

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Transferência de estado quântico em sistemas de
cavidades acopladas

GUILHERME MARTINS ALVES DE ALMEIDA

São Cristóvão

2016

GUILHERME MARTINS ALVES DE ALMEIDA

Transferência de estado quântico em sistemas de cavidades acopladas

Tese de Doutorado apresentada
ao Núcleo de Pós-Graduação em
Física da Universidade Federal de
Sergipe para obtenção do título
de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. André
Maurício Conceição de Souza

São Cristóvão

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Núcleo de Pós-Graduação em Física

*“Transferência de estado quântico em sistemas de
cavidades acopladas”*

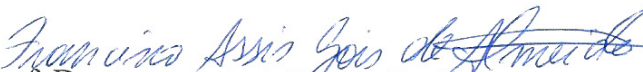
por

Guilherme Martins Alves de Almeida

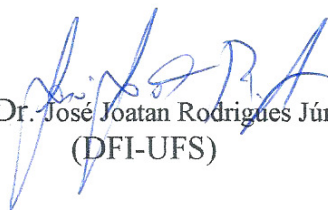
Tese de doutorado **APROVADA** em sessão pública no dia vinte de janeiro do ano dois mil e dezesseis perante a banca examinadora constituída pelos seguintes professores:



Prof. Dr. André Maurício Conceição de Souza
(DFI-UFS)



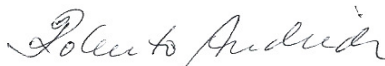
Prof. Dr. Francisco Assis Gois de Almeida
(DFI-UFS)



Prof. Dr. José Joatan Rodrigues Júnior
(DFI-UFS)



Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra
(IF-UFAL)



Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade
(IF-UFBA)

Agradecimentos

Ao meu orientador André M. C. Souza;

Aos colaboradores do *Institute for Quantum Science and Technology* em Calgary, Canadá: Barry C. Sanders, Joydip Ghosh, David Feder, Adam D'Souza e Randy Squires;

Aos colaboradores da *Università Degli Studi di Palermo*, Itália: Francesco Ciccarello, Tony J. G. Apollaro, Salvatore Lorenzo e Gioacchino M. Palma;

À minha namorada Patricia N. Calasans, família e amigos;

À toda a equipe da *BSurf House* em Peniche, Portugal;

Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A perspectiva de simular fenômenos quânticos de sistemas de muitos corpos em cavidades ópticas acopladas tem atraído bastante interesse nos últimos anos. O alto grau de controle experimental e a natureza híbrida das partículas envolvidas, denominada polárítions, fornecem uma nova direção no estudo de sistemas fortemente correlacionados envolvendo interação entre luz e matéria. Além disso, redes de cavidades são plataformas promissoras para processamento de informação quântica em redes quânticas. Esta tese é constituída por dois estudos em redes de cavidades acopladas descritas pelo modelo Jaynes-Cummings-Hubbard. Em particular, desenvolvemos protocolos de transferência e controle de estados quânticos em duas estruturas distintas. No primeiro estudo, consideramos uma cadeia unidimensional de cavidades com um padrão alternado de acoplamento entre as cavidades, cada uma interagindo com um átomo. Neste cenário, um par de modos normais do campo eletromagnético torna-se fortemente localizado nas extremidades da cadeia. Dessa forma, uma vasta estrutura de regimes dinâmicos pode ser manipulada dependendo da ressonância entre os modos normais atômicos e do campo. Mostramos como isso pode ser utilizado para realizar protocolos de transferência de estado quântico envolvendo estados fotônicos, atômicos ou híbridos, com alta fidelidade. Também discutimos como reduzir o tempo de transmissão de estados, sem comprometer sua eficiência, particionando a cadeia em módulos. Em seguida, exploramos a dinâmica de excitações atômicas e fotônicas em uma rede complexa de Apolônio considerando diversos regimes de interação. Mostramos que o espectro de modos normais induzido por este tipo de rede também oferece diversas alternativas no controle da dinâmica do sistema. Além disso, a natureza complexa da rede de Apolônio induz uma dinâmica de propagação não-trivial que depende do grau de conexão entre os sítios, podendo ser assim aplicada para conectar diferentes usuários de uma rede quântica. Nossos resultados contribuem para o desenvolvimento de protocolos de comunicação em redes quânticas utilizando dispositivos de interface luz-matéria, abrindo assim caminho para o processamento de informação quântica em larga escala.

Abstract

The prospect of simulating many-body quantum phenomena in coupled high-quality optical cavities has attracted a lot of interest over the past few years. The major advantages are twofold. First, this approach allows a high degree of control and addressability of individual sites and, second, the composite nature of particles, now involving mixed atomic and photonic excitations, namely polaritons, paves the way to the realization of novel strongly correlated regimes of light and matter. Despite being promising quantum simulators, cavity networks are also suited platforms for distributed quantum information processing and quantum communication. This thesis comprises two studies on coupled-cavity systems described by the Jaynes-Cummings-Hubbard model. Particularly, here we introduce protocols for quantum-state transfer and control in two different structures. The first study deals with a one-dimensional coupled-cavity array where each cavity interacts with a single atom. For a staggered pattern of inter-cavity couplings, a pair of field normal modes, each bi-localized at the array ends, arises. A rich structure of dynamical regimes can hence be addressed depending on which resonance condition between the atom and field modes is set. We show that this can be harnessed to carry out high-fidelity quantum-state transfer of photonic, atomic or polaritonic states. Moreover, by partitioning the array into coupled modules of smaller length, the QST time can be substantially shortened without significantly affecting the fidelity. Further, we explore the dynamics of photonic and atomic excitations on an Apollonian network under different atom-photon interaction regimes. We show that the normal-mode spectrum spanned by this kind of network induces a non-trivial propagation dynamics depending on connection degree among nodes, thereby being useful for connecting different quantum-network users. Our results are driven towards communication protocols in quantum networks comprised of light-matter interfaces, thus paving the way for large-scale quantum information processing.

