

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SUAS TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

RENÉRIO PEREIRA NETO

**MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO APLICADA A PÓRTICOS PLANOS DE
CONCRETO ARMADO PARA MODOS DE FALHA POR ESFORÇOS DE FLEXÃO E
CORTANTE COM FATOR DE CORREÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO**

São Cristóvão – SE

2024

RENÉRIO PEREIRA NETO

**MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO APLICADA A PÓRTICOS PLANOS DE
CONCRETO ARMADO PARA MODOS DE FALHA POR ESFORÇOS DE FLEXÃO E
CORTANTE COM FATOR DE CORREÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.

São Cristóvão – SE

2024

É concedida à Universidade Federal de Sergipe permissão para reproduzir cópias desta dissertação e emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho acadêmico pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Renério Pereira Neto

Neto, Renério Pereira

Mecânica do dano concentrado aplicada a pórticos planos de concreto armado para modos de falha por esforços de flexão e cortante com fator de correção da variável de dano / Renério Pereira Neto, São Cristóvão, 2024.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe, 2024.

Orientador: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim

1. Mecânica do dano concentrado. 2. Mecânica da fratura. 3. Mecânica do dano. 4. Rótulas plásticas. 5. Vigas de Timoshenko. 6. Fator de correção das fissuras. I . Título.

Dedico este trabalho a minha esposa Bruna Oliveira e ao nosso filho de quatro patas, Kiba.

AGRADECIMENTOS

Ao pai Celestial, por nunca faltar-me com a tua presença e por tantos objetivos alcançados.

À minha família, por todo amor e incentivo, em especial, aos meus amados pais, Paulo Guedes e Ana Cleusa, por serem a base e o espelho da minha vida e por acreditarem no meu potencial e me incentivarem a evoluir sempre.

A minha esposa, Bruna Oliveira, por toda dedicação e incentivo nesses anos de convivência e por sempre me apoiar em todos os meus projetos.

A minha avó, dona Glória, por todo carinho depositado em mim. Aos meus avós Manoel, Renério e Luzia, que certamente, estão me guardando do céu e felizes por este momento.

Ao meu professor orientador, Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim, pelo total apoio durante a elaboração deste trabalho e pela confiança e ensinamentos a mim concedidos.

A todo corpo docente e administrativo do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFS.

Aos companheiros e companheiras de disciplina do mestrado, em especial à Rainara Souza, por todo aprendizado compartilhado durante o desenvolvimento dessa dissertação.

A todos os amigos da Almeida e Oliveira, por toda a paciência e apoio nestes anos.

A todos os amigos e amigas que, direta ou indiretamente, contribuíram para este momento.

*Hipótese é uma coisa que não é,
mas a gente faz de conta que é,
para ver como seria se ela fosse
(Jô Soares)*

RESUMO

A idealização numérica do comportamento mecânico de estruturas de uso civil vem ganhando visibilidade nas últimas décadas. A utilização de ferramentas computacionais para simular adequadamente problemas reais de engenharia garante avanços contínuos para o desenvolvimento de novos estudos, códigos e normas, além de contribuir significativamente para prevenção de falhas estruturais e sinistros no meio em questão. Com enfoque às estruturas de concreto armado, a fissuração do concreto e o escoamento do aço são fenômenos não lineares que dificultam a construção de um modelo numérico consistente. Os modelos numéricos capazes de simular fenômenos não lineares observados experimentalmente estão embasados em teorias mais avançadas, sendo elas, a teoria da plasticidade, a mecânica da fratura e a mecânica do dano contínuo. Apesar dos grandes avanços obtidos por essas teorias, a utilização destas em problemas práticos da engenharia civil apresentam aplicações limitadas, em razão do elevado custo computacional empregado, da necessidade de consideração de fissuras iniciais, dentre outras. Uma teoria mais recente, denominada mecânica do dano concentrado, tem apresentado resultados relevantes na obtenção da resposta numérica considerando os efeitos não lineares de estruturas de concreto armado, estando embasada em conceitos fundamentais da mecânica da fratura e da mecânica do dano, associada ao conceito de rótulas plásticas. O objetivo deste trabalho é dar continuidade aos estudos teóricos para análise de elementos de pórticos de concreto armado com modos de falha por esforços de flexão e cortante simultâneos, propondo uma nova formulação para o critério de evolução do dano devido ao esforço cortante. Os resultados indicam que a formulação proposta apresenta melhoria da resposta numérica de corpos de prova com falha predominante ao esforço cortante.

Palavras chave: mecânica do dano concentrado; mecânica da fratura; mecânica do dano; rótulas plásticas; vigas de Timoshenko; fator de correção das fissuras.

ABSTRACT

The numerical idealization of the mechanical behavior of civil engineering structures has gained visibility in recent decades. The use of computational tools to adequately simulate real engineering problems ensures continuous advancements in the development of new studies, codes, and standards, as well as significantly contributing to the prevention of structural failures and incidents in the relevant field. Focusing on reinforced concrete structures, concrete cracking and steel yielding are nonlinear phenomena that complicate the construction of a consistent numerical model. Numerical models capable of simulating experimentally observed nonlinear phenomena are grounded in more advanced theories, namely plasticity theory, fracture mechanics, and continuum damage mechanics. Despite the significant advances made by these theories, their application in practical civil engineering problems has limited applications due to the high computational cost involved, the need to consider initial cracks, among other factors. A more recent theory, known as lumped damage mechanics, has shown relevant results in obtaining numerical responses considering the nonlinear effects of reinforced concrete structures, based on fundamental concepts of fracture mechanics and damage mechanics, associated with the concept of plastic hinges. The objective of this paper is to continue theoretical studies for the analysis of reinforced concrete frame elements with failure modes due to simultaneous bending and shear forces, proposing a new formulation for the evolution criterion of damage due to shear force. The results indicate that the proposed formulation improves the numerical response of test specimens with predominant failure under shear force.

Keywords: lumped damage mechanics; fracture mechanics; damage mechanics; plastic hinge; Timoshenko beams; crack correction factor.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Índices de dano médios para pórtico de 4 pavimentos obtidos do modelo de dano contínuo e do modelo de dano concentrado	20
Figura 1.2 – Fluxograma de equações para implementação do elemento de pórtico	22
Figura 2.1 – Deformações generalizadas do elemento de pórtico	25
Figura 2.2 – Deslocamentos generalizados do nó i e deformações generalizadas do elemento b conectado pelos nós i e j	26
Figura 2.3 – Configuração deformada do elemento b e rotações nodais relativas	28
Figura 2.4 – Coordenadas locais para um elemento b de pórticos e deslocamentos generalizados do nó j do elemento b em coordenadas locais	28
Figura 2.5 – Incremento de deformações generalizadas mediante aplicação dos deslocamentos generalizados infinitesimais	29
Figura 2.6 - Carregamentos externos generalizados e esforços internos generalizados do elemento b	33
Figura 2.7 – Fator de amplificação da deflexão de uma viga simplesmente apoiada em função da razão de aspecto	34
Figura 2.8 - Esforços generalizados e deformações generalizadas do elemento de pórtico no sistema de coordenadas locais	36
Figura 2.9 – Termos da matriz de deformação inicial para diferentes configurações de carregamento distribuído	38
Figura 2.10 – Modelo elastoplástico perfeito	40
Figura 2.11 – Modelo elastoplástico com encruamento cinemático	40
Figura 2.12 – Evolução da distribuição de tensões em uma seção de viga	41
Figura 2.13 – Formação da rótula plástica	42
Figura 2.14 – Modelo de plasticidade concentrada	42
Figura 2.15 – Deformações plásticas do elemento de pórtico	44
Figura 2.16 – O Problema fundamental de Griffith: energia de deformação da placa fissurada e energia de deformação na propagação da fissura	45
Figura 2.17 – Elemento danificado sujeito a carregamento axial	47
Figura 3.1 – Efeitos inelásticos em estruturas de concreto armado	49
Figura 3.2 – Modelo de dano concentrado para modos de falha por esforços de flexão e cortante simultâneos	51

Figura 3.3 – Curva do momento fletor em função do dano de acordo com o critério energético de Griffith	54
Figura 3.4 – Curva do esforço cortante em função do dano de acordo com o critério energético de Griffith	56
Figura 4.1 – Corpo de prova SW-M01	63
Figura 4.2 – Relação força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras	64
Figura 4.3 – Curva de convergência do valor limite do fator de correção das fissuras.....	65
Figura 4.4 – Curva força-deslocamento do corpo de prova SW-M01	67
Figura 6.1 – Corpo de prova para paredes de cisalhamento.....	69
Figura 6.2 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova SW16.7-60	70
Figura 6.3 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova SW16.7-60.....	71
Figura 6.4 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova SW16.7-60	73
Figura 6.5 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova SW16.7-80	74
Figura 6.6 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova SW16.7-80.....	74
Figura 6.7 – Evolução da variável de dano para corpo de prova SW16.7-80	76
Figura 6.8 – Curva força-deslocamento para corpo de prova SW16.7-100	77
Figura 6.9 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova SW16.7-100.....	77
Figura 6.10 – Evolução da variável de dano para corpo o de prova SW16.7-100	79
Figura 6.11 – Corpo de prova para os elementos de pórtico	80
Figura 6.12 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova EP26.7-40.....	81
Figura 6.13 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP26.7-40.....	81
Figura 6.14 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP26.7-40.....	83
Figura 6.15 – Curva força-deslocamento para corpo de prova EP26.7-100.....	84
Figura 6.16 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP26.7-100.....	84
Figura 6.17 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP26.7-100.....	86
Figura 6.18 – Corpo de prova para os elementos de pórtico com carga axial.....	87
Figura 6.19 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova EP27.1-40_N000.....	88
Figura 6.20 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP27.1-40_N000.....	88
Figura 6.21 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP27.1-40_N000.....	90
Figura 6.22 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova EP27.1-40_N180.....	91
Figura 6.23 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP27.1-40_N180.....	91
Figura 6.24 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP27.1-40_N180.....	93
Figura A.1 – Modelo não linear proposto por Hognestad (1951).....	101

Figura A.2 – Modelo não linear proposto por Kent e Park (1971).....	102
Figura B.3 – Distribuição uniforme de tensões de tração.....	104
Figura B.4 – Flexão pura e primeiro momento de fissuração	105
Figura B.5 – Ação combinada de força normal e do momento fletor	106
Figura B.6 – Equilíbrio de forças de compressão na condição plástica	107
Figura B.7 – Equilíbrio de forças de tração na condição plástica	108
Figura B.8 – Equilíbrio de momento na condição plástica.....	108
Figura B.9 – Ação combinada de força normal e momento fletor na condição plástica	109
Figura B.10 – Equilíbrio de momento na condição última	110
Figura B.11 – Ação combinada de força normal e momento fletor na condição última	110
Figura B.12 – Diagramas de interação	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Parâmetros numéricos para diferentes valores de ξ	66
Tabela 4.2 – Dano plástico, dano último e deslocamento para diferentes valores de ξ	68
Tabela 6.1 – Características geométricas dos corpos de prova para pilares-parede	70
Tabela 6.2 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova SW16.7-60	71
Tabela 6.3 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova SW16.7-60.....	72
Tabela 6.4 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova SW16.7-80	75
Tabela 6.5 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova SW16.7-80.....	75
Tabela 6.6 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova SW16.7-100	78
Tabela 6.7 –Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova SW16.7-100.....	78
Tabela 6.8 – Características geométricas dos corpos de prova para elementos de pórtico	80
Tabela 6.9 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP26.7-40	82
Tabela 6.10 –Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP26.7-40	82
Tabela 6.11 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP26.7-100	85
Tabela 6.12 –Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP26.7-100	85
Tabela 6.13 – Características geométricas dos corpos de prova para elementos de pórtico com carga axial.....	87
Tabela 6.14 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP27.1-40_N000	89
Tabela 6.15 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP27.1-40_N000	89
Tabela 6.16 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP27.1-40_N180	92
Tabela 6.17 –Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP27.1-40_N180	92

LISTA DE SIMBOLOS

E	Módulo elástico longitudinal
G	Módulo elástico transversal
$N(x)$	Esforço normal na seção transversal do elemento pórtico
$M(x)$	Momento de flexão na seção transversal do elemento pórtico
$V(x)$	Cisalhamento na seção transversal do elemento pórtico
$Q_b(x)$	Carregamento distribuído ao longo do elemento b
A	Área da seção transversal
I	Momento de inercia da seção transversal
$u(x)$	Deslocamento longitudinal
$w(x)$	Deslocamento transversal
$\beta(x)$	Rotação da seção transversal
χ	Curvatura da seção transversal
γ	Distorção da seção transversal
k_s	Fator de correção do cisalhamento
X, Z	Sistema de eixos global
x_L, z_L	Sistema de eixos local
u_i	Deslocamento do nó i na direção do eixo global X
w_i	Deslocamento do nó i na direção do eixo global Z
θ_i	Rotação do nó i em relação a sua configuração inicial
$\{q\}_b$	Matriz de deslocamentos generalizados do elemento b
$\{U\}$	Matriz de deslocamentos generalizados da estrutura
ϕ_i^b, ϕ_j^b	Rotações relativas das seções transversais i e j , respectivamente
δ^b	Deformação axial do elemento
$\{\Phi\}_b$	Matriz de deformações generalizadas do elemento b
u_i^L	Deslocamento do nó i na direção do eixo local x_L
w_i^L	Deslocamento do nó i na direção do eixo local z_L
θ_i^L	Rotação do nó i em relação a sua configuração inicial no sistema local
$\{q^L\}_b$	Matriz de deslocamentos generalizados do elemento b no sistema local
$[T]_b$	Matriz de transformação geométrica do elemento b
$[B(q^L)]_b$	Matriz de transformação cinemática do elemento b no sistema local
$[B(q)]_b$	Matriz de transformação cinemática do elemento b no sistema global

$[B_A^0]_b$	Matriz de transformação cinemática ampliada
W_{def}^*, W_{ext}^*	Trabalho virtual de deformação e trabalho virtual interno, respectivamente
P_{ui}, P_{wi}	Força concentrada aplicada no nó i na direção de u_i e w_i , respectivamente
$P_{\theta i}$	Momento concentrado aplicada no nó i na direção de θ_i
$\{P\}$	Matriz de forças externas nodais generalizadas da estrutura
U^*	Matriz de deslocamentos virtuais generalizados da estrutura
$\{\Phi^*\}_b$	Matriz de deformações virtuais generalizadas do elemento b
m_i^b, m_j^b	Momento fletor na extremidade i e j do elemento b , respectivamente
n_b	Força axial no elemento b
V_b	Força cortante no elemento b
$\{M\}_b$	Matriz de tensões generalizadas do elemento b
L_b	Comprimento inicial do elemento b
$\{\Phi^e\}_b$	Matriz de deformações elásticas generalizadas do elemento b
$\{\Phi_0\}_b$	Matriz de deformação inicial do elemento b
$[F_e]_b$	Matriz de flexibilidade elástica do elemento b
$\sigma, \bar{\sigma}$	Tensão normal e tensão efetiva, respectivamente
σ_y, σ_u	Tensão de escoamento e tensão última, respectivamente
M_p, M_u	Momento plástico e momento último, respectivamente
$\bar{M}_p, \bar{M}_u$	Momento plástico efetivo e momento último efetivo, respectivamente
V_p, V_u	Cortante plástico e cortante último, respectivamente
$\bar{V}_p, \bar{V}_u$	Cortante plástico efetivo e cortante último efetivo, respectivamente
$\varepsilon, \varepsilon_e, \varepsilon_p, \varepsilon_\omega$	Deformação total, elástica, plástica e devida do dano, respectivamente
ϕ_i^p, ϕ_j^p	Rotações plásticas na extremidade i e j do elemento b , respectivamente
δ^p	Alongamento plástico
$\{\Phi^p\}_b$	Matriz de rotações plásticas generalizadas do elemento b
γ^p	Distorções plásticas distribuídas no elemento b
$\{Y^p\}_b$	Matriz de distorções plásticas generalizadas do elemento b
Π	Energia potencial
W_s	Energia necessária para formação de novas superfícies de fissuras
Γ	Energia de deformação complementar
a	Tamanho da fissura
G^a	Força motriz da fissura

R^a	Resistência à fissuração
P	Carregamento axial
$\bar{A}, A_0$	Área integral da seção transversal e área dos defeitos, respectivamente
$\omega_{\vec{n}}$	Variável de dano associada ao plano normal do carregamento
ω	Dano contínuo
$\{\Phi^\omega\}_b$	Matriz de deformação adicional por dano a flexão, do elemento b
$\{Y^\omega\}_b$	Matriz de deformação adicional por dano ao cisalhamento, do elemento b
ω_i, ω_j	Densidade de fissuras nas rótulas i e j respectivamente
ω_s	Densidade de fissuras ao longo do elemento
$[C_f(\omega_f)]_b$	Matriz de flexibilidade adicional por dano a flexão, do elemento b
$[C_s(\omega_s)]_b$	Matriz de flexibilidade adicional por dano ao cisalhamento, do elemento b
$[F_e(\omega_f, \omega_s)]$	Matriz de flexibilidade elástica do elemento danificado
$G^{\omega_i}, G^{\omega_j}, G^{\omega_s}$	Força motriz das fissuras nas rótulas inelásticas i e j devido ao dano por flexão e a força motriz da fissura no conjunto viga-coluna inelástico devido ao dano por cisalhamento, respectivamente
$R^{\omega_i}, R^{\omega_j}, R^{\omega_s}$	Resistência à fissura por flexão nas rótulas i e j , e a resistência à fissura por cisalhamento, respectivamente
R_0	Resistencia inicial à fissuração
q	Parâmetro relacionado ao endurecimento das armaduras
$\bar{m}_i, \bar{m}_j$	Momento fletor efetivo na extremidade i e j , respectivamente
$\bar{V}_b$	Força cortante efetiva no elemento b
f_i, c_i	Função de escoamento e parâmetro de encruamento cinemático à flexão, respectivamente
f_s, c_s	Função de escoamento e parâmetro de encruamento cinemático ao cisalhamento, respectivamente
k_{0i}, k_{0s}	Momento plástico efetivo e cisalhamento plástico efetivo, respectivamente
ω_p, ω_u	Dano plástico e dano último, respectivamente
$\phi_{ui}^p, \gamma_{us}^p$	Rotação plástica última e distorção plástica última, respectivamente
f_ξ	Função de correção das fissuras
ξ	Fator de correção das fissuras
V_{cr}, V_p, V_u	Força cortante de fissuração, de plastificação e última, respectivamente
M_{cr}, M_p, M_u	Momento fletor de fissuração, de plastificação e última, respectivamente

P_{cr}, P_p, P_u	Carregamento referente ao início da fissuração, da plastificação e da capacidade última, respectivamente
d	Altura efetiva da seção transversal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos.....	21
1.1.1	Objetivos gerais	21
1.1.2	Objetivos específicos	21
1.2	Justificativa	21
1.3	Metodologia	22
1.4	Organização do trabalho.....	23
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1	Pórticos elásticos	25
2.1.1	Introdução à notação de Powell	25
2.1.2	Cinemática de pórticos planos	26
2.1.3	Equações de equilíbrio.....	31
2.1.4	Equações constitutivas.....	33
2.2	Fundamentos básicos de elastoplasticidade.....	39
2.2.1	Rótulas plásticas e plasticidade concentrada	41
2.2.2	Elastoplasticidade em pórticos de concreto armado submetidos a esforços de flexão e cortante.....	43
2.3	Fundamentos básicos da mecânica da fratura e da mecânica do dano contínuo .	44
2.3.1	Fundamentos básicos da mecânica da fratura.....	44
2.3.2	Fundamentos básicos da mecânica do dano contínuo	46
3	MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO PARA MODOS DE FALHA POR ESFORÇOS DE FLEXÃO E CORTANTE EM PÓRTICOS DE CONCRETO ARMADO.....	49
3.1	Modelo de dano concentrado para sistemas duais.....	50
3.2	Leis de evolução do dano.....	52
3.2.1	Lei de evolução do dano à momento fletor	53
3.2.2	Lei de evolução do dano à força cortante	55
3.3	Lei de evolução das deformações plásticas	57

3.3.1	Lei de evolução para as rotações plásticas.....	57
3.3.2	Leis de evolução para as distorções plásticas	59
4	FORMULAÇÃO PROPOSTA	61
4.1	Lei de evolução do dano à flexão	61
4.2	Lei de evolução do dano à cortante	62
4.3	Resultados de implementação: validação da formulação proposta	63
4.3.1	Descrição do corpo de prova SW-M01	63
4.3.2	Estudo do fator de correção para evolução das fissuras devido o esforço cortante.....	64
4.3.3	Deslocamento horizontal no topo do corpo de prova SW-M01	66
5	RESULTADOS.....	69
5.1	Simulações numéricas para pilares-parede.....	69
5.1.1	Corpo de prova SW16.7-60	70
5.1.2	Corpo de prova SW16.7-80	73
5.1.3	Corpo de prova SW16.7-100	76
5.2	Simulações numéricas para elementos de pórtico	79
5.2.1	Corpo de prova EP26.7-40	80
5.2.2	Corpo de prova EP26.7-100	83
5.3	Simulações numéricas para elementos de pórtico com carga axial.....	86
5.3.1	Corpo de prova EP27.1-40_N000.....	87
5.3.2	Corpo de prova EP27.1-40_N180.....	90
6	CONCLUSÕES.....	94
	REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO	95
	APÊNDICE A – COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS	101
	APÊNDICE B – MOMENTO FLETOR: PARÂMETROS NUMÉRICOS PARA ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO	103
	APÊNDICE C – ESFORÇO CORTANTE: PARÂMETROS NUMÉRICOS PARA ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO	113

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, as estruturas de concreto armado vem sendo objeto de diversos estudos devido à sua vasta aplicação na construção civil. Entender e reproduzir o comportamento material destas estruturas via modelagem numérica e com baixo custo computacional é de suma importância em vista ao elevado custo operacional e financeiro envolvido em pesquisas experimentais de estruturas reais.

A análise global de estrutura de concreto armado é corriqueiramente realizada considerando o comportamento elástico material. Entretanto, com o surgimento e propagação das fissuras, são necessárias análises inelásticas para a correta descrição do comportamento mecânico-material. A fissuração em estruturas de concreto armado é manifestada por alguns fatores, como retração plásticas, corrosão das armaduras, variação de temperatura, cargas aplicadas, entre outros.

Da fissuração decorrente das cargas aplicadas, destaca-se aqui as chamadas fissuras de flexão e fissuras por esforço cortante. As fissuras de flexão são iniciadas na fibra mais tracionada e se estende em direção à linha neutra, perpendicularmente às tensões principais de tração. As fissuras por esforço cortante surgem devido as tensões principais de tração inclinadas, e se desenvolvem obliquamente em relação ao eixo neutro (Leonhardt; Mönnig, 1982).

O comportamento não linear das estruturas de concreto armado deve-se, principalmente, ao comportamento não linear dos seus materiais constituintes: concreto e aço. A não linearidade física apresentada, por sua vez, manifesta influência significativa nos deslocamentos da estrutura. Os principais modelos numéricos desenvolvidos para representar tais fenômenos são: teoria da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano contínuo.

A teoria da plasticidade surge a partir da observação de fenômenos não lineares, como as deformações permanentes, após alcançado o limite elástico dos materiais dúcteis. Neste estágio, o comportamento material passa a ser descrito como plástico. Outro fenômeno não linear observado, denominado encruamento, é caracterizado pelo ganho de resistência material proveniente das deformações plásticas.

A mecânica da fratura, por sua vez, incorpora ao modelo de análise estrutural descontinuidades físicas materiais (fissuras discretas) em condições semelhantes às encontradas nas estruturas reais. Estas descontinuidades, por consequência, provocam descontinuidades nos campos de resposta do elemento estrutural em razão das solicitações a que ele estará submetido. A propagação das descontinuidades ocorre com a liberação de energia elástica e a condição

necessária para que haja incremento (evolução) das fissuras é representada pelo balanço energético de Griffith (1921, 1924).

Já a mecânica do dano contínuo, introduz uma nova variável interna, denominada dano, na equação constitutiva do material, levando ao conceito de tensão efetiva. Na formulação numérica da mecânica do dano contínuo, a variável dano passa a ser responsável pela caracterização do estado de deterioração do material.

As mecânicas da fratura e do dano contínuo apresentam aplicações com boa precisão em diversas áreas da engenharia, tais como engenharia aeronáutica e naval, porém, a sua aplicação em análise de estruturas correntes da engenharia civil torna-se bastante limitada em decorrência ao elevado custo computacional empregado. Contudo, essas teorias apresentam conceitos fundamentais que posteriormente foram empregados, juntamente com os conceitos da teoria da plasticidade, para a construção teórica da mecânica do dano concentrado.

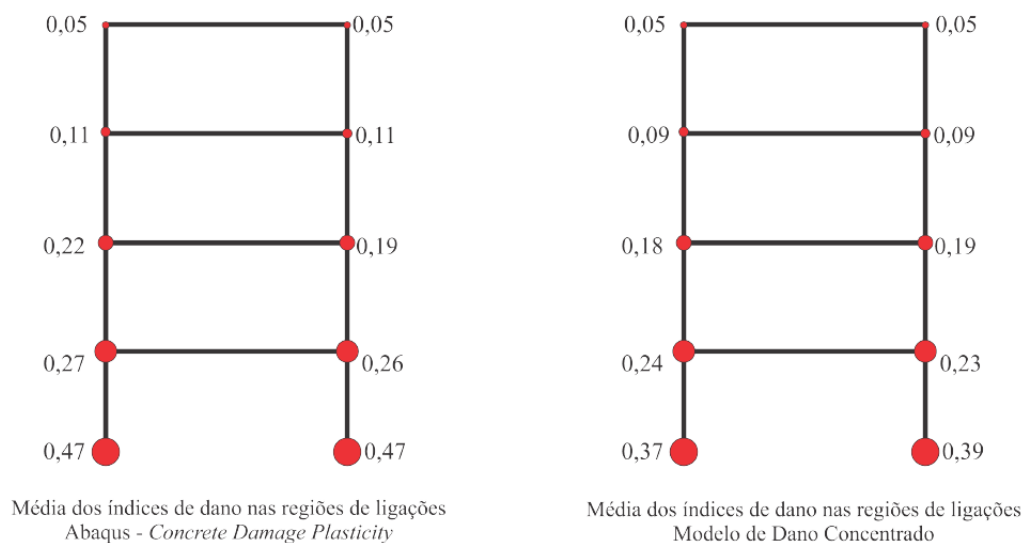
A mecânica do dano concentrado (MDC) foi inicialmente desenvolvida para análise simplificada de pórticos de concreto armado (Flórez-López, 1993; Cipollina; Flórez-López, 1995; Cipollina *et al.*, 1995; Flórez-López, 1995). Posteriormente, foi apresentada uma formulação unificada para pórticos de aço e de concreto armado (Flórez-López, 1998). Desde então, a mecânica do dano concentrado vem sendo aplicada em diversos problemas da engenharia estrutural, tais como, modelo de dano considerando falha por esforço cortante em muros estruturais (Thomson *et al.*, 2009), modelos de dano considerando modos de falha por esforços de flexão e cortante (Perdomo *et al.*, 2006; Perdomo *et al.*, 2012; Perdomo *et al.*, 2013), pórticos tridimensionais de concreto armado (Marante; Flórez-López, 2002), arcos de concreto armado (Amorim *et al.*, 2014; Brito *et al.*, 2020; Cunha *et al.*, 2021), túneis de concreto (Amorim *et al.*, 2014), estruturas de concreto armado sujeita a sismos (Teles *et al.* 2021), concreto reforçado com fibras de aço (Oliveira *et al.* 2023), vigas de concreto armado reparadas com polímero reforçado com fibra de vidro (Cunha *et al.*, 2021) pórticos metálicos (Bai *et al.*, 2016; Bai *et al.*, 2017; Bazán, 2017; Bazán *et al.*, 2019; Silva, 2020; Silva *et al.*, 2022), estimativa de flecha de vigas (Souza *et al.*, 2023), vigas de concreto armado sob cargas de impacto (Oliveira *et al.*, 2020; Teles *et al.* 2020), análise em meios bidimensionais (Amorim *et al.*, 2018; Oliveira, 2020; Santos, 2021; Picón *et al.*, 2021; Teles, 2022), dentre outros estudos (Alva; El Debs, 2010; Coelho *et al.*, 2019; Neto *et al.* 2022).

A MDC assume que os efeitos de não linearidade física de um elemento estrutural de concreto armado (fissuração do concreto e escoamento das armaduras) estão localizados em rótulas inelásticas nas extremidades do elemento para modo de falha por flexão, e distribuídos ao longo do elemento para modo de falha por esforço cortante. Com essa simplificação, o

modelo de dano concentrado reduz significativamente o custo computacional, se comparado a modelos mais complexos, como modelos de dano contínuo.

Bosse (2022) apresentou em seu trabalho uma simulação numérica de um pórtico de concreto armado de 4 pavimentos sujeito a carregamento dinâmico com o objetivo de avaliar o desempenho computacional na resposta mecânica do modelo de dano concentrado e do modelo de dano contínuo. A Figura 1.1 apresenta a comparação dos índices médios de dano nos nós dos elementos obtidos do modelo de dano contínuo e do modelo de dano concentrado para o pórtico sujeito a carregamento dinâmico. De acordo com Bosse (2022), o modelo de dano contínuo simulado no Abaqus apresentou elevado custo computacional com tempo de processamento de aproximadamente 50 horas. Já o modelo de dano concentrado, o tempo de processamento foi de 15,5 segundos.

Figura 1.1 – Índices de dano médios para pórtico de 4 pavimentos obtidos do modelo de dano contínuo e do modelo de dano concentrado



Fonte: Bosse (2022)

A MDC tem-se mostrado precisa na interpretação de resultados experimentais em elementos estruturais de concreto armado, e com aplicações em diversas situações práticas da engenharia, sendo possível quantificar, de maneira estimada, a danificação do elemento estrutural a partir da variável interna de dano.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos gerais

O objetivo geral deste trabalho é estudar o comportamento de elementos isolados de pórticos planos de concreto armado com diferentes razões de aspecto (relação entre o comprimento do elemento e a altura útil da seção transversal), para modo de falha por esforços de flexão e cortante simultâneos, utilizando a Mecânica do Dano Concentrado.

1.1.2 Objetivos específicos

- Introduzir na lei de evolução do dano devido o esforço cortante, uma nova variável interna denominado fator de correção da evolução das fissuras;
- Investigar o limite de validade da nova variável interna, para que o modelo numérico apresente uma resposta consistente com as definições da Mecânica do Dano Concentrado;
- Avaliar a influência do fator de correção das fissuras na resposta não linear de elementos com modo de falha por esforço cortante preponderante;
- Aplicar a nova formulação em experimentos com diferentes razões de aspecto reportados na literatura e observar a convergência da resposta numérica com a resposta experimental para valores distintos do fator de correção das fissuras.

