q}}(\mu) \leq 1\}, \end{aligned}$$

onde $\dot{\text{Cap}}_{\Gamma^{\alpha,q}}$ denota a capacidade dual de $\dot{\mathcal{C}}_{\Gamma^{\alpha,q}}$. Segue que

$$\dot{\mathcal{C}}(K) \simeq \mathcal{C}_{\Gamma^{\alpha,q}}(K). \quad (8.6)$$

Podemos definir de maneira análoga a capacidade diádica associada ao núcleo parabólico de Bessel, e denotaremos apenas por $[\mathcal{C}(K)]^{\frac{1}{q}}$. Agora temos as condições necessárias para definir a medida extremal associada a capacidade parabólica $\dot{\mathcal{C}}(K)$.

Definição 8.1.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ e seja $\mu_A \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$. Dizemos que μ_A é uma medida extremal associada a $\dot{\mathcal{C}}$, se $\text{spt}(\mu_A) \subset \bar{A}$, μ_A minimiza a energia $\dot{\mathcal{E}}$ sobre o conjunto $\mathcal{M}_1^+(A) =$

$$\{\mu \in \mathcal{M}^+(A), \mu(A) = 1\} \text{ e}$$

$$\mu_A(A) = [\mathcal{C}(A)]^{1-p}, \text{ onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lema 8.1.2. *Seja $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ compacto,  nt o K admite uma medida extremal associada a capacidade $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $I = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)} \mathcal{C}(\mu)$ e $\mu_n \in \mathcal{M}_1^+(K)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\mu_n) = I.$$

Como $\mathcal{M}_1^+(K)$   fracamente compacto, pelo Lema 2.2.1,  nt o podemos assumir que a existência de $\gamma_K \in \mathcal{M}_1^+(K)$ tal que

$$\mu_{n_j} \rightharpoonup \gamma_K.$$

Mas $\mu \mapsto \mathcal{C}(\mu)$   s.c.i na topologia fraca de $\mathcal{M}^+$, portanto

$$\mathcal{C}(\gamma_K) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\mu_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\mu_{n_j}) = I = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)} \mathcal{C}(\mu).$$

Assim, $\mathcal{C}(\gamma_K) \leq \mathcal{C}(\mu)$ para todo $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$. Por fim nos resta provar que

$$\mathcal{C}(\gamma_K) = [\mathcal{C}(K)]^{1-p}.$$

Procedendo, como fizemos no Lema 5.4.2, podemos definir

$$\mathcal{C}(K) = J^{-1}, \quad J = \left[\inf_{\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)} \mathcal{C}(\mu) \right]^{q-1} \quad (8.7)$$

Usando (8.7) podemos escrever

$$\mathcal{C}(K)^{\frac{1}{q-1}} = \left(\inf_{\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)} \mathcal{C}(\mu) \right)^{-1} = \mathcal{C}(\gamma_K)^{-1}.$$

O que implica $\mathcal{C}(\gamma_K) = [\mathcal{C}(K)]^{-\frac{1}{q-1}} = [\mathcal{C}(K)]^{1-p}$. □

Definição 8.1.4. *Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $\alpha > 0$ e $1 < q < \frac{d_H}{\alpha}$. Suponha que $\mathcal{C}(A) < \infty$. Uma medida $\mu^A \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$   chamada de medida $\mathcal{C}$ -capacitária para A , se $\text{spt}(\mu^A) \subset \overline{A}$ e satisfaz*

- (i) $\mu^A(\overline{A}) = \mathcal{C}(A)$;
- (ii) $(\mathcal{W}\mu^A)(X) \geq 1$, $\mathcal{C}$ - a.e em A ;
- (iii) $(\mathcal{W}\mu^A)(X) \leq 1$ para todo $x \in \text{spt}(\mu^A)$.

Para provar a existência da medida $\mathcal{W}$ -capacitária, precisamos do seguinte teorema.

Teorema 8.1.1. *Seja $\alpha > 0$ e $1 < q < \frac{d_H}{\alpha}$. Seja γ_K uma medida $\dot{\mathcal{C}}$ -extremal para um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Então,*

- (i) $(\dot{\mathcal{W}}_{\gamma_K})(X) \geq \dot{\mathcal{C}}(\mu), \dot{\mathcal{C}} - a.e \text{ em } K;$
- (ii) $(\dot{\mathcal{W}}_{\gamma_K})(X) \leq \dot{\mathcal{C}}(\mu), \forall X \in \text{spt}(\gamma_K).$