Sumário

Lista de ilustrações	iii
Lista de abreviaturas e siglas	x
1 Introdução	1
1.1 Informação quântica	3
1.2 Simuladores quânticos	6
1.3 Redes de cavidades acopladas	8
1.4 Redes quânticas	10
1.5 Objetivos e organização da tese	11
2 Eletrodinâmica quântica de cavidades	14
2.1 Modelo Jaynes-Cummings	15
2.2 Modelo Jaynes-Cummings-Hubbard	18
2.3 Subespaço de uma excitação	21
3 Transferência de estado quântico em cadeias de cavidades acopladas 26	
3.1 Cadeia com hopping escalonado	28
3.1.1 Diagonalização de $H_{\text{hop}}^{(\pm)}$ para $V_{\pm} = 0$	31
3.1.2 Diagonalização perturbativa de $H_{\text{hop}}^{(\pm)}$	31
3.2 Transferência de estado quântico: uma breve revisão	33
3.2.1 Protocolo básico	34
3.2.2 Estados bilocalizados	35
3.3 Transferência de estado quântico em cadeias escalonadas sem átomos	37
3.4 Cadeia particionada	40
3.5 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Hubbard	44
3.5.1 Regime de fraco acoplamento átomo-campo	45

3.5.2	Regime de forte acoplamento átomo-campo	46
3.6	Transferência de estados atômicos e polárítions	47
3.6.1	Transferência de estado atômico	47
3.6.2	Transferência de poláríton	49
3.7	Conclusões	52
4	Cavidades acopladas em redes complexas	55
4.1	Redes de Apolônio	56
4.2	Modelo Jaynes-Cummings Hubbard	57
4.3	Espectro de campo livre	60
4.4	Evolução temporal	62
4.4.1	Regime de fraca interação átomo-campo	63
4.4.2	Regime intermediário e de forte interação átomo-campo	70
4.5	Regimes de interação: visão geral	72
4.6	Conclusões	74
5	Considerações finais	75
	Referências	78

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Ilustração conceitual de uma rede quântica formada por uma CCA, cada cavidade contendo um átomo de dois níveis. O canal fotônico (operando a uma certa taxa J) pode ser implementado por fibras ópticas ou simplesmente ajustando as cavidades muito próximas entre si (como no modelo JCH), de modo a sobrepor os modos de campo eletromagnético. O mapeamento reversível de estados quânticos entre luz e matéria (à taxa g) é então o recurso mais fundamental neste tipo de estrutura. Dessa forma, CCAs podem ser utilizadas para realizar protocolos fundamentais em processamento de informação quântica, tais como criação e distribuição de emaranhamento e transferência de estado quântico, além de simular sistemas quânticos fortemente correlacionados. 11
- Figura 2 – Principais parâmetros e processos de uma cavidade óptica. Um átomo de dois níveis com frequência de transição ω_a interage com um modo do campo de frequência ω_f a uma taxa g . Neste trabalho, assumimos que processos dissipativos ocorrem em uma escala temporal muito maior (da ordem κ^{-1} , γ^{-1}) do que a interação átomo-campo propriamente dita e portanto não serão levados em conta. 17

- Figura 3 – Auto-energias de uma cavidade descrita pelo modelo JC para diversos valores da dessintonia Δ . As duas bandas de poláritons, $\{|-, i\rangle\}$ e $\{|+, i\rangle\}$ (o estado $|g, 0\rangle$ é único), se anti-cruzam quando $\Delta = 0$, onde a diferença entre os dois níveis é dada por $2g\sqrt{n}$. Fonte: adaptada da Ref. [45]. 18
- Figura 4 – (a) Modelo conceitual de uma rede unidimensional de cavidades acopladas. Fótons tunelam entre cavidades vizinhas a uma taxa J . Cada cavidade contém um átomo de dois níveis (qubit) interagindo com o campo, a uma taxa g , de acordo com o modelo JC. (b) Dímero de cavidades acopladas em um circuito supercondutor (implementado experimentalmente em [63]). Duas linhas de transmissão de microondas são acopladas em série à taxa J , definida pela capacitância efetiva dos ressonadores. Cada uma destas é fortemente acoplada com um qubit supercondutor a uma intensidade dada por g . Efeitos dissipativos são indicados por κ , que é a taxa na qual os fótons escapam do sistema, e γ que é a taxa de emissão espontânea do qubit. Fonte: Ref. [61]. (c) Modelo experimental de uma rede bidimensional de cavidades em um cristal fotônico. O cristal é definido por variações periódicas no índice de refração, causados pelas vacâncias. As cavidades por sua vez são representadas pela região ao redor dos átomos. Fonte: Ref. [50] 20
- Figura 5 – Formação de poláritons no modelo JCH no subespaço de uma excitação em uma cadeia (a) uniforme com $N = 50$ cavidades e (b) escalonada com $N = 51$ cavidades ($\eta = 0.5$). A frequência atômica ω_a está no centro da banda ($\omega_a = 0$) e os auto-vetores estão organizados em ordem crescente de energia (de baixo para cima). 24