1.2 Justificativa

Neste trabalho é proposto uma modificação no modelo de dano concentrado para modo de falha por esforços de flexão e cortante simultâneos com o objetivo de se obter uma melhor convergência da resposta numérica frente à resposta experimental. Esse enfoque se justifica, primeiramente, devido à aproximação adotada para o fator de correção do cisalhamento, k_s , presente no modelo clássico de Timoshenko (1921), além disso, de acordo com Leonhardt e Mönnig (1982), alguns agentes influenciam a resistência à força cortante, sendo os principais: o tipo de carregamento, a posição da carga, a taxa de armadura longitudinal, a forma da seção transversal e a taxa de armadura transversal.

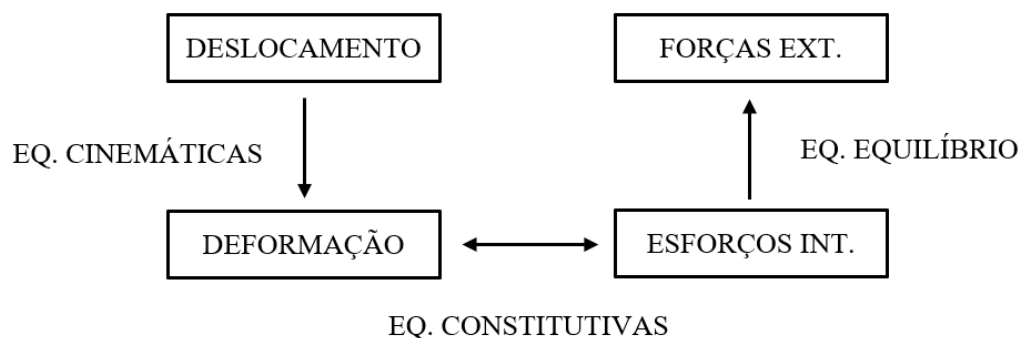
1.3 Metodologia

A metodologia deste trabalho consiste no desenvolvimento de rotinas numéricas implementada em linguagem de computação algébrica e simbólica para análise de elementos isolados de pórticos planos de concreto armado submetidos a modos de falha por flexão e esforço cortante simultâneos. O comportamento mecânico é descrito pela mecânica do dano concentrado (MDC), a qual incorpora, em sua formulação, os efeitos da não linearidade física (escoamento do aço e fissuração do concreto) apresentadas em estruturas de concreto armado.

Inicialmente, foi apresentado a implementação numérica do elemento de pórtico plano baseada na formulação proposta por Powell (1969). Nesta formulação, a estrutura é entendida como composta por nós rígidos deslocáveis ligados entre si por elementos estruturais deformáveis. A matriz de flexibilidade do elemento é aqui embasada na teoria clássica de flexão de Timoshenko (1921). Essa abordagem torna-se especialmente necessária para a consideração das deformações por cisalhamento em elementos curtos.

Assim, o elemento de pórtico passa a ser descrito por um conjunto de equações que relacionam às deformações e os deslocamentos do elemento (equações cinemáticas), os esforços internos e as forças externas (equações de equilíbrio) e as deformações e os esforços internos (equações constitutivas). A Figura 1.2 apresenta o fluxograma das equações necessárias para implementação numérica do elemento de pórtico.

Figura 1.2 – Fluxograma de equações para implementação do elemento de pórtico



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Posteriormente, foram apresentados os conceitos chave da teoria da plasticidade (conceito de rótulas plásticas e plasticidade concentrada), da mecânica da fratura e da mecânica do dano contínuo, essenciais para a construção teórica da mecânica do dano concentrado. A mecânica do dano concentrado assume que os efeitos de não linearidade física de um elemento

estrutural de concreto armado (fissuração do concreto e escoamento das armaduras) estão localizados em rótulas inelásticas nas extremidades do elemento para modo de falha por flexão, e distribuídos ao longo do elemento para modo de falha por esforço cortante.

Na análise mecânica via modelo de dano concentrado as relações entre deformações e deslocamentos, esforços internos e forças externas, e deformações e esforços internos são estabelecidas conforme apresentadas no fluxograma da Figura 1.2. Por fim, para consolidação das etapas necessárias para a análise via modelo de dano concentrado, são incorporadas na equação constitutiva do elemento os critérios de evolução do dano e os critérios de evolução das deformações plásticas.

Nesta etapa, foi proposta uma modificação no critério de evolução do dano à cortante. Tal proposta consiste na introdução de um novo parâmetro interno, denominado fator de correção das fissuras, na expressão que determina a resistência à fissuração por esforço cortante do elemento. Para avaliar o desempenho e a validade do modelo de proposto, foram realizadas simulações numéricas aplicando diferentes valores do novo parâmetro e comparando os resultados obtidos com o ensaio experimental realizado por Thomson *et al.* (2009). A partir deste estudo, foi observado a existência de um limite superior para a fator de correção das fissuras, o qual, por sua vez, depende dos parâmetros numéricos do modelo. Por fim, foram realizadas simulações numéricas de ensaios experimentais apresentados no trabalho de Perdomo (2010).

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 2 é apresentado a fundamentação teórica, onde é exposto toda a base conceitual para o desenvolvimento da Mecânica do Dano Concentrado. São apresentados conceitos elementares sobre pórticos elásticos e da notação desenvolvida por Powell, aqui utilizada, além dos conceitos básicos relacionados a teoria de flexão de vigas de Timoshenko. São apresentados ainda, conceitos relacionados à plasticidade, modelos elastoplásticos, rótulas plásticas e plasticidade concentrada, com o objetivo de aplicar tais conceitos a elementos de pórticos, além dos conceitos fundamentais da Mecânica da Fratura e da Mecânica do Dano Contínuo, essências para a construção a Mecânica do Dano Concentrado. No capítulo 3 é apresentado o modelo de Dano Concentrado para modos de falha por esforços de flexão e cortante (sistema dual) para pórticos de concreto armado, bem como as leis que regem a evolução do dano e das deformações plásticas. No capítulo 4 é desenvolvida a implementação numérica do modelo de

Dano Concentrado, com a introdução do fator de correção da evolução das fissuras devido o esforço cortante em pórticos de concreto armado. No capítulo 5 são apresentados os resultados numéricos obtidos com a aplicação da formulação proposta. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões do presente trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Pórticos elásticos

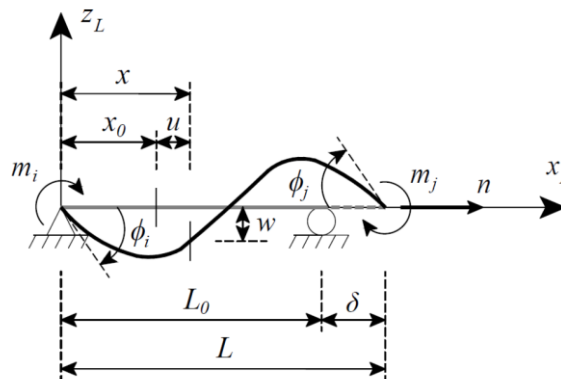
2.1.1 Introdução à notação de Powell

Na busca por uma formulação teórica que incluísse em sua abordagem os diferentes tipos de não-linearidades associadas a grandes deslocamentos em estrutura elásticas, Powell (1969) propôs uma alternativa para o método de análise baseado em deslocamentos onde foi assumido pequenas deformações e grandes deslocamentos em sua formulação.

Em seu desenvolvimento, a estrutura é entendida como composta por nós rígidos deslocáveis ligados entre si por elementos estruturais deformáveis. É assumido ainda que os elementos deformáveis que compõem a estrutura são inicialmente retos e que os carregamentos externos são aplicados exclusivamente através dos nós.

A Figura 2.1 ilustra um elemento de pórtico. As deformações generalizadas do elemento são representadas rotações relativas ϕ_i e ϕ_j nos nós i e j da corda $i - j$ formada pelo elemento, e pelo alongamento relativo δ . A Figura 2.1 apresenta ainda os correspondentes momentos fletores m_i e m_j dos nós i e j , e a força axial n .

Figura 2.1 – Deformações generalizadas do elemento de pórtico



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Os deslocamentos longitudinais $u(x)$ e transversais $w(x)$ são representados pelas deformações generalizadas do elemento, sendo os deslocamentos longitudinais representados por uma função linear, e os deslocamentos transversais por um polinômio cúbico (Powell, 1969). Para o elemento apresentado da Figura 2.1, é admitido que a diferença entre o

comprimento inicial (L_0) e comprimento final deformado (L) pode ser desprezado, e, considerado as condições de contorno, os deslocamentos são escritos como:

$$u(0) = 0, u(L) = \delta, u(x) = \frac{x}{L} \delta \quad (2.1)$$

$$w(0) = w(L) = 0, \phi_i = -\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0}, \phi_j = -\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} \quad (2.2)$$

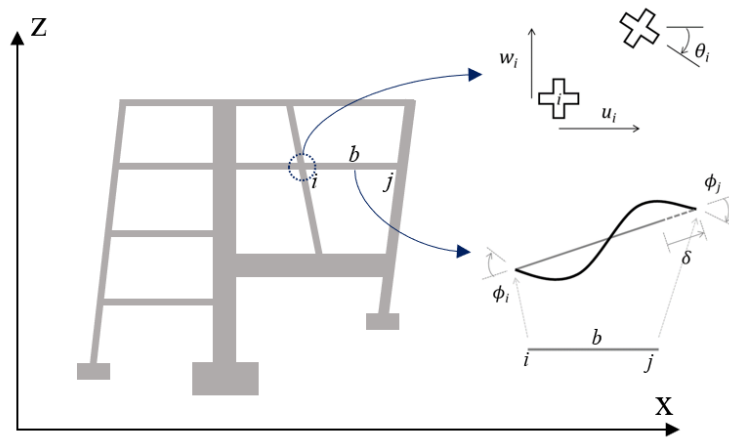
$$w(x) = \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{2x^2}{L} - x\right) \phi_i + \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L}\right) \phi_j \quad (2.3)$$

Neste trabalho, a notação desenvolvida do Powell será aplicada para escrever as equações elásticas de pórticos planos, e posteriormente, aplicada à formulação da mecânica do dano concentrado.

2.1.2 Cinemática de pórticos planos

Considere o pórtico plano formado por elementos lineares deformáveis e conectados por nós rígidos no sistema de referência global XZ , como mostra a Figura 2.2. Os deslocamentos do nó i são representados por u_i na direção do eixo global X , w_i na direção do eixo global Z , e pela rotação do nó θ_i em relação a sua configuração inicial.

Figura 2.2 – Deslocamentos generalizados do nó i e deformações generalizadas do elemento b conectado pelos nós i e j



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A matriz de deslocamentos nodais generalizados do elemento b , conectado pelos nós i e j , é determinada por:

$$\{\mathbf{q}\}_b = \{u_i \ w_i \ \theta_i \ u_j \ w_j \ \theta_j\}^T \quad (2.4)$$

A matriz de deslocamentos nodais generalizados da estrutura completa é obtida a partir da consideração dos deslocamentos nodais generalizados de todos os nós que compõe a estrutura:

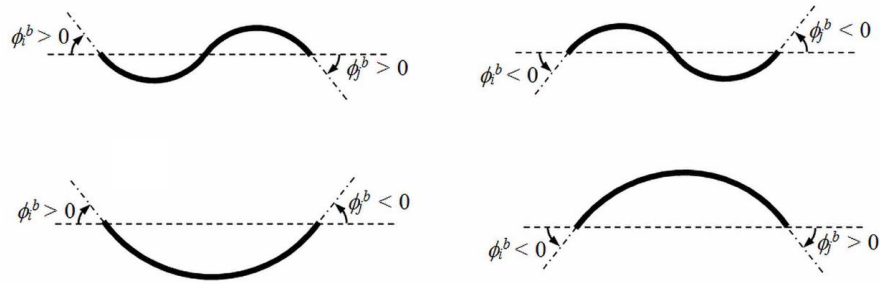
$$\{\mathbf{U}\} = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \dots \ u_n \ w_n \ \theta_n\}^T \quad (2.5)$$

Seguindo a idealização apresentada por Powell, a matriz de deslocamentos generalizados da estrutura expressa movimento de corpo rígido, ou seja, translação e rotação dos nós. Para que seja descrito com comportamento deformável dos elementos que compõe o pórtico, é necessário que seja introduzido um novo conjunto de variáveis, denominado deformações generalizadas. A Figura 2.2 apresenta as deformações generalizadas do elemento b , conectado pelos nós i e j :

$$\{\Phi\}_b = \{\phi_i^b \ \phi_j^b \ \delta^b\}^T \quad (2.6)$$

As deformações ϕ_i^b e ϕ_j^b correspondem, respectivamente, às rotações relativas dos nós i e j com a corda $i - j$ formada pelo elemento b , e δ^b corresponde a deformação axial (alongamento ou encurtamento) do elemento. A mudança na configuração inicial do elemento é atribuída ao sinal das deformações ϕ_i^b e ϕ_j^b , conforme apresentado na Figura 2.3. Na hipótese de que haja apenas movimento de corpo rígido do elemento b , a matriz de deformações generalizadas correspondente é nula (Flórez-López; Marante; Picón, 2015).

Figura 2.3 – Configuração deformada do elemento b e rotações nodais relativas

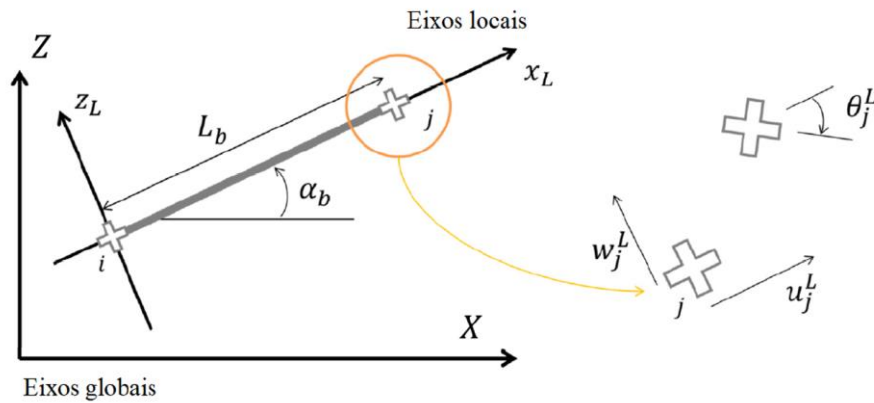


Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015)

A transformação de sistema de coordenadas local $x_L z_L$ para global XZ é apresentada na Figura 2.4 por meio de uma correlação geométrica. Considerando o elemento b , conectado pelos nós i e j , com configuração inicial apresentando um comprimento L_b e formando ângulo α_b com o eixo global X da estrutura, os deslocamentos generalizados do elemento b expressos em coordenadas locais são escritos da seguinte maneira:

$$\{\mathbf{q}^L\}_b = \{u_i^L \ w_i^L \ \theta_i^L \ u_j^L \ w_j^L \ \theta_j^L\}^T \quad (2.7)$$

Figura 2.4 – Coordenadas locais para um elemento b de pórticos e deslocamentos generalizados do nó j do elemento b em coordenadas locais.



Fonte: adaptada de Amorim (2016)

Os deslocamentos generalizados globais e locais são relacionados pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} u_i^L &= u_i \cos \alpha_b + w_i \sin \alpha_b; w_i^L = -u_i \sin \alpha_b + w_i \cos \alpha_b; \theta_i^L = \theta_i \\ u_j^L &= u_j \cos \alpha_b + w_j \sin \alpha_b; w_j^L = -u_j \sin \alpha_b + w_j \cos \alpha_b; \theta_j^L = \theta_j \end{aligned} \quad (2.8)$$

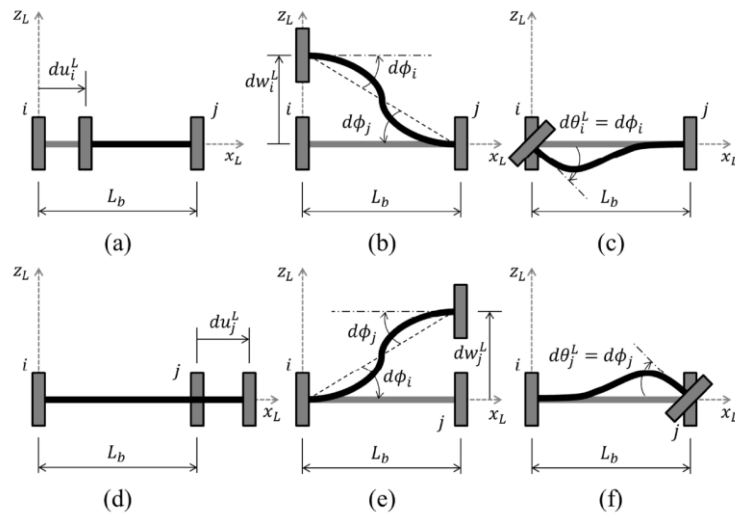
A matriz de deslocamentos generalizados em coordenadas locais $\{\mathbf{q}^L\}_b$ é relacionada com a matriz de deslocamentos generalizados em coordenadas globais $\{\mathbf{q}\}_b$ na forma $\{\mathbf{q}^L\}_b = [\mathbf{T}]_b \{\mathbf{q}\}_b$, sendo $[\mathbf{T}]_b$, a chamada matriz de transformação geométrica, dada por (Flórez-López; Marante; Picón, 2015):

$$\{\mathbf{q}^L\}_b = [\mathbf{T}]_b \{\mathbf{q}\}_b \therefore \quad (2.9)$$

$$[\mathbf{T}]_b = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A relação entre os deslocamentos generalizados e as deformações generalizadas são deduzidas a partir da aplicação de cada deslocamento infinitesimal nos respectivos nós de conectividade do elemento em seu sistema local. Para cada deslocamento infinitesimal aplicado, o elemento de pórtico apresenta uma configuração deformada infinitesimal correspondente, conforme observado na Figura 2.5 (Amorim, 2016).

Figura 2.5 – Incremento de deformações generalizadas mediante aplicação dos deslocamentos generalizados infinitesimais



Fonte: Amorim (2016)

O incremento de deformação total é então obtido pela aplicação do princípio da superposição de efeitos, resultando na equação cinemática do elemento de pórtico:

$$\begin{cases} d\phi_i = -\frac{dw_i^L}{L_b} + d\theta_i^L + \frac{dw_j^L}{L_b} \\ d\phi_j = -\frac{dw_i^L}{L_b} + \frac{dw_j^L}{L_b} + d\theta_j^L \\ d\delta = -du_i^L + du_j^L \end{cases} \rightarrow \{d\Phi\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b \{d\mathbf{q}^L\}_b \quad (2.10)$$

Na equação anterior, $[\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b$ é a matriz de transformação cinemática do elemento b , escrita em coordenadas do sistema local do elemento:

$$[\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_b} & 1 & 0 & \frac{1}{L_b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_b} & 0 & 0 & \frac{1}{L_b} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

A relação obtida pela matriz de transformação geométrica, apresentada na equação (2.9), possibilita que a equação cinemática do elemento b seja escrita em coordenadas do sistema global da estrutura:

$$\{d\Phi\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b \{d\mathbf{q}^L\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b [\mathbf{T}]_b \{d\mathbf{q}\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b \{d\mathbf{q}\}_b \quad (2.12)$$

A matriz $[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b [\mathbf{T}]_b$ é a chamada matriz de transformação cinemática do elemento b , escrita em coordenadas do sistema global da estrutura:

$$[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 \\ \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 \\ -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

De acordo com Amorim (2016), a matriz de transformação cinemática apresentada na equação (2.12) é válida para o caso geral envolvendo não linearidade geométrica. Na hipótese de tais efeitos serem desprezados, a equação cinemática é expressa na forma da equação (2.14):

$$\{\Phi\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b \{\mathbf{q}\}_b \quad (2.14)$$

A equação cinemática pode ser escrita em termos dos deslocamentos generalizados de toda estrutura, como mostra a equação (2.15) (Flórez-López; Marante; Picón, 2015).

$$\{\Phi\}_b = [\mathbf{B}_A(\mathbf{U})]_b \{\mathbf{U}\} \quad (2.15)$$

em que $[\mathbf{B}_A(\mathbf{U})]_b$ é a matriz de transformação cinemática ampliada do elemento b , sendo obtida a partir da atribuição de valores nulos nos graus de liberdade não correspondentes ao elemento analisado. Este procedimento é semelhante ao da montagem da matriz de rigidez da estrutura.

$$[\mathbf{B}_A(\mathbf{U})]_b = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \dots & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.1.3 Equações de equilíbrio

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais, o equilíbrio estático da estrutura é descrito pela igualdade entre o trabalho virtual de deformação ou trabalho interno, W_{def}^* , e o trabalho virtual externo das forças aplicadas na estrutura, W_{ext}^* .

$$W_{def}^* = W_{ext}^* \quad \forall \{\mathbf{U}^*\} \quad (2.17)$$

Em situações práticas da engenharia, carregamentos concentrados (forças e momentos) e/ou distribuídos são aplicados na estrutura. Entretanto, em concordância à formulação implementada por Powell (1969), e aqui utilizada, os carregamentos deverão ser aplicados exclusivamente através dos nós da estrutura. Portanto, faz-se necessário a utilização de carregamentos nodais equivalentes aos carregamentos distribuídos. Assim, a matriz de forças externas nodais generalizadas considerando todos os nós da estrutura é dada por:

$$\{\mathbf{P}\} = \{P_{u1} \ P_{w1} \ P_{\theta1} \ \dots \ P_{un} \ P_{wn} \ P_{\theta n}\}^T \quad (2.18)$$

Na expressão anterior P_{ui} é a força concentrada aplicada no nó i na direção de u_i , P_{wi} é a força concentrada aplicada no nó i na direção de w_i e $P_{\theta i}$ é o momento concentrado aplicado no nó i na direção de θ_i . Por definição, o trabalho virtual realizado pelas forças externas aplicadas e pelos deslocamentos virtuais generalizados é dado por:

$$W_{ext}^* = \{\mathbf{U}^*\}^T \{\mathbf{P}\} \quad (2.19)$$

A expressão do trabalho virtual de deformações é obtida mediante introdução da matriz de esforços internos generalizados do elemento b :

$$\{\mathbf{M}\}_b = \{m_i^b \ m_j^b \ n_b\}^T \quad (2.20)$$

Na expressão anterior m_i^b é o momento fletor na extremidade i do elemento b , m_j^b é o momento fletor na extremidade j do elemento b e n_b é força axial no elemento b . O trabalho virtual realizado pela matriz de esforços generalizadas e o seu conjugado, a matriz de deformações virtuais generalizadas, para todos os elementos que compõe a estrutura é dado por (Flórez-López; Marante; Picón, 2015):

$$W_{def}^* = \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{\mathbf{M}\}_b \quad (2.21)$$

Substituindo a equação cinemática (2.15) na equação (2.21), o princípio dos trabalhos virtuais resulta em:

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{\mathbf{M}\}_b &= \{\mathbf{U}^*\}^T \{\mathbf{P}\} \rightarrow \\ \sum_{b=1}^m \{\mathbf{U}^*\}^T [\mathbf{B}_A(\mathbf{U})]_b^T \{\mathbf{M}\}_b - \{\mathbf{U}^*\}^T \{\mathbf{P}\} &= 0 \ \forall \ \{\mathbf{U}^*\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

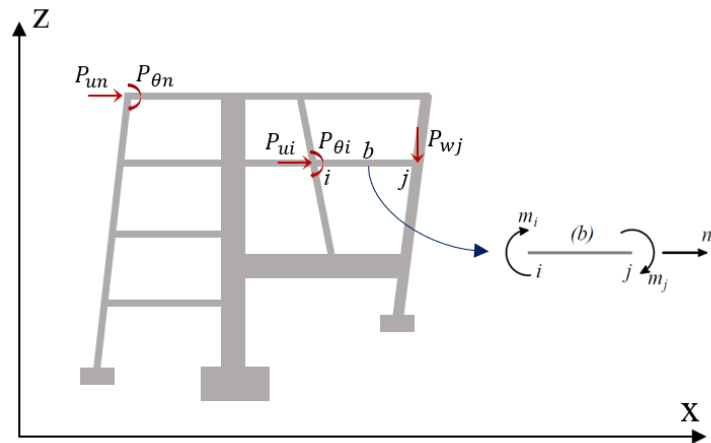
Considerado a equação (2.22) verdadeira para qualquer matriz de deslocamentos virtuais generalizados, a equação de equilíbrio estático da estrutura, que relaciona a matriz de

esforços internos generalizados do elemento com a matriz de forças externas nodais generalizadas, é dada por:

$$\sum_{b=1}^m [\mathbf{B}_A(\mathbf{U})]_b^T \{\mathbf{M}\}_b = \{\mathbf{P}\} \quad (2.23)$$

A Figura 2.6 apresenta os carregamentos externos generalizados da estrutura e os esforços internos generalizados do elemento em estudo.

Figura 2.6 - Carregamentos externos generalizados e esforços internos generalizados do elemento b .



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

2.1.4 Equações constitutivas

Até o momento, foram obtidas a relação entre as deformações generalizadas e os deslocamentos generalizados, por meio das equações cinemáticas, e a relação entre os esforços internos generalizados e as forças externas generalizadas, por meio das equações de equilíbrio. Para completar o conjunto de equações, é necessário relacionar as deformações generalizadas e os esforços internos generalizados, por meio das equações constitutivas.

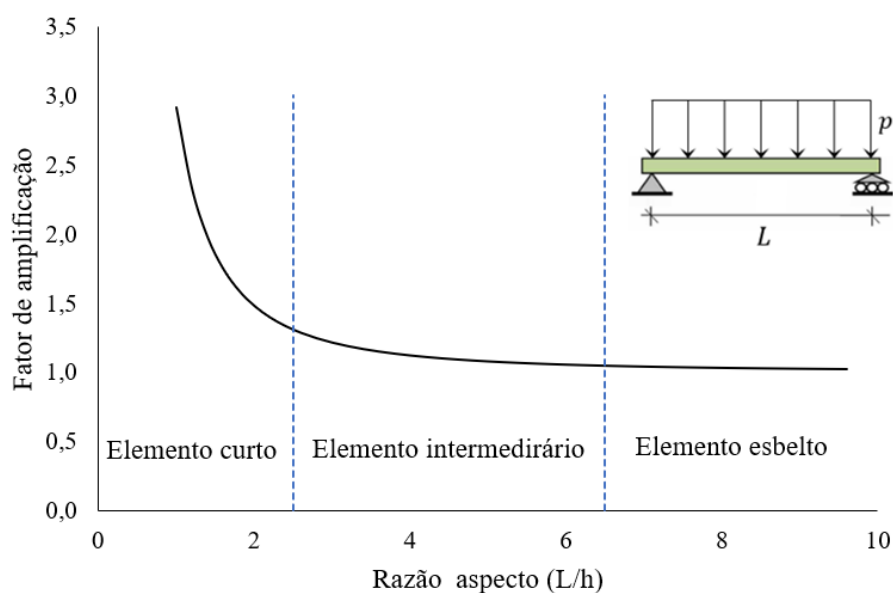
As equações constitutivas são aqui deduzidas a partir da teoria clássica de flexão de vigas de Timoshenko (1921). Essa abordagem se faz necessária para a consideração das deformações por cisalhamento, e este efeito torna-se especialmente relevante à medida que a relação entre o comprimento do elemento e a altura da seção transversal (razão de aspecto) se aproxima da unidade.

A flecha de uma viga simplesmente apoiada obtida pela teoria de vigas de Euler-Bernoulli $\left(w[x = L/2] = -\frac{5pL^4}{384EI}\right)$ e pela teoria de vigas de Timoshenko $\left(w[x = L/2] = -\frac{5pL^4}{384EI} \left(1 + \frac{8}{5} \frac{(1+\nu)}{(L/h)^2}\right)\right)$ estão relacionadas pelo fator de amplificação $\left(1 + \frac{8}{5} \frac{(1+\nu)}{(L/h)^2}\right)$, o qual, por sua vez, é dependente da razão de aspecto do elemento analisado. A Figura 2.7 apresenta o fator de amplificação da flecha de uma viga simplesmente apoiada, para equivalência da flecha apresentada pelas teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko, em função da razão de aspecto.

Para elementos de concreto armado esbeltos, a razão de aspecto apresenta proporções maiores que 6,5 e o fator de amplificação para este caso varia entre 1 e 1,05. Para elementos intermediários, a razão de aspecto apresenta proporções entre 2,5 e 6,5 e o fator de amplificação para este caso varia entre 1,05 e 1,31. Para elementos curtos, a razão de aspecto apresenta proporções inferiores 2,5 e o fator de amplificação para este caso aumenta exponencialmente (Flórez-López; Marante; Picón, 2015).

Ainda, de acordo com e Figura 2.7, para elementos esbeltos, a deflexão apresentada pelas teorias de flexão de Euler-Bernoulli e Timoshenko são equivalentes. Entretanto, para elementos intermediários e, especialmente, para elementos curtos, a utilização da teoria de flexão de Euler-Bernoulli é inadequada e subestima significativamente o valor da deflexão.

Figura 2.7 – Fator de amplificação da deflexão de uma viga simplesmente apoiada em função da razão de aspecto



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

O modelo clássico de Timoshenko (1921) considera a deformação por cisalhamento (distorção) como uma rotação adicional da seção transversal. De acordo com este, o comportamento elástico de um elemento de pórtico é definido como:

$$N(x) = AE \frac{du}{dx}; M(x) = EI \frac{d\beta}{dx}; V(x) = Gk_s A \left(\beta - \frac{dw}{dx} \right) \quad (2.24)$$

sendo $N(x)$, $M(x)$ e $V(x)$, respectivamente, a força axial, o momento fletor e esforço cortante ao longo do elemento. E e G são o módulo de elasticidade longitudinal e o módulo de elasticidade transversal do material. A e I são a área da seção transversal e o momento de inércia da seção. k_s é o fator de correção do cisalhamento, β é a rotação da seção, w o deslocamento transversal e u o deslocamento longitudinal. O produto $k_s A = A_s$ é a área de cisalhamento efetiva.

O fator de correção do cisalhamento tem sido objeto de diversos estudos. Em seu trabalho, Ahmed e Rifai (2021) apresentam valores para k_s obtidos através de estudos anteriores de diversos pesquisadores. Neste trabalho, para elementos de seção retangular, é assumido $k_s = 5/6$, conforme apresentado em Gere e Timoshenko (1991), e que, apesar de ser uma aproximação, satisfaz os objetivos a que este trabalho se propõe.