Demonstração. Prova do item (i): Seja $K_0 \subset K$ um compacto de $\mathbb{R}^{d+1}$ tal que $\dot{\mathcal{C}} > 0$ e suponha que $(\dot{\mathcal{W}}_{\gamma_K})(X) \leq \dot{\mathcal{C}}(\mu)$ para todo $X \in K_0$. Como $(\dot{\mathcal{W}}_{\gamma_K})(X)$ é s.c.i em $\mathbb{R}^{d+1}$, então dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto $F = \overline{B(X, \delta/2)} \cap K_0$ com $\dot{\mathcal{C}}(F) > 0$ tal que

$$F \subset K \cap \{X : (\dot{\mathcal{W}}_{\gamma_K})(X) \leq (\dot{\mathcal{C}}(\gamma_K) - \varepsilon)\}. \quad (8.8)$$

Seja $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$ tal que $\dot{\mathcal{C}}(\mu) < \infty$. Pela convexidade de $\mathcal{M}_1^+(K)$, segue que

$$\mu_\delta = \delta\mu + (1 - \delta)\gamma_K \in \mathcal{M}_1^+(K)$$

para todo $\delta \in [0, 1]$. Como γ_K é uma medida $\dot{\mathcal{C}}$ -extremal para K , é claro que $\dot{\mathcal{C}}(\gamma_K) \leq \dot{\mathcal{C}}(\mu_\delta)$ para todo $\delta \in (0, 1)$. Vamos mostrar que isto é uma contradição, pois existe $\delta \in (0, 1)$ tal que $\dot{\mathcal{C}}(\gamma_K) > \dot{\mathcal{C}}(\mu_\delta)$. De fato, escrevendo

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}(\mu_\delta) &= \sum_{R \in \mathcal{D}} \ell_R^{\frac{\alpha q - d_H}{2}(p-1)} \mu_\delta(\varphi_R)^p := \sum_R b(R) [\mu_\delta(\varphi_R)]^p. \\ &= \sum_R b(R) [\gamma_K(\varphi_R) + \delta(\mu(\varphi_R) - \gamma_K(\varphi_R))]^p \\ \text{Pelo teorema do valor médio, existe } s \in (0, \delta) \text{ tal que:} \\ &= \sum_R b(R) \{ \gamma_K(\varphi_R)^p + \delta p [\mu(\varphi_R) - \gamma_K(\varphi_R)] \mu_s(\varphi_R)^{p-1} \} \\ &= \dot{\mathcal{C}}(\gamma_K) + \delta p \sum_R b(R) [\mu(\varphi_R) - \gamma_K(\varphi_R)] \mu_s(\varphi_R)^{p-1} \end{aligned} \quad (8.9)$$

para algum $s \in (0, \delta)$. Note que a soma (8.8) converge uniforme em s . De fato,

$$\begin{aligned} \sum_R b(R) [\mu(\varphi_R) - \gamma_K(\varphi_R)] \mu_s(\varphi_R)^{p-1} &\leq \sum_R b(R) (\mu(\varphi_R) + \gamma_K(\varphi_R))^p \\ &\lesssim \sum_R b(R) \mu(\varphi_R)^p + \sum_R b(R) \gamma_K(\varphi_R)^p \end{aligned}$$

Assim, fazendo $s \rightarrow 0$ em (8.9) e usando (8.8), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(\mu_\delta) &\leq \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K) + \delta p \sum_R b(R) \gamma_K(\varphi_R)^{p-1} \mu(\varphi_R) - \delta p \sum_R b(R) \gamma_K(\varphi_R)^p + \text{resto}. \\ &= \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K) + \delta p \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\mathcal{W} \gamma_K - \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K)) d\mu + \text{resto} \right\} \\ &\stackrel{(8.8)}{<} \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K) - \varepsilon \delta p + \text{resto} \\ &< \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K). \end{aligned}$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, como desejado.

Prova do item (ii): Suponha que $(\mathcal{W} \gamma_K)(X_0) > \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K)$, $\forall X_0 \in \text{spt}(\gamma_K)$. Como $(\mathcal{W} \gamma_K)$   s.c.i em $\mathbb{R}^{d+1}$,  nt o existe um aberto V de X_0 tal que

$$(\mathcal{W} \gamma_K) > \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K), \quad \forall x \in V. \quad (8.10)$$

Claro que $\gamma_K(V) > 0$. Agora usando o item (i), deste mesmo teorema, e o fato que γ_K   absolutamente cont ua com respeito a $\dot{\mathcal{E}}$,  nt o $(\mathcal{W} \gamma_K) \geq \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K)$, $\gamma_K - a.e$ em K . Assim, usando (8.10) e que $(\mathcal{W} \gamma_K) \geq \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K)$, $\gamma_K - a.e$ em K , temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K) &= \int (\mathcal{W} \gamma_K) d\gamma_K = \int_V (\mathcal{W} \gamma_K) d\gamma_K + \int_{\text{spt}(\gamma_K) \setminus V} (\mathcal{W} \gamma_K) d\gamma_K \\ &> \gamma_K(V) \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K) + (1 - \gamma_K(V)) \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K) = \dot{\mathcal{E}}(\gamma_K). \end{aligned}$$

o que   uma contradição. □

Utilize o Teorema 8.1.1 para construir a medida capacitária de $\dot{\mathcal{E}}$.