- Figura 6 – Esboço de uma CCA com hopping escalonado, onde $J_1 = (1 + \eta)J$ e $J_2 = (1 - \eta)J$. O modo de campo eletromagnético confinado em cada cavidade pode interagir com um átomo de dois níveis a uma taxa g 29
- Figura 7 – (a) Espectro do Hamiltoniano (3.1) no espaço de uma excitação (em unidades de J). $\Delta\omega$ é o espaçamento entre o par de bandas correspondente aos modos não-localizados, enquanto que $\delta\omega = \omega_{b-} - \omega_{b+}$ (ver quadro embutido) é a diferença de energia entre os modos discretos [ver Eq. (3.8)]. (b) Distribuição espacial de $|\alpha_{b\pm}\rangle$. Os gráficos foram obtidos por diagonalização numérica da Eq. (3.1) para $\eta = -0.25$ e $N = 50$ (os resultados obtidos por teoria da perturbação, Eqs. (3.7) e (3.9), mostram-se em ótima concordância com os exatos). 33
- Figura 8 – Amplitude de borda $|\langle\alpha_{b\pm}|a_1^\dagger a_N|\alpha_{b\pm}\rangle|$ vs. J_1/J_2 para diversos valores de N (em ordem crescente de cima para baixo) no caso de uma cadeia escalonada (a) descrita pelo Hamiltoniano (3.1) e um canal uniforme (b) descrito pelo Hamiltoniano (3.17). Note que J_1/J_2 decresce da direita para esquerda. Cada gráfico foi obtido por diagonalização numérica exata do Hamiltoniano. 38
- Figura 9 – Amplitude de borda total $|\langle a_1^\dagger a_L \rangle|$ [(a) e (b)] e razão da diferença de energia $\delta\omega_{m,N}/\delta\omega_{1,L}$ [(c) e (d)] em função de J_{mod}/J para diferentes valores de N no caso de uma CCA escalonada particionada. Lado esquerdo [(a) e (c)] refere-se a uma cadeia com duas partições ($m = 2$), enquanto que o lado direito [(b) e (d)] corresponde a uma cadeia com três partições ($m = 3$). Para ambas as configurações, fixamos a distorção em cada partição para $\eta = -0.5$ (aproximadamente $J_1/J_2 = 0.33$). 42

Figura 10 – Máximo valor da fidelidade média \mathcal{F} [Eq. 3.11] após um período de oscilação de Rabi, isto é $\tau = 2\pi/\delta\omega_{m,N}$, em função de J_{mod}/J . Consideramos $L = 24$, $J_1 = 0.3J$ e $J_2 = J$, e diferentes configurações de partição (cada uma especificada por m). Em cada painel, a figura interna mostra o tempo de transmissão τ (em unidades de J^{-1}) em função de J_{mod}/J em escala logarítmica-linear. Para a cadeia não-particionada ($m = 1$), a fidelidade máxima e o tempo de transmissão são, respectivamente, $\mathcal{F} \simeq 0.98$ e $\tau \simeq 3 \cdot 10^6 J^{-1}$. . . 43

Figura 11 – Evolução temporal da excitação (a) fotônica, (b) atômica e da (c) amplitude de transição ao longo de uma CCA escalonada com 10 sítios preparada inicialmente em $|\Psi(0)\rangle = |e_1\rangle$. Em (a) [(b)], mostramos a probabilidade de encontrar a excitação fotônica (atômica) na primeira cavidade (curva fina preta), na última (curva espessa vermelha) e nas cavidades do canal $2 \leq x \leq N - 1$ (curva tracejada azul). No painel (a), as curvas representando a probabilidade de ocupação fotônica na primeira e na última cavidade estão sobrepostas. Os gráficos foram obtidos por diagonalização numérica da Eq. (3.20) para $\eta = -0.5$, $g = 10^{-6}J$ e $\omega_a = \omega_{b+}$. . . 49

- Figura 12 –Evolução temporal da amplitude de transição para um poláriton simétrico preparado na primeira cavidade de uma CCA escalonada contendo 30 cavidades para (a) $\eta = 0$, (b) $\eta = -0.25$ w (c) $\eta = -0.5$. Em (d), mostramos os caso de uma CCA particionada para $m = 3$ com $J_{\text{mod}} = 0.1J$ (curva pontilhada vermelha) e para $m = 5$ com $J_{\text{mod}} = 0.3J$ (curva espessa cinza). Note que J_{mod} foi ligeiramente ajustado de modo a garantir a formação de estados bilocalizados (ver Seção 3.4). O parâmetro de distorção foi fixado para $\eta = -0.5$, $g = 0.01J$ e $\omega_a = 0$. Os gráficos foram obtidos por uma diagonalização numérica da Eq. (3.20) [com H_{hop} sendo substituído por H_{mod} em (d)]. 52
- Figura 13 –Segunda geração ($n = 2$) do empacotamento de esferas (linhas contínuas) e a rede de Apolônio correspondente (linhas pontilhadas). 57
- Figura 14 –Rede de Apolônio para $n = 4$ (43 vértices). A primeira geração é formada pelos vértices 1 a 4, a segunda inclui 5 a 7, a terceira 8 a 16 e a quarta 17 a 43. Os vértices da extremidade foram representados em maior tamanho por pura conveniência. Este é o esquema de numeração que utilizaremos aqui. 59
- Figura 15 –(a) A razão de participação dos auto-estados ξ_j/N (colunas) de H_{hop} e as amplitudes $|\langle\phi_j|i\rangle|^2$ para $i = 4, 3, 8$ e 18 para $n = 4$ (43 vértices). (b) Banda de frequência dos modos normais. Os auto-estados estão dispostos de acordo com os valores de ϕ_j em ordem crescente (em unidades de J) ou, em cada grupo degenerado, pelos valores de ξ_j/N 61