Para tanto, considere o elemento de pórtico apresentando na Figura 2.8. Pela condição de equilíbrio e da cinemática das vigas de Timoshenko, é obtida as seguintes relações:

$$\frac{dV_b(x)}{dx} = Q_b(x); \frac{dM_b(x)}{dx} = V_b \quad (2.25)$$

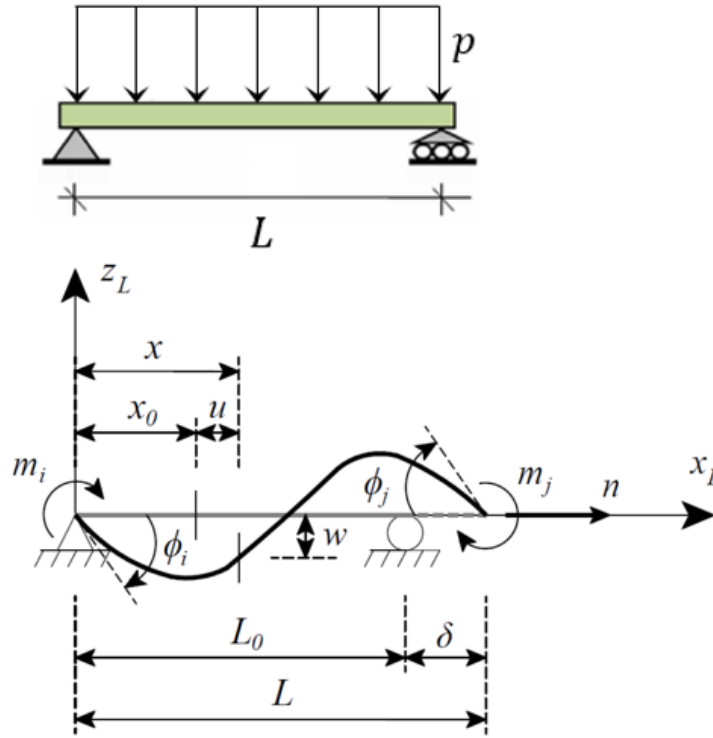
da equação anterior, $Q_b(x)$ se refere ao carregamento distribuído ao longo do elemento. Admitindo, por simplificação, carregamento distribuído constante ao longo do elemento, $Q_b(x) = -p$, a condição de equilíbrio fornece a seguinte expressão para o momento fletor:

$$M_b(x) = -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2 \quad (2.26)$$

sendo C_1 e C_2 , constantes de integração. Da Figura 2.8 é possível notar ainda que $M_b(0) = m_i^b$ e $M_b(L) = -m_j^b$. Aplicando as condições de contorno anteriores na equação (2.26), as constantes de integração C_1 e C_2 ficam expressas por:

$$C_1 = -\frac{m_i^b + m_j^b}{L_b} + \frac{pL_b}{2}; C_2 = m_i^b \quad (2.27)$$

Figura 2.8 - Esforços generalizados e deformações generalizadas do elemento de pórtico no sistema de coordenadas locais



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A partir da relação entre o momento fletor e curvatura, $\chi = \frac{d\beta}{dx}$, fornecida pela cinemática das vigas de Timoshenko, dada na equação (2.24), a rotação da seção transversal da viga fica na assim determinada:

$$EI \frac{d\beta}{dx} = M_b(x) \rightarrow EI\beta = -\frac{px^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad (2.28)$$

O deslocamento transversal é obtido da equação (2.24), na expressão que relaciona o esforço cortante e a distorção da seção transversal, $\gamma = \left(\beta - \frac{dw}{dx}\right)$:

$$\begin{aligned} V_b(x) &= GA_s \left(\beta - \frac{dw}{dx} \right) \rightarrow \\ GA_s w &= \left(+\frac{px^2}{2} - C_1x - C_2 \right) + \frac{GA_s}{EI} \left(-\frac{px^4}{24} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x \right) + C_4 \end{aligned} \quad (2.29)$$

As condições de contorno para os deslocamentos transversais w e para as rotações β nos nós do elemento são apresentadas na Figura 2.8. Da Figura 2.8 temos que os deslocamentos transversais do elemento valem $w(0) = w(L_b) = 0$ e as rotações totais da seção valem $\beta(0) = -\phi_i$ e $\beta(L_b) = -\phi_j$.

Aplicando as condições de contorno dos deslocamentos, além das constantes de integração C_1 e C_2 , aqui definidas pela equação (2.27), as constantes de integração C_3 e C_4 da equação (2.29) ficam expressas por:

$$C_3 = -\left(\frac{m_i^b + m_j^b}{L_b}\right) \frac{EI}{GA_s} + (m_i^b + m_j^b) \frac{L_b}{6} - m_i^b \frac{L_b}{2} + \frac{pL_b^3}{24EI}; \quad C_4 = m_i^b \quad (2.30)$$

Aplicando as condições de contorno das rotações e os valores obtidos para as constantes de integração na equação (2.28), as rotações relativas das seções transversais i e j com a corda $i - j$ formada pelo elemento b são:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \left(\frac{L_b}{3EI} + \frac{1}{GA_s L_b}\right) m_i^b - \left(\frac{L_b}{6EI} - \frac{1}{GA_s L_b}\right) m_j^b + \frac{pL_b^3}{24EI} \\ \phi_j &= -\left(\frac{L_b}{6EI} - \frac{1}{GA_s L_b}\right) m_i^b + \left(\frac{L_b}{3EI} + \frac{1}{GA_s L_b}\right) m_j^b - \frac{pL_b^3}{24EI} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Adicionalmente, a deformação axial do elemento, δ , é dada por:

$$\delta = \frac{n_b L_b}{EA} \quad (2.32)$$

Reescrevendo as equações (2.31) e (2.32) em notação matricial, a matriz de deformações elásticas generalizadas do elemento b , $\{\Phi^e\}_b$, e a matriz esforços internos generalizadas do elemento, $\{\mathbf{M}\}_b$, ficam relacionadas por:

$$\{\Phi^e\}_b = [\mathbf{F}_e]_b \{\mathbf{M}\}_b + \{\Phi_0\}_b \quad (2.33)$$

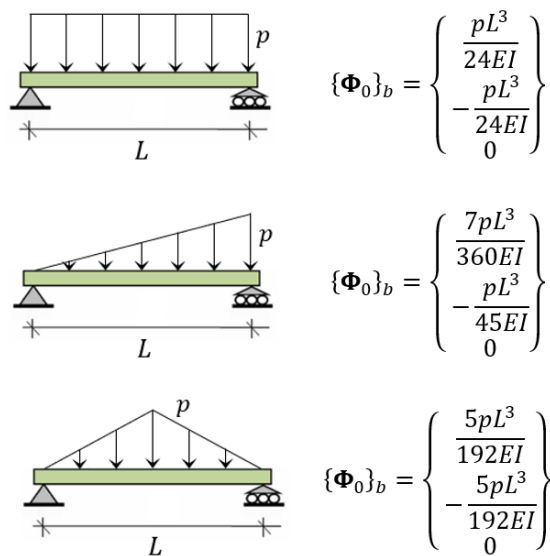
da equação anterior, $[\mathbf{F}_e]_b$ é a matriz de flexibilidade elástica do elemento b , obtida a partir da teoria de flexão de vigas de Timoshenko. Assim, a matriz de flexibilidade do elemento de pórtico fica definida por (Thomson *et al.*, 2009):

$$[\mathbf{F}_e]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI} & -\frac{L_b}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI} & \frac{L_b}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{EA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{GA_s L_b} & \frac{1}{GA_s L_b} & 0 \\ \frac{1}{GA_s L_b} & \frac{1}{GA_s L_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Na equação (2.34), o primeiro termo da matriz de flexibilidade está relacionado com a deformação devida à flexão da viga, e o segundo termo com a deformação devido à força cortante.

A matriz $\{\Phi_0\}_b = \{\phi_i^0 \quad \phi_j^0 \quad 0\}^T$ é definida como matriz de deformação inicial do elemento, a qual depende exclusivamente do formato da carga distribuída aplicada. A Figura 2.9 apresenta os valores para os termos ϕ_i^0 e ϕ_j^0 da matriz de deformação inicial em diferentes configurações de carregamento distribuído.

Figura 2.9 – Termos da matriz de deformação inicial para diferentes configurações de carregamento distribuído



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

2.2 Fundamentos básicos de elastoplasticidade

Neste tópico, são apresentados os conceitos fundamentais de plasticidade uniaxial, além dos conceitos de rótula plástica e de plasticidade concentrada. O modelo elástico, como o apresentado do tópico anterior, não consegue admitir deformações permanentes na estrutura, após alcançado o limite elástico do material. Assim, para que seja descrito o comportamento elastoplástico dos materiais, é necessário a idealização de um modelo que represente tal comportamento.

De modo geral, as deformações apresentadas pelo material com comportamento elástico linear são caracterizadas pela equação constitutiva $\sigma = E\varepsilon_e$. Neste domínio, o estado de deformação depende exclusivamente do valor da tensão atuante. Entretanto, para descrever o comportamento elastoplástico dos materiais, uma correspondente lei de elasticidade deve ser apresentada (Flórez-López; Marante; Picón, 2015):

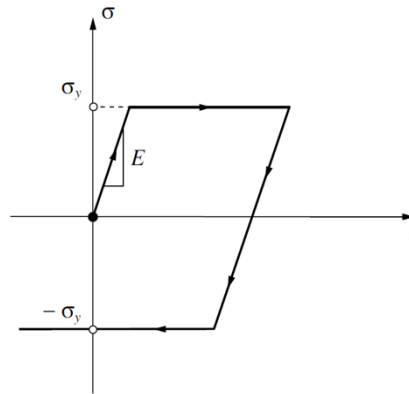
$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2.35)$$

sendo ε , a deformação total, dada pela soma da parcela de deformação elástica e da deformação plástica: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$.

A idealização do modelo elastoplástico perfeito é caracterizada por não admitir o ganho de resistência dos materiais dúcteis quando submetido a deformações permanentes, fenômeno este, conhecido como encruamento. Assim, o nível de tensão não é dependente do nível das deformações plásticas apresentadas (Neto; Peric; Owen, 2008).

Neste modelo, o comportamento elástico é caracterizado até o limite da tensão de escoamento do material, σ_y . Após alcançado este valor, o material escoar com nível de tensão constante, e, cessado o carregamento, as deformações permanentes são apresentadas. A Figura 2.10 apresenta a idealização do modelo elastoplástico perfeito.

Figura 2.10 – Modelo elastoplástico perfeito

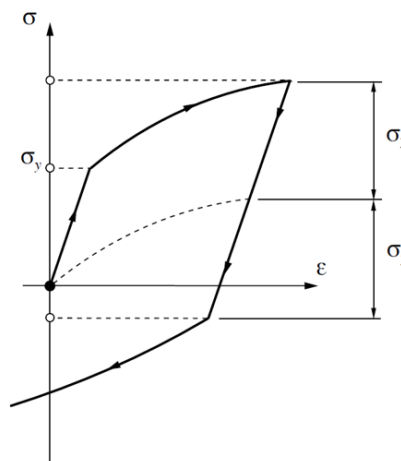


Fonte: adaptada de Neto, Peric e Owen (2008)

O modelo elastoplástico com encruamento cinemático possui grande melhoria em relação ao modelo anterior. Neste modelo, é considerado o ganho de resistência material proveniente das deformações plásticas devido ao fenômeno do encruamento, além da inclusão do efeito observado em ensaios de carga cíclica, onde há inversão de sinal do carregamento aplicado. Este efeito, conhecido como efeito Bauschinger, corresponde à translação do domínio elástico no espaço das tensões, se mantendo constante em $2\sigma_y$ (Flórez-López; Marante; Picón, 2015).

Neste modelo, o comportamento elástico do material é caracterizado até o limite da tensão de escoamento, σ_y . Após alcançado este valor, o material escoar até uma tensão limite denominada tensão última, σ_u , e, cessado o carregamento, as deformações permanentes são apresentadas. A Figura 2.11 apresenta a idealização do modelo elastoplástico com encruamento cinemático.

Figura 2.11 – Modelo elastoplástico com encruamento cinemático

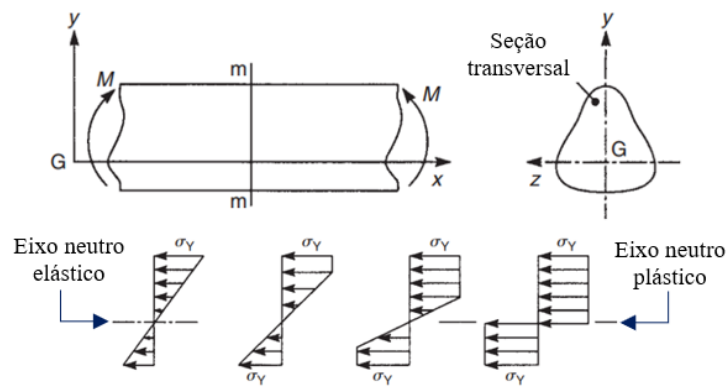


Fonte: adaptada de Neto, Peric e Owen (2008)

2.2.1 Rótulas plásticas e plasticidade concentrada

O conceito de rótula plástica é melhor compreendido analisando a seção de uma viga submetida a um momento fletor de intensidade M , conforme ilustrado na Figura 2.12. A intensidade do momento fletor aplicado é continuamente aumentada até o colapso do elemento estrutural, no qual, por simplificação, o comportamento material seja descrito pelo modelo elastoplástico perfeito.

Figura 2.12 – Evolução da distribuição de tensões em uma seção de viga

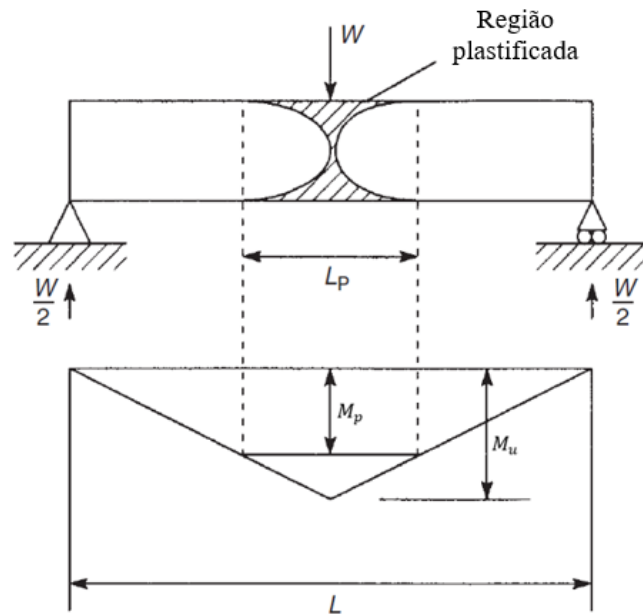


Fonte: adaptada de Megson (2005)

Para uma flexão pequena, a seção em análise se comportará em regime elástico linear, não apresentando assim, deformações permanentes após descarga. Aumentando a intensidade do carregamento aplicado, até que a fibra mais externa da seção transversal da viga alcance a tensão de escoamento do material, σ_y , é caracterizado o limite do domínio elástico. O momento fletor correspondente ao limite do domínio elástico é denominado primeiro momento plástico, M_p . Para um incremento no momento aplicado, as fibras mais externas da seção transversal começam a escoar sob tensão constante, em concordância com o modelo elastoplástico perfeito. Na situação última, onde todas as fibras da seção possuem comportamento plástico, o momento atuante correspondente é denominado momento último, M_u .

A plastificação total da seção transversal introduz o conceito de rótula plástica. No ensaio de viga simplesmente apoiada com carregamento concentrado aplicado no meio do vão, conforme indicado na Figura 2.13, o momento atuante na seção central, M_u , plastificará toda a seção. A região plastificada se estenderá por um comprimento L_p até o valor limite do domínio elástico, M_p . Para valores inferiores a M_p , o comportamento material é descrito pelo domínio elástico (Megson, 2005).

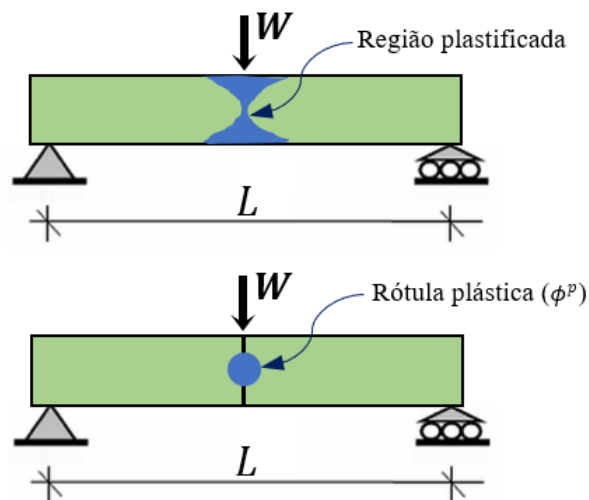
Figura 2.13 – Formação da rótula plástica



Fonte: adaptada de Megson (2005)

No modelo de plasticidade concentrada, as regiões plastificadas da estrutura são representadas por rótulas plásticas concentradas nas seções críticas correspondentes (ver Figura 2.14). Assim, há uma descontinuidade e o comportamento da viga passa agora a ser interpretado como dois elementos elásticos conectados entre si por uma mola rotacional, ϕ^p , de comprimento inicial nulo. A formulação matemática de uma rótula plástica é descrita pela lei de evolução das rotações plásticas (Flórez-López; Marante; Picón, 2015).

Figura 2.14 – Modelo de plasticidade concentrada



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

2.2.2 Elastoplasticidade em pórticos de concreto armado submetidos a esforços de flexão e cortante

Os conceitos de elastoplasticidade abordados anteriormente são agora aplicados aos estudos de pórticos de concreto armado. A teoria da elastoplasticidade foi adaptada para pórticos por Cohn e Franchi (1979), admitindo o modelo de plasticidade concentrada.

Para a inclusão das deformações plásticas (rotações e alongamentos plásticos) devido ao esforço de flexão, é assumido que tais fenômenos sejam concentrados em rótulas plásticas localizadas nas extremidades do elemento em análise. Assim, a matriz das deformações plásticas devido à flexão é definida por (Perdomo *et al.*, 2013):

$$\{\Phi^p\}_b = \{\phi_i^p \ \phi_j^p \ \delta^p\}^T \quad (2.36)$$

da equação anterior, as deformações ϕ_i^p e ϕ_j^p correspondem, respectivamente, às rotações das rótulas plásticas i e j , e δ^p corresponde ao alongamento plástico do elemento em cada rótula plástica, sendo $\delta^p = \delta_i^p + \delta_j^p$. De acordo com Flórez-López, Marante e Picón (2015), o alongamento plástico em pórticos de concreto armado pode ser desprezado, assim a equação (2.36) passa a ser escrita como:

$$\{\Phi^p\}_b = \{\phi_i^p \ \phi_j^p \ 0\}^T \quad (2.37)$$

Para a inclusão das deformações plásticas (distorções plásticas) devido ao esforço cortante, a plasticidade é considerada distribuída e aproximadamente constante ao longo do elemento. A matriz das deformações plásticas devido a cortante é definida por (Perdomo *et al.*, 2013):

$$\{\Upsilon^p\}_b = \{\gamma^p \ \gamma^p \ 0\}^T \quad (2.38)$$

da equação anterior, as deformações γ^p corresponde à distorção plástica do elemento. A Figura 2.15 apresenta a deformações plásticas para o elemento de pórtico.

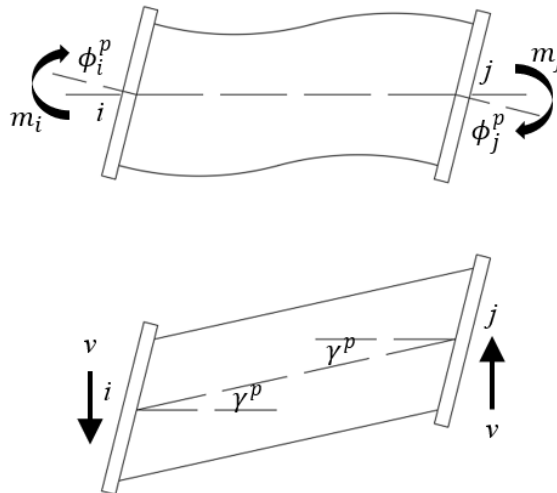
Conforme apresentando para o caso unidimensional do modelo constitutivo elastoplástico, equação (2.35), a deformação total do material é decomposta em uma parcela de deformação elástica e uma parcela de deformação plástica. Particularizando a análise para

elementos de pórticos submetidos a esforços de flexão e cortante, a correlação é apresentada a seguir:

$$\{\Phi\}_b = \{\Phi^e\}_b + \{\Upsilon^p\}_b + \{\Phi^p\}_b \quad (2.39)$$

sendo $\{\Phi\}_b$ a matriz de deformações total do elemento, $\{\Phi^e\}_b$ a matriz de deformações elásticas obtida pela lei de comportamento dada na equação (2.33), $\{\Phi^p\}_b$ a matriz das rotações nas rótulas plásticas com alongamento plástico desprezado ($\delta^p = 0$) e $\{\Upsilon^p\}_b$ a matriz de distorções plásticas do elemento.

Figura 2.15 – Deformações plásticas do elemento de pórtico



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

2.3 Fundamentos básicos da mecânica da fratura e da mecânica do dano contínuo

Neste tópico são apresentados os conceitos básicos da mecânica da fratura e da mecânica do dano contínuo, fundamentais para a construção teórica da mecânica do dano concentrado.

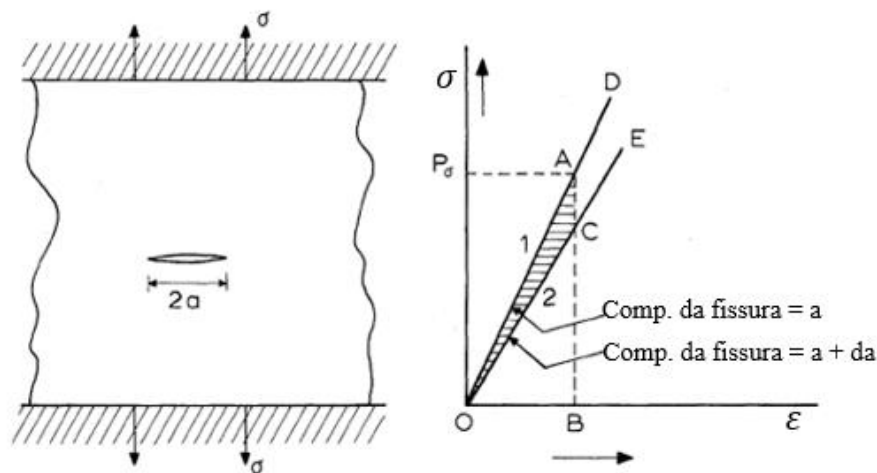
2.3.1 Fundamentos básicos da mecânica da fratura

A mecânica da fratura surge da necessidade de fornecer respostas consistentes ao incorporar ao modelo de análise estrutural as discontinuidades físicas materiais (fissuras) encontradas na engenharia prática. Tais discontinuidades físicas, por consequência, provocam discontinuidades nos campos de tensão, deformação e deslocamento.

Em 1898, Kirsch (1898) resolveu de forma analítica o problema de uma chapa tracionada com furo circular e observou em seus estudos, o considerável aumento das tensões normais na região (concentração de tensão). Inglis (1913) estendeu o estudo anterior considerando furo elíptico e observou de maneira ainda mais acentuada, a concentração de tensão na região do furo. Griffith (1921) atribuiu à concentração de tensão existente nas microfissuras a discrepância encontrada entre a resistência teórica e a resistência experimental em vidros. Posteriormente, Griffith (1924) formulou o problema da fratura em regime frágil com base em critérios energéticos.

O problema fundamental de Griffith refere-se a uma placa plana de dimensões infinitas e espessura unitária com uma fissura de tamanho $2a$ localizada em seu interior considerando material idealmente frágil (Broek, 1982; Gdoutos, 2005). A chapa é submetida a um estado de tensão, conforme apresentando na Figura 2.16.

Figura 2.16 – O Problema fundamental de Griffith: energia de deformação da placa fissurada e energia de deformação na propagação da fissura



Fonte: adaptada de Broek (1982)

Da figura anterior, a energia elástica contida na placa fissurada é dada pela área OAB . Se a fissura inicial se estender em um comprimento da , a rigidez da placa decairá e consequentemente a sua energia elástica cairá para uma magnitude definida pela área OCB . Deste modo, a propagação da fissura de a para $a + da$ ocorrerá com uma liberação de energia elástica de magnitude definida pela área OAC (Broek, 1982).

De acordo com o balanço de energia de Griffith, condição necessária do para que haja o incremento de área da fissura, da , é expresso da seguinte maneira (Anderson, 2005):

$$\frac{dE}{da} = \frac{d\Pi}{da} + \frac{dW_s}{da} = 0 \rightarrow -\frac{d\Pi}{da} = \frac{dW_s}{da} \quad (2.40)$$

Da equação anterior E é a energia total, Π é a energia potencial fornecida pela energia de deformação interna e pelas forças externas, e, W_s é a energia necessária para formação de novas superfícies de fissuras. O termo $-d\Pi/da = G^a$ é chamado de força motriz da fissura. Já o termo $dW_s/da = R^a$ é a energia consumida na propagação da fissura ou resistência à fissuração.

2.3.2 Fundamentos básicos da mecânica do dano contínuo

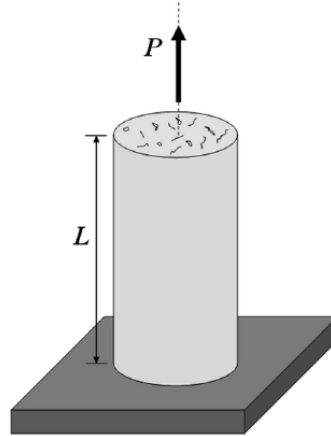
A base conceitual da mecânica do dano contínuo foi introduzida inicialmente pelos estudos de Kachanov (1958) para modelagem de ruptura por deformação lenta (fluência). Em seguida, Rabotnov (1969) sugeriu que a perda de rigidez material decorrentes das micro fissurações fossem incluídas nas variáveis de dano. Posteriormente, utilizando a termodinâmica de processos irreversíveis, Lemaitre e Chaboche (1985) estabeleceram formalmente a base conceitual da mecânica do dano contínuo por meio da introdução de uma nova variável interna, denominada dano, na equação constitutiva do material.

O objetivo da mecânica do dano é quantificar consistentemente a influência do dano na rigidez e resistência do material por meio da sua consideração em um meio contínuo equivalente. A micro fissuração difusa no material, as quais são considerados de forma discreta pela mecânica da fratura, são pequenas demais para serem consideradas como fissuras e grandes demais para serem desprezadas.

Na Figura 2.17, um elemento representativo é submetido a um carregamento axial de intensidade P . Seja A , a área total da seção transversal normal ao carregamento e $\bar{A}$, a parcela íntegra da área total da seção transversal capaz de transferir tensões. Dessa forma, a tensão nominal (σ) e a tensão efetiva ($\bar{\sigma}$) são definidas por:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \quad \bar{\sigma} = \frac{P}{\bar{A}} \quad (2.41)$$

Figura 2.17 – Elemento danificado sujeito a carregamento axial



Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015)

A área dos defeitos é dada pela seguinte expressão:

$$A_0 = A - \bar{A} \quad (2.42)$$

Por definição, o dano associado ao plano normal ao carregamento é determinado pela relação (Lemaitre; Chaboche, 1985):

$$\omega_{\bar{n}} = \frac{A_0}{A} \quad (2.43)$$

A variável de dano assim definida pode assumir valores contidos no intervalo $0 \leq \omega_{\bar{n}} \leq 1$. Para valor de $\omega_{\bar{n}} = 0$, o material encontra-se completamente íntegro, do oposto, para valor de $\omega_{\bar{n}} = 1$, o material encontra-se completamente degradado.

Um modelo de dano, no qual, uma única variável de dano é suficientemente capaz de descrever o estado de deterioração material em todas as direções é denominado dano isotrópico, deste modo, $\omega_{\bar{n}} = \omega$. Assim, considerando dano isotrópico, a parcela da seção que efetivamente resiste ao esforço solicitado é dada por:

$$\bar{A} = (1 - \omega)A \quad (2.44)$$

Fica estabelecida a relação entre a tensão nominal e a efetiva:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - \omega)} \quad (2.45)$$

Empregando a hipótese de equivalência de deformação proposta por Lemaitre e Chaboche (1985) na equação constitutiva do material, que diz que a deformação do meio íntegro onde atua a tensão efetiva é a mesma do meio danificado, e, fazendo uso da relação entre a tensão efetiva e a tensão nominal, obtida anteriormente, tem-se a lei de elasticidade:

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \rightarrow \sigma = (1 - \omega)E\varepsilon \quad (2.46)$$

Da expressão anterior, é possível notar que o dano penaliza diretamente a resposta elástica do material, conduzindo a um módulo de elasticidade longitudinal efetivo, na forma $\bar{E} = (1 - \omega)E$. Dessa forma, a variável de dano passa ser identificada por:

$$\omega = 1 - \left(\frac{\bar{E}}{E} \right) \quad (2.47)$$

De forma alternativa, a lei de elasticidade pode ser escrita em termos de flexibilidade:

$$\sigma = (1 - \omega)E\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{(1 - \omega)E} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\omega\sigma}{(1 - \omega)E} = \varepsilon_e + \varepsilon_\omega \quad (2.48)$$

da equação anterior, a deformação específica ε é fracionada em duas partes: a deformação relativa à elasticidade do material e uma deformação adicional relativa à danificação do material. Para inclusão de análise de materiais elastoplásticos, conforme equação (2.35), a lei de elasticidade é modificada da seguinte forma:

$$\sigma = (1 - \omega)E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2.49)$$

sendo ε , a deformação total dada pela soma da parcela de deformação elástica, da parcela adicional de deformação devido a danificação material e da deformação plástica: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_\omega + \varepsilon_p$.

3 MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO PARA MODOS DE FALHA POR ESFORÇOS DE FLEXÃO E CORTANTE EM PÓRTICOS DE CONCRETO ARMADO

Utilizando conceitos chave da mecânica da fratura e da mecânica do dano contínuo, aliados ao conceito de rótulas plásticas e plasticidade concentrada, Flórez-López (1993, 1995) apresentou um modelo simplificado para análises de pórticos de concreto armado submetidos à flexão. Posteriormente, Thomson (2004), desenvolveu um modelo simplificado para análise de elementos curtos, como muros estruturais, submetidos preponderantemente a esforço cortante.