Teorema 8.1.2. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ compacto, $1 < q < \infty$ e $0 < q < d_H/\alpha$. Suponha que $0 < \dot{\mathcal{E}}(K) < \infty$. Então existe $\gamma^K \in \mathcal{M}^+(K)$ medida capacitária de K .*

Demonstração. Seja $\gamma \in \mathcal{M}^+(K)$ a medida extremal de K e defina a medida de equilíbrio $\gamma^K = \dot{\mathcal{E}}(K)\gamma$. Claro que, $\text{spt}(\gamma^K) \subset K$ e $\gamma^K(K) = \dot{\mathcal{E}}(K)$. Note que

$$\begin{aligned} (\mathcal{W} \gamma^K)(X) &= \sum_{R \in \mathcal{D}} b(R) \gamma^K(\varphi_R)^{p-1} = [\dot{\mathcal{E}}(K)]^{p-1} \sum_{R \in \mathcal{D}} b(R) \gamma(\varphi_R)^{p-1}. \\ &= [\dot{\mathcal{E}}(K)]^{p-1} (\mathcal{W} \gamma)(X) \\ &= [\dot{\mathcal{E}}(\gamma)]^{-1} (\mathcal{W} \gamma)(X), \end{aligned}$$

pois $\dot{\mathcal{C}}\gamma = [\dot{\mathcal{C}}(K)]^{1-p}$. Agora basta invocar o Teorema 8.1.1 itens (i) e (ii), para concluir que

$$(\dot{\mathcal{W}}\gamma^K)(X) \geq 1, \quad \dot{\mathcal{C}} - a.e \quad X \in K \quad (8.11)$$

$$(\dot{\mathcal{W}}\gamma^K)(X) \leq 1, \quad \forall X \in \text{spt}(\gamma^K), \quad (8.12)$$

como desejado. $\square$

Proposição 8.1.1. *Seja K um conjunto compacto. Então*

$$(i) \quad \dot{\mathcal{C}}(K) = \inf\{\dot{\mathcal{C}}(\mu) : \mu \in \mathcal{M}^+, (\dot{\mathcal{W}}\mu) \geq 1, \dot{\mathcal{C}} - a.e \text{ em } K\};$$

$$(ii) \quad \dot{\mathcal{C}}(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+, (\dot{\mathcal{W}}\mu) \leq 1, a.e \text{ no } \text{spt}(\mu)\}.$$

Agora mostraremos a existência de medidas capacitárias para conjuntos arbitrários.

Teorema 8.1.3 (Medida capacitária geral).

(i) *Seja $E_\varepsilon = \{x : (\dot{\mathcal{W}}\mu)(x) > \varepsilon\}$ e K um conjunto compacto tal que $K \subset E_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Se $\alpha > 0$ e $1 < \alpha q < d_H$, então $\dot{\mathcal{C}}(K) \leq \varepsilon^{-\alpha} \mathcal{E}(\mu)$. Em particular, temos que $\dot{\mathcal{C}}\{x; (\dot{\mathcal{W}}\mu)(x) = \infty\} = 0$;*

(ii) *Seja $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um conjunto aberto com $\dot{\mathcal{C}}(G) < \infty$. Então, existe uma medida $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(G)$ tal que*

$$\dot{\mathcal{W}}(X) \geq \dot{\mathcal{C}}(\gamma) = \dot{\mathcal{C}}(G)^{1-p}, \quad \dot{\mathcal{C}} - a.e \text{ em } G; \quad (8.13)$$

(iii) *Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ com $0 < \dot{\mathcal{C}}(A) < \infty$. Então, existe uma medida $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(A)$ tal que*

$$\dot{\mathcal{W}}(X) \geq \dot{\mathcal{C}}(\gamma) = \dot{\mathcal{C}}(A)^{1-p}, \quad \dot{\mathcal{C}} - a.e \text{ em } A. \quad (8.14)$$

Demonstração. item (i): Perceba que pela semi-continuidade inferior de $\dot{\mathcal{W}}$ o conjunto $E_\varepsilon = \{x : (\dot{\mathcal{W}}\mu)(x) > \varepsilon\}$ é aberto. Portanto pelo Teorema de Choquet, veja 2.3.1, o conjunto E_ε é capacitável com relação $\dot{\mathcal{C}}_{\Gamma^{\alpha,q}}$. Como $\dot{\mathcal{C}}$ é equivalente a capacidade parabólica de Riesz, veja (8.6), então

$$\dot{\mathcal{C}}(E_\varepsilon) = \sup_{K \subset E_\varepsilon} \dot{\mathcal{C}}(K).$$

A demonstração é análoga ao caso elíptico, veja Proposição 5.4.3.

itens (ii) e (iii): Basta utilizar as medidas capacitárias para conjuntos compactos no caso parabólico, veja 8.1.2, construir a sequência tal qual o caso elíptico, veja a Proposição 5.4.7, e utilizar o item (i) para concluir o item (ii). Em seguida utilize o item (ii) para concluir o item (iii). $\square$

8.2 O critério de Wiener versão parabólica

Reservamos esta seção para a demonstração do teorema 8.2.2 e os lemas necessários para sua demonstração.