- Figura 16 – Probabilidade total de ocupação das componentes fotônica (curva sólida) e atômica (curva tracejada), $\sum_{\ell} \pi_{\ell k}^{tipo}$, para um estado inicial puramente atômico, $|\psi_k(0)\rangle = |e_k\rangle$, na RA de quarta geração, no regime de fraco acoplamento átomo-campo com $J/g = 10^3$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} 65
- Figura 17 – Probabilidade de ocupação fotônica e atômica para o estado inicial $|\psi_4(0)\rangle = |e_4\rangle$ na quarta geração da RA. As curvas mais relevantes estão indicadas na figura. Os parâmetros do sistema são $J/g = 10^3$ e $\omega_a = \phi^{hub}$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} 66
- Figura 18 – Evolução temporal da excitação fotônica através da RA de (a) terceira geração (16 vértices) e (b) quarta geração (43 vértices) para o regime de forte interação cavidade-cavidade. O eixo vertical representa cada vértice (cavidade) da rede. O estado inicial $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$ foi preparado para diversos k 's. Os parâmetros do sistema são $J/g = 10^3$ e $\omega_a = 0$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} . A numeração para cada vértice da RA está disponível na Fig. 14. 67

Figura 19 – Média da probabilidade de ocupação fotônica em um longo período, $\chi_{\ell k}^{ph}$, para (a) $n = 4$ (43 vértices), (b) $n = 5$ (124 vértices) e (c) $n = 6$ (367 vértices). Os parâmetros do sistema são $J/g = 10^3$ e $\omega_a = 0$. O formato das curvas é simétrico uma vez em que $\chi_{\ell k}^{ph} = \chi_{k \ell}^{ph}$ para todo k e ℓ , e os mais altos valores são χ_{kk}^{ph} , isto é, a média da probabilidade de retorno ao estado inicial, como já era esperado. Apesar de não disponibilizarmos a identificação dos vértices pertencendo a gerações mais altas do que $n = 4$, o objetivo desta figura é fornecer uma idéia de como as sub-redes e vértices de diferentes gerações são conectados entre si. Em cada geração acima, o ramo mais escuro representa a média da probabilidade de transporte entre vértices da atual geração para vértices pertencentes a anterior. As regiões em forma de quadrado indicam conexões entre vértices com o mesmo γ 69

Figura 20 – As figuras (a) e (c) mostram a distribuição da média da probabilidade de ocupação fotônica e atômica para $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$ preparado nos vértices $k = 4$ e $k = 18$, respectivamente, e as figuras (b) e (d) mostram a probabilidade total da ocupação de ambas as componentes. Os parâmetros do sistema são $n = 4$, $J/g = 1$ e $\omega_a = 0$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} . A média das probabilidades de retorno são $\chi_{44}^{ph} \approx 0.26$, $\chi_{44}^{at} \approx 0.14$, $\chi_{1818}^{ph} \approx 0.103$ e $\chi_{1818}^{at} \approx 0.105$ 71

Figura 21 – Comparação entre a propagação atômica e fotônica do regime de forte hopping, $J/g = 10^3$ ao regime de forte acoplamento átomo-campo, $J/g = 10^{-3}$, para um estado inicial do tipo $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$ preparado em $k = 4$. Em (a), mostramos a probabilidade de retorno do fóton, π_{44}^{ph} , e em (b), sua correspondente atômica. Os parâmetros do sistema são $n = 4$ e $\omega_a = 0$ 72

Lista de abreviaturas e siglas

CCA	Cadeia de cavidades acopladas.
JC	Jaynes-Cummings.
JCH	Jaynes-Cummings-Hubbard.
QST	Transferência de estado quântico (do inglês “ <i>quantum-state transfer</i> ”).
RA	Rede de Apolônio.

Capítulo 1

Introdução

Em 1982, Richard Feynman [1] sugeriu que a melhor maneira de simular fenômenos quânticos seria utilizar justamente outros sistemas quânticos uma vez que, classicamente, a quantidade de parâmetros necessários para tal procedimento cresce exponencialmente com a dimensão do sistema em questão. Desde então, o conceito de *computador quântico*, isto é, a possibilidade de processar informações de acordo com os fenômenos da mecânica quântica vem sendo um dos tópicos mais explorados nas últimas décadas [2].

Do ponto de vista tecnológico, a forma vigente na qual processamos informações haverá de ser reformulada inevitavelmente. Computação é um processo físico que requer diversos componentes eletrônicos (capacitores, transistores, diodos, etc.) para realizar um determinado conjunto de operações lógicas. Ocorre que para desenvolver computadores mais rápidos e eficientes, necessita-se de mais e mais componentes. Em contrapartida, de modo a manter toda a estrutura em um tamanho razoável, os dispositivos eletrônicos têm se tornado cada vez menores. Como é de se esperar, a tendência é chegar ao ponto em que os circuitos irão se comportar de acordo com as leis da mecânica quântica, daí surgindo a necessidade de uma reestruturação na forma de conduzir processos lógicos.