Tais modelos assumem que os efeitos de não linearidade física de um elemento estrutural de concreto armado (fissuração do concreto e escoamento das armaduras) estão localizados em rótulas inelásticas nas extremidades do elemento para modo de falha por flexão, e distribuídos ao longo do elemento para modo de falha por esforço cortante. A Figura 3.1 apresenta a manifestação dos efeitos inelásticos em estruturas de concreto armado.

Figura 3.1 – Efeitos inelásticos em estruturas de concreto armado



Fonte: adaptado de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

A mecânica do dano concentrado será apresentada neste estudo para investigar pórticos planos de concreto armado suscetíveis a falha por esforços de flexão (momento fletor) e/ou cortante (por simplicidade, aqui denominado de sistema dual), levando em consideração diferentes razões de aspecto para os elementos estruturais constituintes.

3.1 Modelo de dano concentrado para sistemas duais

De acordo com a hipótese de equivalência de deformação, a deformação total do material é decomposta em uma parcela de deformação elástica, uma parcela de deformação adicional devido ao dano e uma parcela de deformação plástica. Particularizando a análise para elementos de pórticos planos de concreto armado submetidos a esforços de flexão e cortante, na equação (2.39), será acrescido os termos correspondentes ao dano devido à flexão e ao esforço cortante (Perdomo *et al.*, 2013):

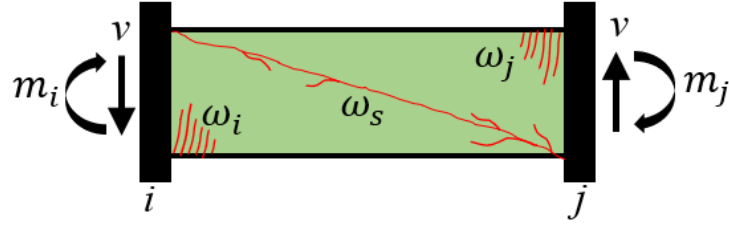
$$\{\Phi\}_b = \{\Phi^e\}_b + \{\mathbf{Y}^p\}_b + \{\Phi^p\}_b + \{\mathbf{Y}^\omega\}_b + \{\Phi^\omega\}_b \quad (3.1)$$

sendo $\{\Phi\}_b$ a matriz de deformações total do elemento, $\{\Phi^e\}_b$ a matriz de deformações elásticas, apresentada na equação (2.33), $\{\Phi^p\}_b$ a matriz das rotações nas rótulas plásticas com alongamento plástico desprezado ($\delta^p = 0$), apresentada na equação (2.37), $\{\mathbf{Y}^p\}_b$ a matriz de distorções plásticas do elemento, apresentada na equação (2.38), $\{\Phi^\omega\}_b$ a matriz de deformação adicional devido a danificação material por esforços à flexão e $\{\mathbf{Y}^\omega\}_b$ a matriz de deformação adicional devido a danificação material por esforço cortante.

Segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), o modelo elastoplástico apresentado na equação (2.39) é agora modificado assumido que as fissuras do concreto devido aos esforços de flexão são concentradas nas rótulas plásticas localizadas em cada extremidade do elemento. Para descrever os surgimento e propagação de tais fissuras é necessário que seja incorporado ao modelo novas variáveis internas, $\omega_f = (\omega_i, \omega_j)$, sendo ω_i e ω_j variáveis numéricas no intervalo $[0, 1]$, e que medem a densidade de fissuras (dano) nas rótulas i e j respectivamente.

As fissuras do concreto devido ao esforço cortante são assumidas distribuídas ao longo do elemento elastoplástico e são incorporadas ao modelo mediante introdução da variável numérica no intervalo $[0, 1]$, ω_s , que mede a densidade de fissuras (dano) ao longo do elemento. A Figura 3.2 apresenta o modelo de dano concentrado para modos de falha por esforços de flexão e cortante.

Figura 3.2 – Modelo de dano concentrado para modos de falha por esforços de flexão e cortante simultâneos



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

De acordo com a hipótese de equivalência em deformação, a matriz de deformação adicional devido ao dano por esforço cortante e a matriz de deformação adicional devido ao dano por flexão são descritas, respectivamente, por (Perdomo *et al.*, 2013; Flórez-López; Marante; Picón, 2015):

$$\begin{aligned} \{\mathbf{Y}^\omega\}_b &= [\mathbf{C}_s(\omega_s)]_b \{\mathbf{M}\}_b \\ \{\mathbf{\Phi}^\omega\}_b &= [\mathbf{C}_f(\omega_f)]_b \{\mathbf{M}\}_b \end{aligned} \quad (3.2)$$

da equação anterior, $[\mathbf{C}_s(\omega_s)]_b$ e $[\mathbf{C}_f(\omega_f)]_b$ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_s(\omega_s)]_b &= \frac{\omega_s}{1 - \omega_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{GA_s L_b} & \frac{1}{GA_s L_b} & 0 \\ \frac{1}{GA_s L_b} & \frac{1}{GA_s L_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{C}_f(\omega_f)]_b &= \begin{bmatrix} \frac{\omega_i}{1 - \omega_i} \frac{L_b}{3EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_j}{1 - \omega_j} \frac{L_b}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Finalmente, a lei de comportamento apresentada na equação (2.33) é reescrita agora considerando o elemento elastoplástico danificado:

$$\{\mathbf{\Phi} - \mathbf{Y}^p - \mathbf{\Phi}^p\}_b = [\mathbf{F}_e(\omega_f, \omega_s)]_b \{\mathbf{M}\}_b + \{\mathbf{\Phi}_0\}_b \quad (3.4)$$

sendo $[\mathbf{F}_e(\omega_f, \omega_s)]_b$, a matriz de flexibilidade elástica do elemento b considerando a flexibilidade adicional devido à danificação do elemento:

$$[\mathbf{F}_e(\omega_f, \omega_s)]_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \omega_i} \frac{L_b}{3EI} + \frac{1}{1 - \omega_s} \frac{1}{GA_s L_b} & -\frac{L_b}{6EI} + \frac{1}{1 - \omega_s} \frac{1}{GA_s L_b} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI} + \frac{1}{1 - \omega_s} \frac{1}{GA_s L_b} & \frac{1}{1 - \omega_j} \frac{L_b}{3EI} + \frac{1}{1 - \omega_s} \frac{1}{GA_s L_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{EA} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O modelo de dano concentrado assume que a fissuração do concreto e o escoamento das armaduras longitudinais e transversais estão associados, respectivamente, às variáveis internas de dano e deformações plásticas (rotações plásticas e distorções plásticas) em cada elemento. A fissuração do concreto é avaliada por uma lei de evolução do dano, a qual, é descrita pelo critério energético de Griffith, e o escoamento das armaduras por uma lei de encruamento, apresentadas a seguir.

3.2 Leis de evolução do dano

O critério de Griffith apresentando no tópico 2.3.1 deste trabalho é agora retomado com o objetivo de descrever a evolução do dano no elemento de pórtico de concreto armado. A força motriz da fissura, ou taxa de liberação de energia, é definida como a derivada da energia de deformação complementar em relação a variável de dano em estudo:

$$G^\omega = \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \quad (3.6)$$

Assumindo que os mecanismos de danificação são independentes, ou seja, não há interação entre as fissuras devido aos esforços de flexão e cortante, a lei de evolução do dano é obtida a partir da aplicação sucessiva do critério de Griffith.

De acordo com Perdomo *et al.* (2013), a energia de deformação complementar para um elemento de pórtico danificado é dada por:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \{\mathbf{M}\}_b^T \{\Phi - \mathbf{Y}^p - \Phi^p\}_b = \frac{1}{2} \{\mathbf{M}\}_b^T [\mathbf{F}_e(\omega_f, \omega_s)]_b \{\mathbf{M}\}_b + \frac{1}{2} \{\mathbf{M}\}_b^T \{\Phi_0\}_b \quad (3.7)$$

3.2.1 Lei de evolução do dano à momento fletor

A força motriz da fissura nas rótulas inelásticas i e j devido ao dano por flexão, representada respectivamente por G^{ω_i} e G^{ω_j} , são:

$$\begin{aligned} G^{\omega_i} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_i} = \frac{L_b m_i^2}{6EI(1 - \omega_i)^2} \\ G^{\omega_j} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_j} = \frac{L_b m_j^2}{6EI(1 - \omega_j)^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Havendo a propagação da fissura, o critério de Griffith é atendido, logo, nesta condição, força motriz da fissura é igual à resistência à fissuração:

$$\begin{cases} d\omega_i = 0, \text{ se } G^{\omega_i} < R^{\omega_i} \\ G^{\omega_i} = R^{\omega_i}, \text{ se } d\omega_i > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} d\omega_j = 0, \text{ se } G^{\omega_j} < R^{\omega_j} \\ G^{\omega_j} = R^{\omega_j}, \text{ se } d\omega_j > 0 \end{cases}$$

As resistências à fissuração por flexão nas rótulas i e j , dadas respectivamente por R^{ω_i} e R^{ω_j} , dependem das características do material e do elemento estrutural analisado. Flórez-López, Marante e Picón (2015) apresentam uma função calibrada, a partir de resultados experimentais, para a obtenção da resistência à fissuração em elementos de concreto armado, conforme equação (3.10):

$$R^{\omega} = R_0 + q \frac{\ln(1 - \omega)}{1 - \omega} \quad (3.10)$$

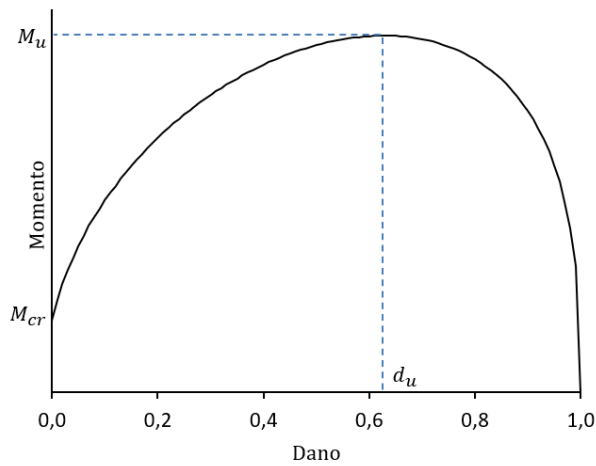
na equação anterior, R_0 é resistência inicial à fissuração, obtida para valor de dano nulo (i. e., $\omega = 0$), e $q \frac{\ln(1 - \omega)}{1 - \omega}$ um termo de encruamento devido a presença das armaduras, que dificultam a propagação da fissura no concreto. Analisando a rótula i , na condição de atendimento ao

critério de Griffith (i. e., $G^{\omega_i} = R^{\omega_i}$), é possível relacionar o momento fletor com a variável de dano na respectiva rótula:

$$G^{\omega_i} = R^{\omega_i} \rightarrow m_i = \sqrt{\left[R_{0i} + q_i \frac{\ln(1 - \omega_i)}{1 - \omega_i} \right] \frac{6EI(1 - \omega_i)^2}{L_b}} \quad (3.11)$$

A Figura 3.3 apresenta o gráfico do momento em função do dano, conforme estabelecido pela equação (3.11).

Figura 3.3 – Curva do momento fletor em função do dano de acordo com o critério energético de Griffith



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

No início da fissuração (i. e., $\omega_i = 0$), o momento atuante, M_{cr} , é definido como momento de fissuração. Substituindo os valores na equação (3.11), é obtida a resistência inicial à fissuração da rótula i :

$$R_{0i} = \frac{L_b M_{cr}^2}{6EI} \quad (3.12)$$

Na capacidade última (i. e., $\omega_i = \omega_{ui}$), o momento atuante é denominado M_u . Substituindo os valores na equação (3.11), é obtida a relação entre o momento atuante e a variável de dano na condição última para a rótula i :

$$M_u = \sqrt{\left[R_{0i} + q_i \frac{\ln(1 - \omega_{ui})}{1 - \omega_{ui}} \right] \frac{6EI(1 - \omega_{ui})^2}{L_b}} \quad (3.13)$$

Conforme observado na Figura 3.3, a curva apresenta um ponto de máximo local para capacidade última. Assim, uma segunda expressão pode ser obtida a partir da primeira derivada da equação (3.11). Procedimento análogo pode ser feito para a rótula j .

$$\left. \frac{\partial m_i}{\partial \omega_i} \right|_{\substack{m_i=M_u \\ \omega_i=\omega_{ui}}} = 0 \rightarrow 2R_{0i}(1 - \omega_{ui}) + q_i[\ln(1 - \omega_{ui}) + 1] = 0 \quad (3.14)$$

3.2.2 Lei de evolução do dano à força cortante

A força motriz da fissura no conjunto viga-coluna inelástico devido ao dano por cortante, representada por G^{ω_s} , é:

$$G^{\omega_s} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_s} = \frac{(m_i + m_j)^2}{2GA_s L_b (1 - \omega_s)^2} \quad (3.15)$$

A relação entre os momentos fletores nas extremidades do elemento e o esforço cortante (Figura 3.2) é obtida a partir da condição de equilíbrio, logo:

$$v = \frac{m_i + m_j}{L_b} \quad (3.16)$$

Assim, a equação (3.15) é reescrita como:

$$G^{\omega_s} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_s} = \frac{L_b v^2}{2GA_s (1 - \omega_s)^2} \quad (3.17)$$

A lei de evolução do dano baseada no critério de Griffith é:

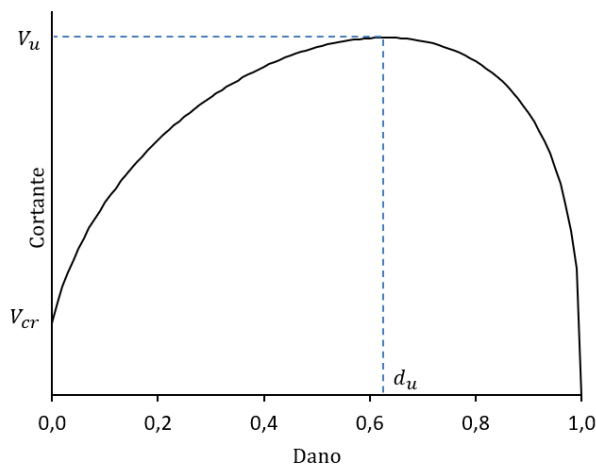
$$\begin{aligned} d\omega_s &= 0, \text{ se } G^{\omega_s} < R^{\omega_s} \\ G^{\omega_s} &= R^{\omega_s}, \text{ se } d\omega_s > 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A resistência à fissuração por esforço cortante, representada por R^{ω_s} , é definida conforme equação (3.10). Na condição de atendimento ao critério de Griffith (i. e., $G^{\omega_s} = R^{\omega_s}$), é possível relacionar o esforço cortante com a variável de dano no elemento analisado:

$$G^{\omega_s} = R^{\omega_s} \rightarrow v = \sqrt{\left[R_{0s} + q_s \frac{\ln(1 - \omega_s)}{1 - \omega_s} \right] \frac{2GA_s(1 - \omega_s)^2}{L_b}} \quad (3.19)$$

A figura 3.4 apresenta o gráfico do cortante em função do dano, conforme estabelecido pela equação (3.19).

Figura 3.4 – Curva do esforço cortante em função do dano de acordo com o critério energético de Griffith



Fonte: adaptada de Perdomo *et al.* (2013)

No início da fissuração (i. e., $\omega_s = 0$), o esforço atuante, V_{cr} , é definido como cortante de fissuração. Substituindo os valores na equação (3.19), é obtida a resistência inicial à fissuração por esforço cortante para elemento:

$$R_{0s} = \frac{L_b V_{cr}^2}{2GA_s} \quad (3.20)$$

Na capacidade última (i. e., $\omega_s = \omega_{us}$), o esforço atuante é denominado V_u . Substituindo os valores na equação (3.19), é obtida a relação entre o esforço atuante e a variável de dano na condição última:

$$V_u = \sqrt{\left[R_{0s} + q_s \frac{\ln(1 - \omega_{us})}{1 - \omega_{us}} \right] \frac{2GA_s(1 - \omega_{us})^2}{L_b}} \quad (3.21)$$

Conforme observado na Figura 3.4, a curva apresenta um ponto de máximo local para capacidade última. Assim, uma segunda expressão pode ser obtida a partir da primeira derivada da equação (3.19):

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \omega_s} \right|_{\substack{v=V_u \\ \omega_s=\omega_{us}}} = 0 \rightarrow 2R_{0s}(1 - \omega_{us}) + q_s[\ln(1 - \omega_{us}) + 1] = 0 \quad (3.22)$$

3.3 Lei de evolução das deformações plásticas

O acoplamento plasticidade-dano é obtido a partir da introdução da variável de dano nas leis que definem o critério de plastificação. Utilizando a hipótese de equivalência de deformação, o esforço cortante efetivo no elemento e o momento fletor efetivo nas rótulas i e j são definidos por:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v}{(1 - \omega_s)} = \frac{m_i + m_j}{(1 - \omega_s)L_b} \\ \bar{m}_i &= \frac{m_i}{(1 - \omega_i)} \\ \bar{m}_j &= \frac{m_j}{(1 - \omega_j)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

na equação anterior, $\bar{v}$ é definido como o esforço cortante efetivo, $\bar{m}_i$ e $\bar{m}_j$ são definidos como o momento fletor efetivo nas rótulas i e j , respectivamente. A seguir, são definidas as leis de evolução das deformações plásticas para o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear.

3.3.1 Lei de evolução para as rotações plásticas

Segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), a lei de evolução das rotações plásticas do modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear é dada por:

$$\begin{cases} d\phi_i^p = 0, \text{ se } f_i < 0 \\ f_i = 0, \text{ se } d\phi_i^p \neq 0 \\ d\phi_j^p = 0, \text{ se } f_j < 0 \\ f_j = 0, \text{ se } d\phi_j^p \neq 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

As funções de escoamento das rótulas i e j são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} f_i &= \left| \frac{m_i}{(1 - \omega_i)} - c_i \phi_i^p \right| - k_{0i} \leq 0 \\ f_j &= \left| \frac{m_j}{(1 - \omega_j)} - c_j \phi_j^p \right| - k_{0j} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

sendo k_{0i} e k_{0j} o momento plástico efetivo nas rótulas i e j , respectivamente. O primeiro momento plástico, M_p , é definido como o momento necessário para que se inicie o escoamento da armadura longitudinal dos elementos de concreto armado (i. e., $\phi_i^p = 0$ e $\phi_j^p = 0$). O valor de dano associado a essa condição é definido como dano plástico e é representando por ω_{pi} e ω_{pj} . O valor de dano plástico representa o estado de fissuração correspondente ao início do escoamento da armadura longitudinal, estando situado no intervalo (0,3 - 0,4). Substituindo os valores na equação (3.25), são obtidos os momentos plásticos efetivos.

$$\begin{aligned} k_{0i} &= \frac{M_p}{1 - \omega_{pi}} = \bar{M}_{pi} \\ k_{0j} &= \frac{M_p}{1 - \omega_{pj}} = \bar{M}_{pj} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Os parâmetros c_i e c_j são determinados para a situação última. Nesta condição, o momento atuante atinge sua capacidade resistente última, M_u , e a deformação plástica correspondente é a rotação plástica última (i. e., $\phi_i^p = \phi_{ui}^p$ e $\phi_j^p = \phi_{uj}^p$). O valor de dano associado é definido como dano último e é representando por ω_{ui} e ω_{uj} , estando situado no intervalo (0,6 - 0,65). Substituindo os valores na equação (3.25), são obtidos os parâmetros numéricos restantes.

$$\begin{aligned}
c_i &= \frac{1}{\phi_{ui}^p} \left(\frac{M_u}{1 - \omega_{ui}} - k_{0i} \right) = \frac{\bar{M}_{ui} - \bar{M}_{pi}}{\phi_{ui}^p} \\
c_j &= \frac{1}{\phi_{uj}^p} \left(\frac{M_u}{1 - \omega_{uj}} - k_{0j} \right) = \frac{\bar{M}_{uj} - \bar{M}_{pj}}{\phi_{uj}^p}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

3.3.2 Leis de evolução para as distorções plásticas

Segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), a lei de evolução para as distorções plásticas do modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear é dada por:

$$\begin{cases} d\gamma^p = 0, se f_s < 0 \\ f_s = 0, se d\gamma^p \neq 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

A função de escoamento é dada por:

$$f_s = \left| \frac{v}{(1 - \omega_s)} - c_s \gamma^p \right| - k_{0s} \leq 0 \tag{3.29}$$

na equação anterior, k_{0s} é o esforço cortante plástico efetivo. O esforço cortante plástico, V_p , é definido como o esforço necessário para que se inicie o escoamento da armadura transversal dos elementos de concreto armado (i. e., $\gamma^p = 0$). O valor de dano associado a essa condição é definido como dano plástico e é representando por ω_{ps} . O valor de dano plástico representa o estado de fissuração correspondente ao início do escoamento da armadura transversal. Substituindo os valores na equação (3.29), é obtido o cortante plástico efetivo.

$$k_{0s} = \frac{V_p}{1 - \omega_{ps}} \tag{3.30}$$

O parâmetro c_s é determinado para a situação última. Nesta condição, o esforço atuante atinge sua capacidade resistente última, V_u , e a deformação plástica correspondente é a distorção plástica última (i. e., $\gamma^p = \gamma_u^p$). O valor de dano associado é definido como dano último e é representando por ω_{us} . Substituindo os valores na equação (3.29), são obtidos os parâmetros numéricos restantes.

$$c_s = \frac{1}{\gamma_u^p} \left(\frac{V_{ub}}{1 - \omega_{us}} - k_{0s} \right) \quad (3.31)$$

4 FORMULAÇÃO PROPOSTA

Em seu trabalho, Alva e El Debs (2010) apresentam uma proposta para modificação no critério de evolução do dano para análise não linear de estruturas fletidas de concreto armado. Tal modificação consiste na introdução de um novo parâmetro interno na expressão que determina a resistência à fissuração do elemento. A função escolhida, f_ξ , é dependente do novo parâmetro ξ e da variável de dano ω . A resistência à fissuração é assim expressa por:

$$R^\omega = R_0 + f_\xi q \frac{\ln(1 - \omega)}{1 - \omega} \quad (4.1)$$

sendo f_ξ , a função de correção das fissuras, definida por:

$$f_\xi = e^{-\xi(1-\omega)} \quad (4.2)$$

De acordo com Alva e El Debs (2010), o novo parâmetro interno ξ é definido com o objetivo de otimizar a resposta numérica frente à resposta experimental. É possível observar na equação (4.2) que, para $\xi = 0$, a expressão da resistência à fissuração apresentada na equação (4.1) retoma a forma inicial dada pela equação (3.10).

Brito *et al.* (2020) deram continuidade ao estudo anterior dando uma definição física ao parâmetro ξ , agora denominado fator de correção para evolução das fissuras. O fator de correção foi amplamente estudado e comparado com observações experimentais de pórticos planos e arcos fletidos de concreto armado. Neste estudo, foi observado que o valor adotado para o fator de correção apresenta um intervalo limitado para sua aplicação em problemas práticos de engenharia.

Neste trabalho, o fator de correção será aplicado ao modelo de dano concentrado para modos de falha por esforços de flexão e cortante (sistema dual), porém o seu efeito será introduzido apenas na expressão que fornece a resistência à fissuração por esforço cortante.

4.1 Lei de evolução do dano à flexão

A formulação proposta não modifica a expressão da resistência à fissuração por flexão nas rótulas i e j , portanto, todas as equações apresentadas na seção 3.2.1 deste trabalho continuam válidas.

4.2 Lei de evolução do dano à cortante

A resistência à fissuração por esforço cortante, representada por R^{ω_s} , é agora definida mediante introdução da função de correção das fissuras, conforme equação (4.1). Na condição de atendimento ao critério de Griffith (i. e., $G^{\omega_s} = R^{\omega_s}$), é possível relacionar o esforço cortante com a variável de dano no elemento analisado:

$$G^{\omega_s} = R^{\omega_s} \rightarrow v = \sqrt{\left[R_{0s} + [e^{-\xi(1-\omega_s)}] q_s \frac{\ln(1-\omega_s)}{1-\omega_s} \right] \frac{2GA_s(1-\omega_s)^2}{L_b}} \quad (4.3)$$

No início da fissuração (i. e., $\omega_s = 0$), o esforço atuante, V_{cr} , é definido como cortante de fissuração. Substituindo os valores na equação (4.3), é obtida a resistência inicial à fissuração por esforço cortante para elemento:

$$R_{0s} = \frac{L_b V_{cr}^2}{2GA_s} \quad (4.4)$$

A resistência inicial à fissuração por esforço cortante obtida pela equação (4.4) corresponde exatamente a expressão obtida pela equação (3.20). Portanto, conclui-se que a introdução da função de correção das fissuras não afeta tal parâmetro numérico, o que era esperado por ser uma característica intrínseca do elemento estudado.

Na capacidade última (i. e., $\omega_s = \omega_{us}$), o esforço atuante é denominado V_u . Substituindo os valores na equação (4.3), é obtida a relação entre o esforço atuante e a variável de dano na condição última:

$$V_u = \sqrt{\left[R_{0s} + [e^{-\xi(1-\omega_{us})}] q_s \frac{\ln(1-\omega_{us})}{1-\omega_{us}} \right] \frac{2GA_s(1-\omega_{us})^2}{L_b}} \quad (4.5)$$

Para o ponto de máximo local (i. e., $\omega_s = \omega_{us}$ e $v = V_u$), uma segunda expressão pode ser obtida a partir da primeira derivada da equação (4.3):

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \omega_s} \right|_{\substack{v=V_u \\ \omega_s=\omega_{us}}} = 0 \rightarrow$$

$$2R_{0s}(1 - \omega_{us}) + e^{-\xi(1-\omega_{us})} q_s \{1 + \ln(1 - \omega_{us}) [1 - \xi(1 - \omega_{us})]\} = 0 \quad (4.6)$$

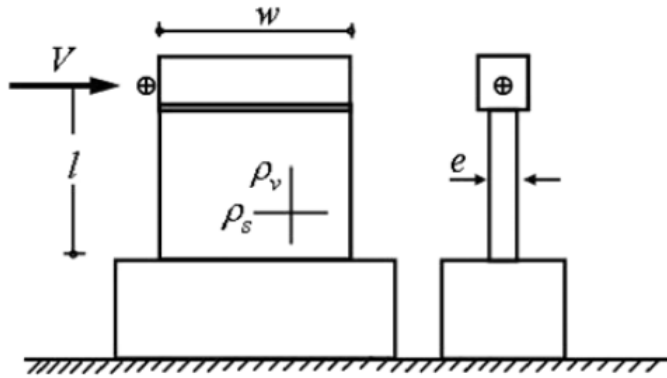
4.3 Resultados de implementação: validação da formulação proposta

Para validação do modelo de dano concentrado proposto, a formulação obtida na seção 4.2 deste trabalho será aplicada para a análise numérica do corpo de prova de um pilar-parede, corpo de prova SW-M01, apresentado no trabalho de Thomson *et al.* (2009). O corpo de prova a ser estudado apresenta uma razão de aspecto de 1,26. Portanto, os efeitos não lineares devido ao esforço cortante tornam-se preponderantes em relação aos efeitos não lineares decorrentes do esforço de flexão. Seguindo a metodologia apresentada pelo trabalho de Thomson *et al.* (2009), as deformações permanentes de flexão (rotações plásticas) e a evolução do dano à flexão são aqui desprezados.

4.3.1 Descrição do corpo de prova SW-M01

A geometria do corpo de prova e o carregamento aplicado são mostrados na Figura 4.1:

Figura 4.1 – Corpo de prova SW-M01



Fonte: adaptada de Thomson *et al.* (2009)

Os parâmetros numéricos necessários para o desenvolvimento do estudo aqui proposto foram obtidos a partir do experimento acima descrito, e são:

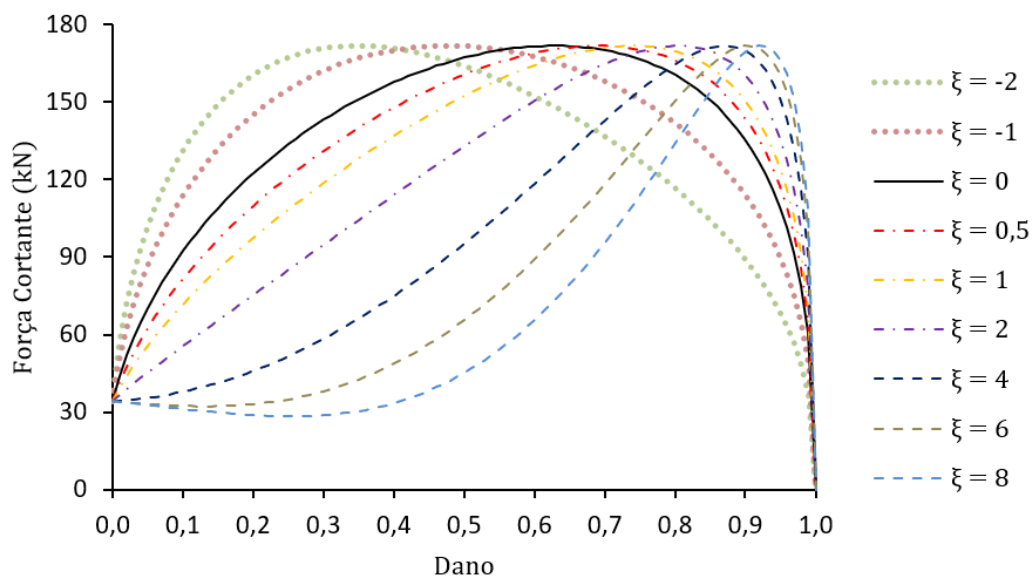
- Altura (l), largura (w) e espessura (e) do corpo de prova: 600mm, 500mm e 125mm, respectivamente;

- Força cortante de fissuração (V_{cr}), força cortante plástica (V_p) e força cortante última (V_u): 34,05 kN, 50,75 kN e 170,60 kN, respectivamente;
- Distorção plástica última (γ_u^p): 0,0066;
- Taxa de armadura longitudinal (ρ_v) e transversal (ρ_s) do corpo de prova: 6,25% e 0,5%, respectivamente.