Lema 8.2.1. (i) *Seja $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ tal que $\dot{\mathcal{C}}(\mu) < \infty$. Então, $(\mathcal{W}\mu)$ é $\dot{\mathcal{C}}$ -quase-contínua, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ com $\dot{\mathcal{C}}(G) < \varepsilon$ tal que $(\mathcal{W}\mu)|_{G^c}$ é contínua;*

(ii) *Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um conjunto qualquer com $0 < \dot{\mathcal{C}}(A) < \infty$. Seja μ a medida capacitária de $\dot{\mathcal{C}}(A)$ construída no Teorema 8.1.3 item (ii) tal que $\mu(\overline{A}) = \dot{\mathcal{C}}(A)$. Então $\mu(S) \leq \dot{\mathcal{C}}(A \cap S)$ para todo boreliano S ;*

(iii) *Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ e seja $X_0 \in (e_{\alpha,q}^{\mathcal{P}}(A) \cap \overline{A})$. Tome $\varepsilon > 0$ e suponha que $\dot{\mathcal{C}}(A \cap G) > 0$, para qualquer vizinhança aberta G de X_0 tal que $G \subset B(X, 2^{-N})$. Se μ é medida capacitária de $A \cup G$, então*

$$(\mathcal{W}\mu)(X_0) < \varepsilon \quad e \quad (\mathcal{W}\mu)(X_0) \geq 1 - \dot{\mathcal{C}} - a.e \text{ em } A \cap G. \quad (8.15)$$

Demonstração. A demonstração do (i) é análoga ao caso elíptico, veja a Proposição 5.4.6, assim como o item (ii), veja Proposição 5.5.1. Faremos apenas um comentário que diferencia a prova do caso elíptico para o caso parabólico. Pelo Teorema 7.3.2 e o Lema 8.1.1 temos que

$$(\mathcal{W}\mu)(X_0) \lesssim \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{j \frac{(d_H - \alpha q)}{2}} \mu(B(X, 2^{-j})) \right)^{p-1}. \quad (8.16)$$

Como $X_0 \in (e_{\alpha,q}^{\mathcal{P}}((A) \cap \overline{A}))$ o somatório acima é finito. Utilize o item (ii), deste mesmo lema, para concluir

$$\mu(B(X_0, 2^{-j})) \leq \dot{\mathcal{C}}(A \cap G) \leq \dot{\mathcal{C}}(A \cap B(X_0, 2^{-N})).$$

Agora basta seguir a demonstração da Proposição 5.5.2 para concluir o resultado desejado. $\square$

Teorema 8.2.1 (Propriedade de Choquet Parabólica). *Seja $\alpha > 0$ e $\alpha q < d_H$. Então para $A \subset \mathbb{R}^d$ existe um aberto $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ tal que*

$$e_{\alpha,q}^{\mathcal{P}}(A) \subset G \quad e \quad \dot{\mathcal{C}}(A \cup G) < \varepsilon. \quad (8.17)$$

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ e defina $\{O_{r_n}^{\mathcal{P}}(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ uma coleção enumerável de bolas parabólicas com centros e raios racionais, isto é, $O_{r_n}^{\mathcal{P}}(X_n) = \{X \in \mathbb{R}^{d+1} : d(X_n - X) < r_n\}$, onde d denota a distancia parabólica que definimos em (7.2). Agora basta seguir a demonstração que fizemos no caso elíptico, veja o Teorema 5.5.1, utilizando o Lema 8.2.1 e temos o resultado desejado. $\square$

Observação 8.2.1. Como a propriedade de Kellogg, veja 5.3.1, é consequência direta da Propriedade de Choquet, demonstrada acima, optamos por não demonstrá-la.

Proposição 8.2.1. Seja $\mu \in \mathcal{M}^+$. Então

$$\mathcal{C}(\{(\mathcal{W}\mu)(X) \geq \lambda\}) \leq \frac{A}{\lambda^{q-1}} \mu(K). \quad (8.18)$$

Este resultado é válido para a versão continua do potencial parabólico de Wolff, já que $\mathcal{W} \simeq \dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}$. De fato, dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ existe uma medida $\mu^A \in \mathcal{M}^+$ e uma constante θ tal que

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q} \mu^A)(X) \geq \theta \quad C_{\Gamma^\alpha, q} - a.e \text{ em } A. \quad (8.19)$$

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q} \mu^A)(X) \leq \theta \quad \forall X \in \text{spt}(\mu^A). \quad (8.20)$$

Além disso, é necessário que façamos adaptações no Lema de cobertura de Vitalli para que este se adeque ao caso contínuo de Bolas parabólicas e a versão diádica.