Um computador quântico universal [3], isto é, capaz de realizar qualquer algo-

ritmo quântico, ainda é uma proposta bastante idealizada. Não obstante, protocolos computacionais destinados especificamente para reproduzir as propriedades de um dado sistema quântico já estão sendo implementados (uma ótima revisão sobre o assunto está disponível em [4]), e assim a simulação de sistemas altamente complexos torna-se mais promissora a curto prazo. Uma vez implementados, computadores quânticos serão capazes de realizar protocolos computacionais de maneira muito mais eficiente do que máquinas convencionais (computadores “clássicos”), tais como a fatoração de números primos [5] em tempo acessível¹, busca em um banco de dados [6] e criptografia [7, 8], entre outros. Além disso, há protocolos que sequer possuem um análogo clássico, tal como o teleporte de informação quântica [9]. Candidatos para a implementação física de um computador quântico incluem circuitos supercondutores [10, 11], armadilhas iônicas [12] e redes ópticas [13], entre muitos outros [14]. Esta tese em particular é inserida no contexto de processamento de informação quântica baseado na interação entre luz e matéria, i.e., sistemas híbridos átomo-cavidade, que têm se destacado muito recentemente [15–19].

Neste capítulo, introduzimos a unidade fundamental de informação quântica, o *qubit*, assim como algumas de suas propriedades fundamentais na Seção 1.1. Nas Seções 1.2 e 1.3 discutimos acerca de alguns tópicos relacionados a simulação quântica, eletrodinâmica quântica de cavidades e, particularmente, o modelo Jaynes-Cummings-Hubbard (JCH), tema central deste trabalho. Redes quânticas serão introduzidas na Seção 1.4 e na Seção 1.5 expressamos os principais objetivos desta tese, assim como sua organização.

¹O algoritmo quântico de Shor [5] é capaz de quebrar protocolos de criptografia de chave-pública atuais, tal como o sistema RSA, dada a possibilidade de fatorizar números primos em um tempo plausível ($t \sim \log N$, onde N é o tamanho da entrada), contrariamente a qualquer algoritmo clássico conhecido.

1.1 Informação quântica

A grande vantagem da computação quântica está diretamente relacionada às propriedades fundamentais da mecânica quântica, tais como *superposição* e *emaranhamento* [2]. A primeira nos leva a definir a unidade básica de informação quântica, o qubit (do inglês “*quantum bit*”), que é uma superposição (combinação linear) dos estados da base computacional clássica 0 e 1,

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (1.1)$$

onde a e b são números complexos, em geral, satisfazendo $|a|^2 + |b|^2 = 1$, onde $|a|^2$ ($|b|^2$) é a probabilidade de medir o qubit no estado $|0\rangle$ ($|1\rangle$). Dessa forma, a informação do estado quântico da Eq. (1.1) está contida nos coeficientes a e b . Em outras palavras, um qubit é um vetor bidimensional escrito em termos de uma base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. A principal característica é que ambos os níveis $|0\rangle$ e $|1\rangle$ existem *simultaneamente*, em contraste com a física clássica (e o senso comum). Por mais que uma medida resulte em apenas uma das alternativas, o potencial da computação quântica está associado ao fato de os estados estarem em superposição, assim fornecendo uma plataforma natural para processamento em paralelo [3]. Isso torna-se ainda mais evidente ao considerar diversos qubits. Se dispomos de um sistema com N qubits, $|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle_N$, podemos gerar uma superposição de 2^N estados. É fácil observar que já para um número razoável de qubits, armazenar e manipular todos os estados envolvidos torna-se impraticável em um computador clássico.

Um qubit pode ser implementado fisicamente por meio de qualquer sistema que apresente dois níveis, ou um determinado par de estados que possam ser efetivamente desacoplados do restante do espectro. Deve-se levar em conta, porém, a viabilidade experimental do sistema no que se refere a controle e proteção do qubit, isto é, um bom qubit deve ser isolado o suficiente de modo a reprimir processos de decoerência [20], assim mantendo suas propriedades quânticas. Qubits podem representados

experimentalmente por meio de átomos ultra-frios [13], spin eletrônico e nuclear [21], polarização e localização de um fóton [22] e junções de Josephson (circuitos supercondutores) [10], entre outros [14].

A outra propriedade, o emaranhamento quântico [23], é um fenômeno onde dois ou mais sistemas quânticos (e.g., partículas) apresentam correlações não-locais (e não-clássicas) entre si, independentemente da distância em que se encontram. Resulta que um estado emaranhado não pode ser completamente descrito através de um de seus constituintes sem levar em conta as outras partes do sistema. Por exemplo, considere o estado de dois qubits [ver Eq. (1.1)]

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = \frac{1}{2}(|00\rangle_{12} + |01\rangle_{12} + |10\rangle_{12} + |11\rangle_{12}). \quad (1.2)$$