4.3.2 Estudo do fator de correção para evolução das fissuras devido o esforço cortante

O fator de correção para evolução das fissuras devido o esforço cortante foi introduzido no critério energético de Griffith conforme apresentado pela equação (4.3). Aplicando a relação entre o esforço cortante e a variável de dano para elemento analisado, foi construído o gráfico força cortante *versus* dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras, conforme apresentando na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Relação força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras



A construção do gráfico cortante-dano (Figura 4.2) apresenta algumas observações importantes sobre os limites aceitáveis para o que o fator de correção das fissuras exprima sentido físico. Inicialmente foi imposto que, para o início da fissuração (i. e., $\omega_s = 0$ e $v = V_{cr}$), a curva apresente um ponto crítico ou ponto estacionário. Logo, no ponto de análise, a primeira derivada da função que associa o esforço cortante e a variável de dano, dada pela equação (4.5),

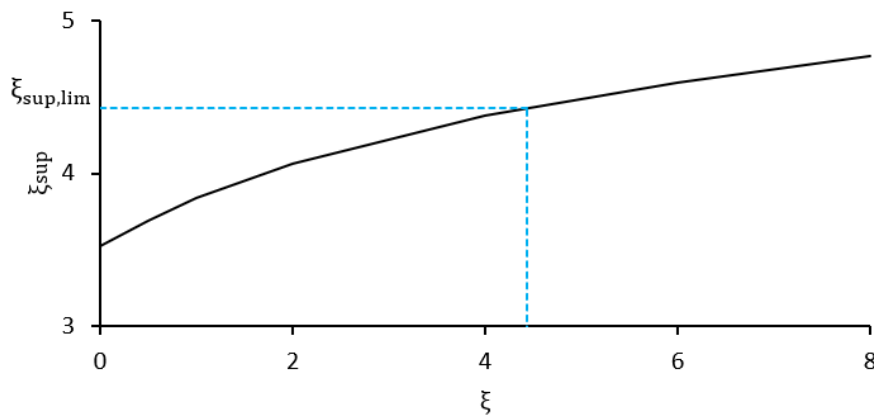
é nula. O intuito desta imposição é garantir que a curva cortante-dano não apresente valores inferiores à força cortante de fissuração à medida que a variável de dano cresça até seu valor último. Assim, o limite superior para a fator de correção das fissuras é definido a seguir:

$$\left. \frac{\partial V_b}{\partial \omega_s} \right|_{\substack{V_b=V_{cr} \\ \omega_s=0}} = 0 \rightarrow 2R_{0s} + e^{-\xi_{sup}} q_s = 0 \rightarrow \xi_{sup} = -\ln\left(-\frac{2R_{0s}}{q_s(\xi, \omega_{us})}\right) \quad (4.7)$$

O limite superior para o fator de correção das fissuras obtido equação (4.7) relaciona a resistência inicial à fissuração com o parâmetro de encruamento das armaduras. A resistência inicial à fissuração é constante e independente do fator de correção das fissuras, conforme estabelecido pela equação (4.4). Já o parâmetro relacionado ao encruamento das armaduras é dependente de tal fator e do dano último, conforme sistema de equações (4.5) e (4.6).

Foi estudado a convergência do limite superior do fator de correção das fissuras por meio de uma análise numérica via método de Newton-Raphson a partir do sistema composto pelas equações (4.5), (4.6) e (4.7), obtendo o valor para limite superior para o elemento em estudo de 4,43. A Figura 4.3 apresenta a curva de convergência do valor limite do fator de correção das fissuras para o elemento em estudo.

Figura 4.3 – Curva de convergência do valor limite do fator de correção das fissuras



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Tomando novamente a Figura 4.2, um segundo critério é imposto no ponto de estudo anterior (i. e., $\omega_s = 0$ e $v = V_{cr}$), limitando agora, a variável de dano para que a mesma não apresente valores negativos à medida que o esforço cortante cresça até seu valor último. Esta

imposição é interpretada matematicamente como tangente horizontal no ponto, e o limite inferior para a fator de correção das fissuras é definido como:

$$\frac{1}{\frac{\partial V_b}{\partial \omega_s} \Big|_{\substack{V_b=V_{cr} \\ \omega_s=0}}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2R_{0s} + e^{-\xi_{inf}} q_s} = 0 \rightarrow \xi_{inf} = -\infty \quad (4.8)$$

Para aplicação do fator de correção das fissuras nulo (i. e., $\xi = 0$), o modelo numérico é equivalente ao apresentado por Thomson *et al.* (2009). A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros numéricos do modelo obtidos a partir da aplicação de valores distintos do fator de correção das fissuras, até o seu valor limite superior.

Tabela 4.1 - Parâmetros numéricos para diferentes valores de ξ

ξ	ω_{us}	R_{0s} (kN.mm)	q_s (kN.mm)
-2	0,35	3,73	-89,59
-1	0,48	3,73	-161,93
0	0,63	3,73	-253,46
0,5	0,69	3,73	-299,97
1	0,74	3,73	-345,77
2	0,80	3,73	-433,15
4	0,87	3,73	-593,34

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

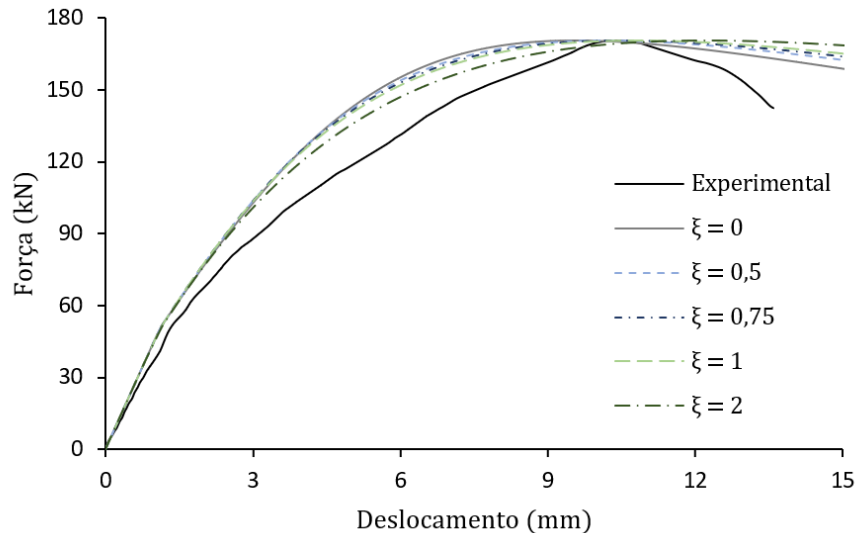
De acordo com a Tabela 4.1, para valores negativos do fator de correção das fissuras, há a diminuição significativa do valor último da variável de dano. Já para valores positivos, o valor último da variável de dano tende a se aproximar da unidade.

4.3.3 Deslocamento horizontal no topo do corpo de prova SW-M01

Foi avaliado a curva força-deslocamento para o corpo de prova SW-M01 para aplicação de valores distintos do fator de correção das fissuras e comparado os resultados numéricos com a resposta experimental do modelo. Conforme esclarecido anteriormente, para o corpo de prova estudado, os efeitos não lineares devido ao esforço cortante tornam-se preponderantes em relação aos efeitos não lineares de flexão. Portanto, o modelo de dano concentrado aplicado

leva em conta apenas os efeitos não lineares decorrentes da fissuração do concreto devido ao esforço cortante e o escoamento da armadura transversal. Para aplicação do fator de correção das fissuras nulo (i. e., $\xi = 0$), o modelo numérico é equivalente ao apresentado por Thomson *et al.* (2009). A Figura 4.4 apresenta a curva força-deslocamento.

Figura 4.4 – Curva força-deslocamento do corpo de prova SW-M01



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Conforme indicado pela Figura 4.4, o uso do fator de correção proporciona um melhor ajuste da curva numérica em relação a curva experimental. Outro ponto observado se deu no valor do deslocamento horizontal no topo do corpo de prova obtido para a capacidade última de carregamento do mesmo. De acordo com a curva experimental, o deslocamento horizontal no topo do corpo de prova para a capacidade última de carregamento da seção é da ordem de 10,5 mm. A Tabela 4.2 apresenta o deslocamento horizontal no topo do corpo de prova para a capacidade última de carregamento, além dos valores de dano plástico e dano último para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado.

Tabela 4.2 – Dano plástico, dano último e deslocamento para diferentes valores de ξ

ξ	ω_{ps}	ω_{us}	u (mm)
0	0,02	0,63	9,5
0,5	0,03	0,69	10,2
0,75	0,03	0,71	10,5
1	0,04	0,74	10,9
2	0,08	0,80	12,3

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Conforme indicado pela Tabela 4.2, para valores positivos do fator de correção das fissuras, as curvas força-deslocamento apresentam diminuição da rigidez, tendo um melhor ajuste à curva experimental. Para o modelo de Thomson *et al.* (2009) (i. e., $\xi = 0$), a resposta numérica apresenta deslocamento inferior à resposta experimental. Para fatores de correção das fissuras iguais a 1 e 2, a resposta numérica apresenta deslocamento superior à resposta experimental. Para fatores de correção das fissuras iguais a 0,5 e 0,75, a resposta numérica se aproxima de maneira satisfatória à resposta experimental.

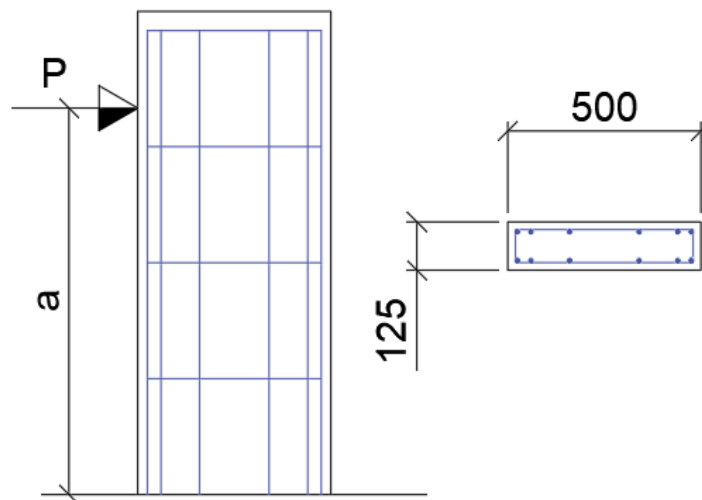
5 RESULTADOS

As simulações numéricas desenvolvidas neste trabalho foram embasadas pelos resultados experimentais apresentados no trabalho de Perdomo (2010). Os parâmetros numéricos do modelo de dano concentrado relacionados à fissuração, plasticidade e capacidade última do elemento para esforços de flexão e cortante foram estimados de acordo com a norma ACI 318-14 (2014). Os resultados experimentais, conforme apresentado em Perdomo (2010) são compostos por ciclos de carga e descarga. Neste trabalho, é considerado apenas o carregamento contínuo, a partir de incrementos de carga, sendo comparada a resposta numérica com a envoltória dos ciclos de carga e descarga da resposta experimental.

5.1 Simulações numéricas para pilares-parede

Foram ensaiados pilares-parede com seção transversal de 125x500 mm. A armadura longitudinal é constituída por 12 barras de 20 mm (3/4") de diâmetro e a armadura transversal é constituída por estribos com barras de 10 mm (3/8") de diâmetro e espaçados a cada 300 mm. As taxas de armadura longitudinal e transversal dos corpos de prova são de 6,25% e 0,5%, respectivamente. Durante os ensaios, foram mantidas constantes todas as características geométricas e de material dos corpos de prova e foi variado o ponto de aplicação do carregamento, o que, por sua vez, modifica a relação de aspecto do elemento ensaiado. A geometria do corpo de prova e o carregamento aplicado são mostrados na Figura 6.1:

Figura 5.1 – Corpo de prova para paredes de cisalhamento



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 6.1 apresenta as características geométricas dos corpos de prova para pilares-parede.

Tabela 5.1 – Características geométricas dos corpos de prova para pilares-parede

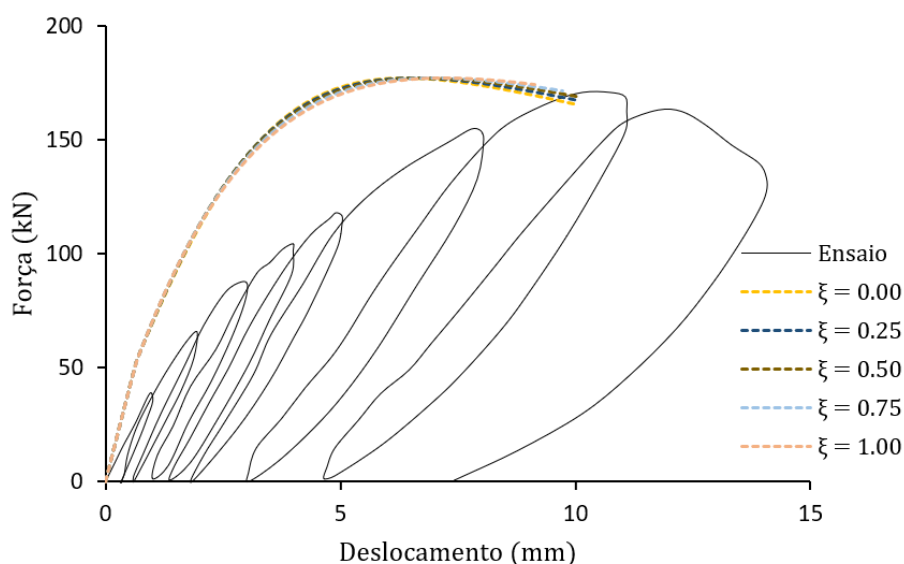
Corpo de prova	w (mm)	t (mm)	a (mm)	d (mm)	a/d	f _{ck} (MPa)
SW16.7-60	500	125	600	475	1,26	16,7
SW16.7-80	500	125	800	475	1,68	16,7
SW16.7-100	500	125	1000	475	2,11	16,7

Fonte: adaptada de Perdomo (2010)

5.1.1 Corpo de prova SW16.7-60

A Figura 6.2 apresenta a curva força-deslocamento para o resultado experimental e para as simulações numéricas realizadas no corpo de prova SW16.7-60 com relação de aspecto igual a 1,26. De acordo com o padrão de fissuração observado durante o ensaio, espera-se que falha ocorra predominantemente pela ação da força cortante, devido à tração diagonal do elemento (Perdomo, 2010).

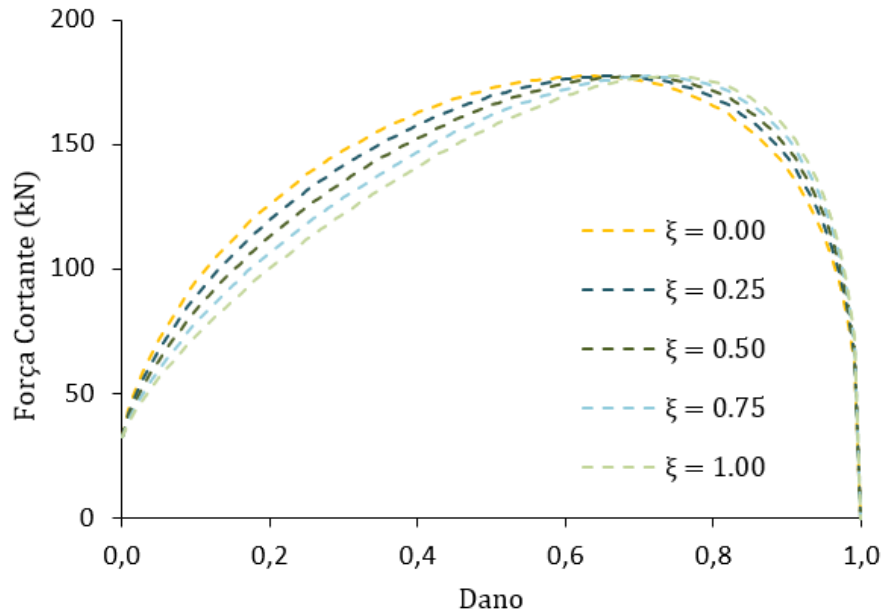
Figura 5.2 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova SW16.7-60



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Figura 6.3 apresenta a curva força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras. Pela Figura 6.3 é possível afirmar que o valor limite superior do fator de correção está sendo respeitado.

Figura 5.3 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova SW16.7-60



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Na Tabela 6.2 são indicados os valores teóricos da resistência à fissuração, à plastificação das armaduras e a capacidade última (máxima) devido aos esforços de flexão e cortante para o corpo de prova SW16.7-60.

Tabela 5.2 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova SW16.7-60

$P_{cr}(\text{flexão})$	$P_p(\text{flexão})$	$P_u(\text{flexão})$	$P_{cr}(\text{corte})$	$P_p(\text{corte})$	$P_u(\text{corte})$
(kN)	(kN)	(kN)	(kN)	(kN)	(kN)
77,8	346,7	353,3	32,6	53,2	177,3

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A capacidade máxima de carregamento do corpo de prova obtida pelo experimento foi de 170 kN e a capacidade máxima de carregamento obtida pelas simulações numéricas foram de 177 kN. De acordo com os valores teóricos indicados na Tabela 6.2, a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada sem que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais.

O deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento do corpo de prova para a capacidade máxima de carregamento obtida pelo experimento foi 10,2 mm. A Tabela 6.3 apresenta o deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento para a capacidade última, além dos valores de dano dos esforços de flexão e cortante para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado. Nota-se que o fator de correção das fissuras, conforme implementado, não altera o valor de dano último para esforços de flexão.

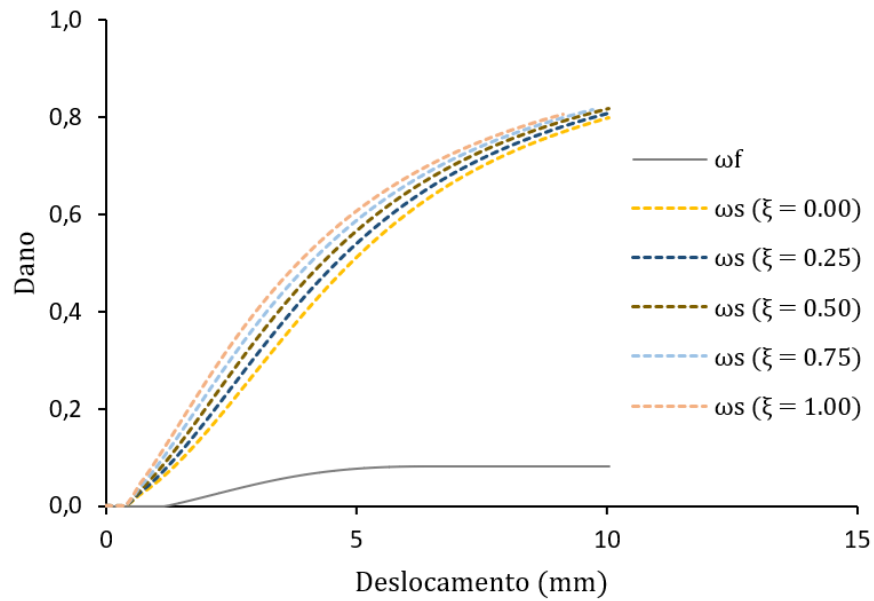
Tabela 5.3 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova SW16.7-60

ξ	ω_f	ω_s	u (mm)
0,00	0,08	0,63	6,3
0,25	0,08	0,66	6,6
0,50	0,08	0,69	6,8
0,75	0,08	0,72	7,0
1,00	0,08	0,74	7,2

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Conforme indicado pela Tabela 6.3, para valores positivos do fator de correção das fissuras, as curvas força-deslocamento apresentam diminuição da rigidez, tendo um melhor ajuste à curva experimental. A Figura 6.4 apresenta a curva de evolução do dano devido aos esforços de flexão e cortante em relação ao deslocamento apresentando para diferentes valores do fator de correção das fissuras. Observa-se que os valores numéricos de dano são consistentes com o padrão de fissuração apresentado pelo experimento, com falha ocorrendo preponderantemente devido ao esforço cortante. Para a capacidade última, o valor da variável de dano à flexão (ω_f) obtido foi de 0,08, indicando um nível baixo de fissuração característica desse esforço. De acordo com o modelo numérico, o valor correspondente da variável de dano para que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais é de 0,52.

Figura 5.4 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova SW16.7-60

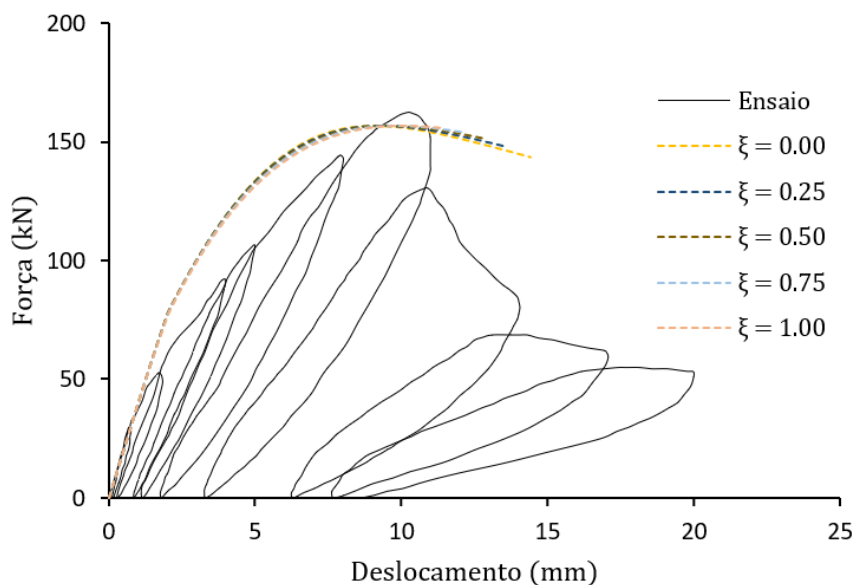


Fonte: elaborada pelo autor (2024)

5.1.2 Corpo de prova SW16.7-80

A Figura 6.5 apresenta a curva força-deslocamento para o resultado experimental e para as simulações numéricas realizadas no corpo de prova SW16.7-80 com relação de aspecto igual a 1,68. De acordo com o padrão de fissuração observado durante o ensaio, espera-se que falha ocorra predominantemente pela ação da força cortante, devido à tração diagonal do elemento (Perdomo, 2010).

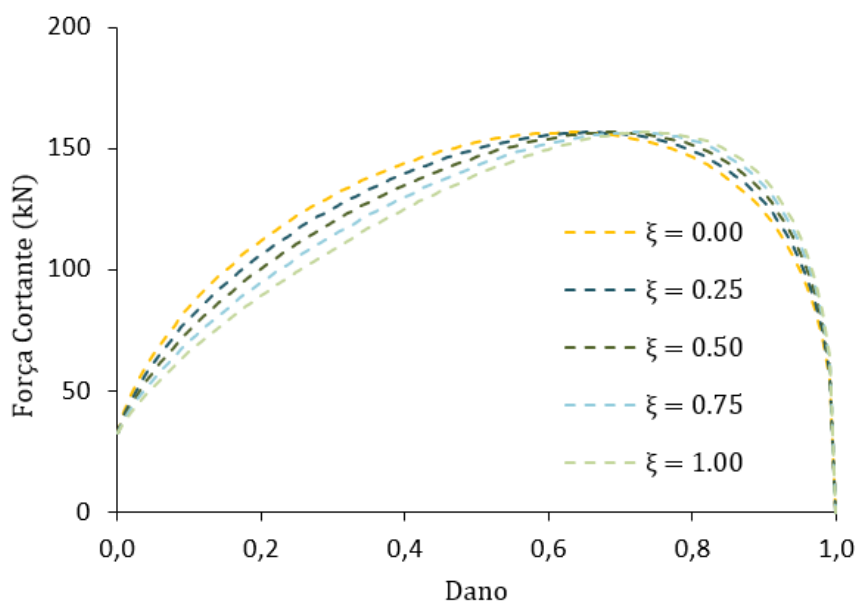
Figura 5.5 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova SW16.7-80



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Figura 6.6 apresenta a curva força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras. Pela Figura 6.6 é possível afirmar que o valor limite superior do fator de correção está sendo respeitado.

Figura 5.6 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova SW16.7-80



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Na Tabela 6.4 são indicados os valores teóricos da resistência à fissuração, à plastificação das armaduras e a capacidade última (máxima) devido aos esforços de flexão e cortante para o corpo de prova SW16.7-80.

Tabela 5.4 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova SW16.7-80

$P_{cr}(\text{flexão})$ (kN)	$P_p(\text{flexão})$ (kN)	$P_u(\text{flexão})$ (kN)	$P_{cr}(\text{corte})$ (kN)	$P_p(\text{corte})$ (kN)	$P_u(\text{corte})$ (kN)
58,4	260,0	265,0	32,6	78,3	156,6

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A capacidade máxima de carregamento do corpo de prova obtida pelo experimento foi de 162 kN e a capacidade máxima de carregamento obtida pelas simulações numéricas foram de 157 kN. De acordo com os valores teóricos indicados na Tabela 6.4, a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada sem que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais.

O deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento do corpo de prova para a capacidade máxima de carregamento obtida pelo experimento foi 10,3 mm. A Tabela 6.5 apresenta o deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento para a capacidade última, além dos valores de dano dos esforços de flexão e cortante para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado.

Tabela 5.5 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova SW16.7-80

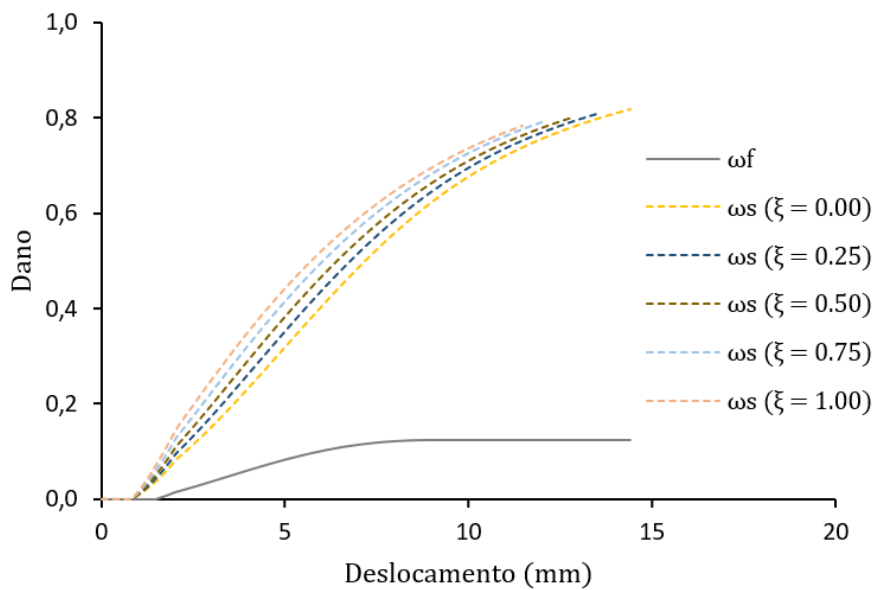
ξ	ω_f	ω_s	u (mm)
0,00	0,12	0,63	9,0
0,25	0,12	0,66	9,3
0,50	0,12	0,69	9,5
0,75	0,12	0,72	9,7
1,00	0,12	0,74	10,0

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Conforme indicado pela Tabela 6.5, para valores positivos do fator de correção das fissuras, as curvas força-deslocamento apresentam diminuição da rigidez, tendo um melhor ajuste à curva experimental. A Figura 6.7 apresenta a curva de evolução do dano devido aos

esforços de flexão e cortante em relação ao deslocamento apresentando para diferentes valores do fator de correção das fissuras. Observa-se que os valores numéricos de dano são consistentes com o padrão de fissuração apresentado pelo experimento, com falha ocorrendo preponderantemente devido ao esforço cortante. Para a capacidade última, o valor de dano à flexão (ω_f) obtido foi de 0,12, indicando um nível baixo de fissuração característica desse esforço. De acordo com o modelo numérico, o valor correspondente da variável de dano para que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais é de 0,52.

Figura 5.7 – Evolução da variável de dano para corpo de prova SW16.7-80

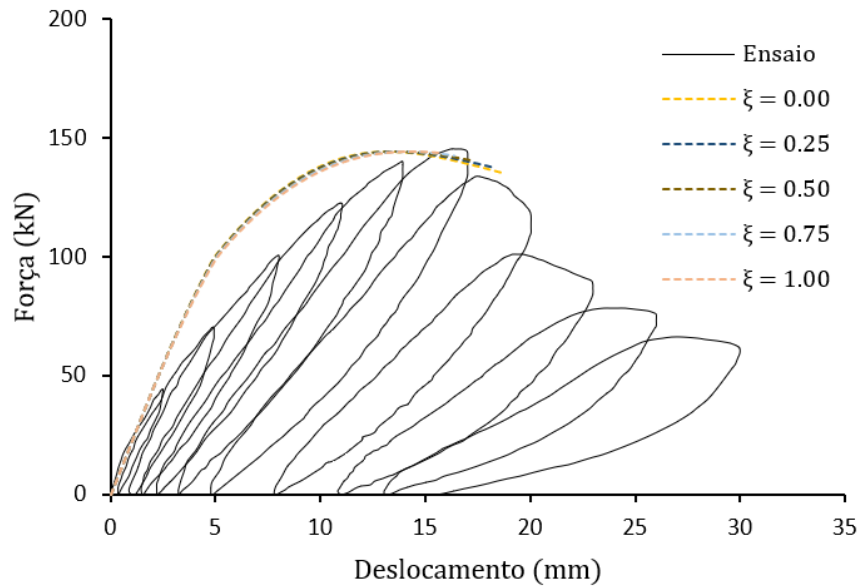


Fonte: elaborada pelo autor (2024)

5.1.3 Corpo de prova SW16.7-100

A Figura 6.8 apresenta a curva força-deslocamento para o resultado experimental e para as simulações numéricas realizadas no corpo de prova SW16.7-100 com relação de aspecto igual a 2,11. De acordo com o padrão de fissuração observado durante o ensaio, espera-se que falha ocorra predominantemente pela ação da força cortante, devido à tração diagonal do elemento (Perdomo, 2010).

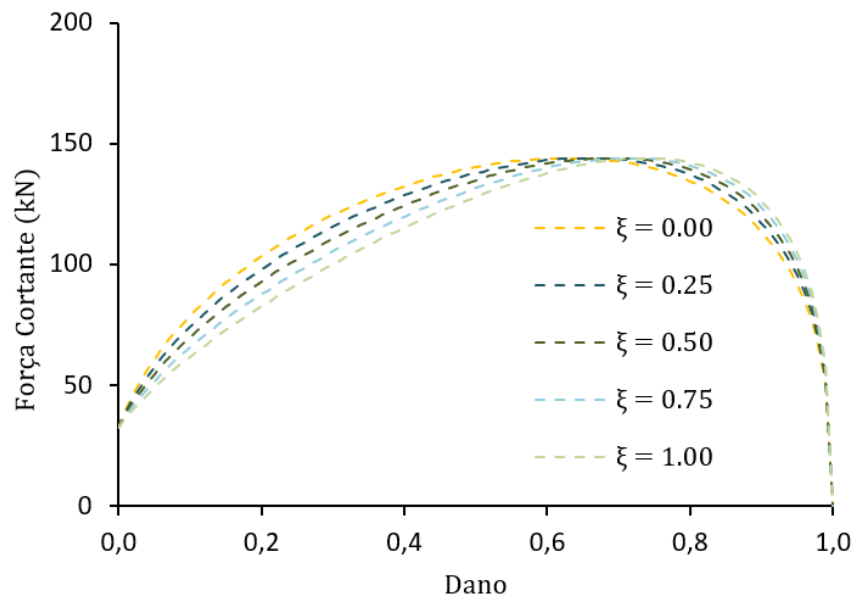
Figura 5.8 – Curva força-deslocamento para corpo de prova SW16.7-100



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Figura 6.9 apresenta a curva força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras. Pela Figura 6.9 é possível afirmar que o valor limite superior do fator de correção está sendo respeitado.