Lema 8.2.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um subconjunto limitado e $\{B(X, r(X))\}$, com $r(X) > 0$, uma cobertura de A . Então, existe uma sequência a de bolas parabólicas disjuntas $B(X_j, r(X_j))$ e uma constante $k > 0$ tal que a família $\{B(X_j, kr(X_j))\}$ forma uma cobertura de A . A constante k depende das constantes de homogeneidade do espaço $(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbf{d})$ no sentido de (COIFMAN; WEISS, 2006).

Este resultado é inspirado de (COIFMAN; WEISS, 2006, Teorema 1.2).

No caso diádico precisamos definir Medida parabólica de Hausdorff. Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um subconjunto e $s \in \mathbb{R}_+$. Dado $\varepsilon > 0$ defina a medida parabólica de Hausdorff como sendo

$$\mathcal{H}_{\rho, \varepsilon}^s := \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i)^s : A \subset \bigcup_i E_i, \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon \right\}, \quad (8.21)$$

$$\mathcal{H}_\rho^s := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\rho, \varepsilon}^s(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\rho, \varepsilon}^s(A) \quad (8.22)$$

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é regular no sentido parabólico se, A é fechado e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C^{-1}r^{d+1} \leq \mathcal{H}_{\rho, \varepsilon}^{d+1}(B(X, r)) \cap A \leq Cr^{d+1}, \quad \forall X \in A, r \in (0, \text{diam}(A)). \quad (8.23)$$

Lema 8.2.3 (Lema de Cobertura para Retângulos diádicos). Seja $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um conjunto regular parabólico no sentido de (8.23) com uma constante C . Então, A admite uma decomposição em retângulos diádicos, isto é, uma subcobertura disjunta que obedece as propriedades 7.1.

A demonstração deste lema pode ser encontrada em (BORTZ *et al.*, 2023, Lema 2.7). Com esta adaptação do lema de Cobertura a demonstração é análoga ao caso elíptico, veja 5.6.1.

Com este resultado temos as ferramentas necessárias para demonstrar o nosso objetivo.

Teorema 8.2.2. *Seja $\alpha > 0$ e $1 < \alpha q < d_H$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é (Γ^α, q) fino em $X_0 \in \overline{A}$ se, e somente se, existe $\mu \in \mathcal{M}^+$ tal que*

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X_0) < \liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X).$$

Demonstração. Suponha que $X_0 \in (e_{\alpha, q}^\mathcal{P}(A) \cap \overline{A})$. Se A é fino em X_0 , então existe um aberto $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ contendo $A \setminus \{X_0\}$ tal que G é fino em X_0 . Mostraremos que

$$G \cap B(X_0, \delta) \subset A \cap B(X_0, \delta).$$

Com efeito, seja $G_n = \{X \in A; 2^{-(n+1)} \leq \mathbf{d}(X, X_0) < 2^{-n}, n \in \mathbb{Z}\}$. Note que a união dos $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ cobre $A \setminus \{X_0\}$. Primeiro mostraremos que o conjunto $G \cap B(X_0, \delta)$ é não vazio. Note que para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $X \in G_n$ e $2^{-(n+1)} \leq \mathbf{d}(X, X_0) < 2^{-n} < \delta$. Como a interseção é não vazia, a inclusão é verdadeira. Como A é fino em X_0 , temos:

$$\int_0^1 \left(\frac{C_{\Gamma^\alpha, q}(G \cap B(X_0, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq \int_0^1 \left(\frac{C_{\Gamma^\alpha, q}(A \cap B(X_0, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Por definição G é fino em X_0 . Utilize o Lema 8.2.1 item (iii) que nos diz que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança aberta G e uma medida $\mu(A \cap G) = \mathcal{C}(A \cap G)$ tal que

$$(\mathcal{W}\mu)(X_0) < \varepsilon \text{ e } (\mathcal{W}\mu)(X_0) \geq 1 \text{ } \mathcal{C} - a.e \text{ em } A \cap G.$$

Como $\mathcal{C}(A \cap G) > 0$ segue que

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X_0) < \liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X).$$

Por outro lado seja $X_0 \in \overline{A} \subset \mathbb{R}^d$ e $\mu \in \mathcal{M}^+$ tal que

$$\liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) - (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X_0) = \eta.$$

Mostraremos que isto implica que $X_0 \in e_{\alpha, q}^\mathcal{P}(A)$. Afirmação 1: Para todo $\varepsilon > 0$ e $r > 0$ existe $\gamma \in \mathcal{M}^+(B(X_0, r))$ tal que $(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X_0) < \varepsilon$ e

$$\liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X) \geq 1.$$

Sem perda de generalidade suponha que $r < 1$. Com efeito, seja $r > 0$ e defina $\mu_r = \mu|_{B(X_0, r)}$.