O estado acima é denominado *estado produto*, porque cada qubit pode ser expresso individualmente por meio de sua função de onda $|\psi\rangle_i$. Em contrapartida, há estados onde essa separação não é possível, i.e., estados emaranhados. Vamos então analisar os seguintes estados:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12}), \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{12} - |11\rangle_{12}), \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{12} + |10\rangle_{12}), \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{12} - |10\rangle_{12}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Estes formam um conjunto conhecido como *estados de Bell* [2] e representam emaranhamento máximo entre dois qubits. Vamos agora supor que Alice (A) e Bob (B) dividam um estado emaranhado da forma $|\Phi^+\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B$. O estado é dito emaranhado por não ser separável, isto é, não é possível escrever $|\Phi^+\rangle$ como um produto direto das partículas possuídas por ambos (o mesmo é válido para qualquer um dos estados de Bell). Sendo assim, nenhum dos dois, em sua perspectiva, possui informação completa sobre todo o sistema. Toda a informação está contida nas correlações existentes entre as duas partículas. Considerando que Alice e Bob

disponham de uma coleção de estados $|\Phi^+\rangle$ e que cada um realize medidas na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, a cada medida eles podem obter, individualmente, um dos dois estados com igual probabilidade ($1/2$). Porém, ao comparar os resultados eles irão notar que estes são perfeitamente correlacionados, isto é, se Alice obteve como resultado o estado 0 (1), Bob também mediu 0 (1). O ponto crucial é que mesmo as medidas sendo aleatórias na concepção de cada um, os resultados estão correlacionados, como se uma das partículas “soubesse” o resultado da medida realizada na outra partícula instantaneamente, não importando a distância física entre elas. Note também que as mesmas correlações são obtidas ao modificar a base na qual foram realizadas as medidas. Podemos definir, por exemplo, $|\pm\rangle \equiv (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ e iremos obter $|\Phi^+\rangle = |+\rangle_A |+\rangle_B + |-\rangle_A |-\rangle_B$, ou seja, o mesmo estado de Bell.

Estados emaranhados são recursos fundamentais para o processamento de informação quântica [23]. Uma das aplicações mais conhecidas é o teleporte quântico [9]. Neste protocolo, Alice deseja enviar um estado quântico arbitrário para Bob. Para tal, eles dispõem de um par de partículas emaranhadas e um canal de comunicação clássica. A grosso modo, o estado quântico é transmitido da seguinte forma: Alice realiza uma medida nos dois qubits que ela tem acesso (o qubit a ser enviado e a partícula emaranhada) projetando-os em um dos quatro estados de Bell [Eq. (1.3)]; Alice então comunica (classicamente) o resultado a Bob que, por sua vez, pode realizar operações locais de modo a recuperar o estado que Alice preparou. O teleporte quântico já foi demonstrado experimentalmente em diversas plataformas, tais como sistemas atômicos [24, 25] e ópticos [26, 27].

Apesar de ser um campo em rápido desenvolvimento, a computação quântica ainda está em sua infância em termos da possibilidade de implementar um computador quântico prático para diversas finalidades. Em 2000, David DiVincenzo listou cinco critérios fundamentais que deve-se levar em conta na construção de um computador quântico [28]: i) o sistema físico deve ser escalável e os qubits bem definidos; ii) qubits tem de ser inicializados corretamente; iii) o tempo de decoerência

dos qubits deve ser muito maior do que o tempo de operação das portas lógicas; iv) devemos dispor de um conjunto universal de portas quânticas; v) resultados de saída (qubits) devem ser medidos com alta precisão. Um desafio crucial na implementação física de um computador quântico está relacionado ao terceiro critério. Note que de modo a processar informação quântica devemos, obviamente, manter as propriedades quânticas do sistema o que, infelizmente, não é tão simples. Sistemas reais sofrem interações com o ambiente, que por sua vez representa inúmeros graus de liberdade. Já que não podemos ter um controle absoluto sobre todas as variáveis externas ao sistema em questão, a interação faz com que a informação quântica decaia irreversivelmente, resultando em decoerência [2, 20, 29], isto é, processos como dissipação de um fóton em uma cavidade ou guia de onda, emissão espontânea de um átomo ou atenuação de fase de um qubit, entre outros.

1.2 Simuladores quânticos

Dadas as diversas dificuldades técnicas para se construir um computador quântico universal em larga escala e robusto contra processos de decoerência, o processamento de informação quântica visando tarefas mais específicas, tal como a simulação de sistemas quânticos [4, 30], tem sido extensivamente explorada nas últimas décadas

Como mencionado no início deste capítulo, simular um sistema quântico de altas dimensões é uma tarefa bastante exigente computacionalmente (senão impossível). Em virtude disso, diversas técnicas numéricas e analíticas foram desenvolvidas para lidar com sistemas quânticos de muitos corpos tais como o método de Monte Carlo, campo médio, teoria do funcional da densidade, grupos de renormalização, entre muitos outros [31]. Mesmo assim, esses métodos apresentam algumas limitações e podem não ser aplicáveis em certos regimes de interação. Além disso, a acessibilidade desses sistemas é experimentalmente impraticável dadas as escalas de tempo e espaço envolvidas. Conseqüentemente, diversas estruturas artificiais (passíveis de um alto

grau de controle), i.e., simuladores quânticos, têm sido exploradas para tal finalidade [4, 19, 32, 33].

A idéia central da simulação quântica é então utilizar um sistema quântico controlável com o objetivo de emular/simular outro sistema quântico menos acessível experimentalmente (ou numericamente). Por exemplo, suponha que um dado estado quântico preparado em $|\phi(0)\rangle$ evolua para $|\phi(t)\rangle$ através da transformação unitária $U = e^{-iHt/\hbar}$, onde H é o Hamiltoniano do sistema. Agora considere que dispomos de um outro sistema, o simulador, cujo Hamiltoniano é dado por H_{sim} , e o preparamos em um dado estado $|\phi(0)'\rangle$ que evolui para $|\phi(t)'\rangle$ via $U' = e^{-iH_{\text{sim}}t/\hbar}$. O objetivo do simulador quântico é então gerar um mapeamento entre as entradas $|\phi(0)\rangle$ e $|\phi(0)'\rangle$, as transformações U e U' , e as saídas $|\phi(t)\rangle$ e $|\phi(t)'\rangle$.