Figura 5.9 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova SW16.7-100



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Na Tabela 6.6 são indicados os valores teóricos da resistência à fissuração, à plastificação das armaduras e a capacidade última (máxima) devido aos esforços de flexão e cortante para o corpo de prova SW16.7-100.

Tabela 5.6 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova SW16.7-100

$P_{cr}(\text{flexão})$ (kN)	$P_p(\text{flexão})$ (kN)	$P_u(\text{flexão})$ (kN)	$P_{cr}(\text{corte})$ (kN)	$P_p(\text{corte})$ (kN)	$P_u(\text{corte})$ (kN)
46,7	208,0	212,0	32,6	99,5	144,1

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A capacidade máxima de carregamento do corpo de prova obtida pelo experimento foi de 145 kN e a capacidade máxima de carregamento obtida pelas simulações numéricas foram de 144 kN. De acordo com os valores teóricos indicados na Tabela 6.6, a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada sem que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais

O deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento do corpo de prova para a capacidade máxima de carregamento obtida pelo experimento foi 16,7 mm. A Tabela 6.7 apresenta o deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento para a capacidade última, além dos valores de dano dos esforços de flexão e cortante para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado.

Tabela 5.7 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova SW16.7-100

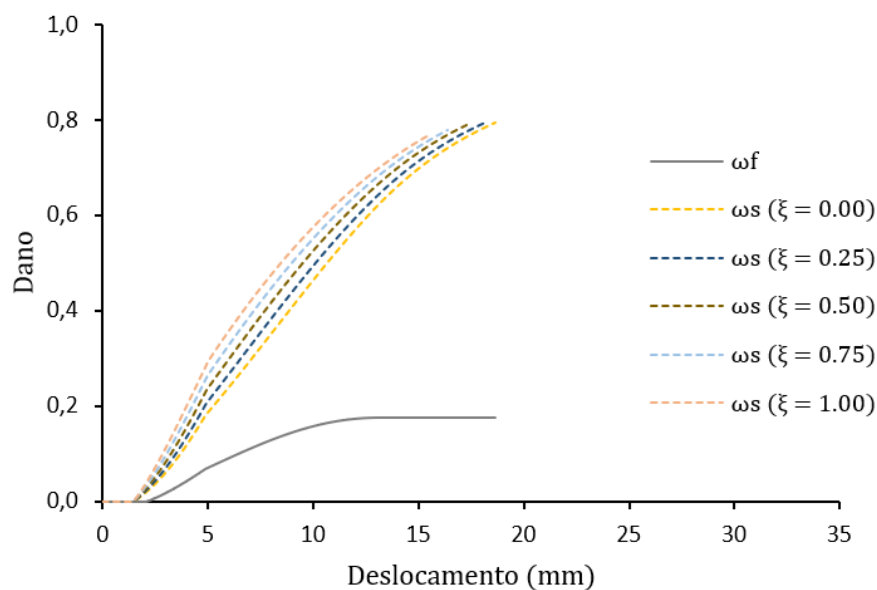
ξ	ω_f	ω_s	u (mm)
0,00	0,18	0,63	13,1
0,25	0,18	0,66	13,4
0,50	0,18	0,69	13,7
0,75	0,18	0,72	14,0
1,00	0,18	0,74	14,3

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Conforme indicado pela Tabela 6.7, para valores positivos do fator de correção das fissuras, as curvas força-deslocamento apresentam diminuição da rigidez, tendo um melhor ajuste à curva experimental. A Figura 6.10 apresenta a curva de evolução do dano devido aos

esforços de flexão e cortante em relação ao deslocamento apresentando para diferentes valores do fator de correção das fissuras. Observa-se que os valores numéricos de dano são consistentes com o padrão de fissuração apresentado pelo experimento, com falha ocorrendo preponderantemente devido ao esforço cortante. Para a capacidade última, o valor de dano à flexão (ω_f) obtido foi de 0,18, indicando um nível baixo de fissuração característica desse esforço. De acordo com o modelo numérico, o valor correspondente da variável de dano para que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais é de 0,52.

Figura 5.10 – Evolução da variável de dano para corpo o de prova SW16.7-100

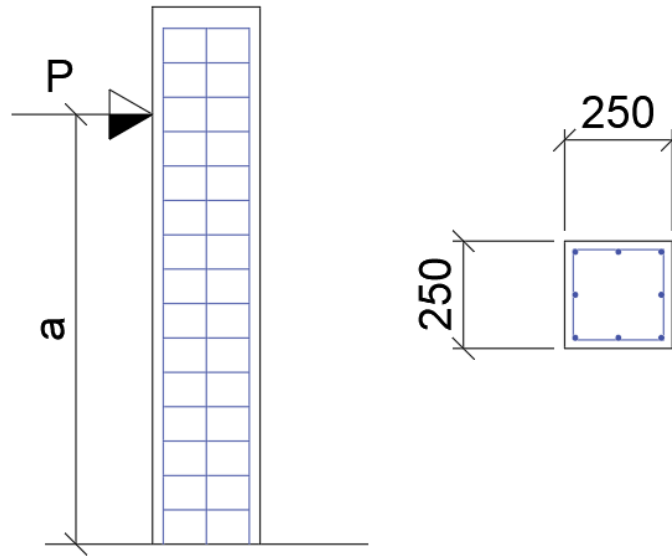


Fonte: elaborada pelo autor (2024)

5.2 Simulações numéricas para elementos de pórtico

Foram ensaiados elementos de pórticos com dimensões de 250x250 mm. A armadura longitudinal é constituída por 8 barras de 16 mm (5/8") de diâmetro e a armadura transversal é constituída por estribos com barras de 10 mm (3/8") de diâmetro e espaçados a cada 80 mm. As taxas de armadura longitudinal e transversal dos corpos de prova são de 2,53% e 1,03%, respectivamente. Durante os ensaios, foram mantidas constantes todas as características geométricas e de material dos corpos de prova e variando o ponto de aplicação do carregamento, o que, por sua vez, modifica a relação de aspecto do elemento ensaiado. A geometria do corpo de prova e o carregamento aplicado são mostrados na Figura 6.11:

Figura 5.11 – Corpo de prova para os elementos de pórtico



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 6.8 apresenta as características geométricas dos corpos de prova para elementos de pórtico.

Tabela 5.8 – Características geométricas dos corpos de prova para elementos de pórtico

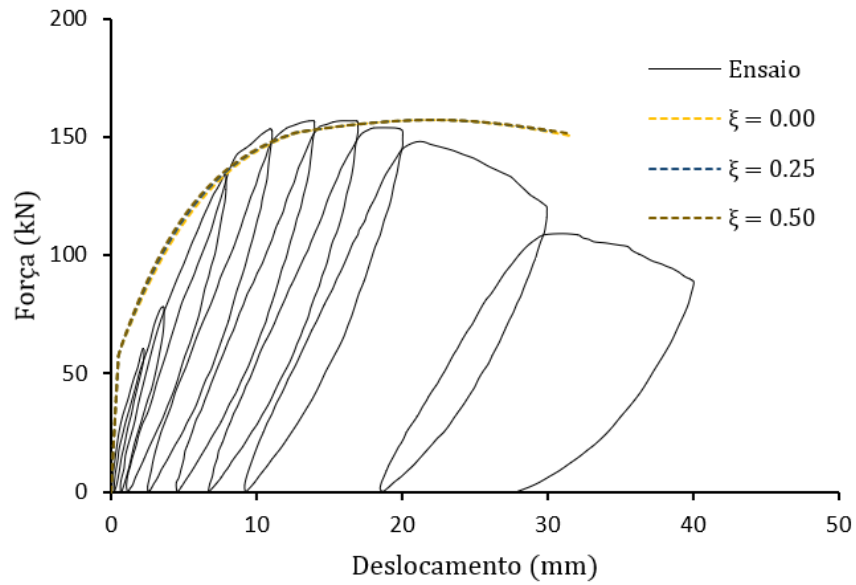
Corpo de prova	w (mm)	t (mm)	a (mm)	d (mm)	a/d	f_{ck} (MPa)
EP26.7-40	250	250	400	225	1,78	26,7
EP26.7-100	250	250	100	225	4,44	26,7

Fonte: adaptada de Perdomo (2010)

5.2.1 Corpo de prova EP26.7-40

A Figura 6.12 apresenta a curva força-deslocamento para o resultado experimental e para as simulações numéricas realizadas no corpo de prova EP26.7-40 com relação de aspecto igual a 1,78. De acordo com o padrão de fissuração observado durante o ensaio, espera-se que falha seja controlada pelo esforço cortante, porém, com fissuras horizontais significativas, associadas a esforços de flexão (Perdomo, 2010).

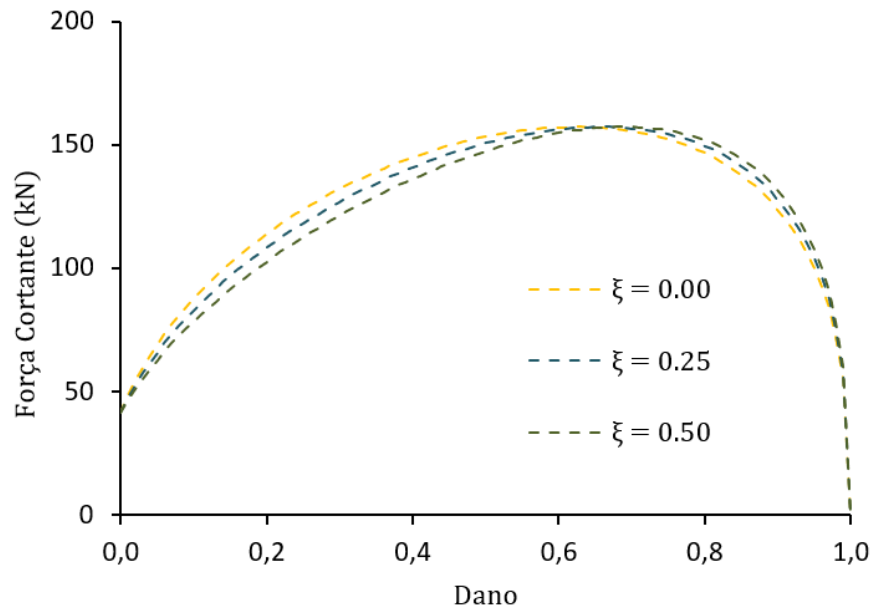
Figura 5.12 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova EP26.7-40



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Figura 6.13 apresenta a curva força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras. Pela Figura 6.13 é possível afirmar que o valor limite superior do fator de correção está sendo respeitado.

Figura 5.13 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP26.7-40



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Na Tabela 6.9 são indicados os valores teóricos da resistência à fissuração, à plastificação das armaduras e a capacidade última (máxima) devido aos esforços de flexão e cortante para o corpo de prova EP26.7-40.

Tabela 5.9 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP26.7-40

$P_{cr}(\text{flexão})$ (kN)	$P_p(\text{flexão})$ (kN)	$P_u(\text{flexão})$ (kN)	$P_{cr}(\text{corte})$ (kN)	$P_p(\text{corte})$ (kN)	$P_u(\text{corte})$ (kN)
36,3	152,0	180,0	41,3	58,6	158,3

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A capacidade máxima de carregamento do corpo de prova obtida pelo experimento foi de 157 kN e a capacidade máxima de carregamento obtida pelas simulações numéricas foram de 158 kN. De acordo com os valores teóricos indicados na Tabela 6.9, a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada com o escoamento das armaduras longitudinais.

O deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento do corpo de prova para a capacidade máxima de carregamento obtida pelo experimento foi 16,9 mm. A Tabela 6.10 apresenta o deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento para a capacidade última, além dos valores de dano dos esforços de flexão e cortante para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado.

Tabela 5.10 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP26.7-40

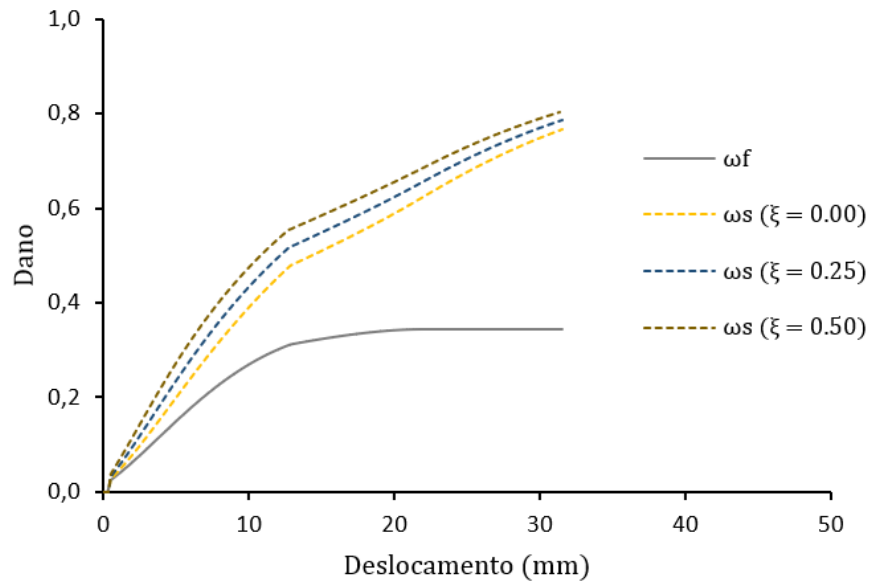
ξ	ω_f	ω_s	$u \text{ (mm)}$
0,00	0,34	0,62	22,1
0,25	0,34	0,66	22,1
0,50	0,34	0,69	22,1

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 6.10 indica que não houve melhora da resposta numérica em relação à curva experimental. A figura 6.14 apresenta a curva de evolução do dano devido aos esforços de flexão e cortante em relação ao deslocamento apresentando para diferentes valores do fator de correção das fissuras. Observa-se que os valores numéricos de dano são consistentes com o padrão de fissuração apresentado pelo experimento, com falha ocorrendo devido ao esforço cortante, porém, com nível de fissuração significativa devido ao esforço de flexão. Para a

capacidade última, o valor de dano à flexão (ω_f) obtido foi de 0,34, e, de acordo com o modelo numérico, o valor correspondente da variável de dano para que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais é de 0,31, evidenciando o escoamento das mesmas.

Figura 5.14 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP26.7-40

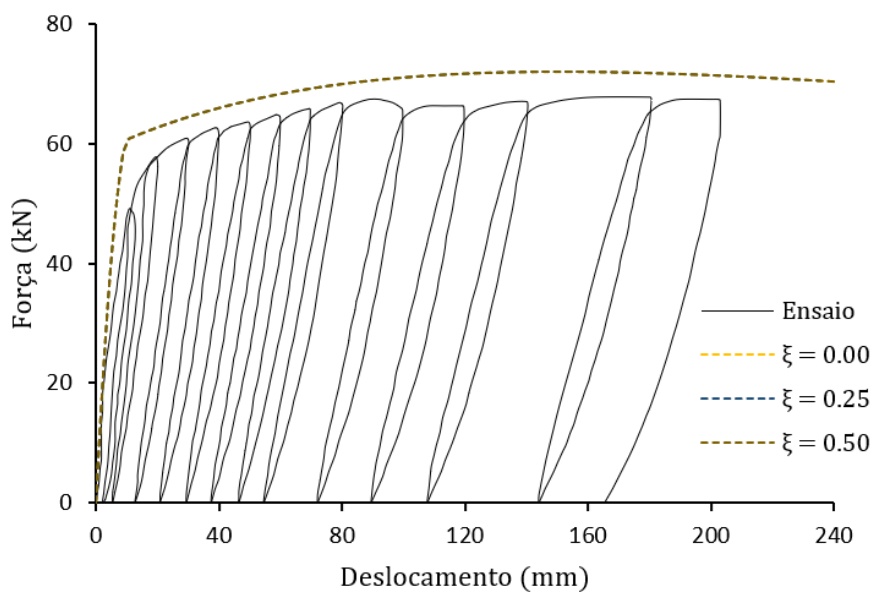


Fonte: elaborada pelo autor (2024)

5.2.2 Corpo de prova EP26.7-100

A Figura 6.15 apresenta a curva força-deslocamento para o resultado experimental e para as simulações numéricas realizadas no corpo de prova EP26.7-100 com relação de aspecto igual a 4,44. De acordo com o padrão de fissuração observado durante o ensaio, espera-se que falha seja do tipo combinada, com fissuras horizontais, associadas a esforços de flexão, e fissuras diagonais, associadas ao esforço cortante (Perdomo, 2010).

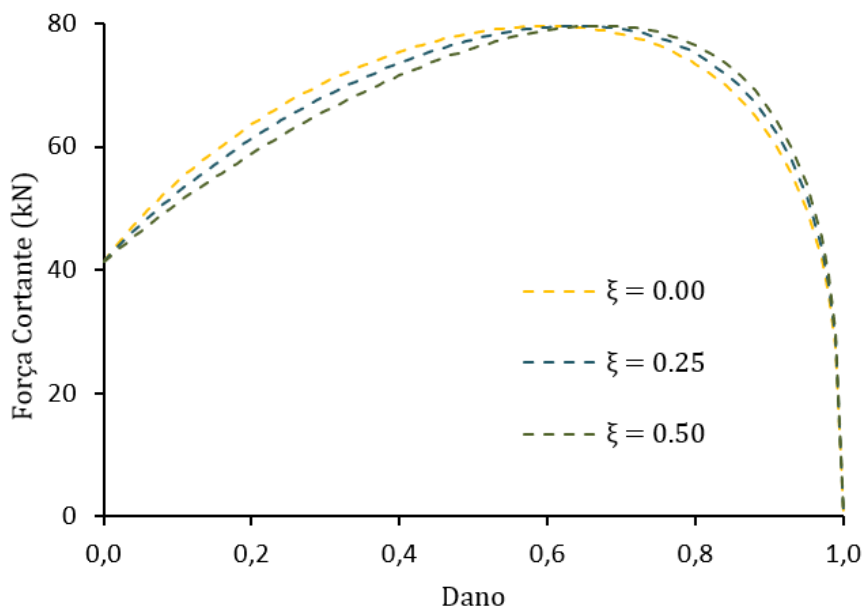
Figura 5.15 – Curva força-deslocamento para corpo de prova EP26.7-100



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Figura 6.16 apresenta a curva força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras. Pela Figura 6.16 é possível afirmar que o valor limite superior do fator de correção está sendo respeitado.

Figura 5.16 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP26.7-100



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Na Tabela 6.11 são indicados os valores teóricos da resistência à fissuração, à plastificação das armaduras e a capacidade última (máxima) devido aos esforços de flexão e cortante para o corpo de prova EP26.7-100.

Tabela 5.11 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP26.7-100

$P_{cr}(\text{flexão})$ (kN)	$P_p(\text{flexão})$ (kN)	$P_u(\text{flexão})$ (kN)	$P_{cr}(\text{corte})$ (kN)	$P_p(\text{corte})$ (kN)	$P_u(\text{corte})$ (kN)
14,5	60,8	72,0	41,3	58,6	79,6

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A capacidade máxima de carregamento do corpo de prova obtida pelo experimento foi de 68 kN e a capacidade máxima de carregamento obtida pelas simulações numéricas foram de 72 kN. De acordo com os valores teóricos indicados na Tabela 6.11, a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada primeiramente para o esforço de flexão, porém com valor bastante próximo da falha teórica para o esforço cortante.

O deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento do corpo de prova para a capacidade máxima de carregamento obtida pelo experimento foi 180,2 mm. A Tabela 6.12 apresenta o deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento para a capacidade última, além dos valores de dano dos esforços de flexão e cortante para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado.

Tabela 5.12 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP26.7-100

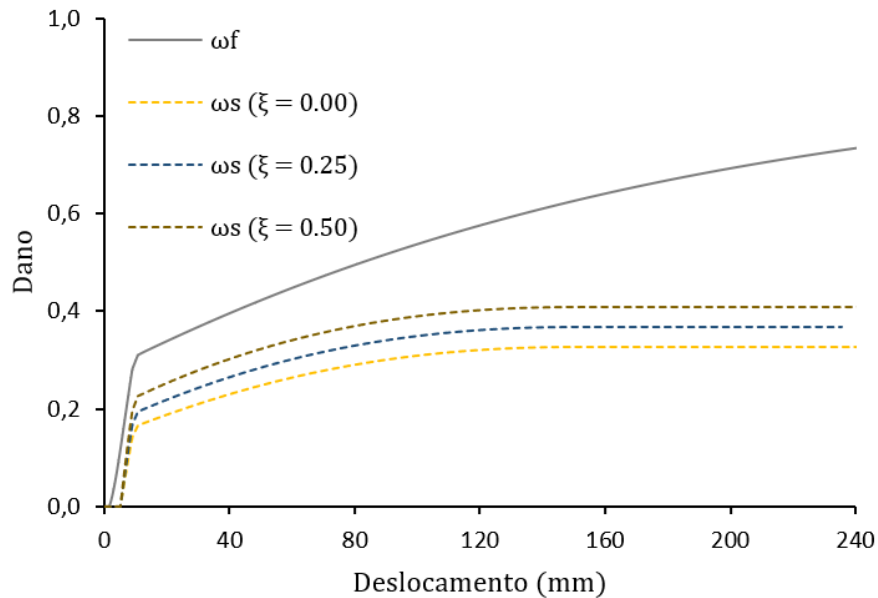
ξ	ω_f	ω_s	u (mm)
0,00	0,63	0,34	150,7
0,25	0,63	0,37	150,7
0,50	0,63	0,41	150,7

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 6.12 indica que não houve melhora da resposta numérica em relação à curva experimental. A figura 6.17 apresenta a curva de evolução do dano devido aos esforços de flexão e cortante em relação ao deslocamento apresentando para diferentes valores do fator de correção das fissuras. Observa-se que os valores numéricos de dano são consistentes com o padrão de fissuração apresentado pelo experimento, com falha combinada para esforços de

flexão e cortante. Para a capacidade última, o valor de dano à flexão (ω_f) obtido foi correspondente ao dano último, indicado na Tabela 6.12.

Figura 5.17 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP26.7-100

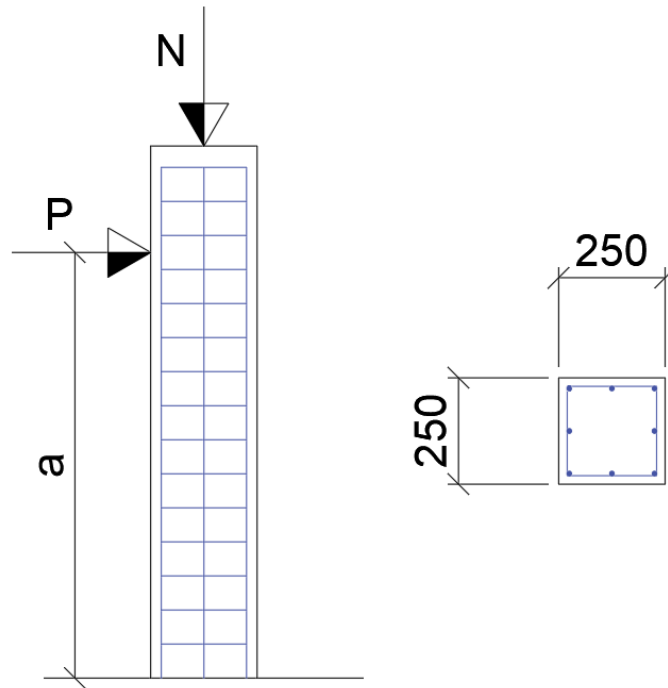


Fonte: elaborada pelo autor (2024)

5.3 Simulações numéricas para elementos de pórtico com carga axial

Foram ensaiados elementos de pórticos com as mesmas características geométricas dos elementos apresentados na seção anterior. Durante os ensaios, foram mantidas constantes todas as características geométricas e de material dos corpos de prova e o ponto de aplicação do carregamento (relação de aspecto constante e igual a 1,78), e foi considerado a ação de um carregamento axial constante no topo do corpo de prova. A geometria do corpo de prova e o carregamento aplicado são mostrados na Figura 6.18:

Figura 5.18 – Corpo de prova para os elementos de pórtico com carga axial



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 6.13 apresenta as características geométricas dos corpos de prova para elementos de pórtico com carga axial.

Tabela 5.13 – Características geométricas dos corpos de prova para elementos de pórtico com carga axial

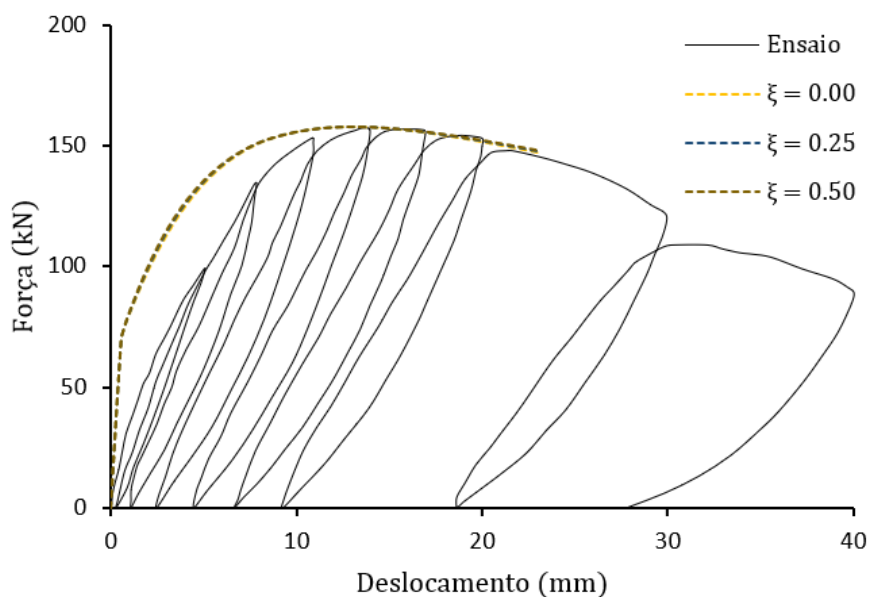
Corpo de prova	w (mm)	t (mm)	a (mm)	d (mm)	N (kN)	f_{ck} (MPa)
EP27.1-40_N000	250	250	400	225	0	27,1
EP27.1-40_N180	250	250	400	225	180	27,1

Fonte: adaptada de Perdomo (2010)

5.3.1 Corpo de prova EP27.1-40_N000

A Figura 6.19 apresenta a curva força-deslocamento para o resultado experimental e para as simulações numéricas realizadas no corpo de prova EP27.1-40_N000 com relação de aspecto igual a 1,78 e com carga axial nula. De acordo com o padrão de fissuração observado durante o ensaio, espera-se que falha seja controlada pelo esforço cortante, porém, com fissuras horizontais significativas, associadas a esforços de flexão (Perdomo, 2010).

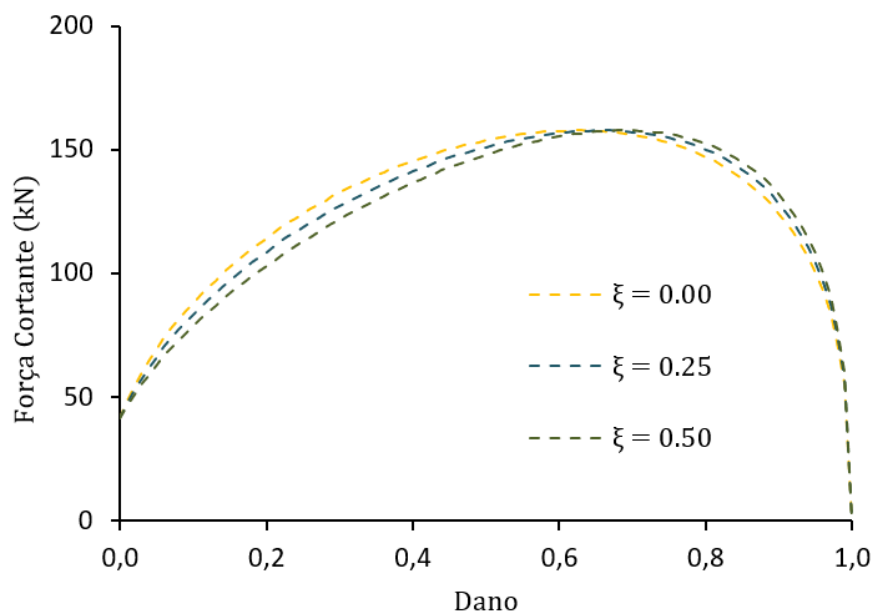
Figura 5.19 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova EP27.1-40_N000



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Figura 6.20 apresenta a curva força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras. Pela Figura 6.20 é possível afirmar que o valor limite superior do fator de correção está sendo respeitado.

Figura 5.20 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP27.1-40_N000



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Na Tabela 6.14 são indicados os valores teóricos da resistência à fissuração, à plastificação das armaduras e a capacidade última (máxima) devido aos esforços de flexão e cortante para o corpo de prova EP27.1-40_N000.

Tabela 5.14 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP27.1-40_N000

$P_{cr}(\text{flexão})$ (kN)	$P_p(\text{flexão})$ (kN)	$P_u(\text{flexão})$ (kN)	$P_{cr}(\text{corte})$ (kN)	$P_p(\text{corte})$ (kN)	$P_u(\text{corte})$ (kN)
36,3	152,0	214,5	41,3	71,7	157,8

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A capacidade máxima de carregamento do corpo de prova obtida pelo experimento foi de 157 kN e a capacidade máxima de carregamento obtida pelas simulações numéricas foram de 158 kN. De acordo com os valores teóricos indicados na Tabela 6.14, a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada com o escoamento das armaduras longitudinais.

O deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento do corpo de prova para a capacidade máxima de carregamento obtida pelo experimento foi 13,8 mm. A Tabela 6.15 apresenta o deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento para a capacidade última, além dos valores de dano dos esforços de flexão e cortante para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado.