Seja $X \in B(X_0, r/2)$ e perceba que $\mu_r(B(X_0, \delta)) = \mu(B(X_0, \delta))$ se $\delta < \frac{r}{2}$ o que implica

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu})(X) - (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu_r})(X) = \int_{r/2}^{\infty} \frac{\mu_r(B(X_0, \delta))^{p-1} - \mu(B(X_0, \delta))^{p-1}}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)(p-1)}{2}}} \frac{d\delta}{\delta}.$$

Perceba que a função acima, neste intervalo de integração, é contínua, consequentemente

$$\liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu_r})(X) - (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu_r})(X_0) = \liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu})(X) - (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu})(X_0) = \eta.$$

Porém observe que $(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu_r})(X_0) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, então podemos escolher r pequeno o suficiente para que $(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\mu_r})(X_0) < \eta\varepsilon$. Defina de uma vez por todas $\gamma = \eta^{1-q}\mu_r$. Com este mesmo γ defina $\rho > 0$ tal que $\rho < r$. Denote por $\gamma_\rho = \gamma|_{B(X_0, \rho)}$ e $\gamma = \gamma_\rho + \gamma'_\rho$. Para $X \in B(X_0, \rho)$ e lembrando que $(\gamma - \gamma_\rho)(B(X, \delta)) = 0$, quando $\delta < \rho/2$ temos que

$$\begin{aligned} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\gamma'_\rho})(X) &= \int_{\rho/2}^{2r} \left(\frac{\gamma'_\rho(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} + \int_{2r}^1 \left(\frac{\gamma'_\rho(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} + \int_1^{\infty} \left(\frac{\gamma'_\rho(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\ &\leq \underbrace{\int_{\rho/2}^{2r} \left(\frac{\gamma(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta}}_{(*)} + \underbrace{\int_{2r}^1 \left(\frac{\gamma(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta}}_{(**)} + \underbrace{\int_1^{\infty} \left(\frac{\gamma(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta}}_{(***)}. \end{aligned}$$

Estimativa (*): Afirmação: $B(X, \delta) \subset B(X_0, 2\delta)$ para todo $\rho/2 < \delta < 2r$. Seja $Y \in B(X, \delta)$. Então para todo $X \in B_{\rho/2}(X_0)$ temos que

$$d(Y, X_0) \lesssim d(X, X_0) + d(Y, X) < \rho/2 + \delta = \rho/2 + \rho/2 = \rho = 2\delta, \text{ para } \delta = \rho/2.$$

$$d(Y, X_0) \lesssim d(X, X_0) + d(Y, X) < \rho/2 + \delta < r/2 + \delta = r/2 + 2r < 4r = 2\delta, \text{ para } \delta = 2r.$$

Então

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\rho/2}^{2r} \left(\frac{\gamma(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq \int_{\rho/2}^{2r} \left(\frac{\gamma(B(X_0, 2\delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\ &\lesssim \int_{\rho}^{4r} \left(\frac{\gamma(B(X_0, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq \int_0^{\infty} \left(\frac{\gamma(B(X_0, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\ &= A(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q\gamma})(X_0). \end{aligned}$$

Estimativa ()** Afirmação: $B(X, \delta) \subset B(X_0, c\delta)$, quando $2r < \delta < 1$. De fato, seja $Y \in B(X, \delta)$ temos que:

$$d(Y, X_0) \lesssim d(X, X_0) + d(Y, X) < \delta + \rho \leq c\delta.$$

Isto implica

$$\begin{aligned}
 (**) &= \int_{2r}^1 \left(\frac{\gamma(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq \int_{2r}^1 \left(\frac{\gamma(B(X_0, c\delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\
 &\lesssim \int_{c2r}^{c1} \left(\frac{\gamma(B(X_0, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq \int_0^\infty \left(\frac{\gamma(B(X_0, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\
 &= A(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X_0).
 \end{aligned}$$

Estimativa (*)** Afirmação: $B(X, \delta) \subset B(X_0, 2\delta)$, quando $X \in B(X_0, \rho)$ e $1 \leq \delta \leq \infty$. Com efeito, seja $Y \in B(X, \delta)$ e quando $\rho < r < 1/2$ temos:

$$d(X_0, Y) \lesssim d(X_0, X) + d(Y, X) < \delta + \rho < 2\delta \text{ quando } \delta \geq 1.$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty \left(\frac{\gamma(B(X, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} &\leq \int_1^\infty \left(\frac{\gamma(B(X_0, 2\delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \lesssim \int_2^\infty \left(\frac{\gamma(B(X_0, \delta))}{\delta^{(d_H - \alpha q)/2}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \\
 &\leq \int_0^\infty \left(\frac{\gamma(B(X_0, \delta))}{\delta^{\frac{(d_H - \alpha q)}{2}}} \right)^{p-1} \frac{d\delta}{\delta} \leq (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X_0).
 \end{aligned}$$