A simulação quântica encontra aplicações que vão desde a física da matéria condensada até física de altas energias e cosmologia [4]. Na primeira, o foco é explorar sistemas tais como modelos de Hubbard, redes de spins, materiais supercondutores, entre outros (ver, e.g., [4] e suas referências). O estudo de sistemas quânticos de muitos corpos é extremamente importante no que se refere a otimização e desenvolvimento de novos materiais, assim como a resolução de problemas fundamentais em sistemas fortemente correlacionados. Estes materiais geralmente são encontrados (ou manufaturados) em estruturas cristalinas. Dado o alto grau de complexidade para descrevê-los de maneira exata, o estudo das propriedades destes materiais se dá por modelos simplificados tal como o modelo de Hubbard [34], que descreve elétrons interagentes se propagando entre orbitais atômicos. Sua versão bosônica, o modelo Bose-Hubbard [35], também é amplamente explorado e, apesar de não ter nenhum correspondente na natureza, é utilizado para descrever átomos interagentes em uma rede óptica e possui diversas aplicações em processamento de informação quântica [32, 36]. Em particular, a transição de fase quântica [37] entre isolante de Mott e superfluido foi demonstrada experimentalmente utilizando átomos bosônicos ultra-frios em uma rede óptica gerada por lasers estacionários [38]. Essa transição de

fase ocorre devido a competição entre a interação local e o hopping² destes átomos através da rede. Não faz parte do intuito desta tese entrar em detalhes acerca desses experimentos utilizando redes ópticas. Porém, o leitor interessado pode consultar a Ref. [32] para uma recente revisão sobre o assunto.

1.3 Redes de cavidades acopladas

Muito recentemente, uma outra plataforma para processamento de informação quântica tem chamado bastante atenção. Em virtude de importantes avanços experimentais na fabricação e no controle de interação entre átomos e fótons em microcavidades ópticas de silício [39], cristais fotônicos [40, 41] e eletrodinâmica quântica de circuitos [16, 42], a comunidade acadêmica passou a considerar esses sistemas como potenciais simuladores quânticos [17, 43–46]. Tal arquitetura consiste em uma cadeia de cavidades acopladas (CCA), onde modos eletromagnéticos podem interagir com átomos (reais ou artificiais) confinados. Estes sistemas são passíveis de um alto grau de controle local (e.g., medidas), uma vez que a distância entre cavidades vizinhas pode ser da ordem de dezenas de micrômetros, assim facilitando o acesso por frequências ópticas. Outra vantagem é que a interação átomo-campo induz a formação de poláritons (pseudo-partículas envolvendo excitações atômicas e fotônicas), assim possibilitando a exploração de novos regimes fortemente correlacionados entre luz e matéria.

O protótipo mais utilizado para estudar CCAs é o tão conhecido modelo JCH [44, 45] onde fótons podem se propagar (tunelar) entre cavidades vizinhas (devido a sobreposição dos modos de campo entre cavidades adjacentes) ao mesmo tempo que interagem como sistemas de dois níveis (átomos). No regime de forte interação átomo-campo, uma repulsão efetiva entre fótons – induzida pela não-linearidade no

²Vamos aqui manter o termo “*hopping*”, em língua inglesa, para denotar a propagação de uma partícula quântica entre sítios vizinhos, devida a superposição entre suas respectivas funções de onda locais.

espectro de energia das cavidades (vamos detalhar isso no Capítulo 2) – é estabelecida, levando o sistema a um estado do tipo isolante de Mott [44]. A competição entre este efeito, denominado *bloqueio de fótons* [47], e o hopping de fótons cria uma transição de fase quântica entre as fases isolante de Mott e superfluido [43–45, 48–57], em analogia com o modelo Bose-Hubbard [35].

Apesar de uma fase quântica (ou clássica) somente ser apropriadamente definida no limite termodinâmico, as propriedades mencionadas acima também se fazem presentes no caso de poucas cavidades e poucas excitações. Inclusive, duas ou mais cavidades [50, 58–63] já são suficientes para gerar uma interação efetiva entre fótons mediada pela não linearidade presente na interação local em uma cavidade. Em particular, em [50] foi mostrado que o diagrama de fases para algumas poucas cavidades (obtido por diagonalização direta) é bastante similar ao diagrama obtido por aproximação de campo médio [45].

O modelo JCH foi recentemente implementado utilizando íons aprisionados em [64], onde foi demonstrada a existência de uma transição de estado fundamental isolante para superfluido analisando a dinâmica de dois íons de cálcio confinados no vácuo e controlados por lasers. Outra realização experimental do modelo foi baseada em circuitos supercondutores [63]. Nesta, foi obtida a transição de deslocalização-localização de fótons [61] em uma CCA com dois sítios. No limite de muitos fótons $n \gg 1$, há um certo valor crítico para o acoplamento átomo-campo, g_c [61] (J sendo a taxa de hopping dos fótons), acima do qual uma localização coletiva entre fótons é induzida (quando $g < g_c$, a população fotônica oscila periodicamente entre as duas cavidades). Também é possível distinguir estes dois regimes no caso de poucos fótons. Neste caso, porém, não há um valor crítico para g uma vez que a transição é suave e a dinâmica apresenta características puramente quânticas [61–63]. Esse fenômeno pode ser associado diretamente com a transição de fase superfluido-isolante de Mott mencionada anteriormente [65] e portanto comprova, indiretamente, a existência desta transição.