Tabela 5.15 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP27.1-40_N000

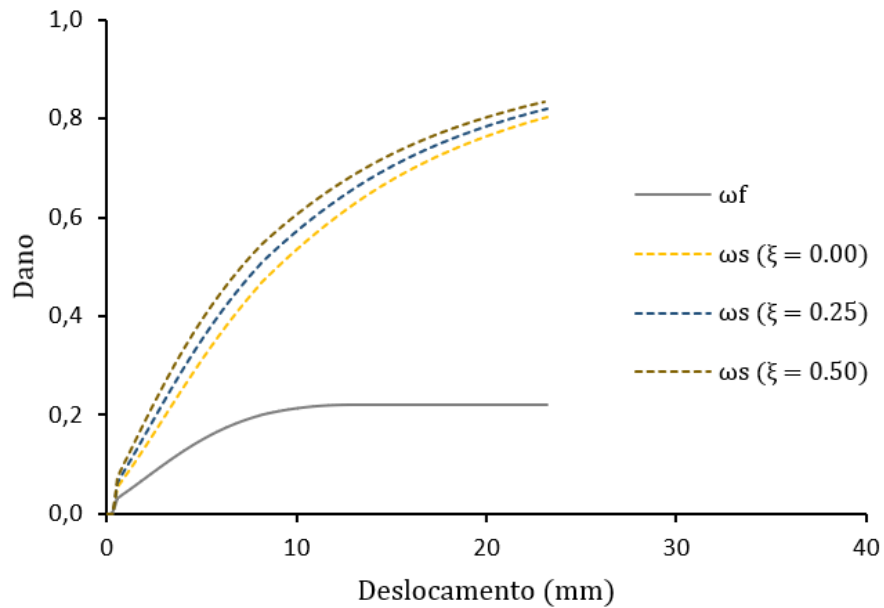
ξ	ω_f	ω_s	$u \text{ (mm)}$
0,00	0,22	0,62	13,0
0,25	0,22	0,66	13,0
0,50	0,22	0,69	13,0

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 6.15 indica que não houve melhora da resposta numérica em relação à curva experimental. A figura 6.21 apresenta a curva de evolução do dano devido aos esforços de flexão e cortante em relação ao deslocamento apresentando para diferentes valores do fator de correção das fissuras. Observa-se que os valores numéricos de dano são consistentes com o padrão de fissuração apresentado pelo experimento, com falha ocorrendo devido ao esforço cortante, porém, com nível de fissuração significativa devido ao esforço de flexão. Para a

capacidade última, o valor de dano à flexão (ω_f) obtido foi de 0,22, e, de acordo com o modelo numérico, o valor correspondente da variável de dano para que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais é de 0,20, evidenciando o escoamento das mesmas.

Figura 5.21 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP27.1-40_N000

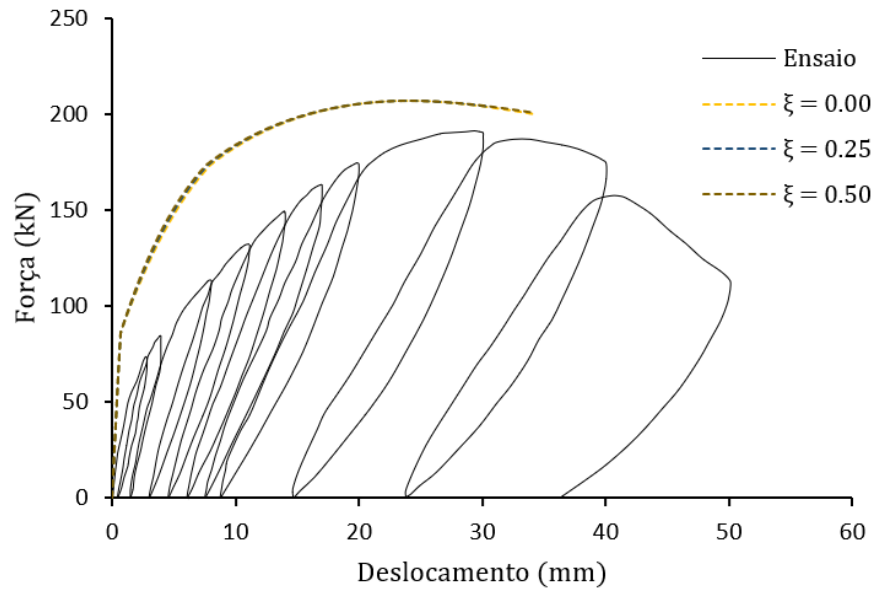


Fonte: elaborada pelo autor (2024)

5.3.2 Corpo de prova EP27.1-40_N180

A Figura 6.22 apresenta a curva força-deslocamento para o resultado experimental e para as simulações numéricas realizadas no corpo de prova EP27.1-40_N180 com relação de aspecto igual a 1,78 e com carga axial constante de 180 kN. De acordo com o padrão de fissuração observado durante o ensaio, espera-se que falha seja do tipo combinada, com fissuras horizontais, associadas a esforços de flexão, e fissuras diagonais, associadas ao esforço cortante (Perdomo, 2010).

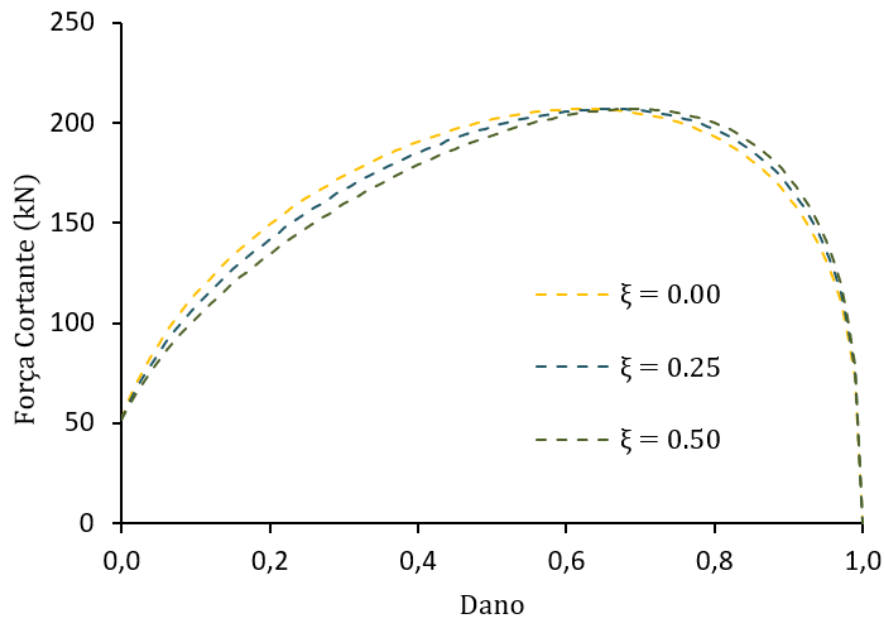
Figura 5.22 – Curva força-deslocamento para o corpo de prova EP27.1-40_N180



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Figura 6.23 apresenta a curva força cortante-dano para diferentes valores do fator de correção para evolução das fissuras. Pela Figura 6.23 é possível afirmar que o valor limite superior do fator de correção está sendo respeitado.

Figura 5.23 – Curva força cortante-dano para o corpo de prova EP27.1-40_N180



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Na Tabela 6.16 são indicados os valores teóricos da resistência à fissuração, à plastificação das armaduras e a capacidade última (máxima) devido aos esforços de flexão e cortante para o corpo de prova EP27.1-40_N180.

Tabela 5.16 – Valores teóricos das resistências para o corpo de prova EP27.1-40_N180

$P_{cr}(\text{flexão})$ (kN)	$P_p(\text{flexão})$ (kN)	$P_u(\text{flexão})$ (kN)	$P_{cr}(\text{corte})$ (kN)	$P_p(\text{corte})$ (kN)	$P_u(\text{corte})$ (kN)
57,8	173,5	219,3	52,0	86,1	206,9

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A capacidade máxima de carregamento do corpo de prova obtida pelo experimento foi de 190 kN e a capacidade máxima de carregamento obtida pelas simulações numéricas foram de 207 kN. De acordo com os valores teóricos indicados na Tabela 6.16, a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada primeiramente para o esforço cortante, porém com valor bastante próximo da falha teórica para o esforço flexão. Ainda é possível concluir que a capacidade máxima de carregamento do corpo de prova é alcançada com o escoamento das armaduras longitudinais.

O deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento do corpo de prova para a capacidade máxima de carregamento obtida pelo experimento foi 29,3 mm. A Tabela 6.17 apresenta o deslocamento horizontal no ponto de aplicação do carregamento para a capacidade última, além dos valores de dano dos esforços de flexão e cortante para cada valor do fator de correção das fissuras aplicado.

Tabela 5.17 – Valores da variável de dano e deslocamento para capacidade última do corpo de prova EP27.1-40_N180

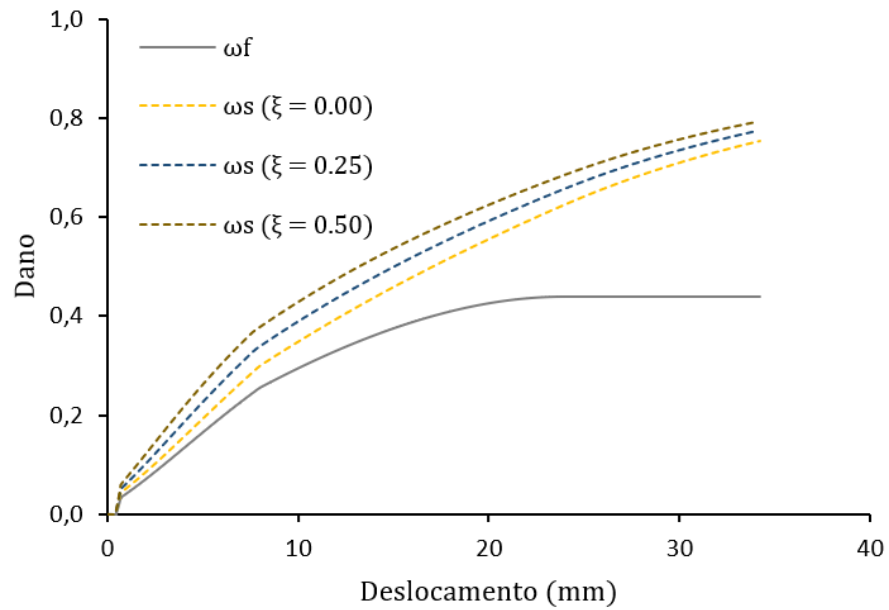
ξ	ω_f	ω_s	u (mm)
0,00	0,44	0,63	24,0
0,25	0,44	0,66	24,0
0,50	0,44	0,69	24,0

Fonte: elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 6.17 indica que não houve melhora da resposta numérica em relação à curva experimental. A figura 6.24 apresenta a curva de evolução do dano devido aos esforços de flexão e cortante em relação ao deslocamento apresentando para diferentes valores do fator de

correção das fissuras. Observa-se que os valores numéricos de dano são consistentes com o padrão de fissuração apresentado pelo experimento, com falha combinada para esforços de flexão e cortante. Para a capacidade última, o valor de dano à flexão (ω_f) obtido foi de 0,44, e, de acordo com o modelo numérico, o valor da variável de dano para que se inicie o escoamento das armaduras longitudinais é de 0,25, evidenciando o escoamento das mesmas.

Figura 5.24 – Evolução da variável de dano para o corpo de prova EP27.1-40_N180



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

6 CONCLUSÕES

A presente pesquisa buscou contribuir com o desenvolvimento da Mecânica do Dano Concentrado, em especial, para modelos com modo de falha por esforços de flexão e cortante simultâneos, a partir da proposta da introdução de um novo parâmetro no critério de evolução do dano ao esforço cortante.

O modelo proposto foi validado com a sua aplicação na análise numérica do corpo de prova de um pilar-parede. A partir dessa aplicação foi observado que o novo parâmetro introduzido, denominado fator de correção das fissuras, apresenta um limite de validade, o qual, por sua vez, é dependente da resistência inicial à fissuração e de um parâmetro relacionado ao encruamento das armaduras. Foi observado ainda que o fator de correção altera os limites de dano (plástico e último) do modelo numérico. Para valores negativos do fator de correção das fissuras, há a diminuição significativa do valor último da variável de dano. Já para valores positivos, o valor último da variável de dano tende a se aproximar da unidade.

Foram estudados na sequência, corpos de prova de pilares-parede com mesmas características geométricas e de matérias, porém com diferentes relações de aspectos, esta última, obtida a partir da variação do ponto de aplicação do carregamento no corpo de prova. Foi observado neste estudo que a utilização do fator de correção melhora consideravelmente a resposta numérica, com o valor do deslocamento para a capacidade última do corpo de prova obtido com o modelo numérico tendendo a se aproximar da resposta experimental.

Além desses, foram estudados corpos de prova de elementos de pórtico com diferentes relações de aspecto e diferentes condições de carregamento (elementos com carregamento lateral e elementos com carregamento lateral e axial simultâneos). Neste estudo foi observado que a utilização do fator de correção não apresentou melhoria na resposta numérica.

Foi observado que, para os grupos de corpos de prova em que as armaduras longitudinais se encontram com o limite de escoamento atingido e o valor da variável de dano associado à flexão, e, conseqüentemente, a densidade de fissuras à flexão, para a condição última de carregamento apresentam valores significativos, o modelo numérico proposto não apresenta ganho em sua aplicação, à medida que se utilize diferentes valores para o fator de correção das fissuras. Entretanto, para as simulações numéricas dos ensaios experimentais com falha predominante ao esforço cortante, a resposta numérica do modelo proposto apresenta boa convergência com a resposta experimental. Sugere para trabalhos futuros:

- Investigação da construção da função de correção das fissuras;

- Aplicação do modelo desenvolvido para a análise de pórticos planos de concreto armado;
- Aplicação do modelo desenvolvido para análise de estruturas de concreto armado submetidas a carregamento dinâmico.

REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

American Concrete Institute (ACI). Building code requirement for structural concrete. **ACI Committee 318**, 2014.

AHMED, A. M.; RIFAI, A. M. Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories analytical and numerical comprehensive revision. **European Journal of Engineering and Technology Research**, v. 6, p. 20–32, 2021.

ALVA, G. M. S.; EL DEBS, A. L. H. C. Application of lumped dissipation model in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, v. 32, p. 974–981, 2010.

AMORIM, D. L. N. DE F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modelling of cracking and collapse process on frames and arches of reinforced concrete. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 7, p. 100-137, 2014.

AMORIM, D. L. N. DE F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modeling of cracking in concrete: Application in tunnel linings. **Engineering Structures**, v. 70, p. 23-35, 2014.

AMORIM, D. L. N. F. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analyses: new developments and applications**. 2016. 193 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

AMORIM, D. L. N. F.; PIEDADE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. The extended lumped damage mechanics: A new formulation for the analysis of softening with FE size-independence. **Mechanics Research Communications**, v. 91, p. 13-18, 2018.

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. CRC Press, Boca Raton, 2005.

BAI, Y.; GUAN, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Development of a damage model for assessing fracture failure of steel beam-to-column connections subjected to extremely low-cycle fatigue. **Engineering Failure Analysis**, v. 82, p. 823-834, 2017.

BAI, Y.; KURATA, M.; FLÓREZ-LÓPEZ, J.; NAKASHIMA, M. Macromodeling of crack damage in steel beams subjected to nonstationary low cycle fatigue. **Journal of Structural Engineering**, v. 142, n. 10, 04016076, 2016.

BAZÁN, J. A. V. **Fadiga de pórticos planos via mecânica do dano concentrado considerando incertezas**. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia Estrutural) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

BAZÁN, J. A. V.; BECK, A. T.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Random fatigue of plane frames via lumped damage mechanics. **Engineering Structures**, v. 182, p. 301-315, 2019.

BOSSE, R. M. **Curvas de fragilidade e modelos de colapso baseados em dano para pórticos de concreto armado sujeitos à ação sísmica**. 2022. Tese (Doutorado em Engenharia Estrutural) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

BRITO, T. I. J.; SANTOS, D. M.; SANTOS, F. A. S.; CUNHA, R. N.; AMORIM, D. L. N. F. On the lumped damage modelling of reinforced concrete beams and arches. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 54, p. 1-20, 2020.

BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics**. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht. 1982.

CIPOLLINA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modelos simplificados de daño en pórticos de concreto armado. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 11, n. 1, p. 3-22, 1995.

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1113-1126, 1995.

COELHO, K. O.; LEONEL, E. D.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. An efficient mechanical-probabilistic approach for the collapse modelling of RC structures. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 12, n. 2, p. 386-397, 2019.

COHN, M. Z.; FRANCHI, A. Structural plasticity computer system: STRUPL. **ASCE Journal of the Structural Division**, v. 105, n. 4, p. 789-804, 1979.

CUNHA, R. N.; VIEIRA, C. S.; AMORIM, D. L. N. DE F. Lumped damage mechanics as a diagnosis tool of reinforced concrete structures in service: case studies of a former bridge arch and a balcony slab. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 15, n. 58, p. 21–30, 2021.

CUNHA, R. N.; OLIVERIA, K. M.; BRITO, A. G. L. R.; VIEIRA, C. S.; AMORIM, D. L. N. DE F. Evaluation of the behaviour of reinforced concrete beams repaired with glass fibre reinforced polymer (GFRP) using a damage variable. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 15, n. 57, p. 82–92, 2021.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modelos de daño concentrado para la simulación numérica del colapso de pórticos planos. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 09, n. 02, p. 123-139, 1993.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified Model of Unilateral Damage for RC Frames. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 12, p. 1765-1772, 1995.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Frame analysis and continuum damage mechanics. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, V. 17, n. 2, p. 269-283, 1998.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Application**. IGI Global, United States of America, 2015.

GERE, J. M; TIMOSHENKO, S. P. **Mechanics of Materials**. Springer, United Kingdom. 1991

GDOUTOS, E. E. **Fracture Mechanics: An Introduction**. Springer, Norwell. 2005.

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A**, v. 221, p. 163–198, 1921.

GRIFFITH, A. A. **The theory of rupture**. Proc. Frist International Congress of Applied Mechanics (1924) p. 55-63. Biezeno and Burgers ed. Waltman (1925).

HWANG, S. J.; LEE, H. J.; LIAO, T. F.; WANG, K. C.; TSAI, H. H. Role of hoops on shear strength of reinforced concrete beam-column joints. **ACI Structural Journal**, v. 102, p. 445-453, 2005.

INGLIS, C. E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **Transactions of the Institute of Naval Architects**, v. 55, p. 219-230, 1913.

KACHANOV, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. **Otdeleniye Technicheskikh Nauk**, v. 08, p. 28-31, 1958.

KIRSCH, C. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, v. 42, p. 797-807, 1898.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mécaniques des matériaux solides**. Dunod, Paris. 1985.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Interciência, Rio de Janeiro, 1982.

MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Three-dimensional analysis of reinforced concrete frames based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 19, p. 5109-5123, 2002.

MEGSON, T. H. G. **Structural and Stress Analysis**. Second Edition. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

NETO, E. A. S.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity Theory and Applications**. Wiley, Chichester, 2008.

NETO, R. P; TELES, D. V. DA C.; VIEIRA, C. S.; AMORIM, D. L. N. DE F. Energy equivalent lumped damage model for reinforced concrete structures. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 84, n. 2, p. 285–293, 2022.

OLIVEIRA, J. M. J. **Mecânica do dano concentrado expandida para meios bidimensionais: elemento finito para problemas de localização de deformações em chapas**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2020.

OLIVEIRA, J. M. J.; VIEIRA, C. S.; SILVA, M. F. A.; AMORIM, D. L. N. DE F. Fracture modelling of steel fibre reinforced concrete structures by the lumped damage mechanics: Application in precast tunnel segments. **Engineering Structures**, v. 278, 2023.

OLIVEIRA, M. C.; TELES, D. V. DA C.; AMORIM, D. L. N. DE F. Shear behaviour of reinforced concrete beams under impact loads by the lumped damage framework. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 14, n. 53, p. 13–25, 2020.

PERDOMO, M. E.; CASTRO, L.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modelo de daño para elementos de concreto armado sometidos a corte y flexión. **Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela**, v. 21, n. 4, p. 23-36, 2006.

PERDOMO, M. E. **Fractura y Daño en Estructuras Duales de Concreto Armado**. 2010. Doctoral thesis, University of Los Andes, Venezuela, 2010.

PERDOMO, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E. Modelo numérico con interacción corteflexion en elementos de concreto armado. **Gaceta Técnica**, v. 9, p. 11-22, 2012.

PERDOMO, M. E.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E.; HILD, F.; ROUX, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Experimental analysis and mathematical modeling of fracture in RC elements with any aspect ratio. **Engineering Structures**, v. 46, p. 407-416, 2013.

PICÓN, R. A.; SANTOS, D. M.; TELES, D. V. C.; AMORIM, D. L. N. F.; ZHOU, X.; BAI Y.; PROENÇA, P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modeling of localization using Nash variational formulations: The extended damage mechanics. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 258, 108083, 2021.

POWELL, H. G. Theory for nonlinear elastic structures. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 95, ST12, p. 2687-2701, 1969.

RABOTNOV, Y. N. Creep rupture, In: Hetényi, M.; Vincenti, W. G. Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics, 1968, Berlin. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1968, p. 342–349.

SANTOS, D. M. **Formulação em dano concentrado para meios contínuos bidimensionais com localização de deformações em modo I**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2021.

SOUZA, A. A. F. DE; ASSIS, W. S. DE; AMORIM, D. L. N. DE F. Deflection estimate of reinforced concrete beams by the lumped damage mechanics. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 16, n. 5, e16505, 2023.

SILVA, L. A. B. **Modelo de dano concentrado aplicado à flambagem local em perfis vazados de aço estrutural submetidos à flexão composta**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2020.

SILVA, L. A. B.; ARGÔLO, H. S. D.; AMORIM, D. L. N. F. Lumped damage model applied to local buckling in steel rectangular hollow section subjected to compressive axial force with bending moment. **International Journal of Steel Structures**, v. 22, n. 1, p. 319-332, 2022.

TELES, D. V. C.; OLIVEIRA, M. C.; AMORIM, D. L. N. F. A simplified lumped damage model for reinforced concrete beams under impact loads. **Engineering Structures**, v. 205, 110070, 2020.

TELES, D. V. C.; CUNHA, R. N.; AMORIM, D. L. N. DE F.; PICÓN, R.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Parametric study of dynamic behaviour of RC dual system design with the Brazilian Standard Code using the lumped damage model. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 43, n. 5, p. 246, 2021.

TELES, D. V. C. **Mecânica do dano concentrado para meios bidimensionais: formulação para modo I com lei de dano não linear**. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2022.

THOMSON, E. D. **Modelo simplificado para la evaluación del daño en muros estructurales bajos de concreto armado sujetos a cargas laterales**. Tesis (Doctorado en Ciencias Aplicadas) – Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, 2004.

THOMSON, E. D.; PERDOMO, M. E.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified model for damage in squat RC shear walls. **Engineering Structures**, v. 31, p. 2215-2223, 2009.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **Philosophical Magazine**, 1921, p. 744.

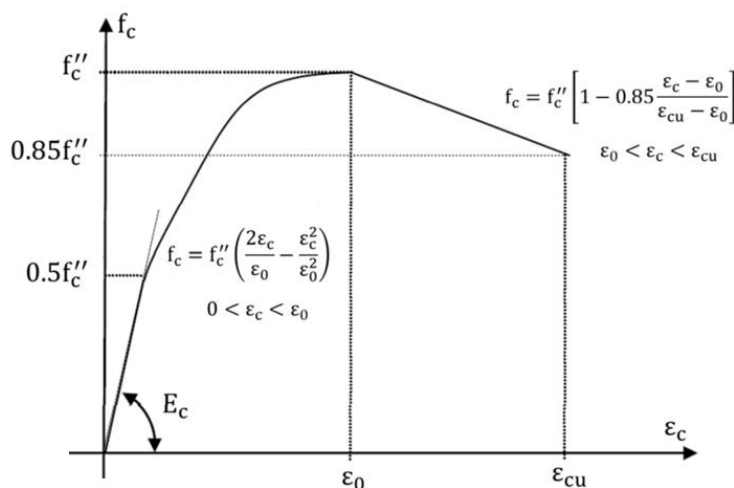
APÊNDICE A – COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

Neste trabalho, são adotados os diagramas de tensão-deformação apresentados pela norma ACI 318-14 (2014). A resistência à compressão do concreto é medida experimentalmente, e o seu valor, aos 28 dias de idade é denotado por f'_c . A deformação correspondente à tensão máxima é chamada de ε_0 , sendo $\varepsilon_0 = 0,002$. A deformação última, ε_{cu} , varia no intervalo $0,003 \leq \varepsilon_{cu} \leq 0,004$, dependendo do valor da resistência do concreto. O módulo de elasticidade do concreto é obtido por meio de equações empíricas. A norma ACI 318-05 (2005) propõe a seguinte expressão para módulo de elasticidade:

$$E_c = 57000\sqrt{f'_c} \text{ (psi)} = 4700\sqrt{f'_c} \text{ (MPa)} \quad (\text{A.1})$$

Admite-se que o comportamento do concreto seja descrito por um modelo elástico não linear. Dentre os modelos não lineares disponíveis na literatura, destaca-se o modelo proposto por Hognestad (1951). De acordo com esse modelo, a máxima tensão alcançada pelo concreto é $f''_c = 0,85f'_c$. A Figura A.1 apresenta o modelo não linear proposto por Hognestad (1951).

Figura A.1 – Modelo não linear proposto por Hognestad (1951)

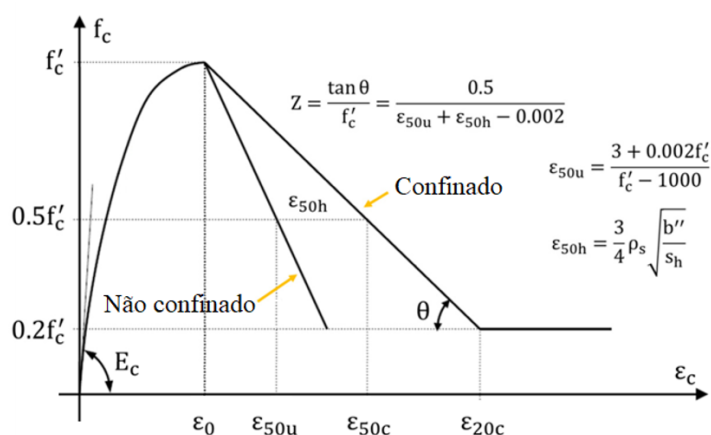


Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Na prática, as armaduras transversais promovem o confinamento do núcleo de concreto. Para concretos confinados, muitos estudos propuseram modificações no modelo proposto por Hognestad (1951), sendo o modelo mais utilizado, o proposto por Kent e Park (1971). A Figura

A.2 apresenta o modelo não linear proposto por Kent e Park (1971). Para este modelo, a máxima tensão alcançada pelo concreto é f'_c .

Figura A.2 – Modelo não linear proposto por Kent e Park (1971)



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

As barras de aço utilizadas nos elementos de concreto armado apresentam comportamento elastoplástico com encruamento não linear. A tensão de escoamento da armadura é denotada por f_y e a tensão última por f_{su} . A deformação correspondente à tensão de escoamento é chamada deformação de escoamento, e denotada por ϵ_y .

Referências

American Concrete Institute (ACI). Building code requirement for structural concrete. **ACI Committee 318**, 2014.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Application**. IGI Global, United States of America, 2015.

HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. **University of Illinois Engineering Experiment Station**, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, p. 43-46, 1951.

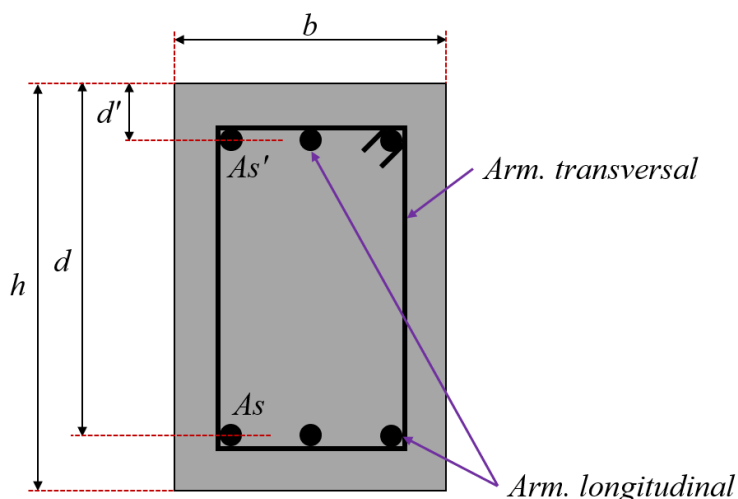
KENT, D. C.; PARK, R. Flexural members with confined concrete. **Journal of the Structural Division**, p. 1960-1990, 1971.

APÊNDICE B – MOMENTO FLETOR: PARÂMETROS NUMÉRICOS PARA ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO

Os parâmetros numéricos utilizados como dados de entrada no modelo de dano concentrado são obtidos a partir dos diagramas de interação que relacionam o nível de carga axial com o momento fletor resistente da seção transversal para elementos de concreto armado solicitados nos estádios I, II e III.

Os elementos estruturais de concreto armado são usualmente utilizados com seções transversais retangulares. A Figura B.1 apresenta uma seção transversal típica de concreto, de dimensão qualquer, reforçada com armaduras longitudinais e transversais.

Figura B.1 – Seção transversal típica de concreto armado



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Os parâmetros numéricos são apresentados em função da força axial, e a representação gráfica de tais parâmetros é denominada diagramas de interação. Para compressão pura, a distribuição de tensões e deformações é considerada constante ao longo da seção transversal. Assumindo comportamento linear para o concreto até o início da fissuração, a força de compressão crítica para a fissuração do concreto é dada por:

$$N_{cr} = -A_{ts}0,45f'_c \quad (B.1)$$

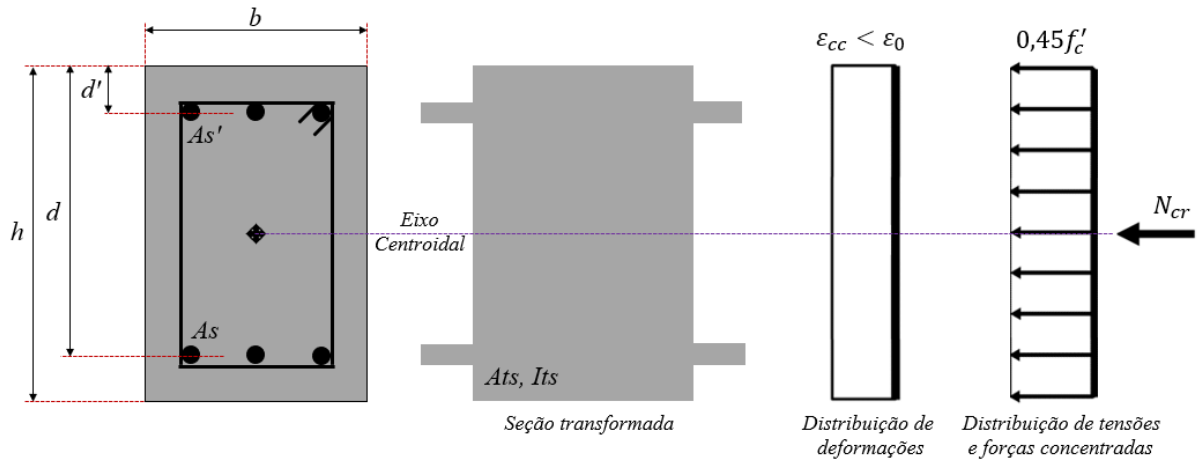
sendo A_{ts} , a área da seção transformada.