Unindo as estimativas

$$(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma'_\rho)(X) \lesssim A\varepsilon.$$

Porém $(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X) \lesssim ((\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma_\rho)(X) + (W\gamma'_\rho)(X))$. Então para todo $X \in B(X_0, \rho/2) \cap A$ e ρ, ε suficientemente pequenos temos:

$$\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}(\gamma_\rho)(X) \geq \frac{(\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\gamma)(X)}{A_1} - \dot{W}(\gamma'_\rho)(X) \geq \frac{1}{A_2}.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}
 \liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) - (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X_0) &= \eta \\
 \liminf_{X \rightarrow X_0, X \in A \setminus \{X_0\}} (\dot{W}_{\Gamma^\alpha, q}\mu)(X) &\geq 1.
 \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 8.2.1 no conjunto $\{\gamma_\rho(X) \geq \frac{1}{A_2}\}$ temos que:

$$\mathcal{C}(B(X_0, \rho/2) \cap A) \geq \frac{1}{A_2} \leq \frac{A_3}{(1/A_2)^{q-1}} \gamma_\rho(spt(\gamma_\rho)) = A_4 \gamma(B(X_0, \rho)) < \infty.$$

□

REFERÊNCIAS

- ADAMS, D. R. **Morrey spaces**. [S.l.]: Springer, 2015. Citado nas páginas 30 e 32.
- ADAMS, D. R.; HEDBERG, L. I. Inclusion relations among fine topologies in non-linear potential theory. **Indiana University Mathematics Journal**, JSTOR, v. 33, n. 1, p. 117–126, 1984. Citado na página 97.
- _____. **Function spaces and potential theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 314. Citado nas páginas 30, 33, 39, 52, 80, 84 e 113.
- ADAMS, D. R.; MEYERS, N. G. Thinness and wiener criteria for non-linear potentials. **Indiana University Mathematics Journal**, JSTOR, v. 22, n. 2, p. 169–197, 1972. Citado nas páginas 16, 82 e 97.
- ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. **Sobolev spaces**. [S.l.]: Elsevier, 2003. Citado na página 30.
- AIKAWA, H.; ESSÉN, M. **Potential theory-selected topics**. [S.l.]: Springer, 2006. Citado nas páginas 13, 20, 29, 31, 32, 39, 53, 59 e 66.
- BAGBY, R. J. Lebesgue spaces of parabolic potentials. **Illinois Journal of Mathematics**, Duke University Press, v. 15, n. 4, p. 610–634, 1971. Citado nas páginas 20, 108, 109 e 110.
- BORTZ, S.; HOFFMAN, J.; HOFMANN, S.; GARCIA, J. L.; NYSTRÖM, K. Carleson measure estimates for caloric functions and parabolic uniformly rectifiable sets. **Analysis & PDE**, Mathematical Sciences Publishers, v. 16, n. 4, p. 1061–1088, 2023. Citado na página 132.
- BRELOT, M. Sur les ensembles effilés. **Bull. Sc. Math**, t. 6, 1944, pp. t -36, 1944. Citado nas páginas 13, 19 e 81.
- _____. **On topologies and boundaries in potential theory**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 175. Citado na página 81.
- BRZEZINA, M. On the base and the essential base in parabolic potential theory. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 40, n. 1, p. 87–103, 1990. Citado nas páginas 20, 23, 101, 102 e 103.
- CALDERÓN, A. Lebesgue spaces of differentiable functions. In: **Proc. Sympos. Pure Math.** [S.l.: s.n.], 1961. v. 4, p. 33–49. Citado na página 37.
- CASCANTE, C.; ORTEGA, J. M.; VERBITSKY, I. E. Nonlinear potentials and two weight trace inequalities for general dyadic and radial kernels. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 53, n. 3, p. 845–882, 2004. Citado nas páginas 63 e 66.
- CHOQUET, G. Theory of capacities. In: **Annales de l'institut Fourier**. [S.l.: s.n.], 1954. v. 5, p. 131–295. Citado na página 31.
- _____. Sur les points d'effilement d'un ensemble. application à l'étude de la capacité. In: **Annales de l'institut Fourier**. [S.l.: s.n.], 1959. v. 9, p. 91–101. Citado nas páginas 55 e 81.