Para tração pura, a distribuição de tensões e deformações é considerada constante ao longo da seção transversal. Assumindo que a fissuração se inicia quando a tensão alcançar o

valor da resistência à tração, f_t , a força de tração crítica para a fissuração do concreto é dada por:

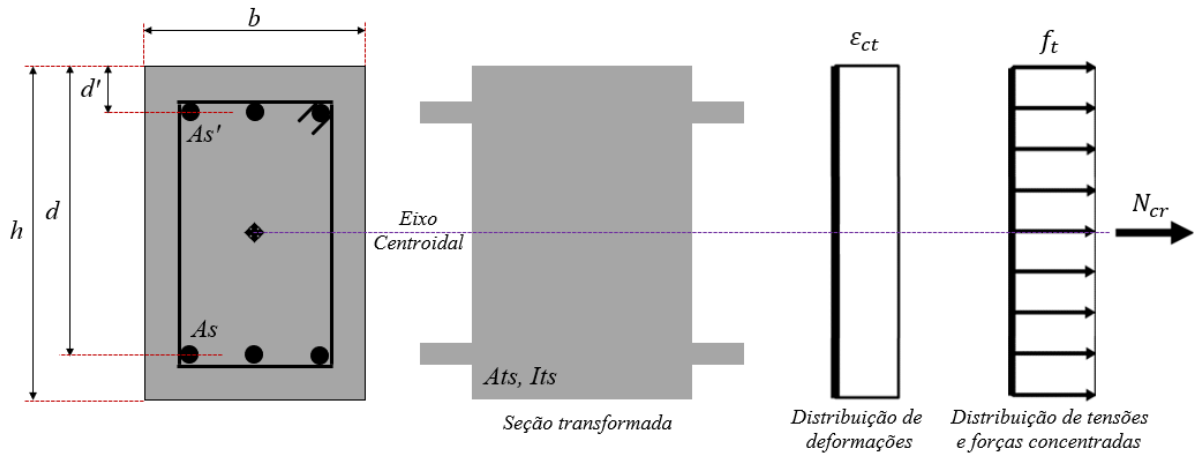
$$N_{cr} = A_{ts}f_t \quad (B.2)$$

Figura B.2 – Distribuição uniforme de tensões de compressão



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Figura B.3 – Distribuição uniforme de tensões de tração



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Em flexão pura (i. e., ausência de força axial), a distribuição de tensão e deformação são assumidas como lineares. Considerando f_t a máxima tensão de tração, o primeiro momento de fissuração é definido por:

$$M_{cr} = \frac{I_{ts} f_t}{Z_{ca}} \quad (\text{B.3})$$

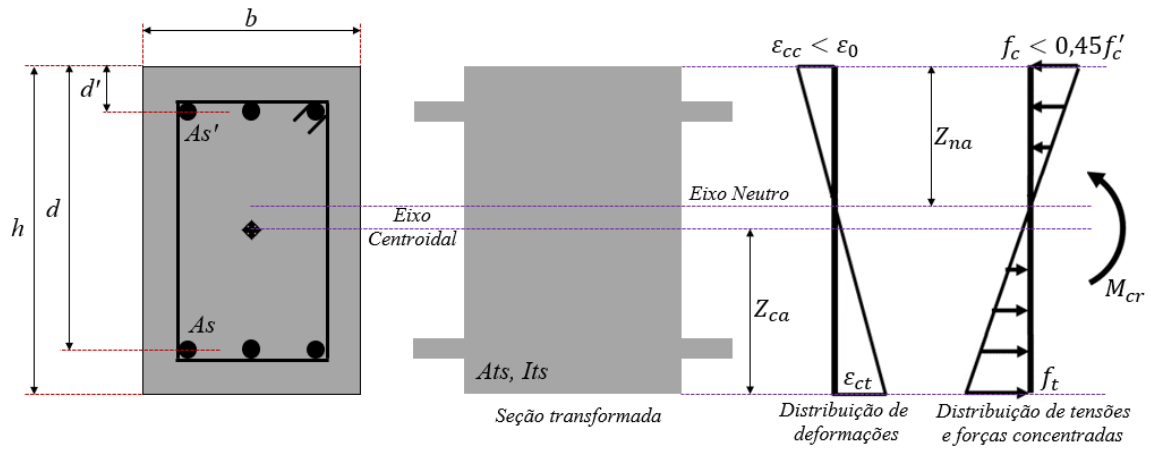
sendo I_{ts} , o momento de inércia da seção transformada, e Z_{ca} , a distância entre a fibra mais tracionada e o eixo centroide da seção transversal.

A ação combinada da força normal e do momento fletor, assume que uma tensão de compressão de intensidade $0,45f'_c$ e uma tensão de tração intensidade f_t são alcançadas simultaneamente nas fibras extremas da seção. A distribuição de tensão é descrita linearmente pela seguinte expressão:

$$f = \frac{M_{cr} z}{I_{ts}} + \frac{N_{cr}}{A_{ts}} \quad (\text{B.4})$$

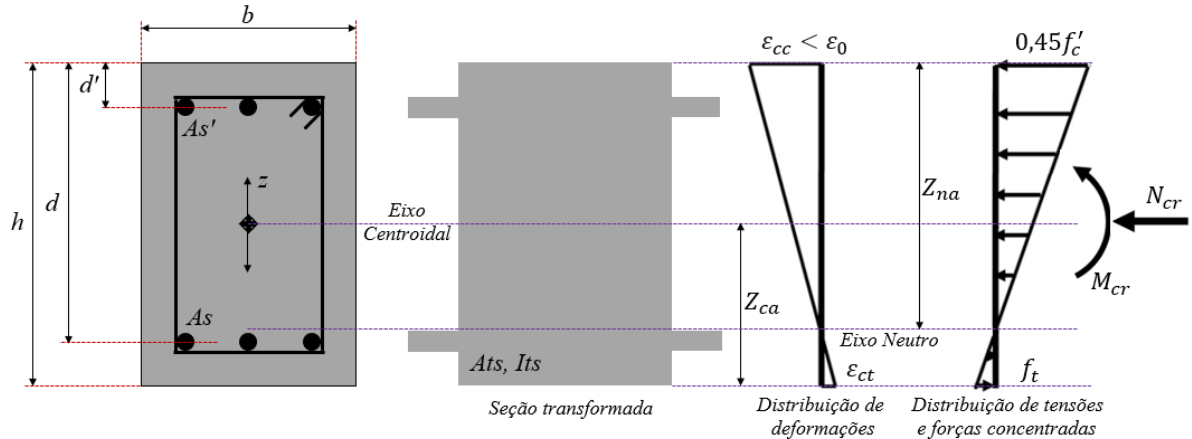
sendo z , a distância entre a fibra considerada e o eixo centroide da seção transversal.

Figura B.4 – Flexão pura e primeiro momento de fissuração



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Figura B.5 – Ação combinada de força normal e do momento fletor



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Assim, o primeiro momento de fissuração e a força normal de fissuração ficam estabelecidos pelas seguintes equações:

$$0,45f'_c = \frac{M_{cr}(h - Z_{ca})}{I_{ts}} + \frac{N_{cr}}{A_{ts}} \quad (\text{B.5})$$

$$f_t = \frac{M_{cr}Z_{ca}}{I_{ts}} - \frac{N_{cr}}{A_{ts}} \quad (\text{B.6})$$

Resolvendo o sistema das Equação B.5 e B.6 obtém-se as expressões procuradas:

$$N_{cr} = \frac{Z_{ca}(0,45f'_c + f_t) - hf_t}{h} A_{ts} \quad (\text{B.7})$$

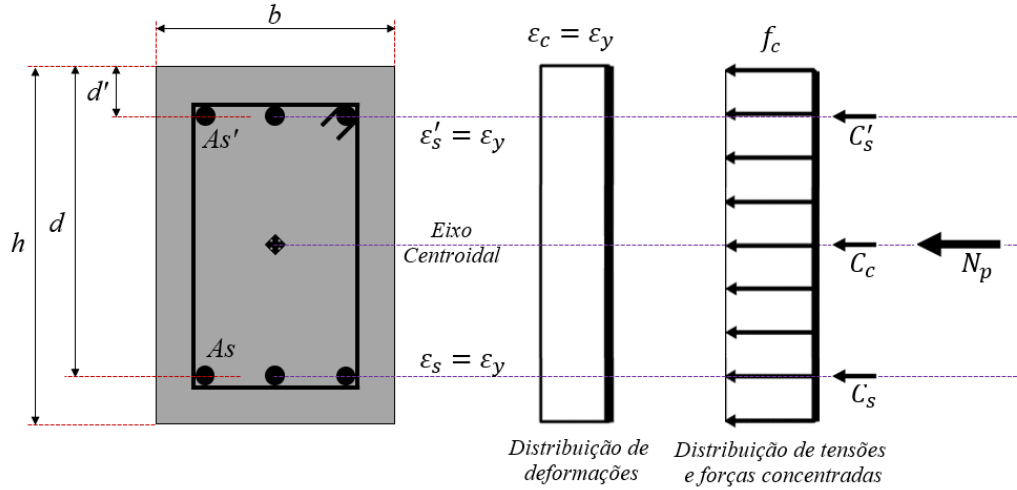
$$M_{cr} = \frac{0,45f'_c + f_t}{h} I_{ts} \quad (\text{B.8})$$

Na condição plástica, o concreto não resiste às tensões de tração em decorrência das fissuras apresentadas. As armaduras longitudinais são responsáveis por resistirem às tensões de tração, até o seu limite plástico. Para compressão pura, a distribuição de tensões e deformações é considerada constante ao longo da seção transversal, sendo a deformação igual à deformação de escoamento do aço, ε_y .

$$N_p = C'_s + C_c + C_s = -f_y A'_s - f_c (bh - A_s - A'_s) - f_y A_s \quad (\text{B.9})$$

sendo f_c , a máxima tensão no concreto.

Figura B.6 – Equilíbrio de forças de compressão na condição plástica



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Na tração pura, a resistência à tração do concreto é desprezada, e a deformação das barras longitudinais são iguais à deformação de escoamento do aço, ε_y .

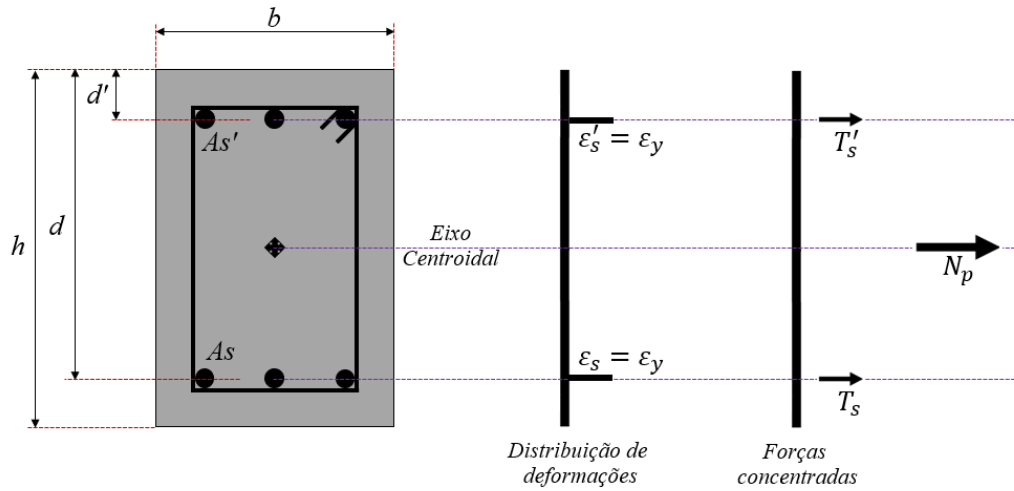
$$N_p = T'_s + T_s = f_y A'_s + f_y A_s \quad (\text{B.10})$$

Na flexão pura, o momento fletor de plastificação é definido por:

$$M_p = C'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + C_c \left[\frac{h}{2} - (Z_{na} - Z_{cc}) \right] + T_s \left(d - \frac{h}{2} \right) \quad (\text{B.11})$$

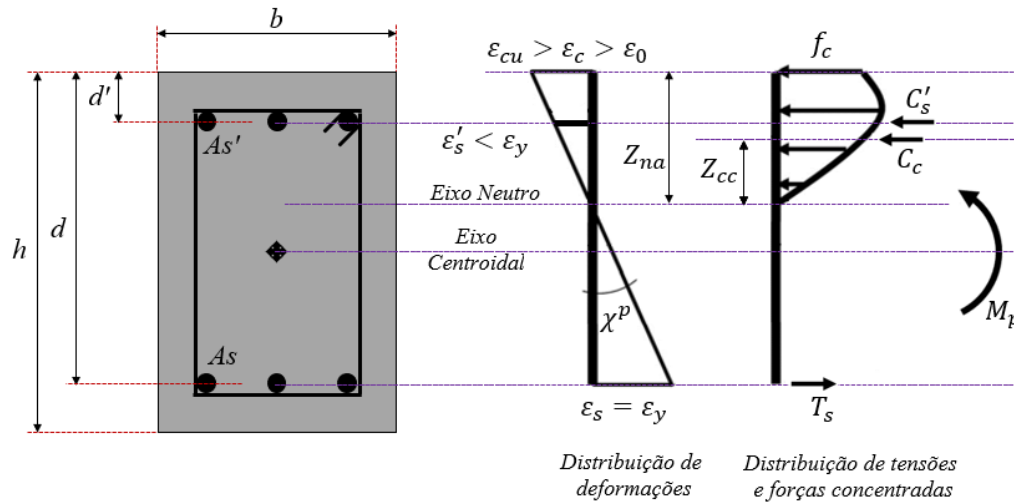
sendo Z_{cc} , a distância entre a força de compressão no concreto e o eixo centroidal da seção transversal.

Figura B.7 – Equilíbrio de forças de tração na condição plástica



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Figura B.8 – Equilíbrio de momento na condição plástica



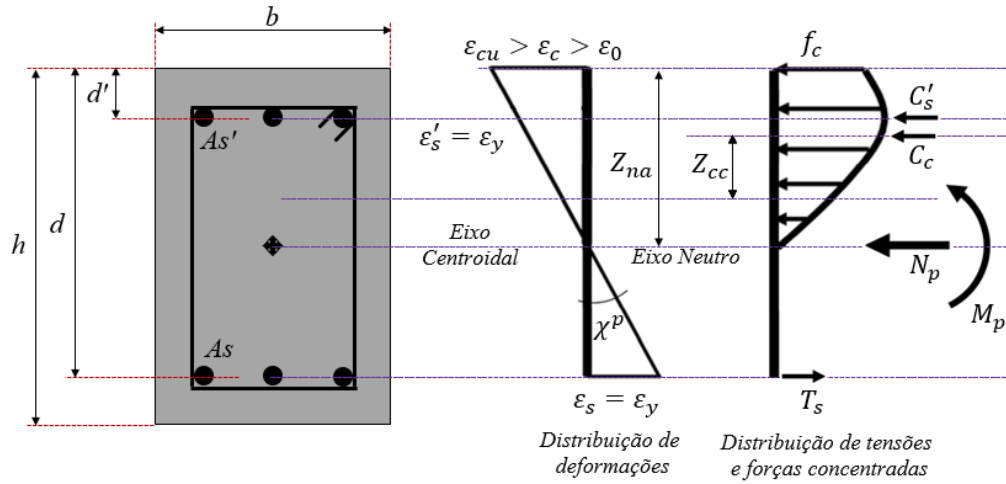
Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

A ação combinada da força normal e do momento fletor, assume que as armaduras positivas e negativas estão escoando (i. e., $\varepsilon'_s = \varepsilon_s = \varepsilon_y$). Nesta condição, a posição da linha neutra é definida como $Z_{na} = (d + d')/2$. Assim, o momento plástico e a força normal plástica ficam estabelecidos pelas seguintes equações:

$$N_p = C'_s + C_c + T_s = -f_y A'_s - b \int_0^{Z_{na}} f_c dz + f_y A_s \quad (B.12)$$

$$M_p = C'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + C_c \left[\frac{h}{2} - (Z_{na} - Z_{cc}) \right] + T_s \left(d - \frac{h}{2} \right) \quad (\text{B.13})$$

Figura B.9 – Ação combinada de força normal e momento fletor na condição plástica



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Finalmente, na condição última, a seção apresenta sua capacidade máxima de carregamento. Para compressão pura, a força axial última é considerada, aproximadamente, igual à força axial plástica.

$$N_u \cong N_p = C'_s + C_c + C_s = -f_y A'_s - f_c (bh - A_s - A'_s) - f_y A_s \quad (\text{B.14})$$

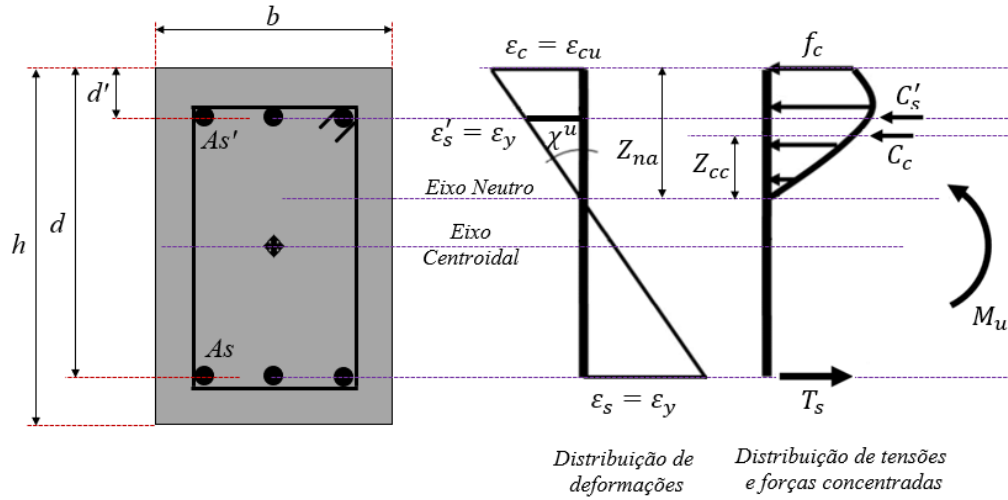
Na tração pura, o encruamento do aço é considerado e a força axial última é definida por:

$$N_u \cong T'_s + T_s = f_{su} A'_s + f_{su} A_s \quad (\text{B.15})$$

Na flexão pura, assume que a deformação do concreto é igual a sua deformação última (i. e., $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$). O momento fletor de último é definido por:

$$M_u = C'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + C_c \left[\frac{h}{2} - (Z_{na} - Z_{cc}) \right] + T_s \left(d - \frac{h}{2} \right) \quad (\text{B.16})$$

Figura B.10 – Equilíbrio de momento na condição última



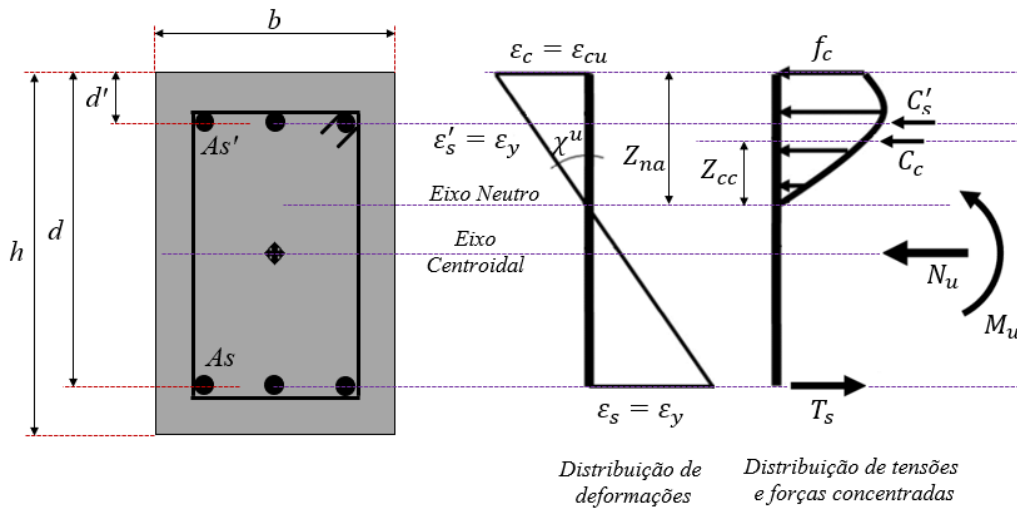
Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

A ação combinada da força normal e do momento fletor, a posição da linha neutra é definida como $Z_{na} = \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} \right) d$. Assim, o momento último e a força normal última ficam estabelecidos pelas seguintes equações:

$$N_u = C'_s + C_c + T_s = -f_y A'_s - b \int_0^{Z_{na}} f_c dz + f_y A_s \quad (\text{B.17})$$

$$M_u = C'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + C_c \left[\frac{h}{2} - (Z_{na} - Z_{cc}) \right] + T_s \left(d - \frac{h}{2} \right) \quad (\text{B.18})$$

Figura B.11 – Ação combinada de força normal e momento fletor na condição última



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Nas condições plástica e última, duas grandezas são definidas: a curvatura plástica, χ^p , e a curvatura última, χ^u . A curvatura plástica última, χ_u^p , é obtida pela subtração das duas grandezas anteriores, sendo:

$$\chi^p = \frac{\varepsilon_y}{d - Z_{NA}} \quad (\text{B.19})$$

$$\chi^u = \frac{\varepsilon_{cu}}{Z_{NA}} \quad (\text{B.20})$$

$$\chi_u^p = \chi^u - \chi^p \quad (\text{B.21})$$

A rotação plástica última é definida por:

$$\phi_u^p = \chi_u^p l_p \quad (\text{B.22})$$

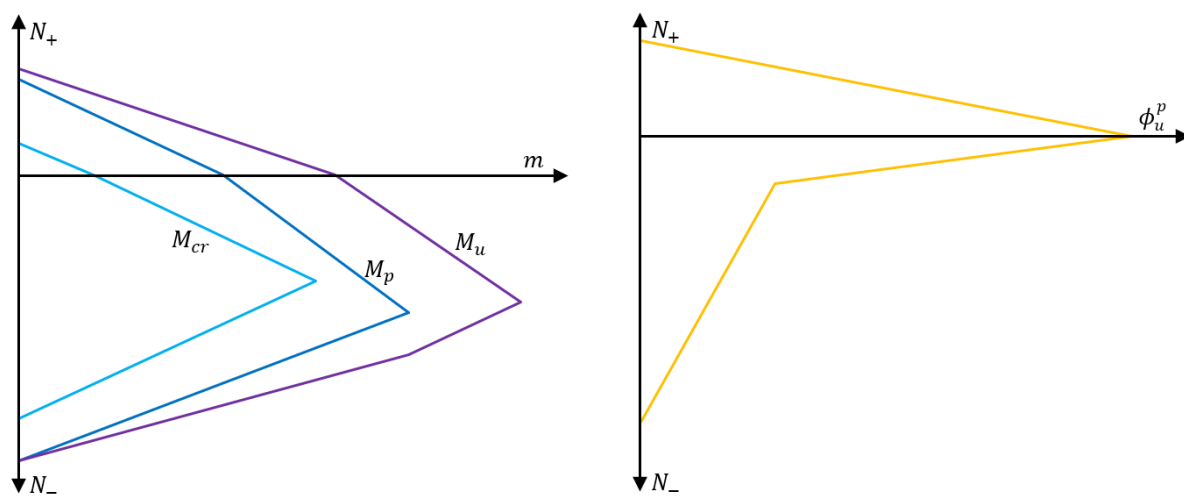
sendo l_p , o comprimento da rótula plástica, definido pela região em que as armaduras sofrem deformações plásticas. Flórez-López, Marante e Picón (2015) apresenta a seguinte relação empírica para obtenção do comprimento da rótula plástica:

$$l_p = 0,5d + 0,05x_{cs} \quad (\text{B.23})$$

em que x_{cs} é a distância da seção crítica até o ponto de inflexão do diagrama de momento fletor.

Os diagramas de interação típicos para estruturas de concreto armado são apresentados na Figura B.12, a seguir:

Figura B.12 – Diagramas de interação



Fonte: elaborada pelo autor (2024)

Referências

American Concrete Institute (ACI). Building code requirement for structural concrete. **ACI Committee 318**, 2014.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Application**. IGI Global, United States of America, 2015.

APÊNDICE C – ESFORÇO CORTANTE: PARÂMETROS NUMÉRICOS PARA ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO

Os parâmetros numéricos relacionados ao esforço cortante são aqui apresentados com base na norma ACI 318-14 (2014). Aqui, todas as unidades estão expressas em Megapascal (MPa), Newton (N) e milímetro (mm). O primeiro cortante de fissuração, V_{cr} , é definido como nível de esforço que produz fissuração por tração diagonal do elemento. O primeiro cortante de fissuração pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$V_{cr} = \left(1 + \frac{n}{14A_g}\right) \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{6}\right) 0,8A_g \quad (C.1)$$

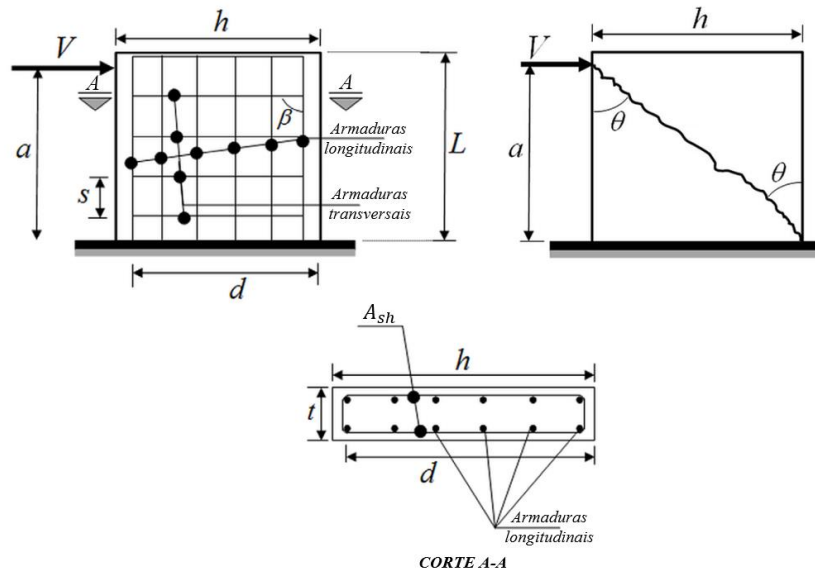
sendo n a força axial, A_g a área bruta da seção de concreto e f'_c a resistência à compressão do concreto.

Para armaduras transversais perpendiculares às armaduras longitudinais (i. e., $\beta = 90^\circ$), o primeiro cortante plástico, V_p , definido como o esforço necessário para que se inicie o escoamento da armadura transversal, pode ser calculado o seguinte modelo simplificado:

$$V_p = k_p \frac{A_{sh} f_{yh} [\cot(\theta)]}{s} d \quad (C.2)$$

sendo A_{sh} a área da armadura transversal, f_{yh} a tensão de escoamento das armaduras, d a altura útil da seção, s o espaçamento da armadura transversal, θ o ângulo de inclinação da fissura e k_p um coeficiente adimensional que leva em consideração a eficiência da armadura transversal, assumindo o valor de $k_p = 0,4$ para $\beta = 90^\circ$.

Figura C.1 – Parâmetros geométricos para elementos curtos



Fonte: adaptada de Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Para elementos de viga curtos, o ângulo de inclinação das fissuras pode ser adotado como $\theta = 45^\circ$. Para elementos de parede, o ângulo de inclinação pode ser computado da seguinte maneira:

$$\cot(\theta) = \frac{a}{d} \quad (\text{C.3})$$

sendo a o vão de cisalhamento. Para elementos em balanço $a = L$ e para elementos com apoio duplo $a = 0,5L$.

A cortante última, V_u , é obtida pela seguinte equação semi-empírica:

$$V_u = k_u \left[\frac{A_{sh} f_{yh}}{s} d + \left(\frac{0,5 \sqrt{f'_c}}{a/d} \sqrt{1 + \frac{n}{0,5 \sqrt{f'_c} A_g}} \right) 0,8 A_g \right] \quad (\text{C.4})$$

sendo k_u um coeficiente adimensional que assume o valor de $k_u = 1$ para elementos com razão de aspecto inferiores a 5 e $k_u = 0,7$ para elementos com razão de aspecto superiores.

A distorção plástica última pode ser calculada com a seguinte expressão:

$$\gamma_u^p = \frac{d}{L_{ps}} \left[\left(\frac{f_{suh}}{E_s} + \frac{\varepsilon_{cu}}{\sin^2 \theta} \right) - \left(\frac{1}{\rho_{sh}} + \frac{2E_s}{E_c \sin^2 \theta} \right) \frac{f_{yh} A_{sh}}{E_s b s} \right] \quad (C.5)$$

sendo L_{ps} um coeficiente que assume o valor de $L_{ps} = 0,25L$ para elementos com razão de aspecto superiores a 5 e $L_{ps} = L$ para elementos com razão de aspecto inferiores, f_{suh} a resistência última da armadura transversal, E_s e E_c são, respectivamente o módulo de elasticidade do aço e do concreto, ε_{cu} é a deformação última do concreto ($\varepsilon_{cu} = 0,004$ para concreto não confinado e $\varepsilon_{cu} = 0,0084$ para concreto confinado) e ρ_{sh} é a relação volumétrica entre a armadura transversal e o concreto.

Referências

American Concrete Institute (ACI). Building code requirement for structural concrete. **ACI Committee 318**, 2014.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Application**. IGI Global, United States of America, 2015.