- CLARKSON, J. A. Uniformly convex spaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 40, n. 3, p. 396–414, 1936. Citado na página 33.
- COIFMAN, R. R.; WEISS, G. **Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes: étude de certaines intégrales singulières**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 242. Citado nas páginas 115 e 132.
- EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. Wiener's criterion for the heat equation. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Springer, v. 78, p. 293–314, 1982. Citado nas páginas 18, 19, 101 e 102.
- FABES, E. B.; GAROFALO, N.; LANCONELLI, E. Wiener's criterion for divergence form parabolic operators with c 1-dini continuous coefficients. 1989. Citado na página 23.
- FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. v. 40. Citado nas páginas 27, 28 e 35.
- FUGLEDE, B. On the theory of potentials in locally compact spaces. 1960. Citado nas páginas 25 e 30.
- _____. Le théoreme du minimax et la théorie fine du potentiel. In: **Annales de l'institut Fourier**. [S.l.: s.n.], 1965. v. 15, n. 1, p. 65–87. Citado na página 51.
- _____. The quasi topology associated with a countably subadditive set function. In: **Annales de l'institut Fourier**. [S.l.: s.n.], 1971. v. 21, n. 1, p. 123–169. Citado nas páginas 30 e 81.
- GAROFALO, N.; LANCONELLI, E. Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 308, n. 2, p. 811–836, 1988. Citado nas páginas 19 e 101.
- GHERGU, M.; TALIAFERRO, S. D. Pointwise bounds and blow-up for systems of semilinear parabolic inequalities and nonlinear heat potential estimates. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 272, n. 4, p. 1301–1339, 2017. Nenhuma citação no texto.
- GRAFAKOS, L. **Modern fourier analysis**. [S.l.]: Springer, 2009. v. 250. Citado na página 103.
- HEDBERG, L. I. Non-linear potentials and approximation in the mean by analytic functions. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 129, p. 299–319, 1972. Citado nas páginas 16, 74 e 82.
- HEDBERG, L.-I.; WOLFF, T. H. Thin sets in nonlinear potential theory. In: **Annales de l'institut Fourier**. [S.l.: s.n.], 1983. v. 33, n. 4, p. 161–187. Citado nas páginas 63 e 80.
- JONES, B. F. Lipschitz spaces and the heat equation. **Journal of Mathematics and Mechanics**, JSTOR, v. 18, n. 5, p. 379–409, 1968. Citado na página 109.
- KILPELÄINEN, T.; MALÛ, J. The wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. 1994. Citado na página 81.
- LANCONELLI, E. Sul problema di dirichlet per l'equazione del calore. **Annali di matematica pura ed applicata**, Springer, v. 97, p. 83–114, 1973. Citado na página 102.
- LIEBERMAN, G. M. **Second order parabolic differential equations**. [S.l.]: World scientific, 1996. Nenhuma citação no texto.

- LUSIN, N. Sur les ensembles analytiques. **Fundamenta Mathematicae**, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny PAN, v. 10, n. 1, p. 1–95, 1927. Citado na página 32.
- MATTILA, P. **Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. Citado na página 25.
- MAZIA, V. Continuity at a boundary point of solutions of quasi-linear elliptic equations (quasi-linear elliptic boundary point solutions, deriving modulus of continuity estimates). **LENIN-GRADSKII UNIVERSITET, VESTNIK, MATEMATIKA, MEKHANIKA, ASTRONOMIA**, v. 25, p. 42–55, 1970. Citado na página 81.
- MAZ'YA, V. G.; KHAVIN, V. Non-linear potential theory. **Russian Mathematical Surveys**, IOP Publishing, v. 27, n. 6, p. 71, 1972. Citado na página 30.
- MEYERS, N. G. A theory of capacities for potentials of functions in lebesgue classes. **Mathematica Scandinavica**, JSTOR, v. 26, n. 2, p. 255–292, 1970. Citado nas páginas 13, 20, 30 e 39.
- NEUMANN, J. v. Zur theorie der gesellschaftsspiele. **Mathematische annalen**, Springer, v. 100, n. 1, p. 295–320, 1928. Citado na página 51.
- PONCE, A. C. Elliptic pdes, measures and capacities. **Tracts in Mathematics**, European Mathematical Society (EMS) Zurich, v. 23, p. 10, 2016. Citado nas páginas 30 e 32.
- SAMPSON, C. H. **A characterization of parabolic Lebesgue spaces**. [S.l.]: Rice University, 1968. Citado nas páginas 20, 106 e 108.
- STEIN, E. M. **Singular integrals and differentiability properties of functions**. [S.l.]: Princeton university press, 1970. Citado nas páginas 35, 36 e 97.
- WIENER, N. The dirichlet problem. **Journal of Mathematics and Physics**, Wiley Online Library, v. 3, n. 3, p. 127–146, 1924. Citado nas páginas 13, 79 e 101.