É importante mencionar que CCAs já haviam sido consideradas para processamento de informação quântica [66] antes de serem introduzidas como simuladores quânticos em [43–45]. Excelentes revisões sobre o assunto podem ser encontradas nas Refs. [46, 59] (ver também as Refs. [19, 33], no contexto de eletrodinâmica quântica de circuitos).

1.4 Redes quânticas

Além de serem simuladores quânticos promissores, CCAs se inserem naturalmente no contexto de redes quânticas [18, 67–69], estruturas que formam a base para protocolos de comunicação quântica e computação quântica distribuída. Fótons são bons transmissores de informação, podendo se propagar por longas distâncias sem grandes perdas de energia (e.g., em fibras ópticas) e átomos servem como memórias quânticas robustas [70], i.e., podem armazenar o estado quântico com tempos de coerência relativamente longos. Dessa forma, interfaces átomo-cavidade são blocos fundamentais na arquitetura de redes quânticas, i.e., tais sistemas formam vértices capazes de armazenar, transmitir e receber informação quântica (ver Fig. 1). A conectividade (canal quântico) fica por conta do transporte coerente de fótons. Um protótipo para este tipo de rede quântica foi recentemente implementado utilizando dois átomos de rubídio, cada um confinado em uma armadilha de dipolo, situados em diferentes laboratórios conectados por uma fibra óptica [18].

Essencialmente, uma rede quântica deve ser capaz de distribuir emaranhamento, transferir estados quânticos (vamos entrar em detalhes sobre este protocolo no Capítulo 3) e operar portas lógicas entre qubits localizados em diferentes pontos da rede. Partindo desta perspectiva, outras vertentes no estudo de CCAs se inserem no contexto de transporte quântico de excitações fotônicas, atômicas, e híbridas [71–83], criação de emaranhamento [84–87], teleporte quântico [88] e portas lógicas quânticas [66, 89]. Esses sistemas também exibem uma dinâmica não-trivial mesmo quando

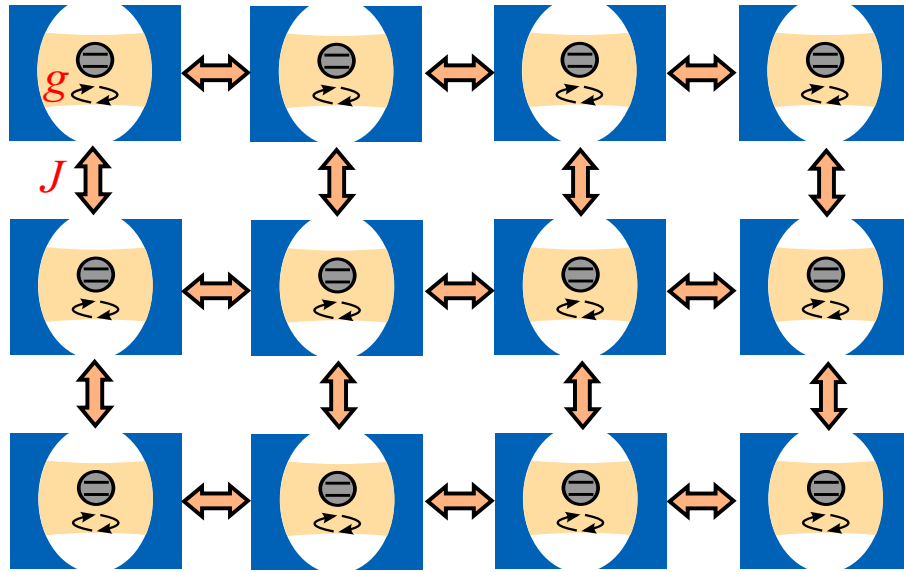


Figura 1 – Ilustração conceitual de uma rede quântica formada por uma CCA, cada cavidade contendo um átomo de dois níveis. O canal fotônico (operando a uma certa taxa J) pode ser implementado por fibras ópticas ou simplesmente ajustando as cavidades muito próximas entre si (como no modelo JCH), de modo a sobrepor os modos de campo eletromagnético. O mapeamento reversível de estados quânticos entre luz e matéria (à taxa g) é então o recurso mais fundamental neste tipo de estrutura. Dessa forma, CCAs podem ser utilizadas para realizar protocolos fundamentais em processamento de informação quântica, tais como criação e distribuição de emaranhamento e transferência de estado quântico, além de simular sistemas quânticos fortemente correlacionados.

apresentam somente um átomo acoplado a uma das cavidades [82, 90–95]. Dessa forma, o átomo também pode se enquadrar como um dispositivo de controle de transmissão de fótons.

1.5 Objetivos e organização da tese

Neste trabalho, voltamos nossa atenção para protocolos de comunicação quântica em CCAs descritas pelo modelo JCH. Em particular, analisamos em detalhe a dinâmica de fótons, excitações atômicas e poláritons em redes unidimensionais e complexas. Vamos mostrar que uma grande variedade de regimes dinâmicos pode ser manipulada a depender da intensidade da interação átomo-campo, da dessintonia entre as duas componentes e do próprio espectro de modos normais induzido pelo campo eletromagnético (i.e., de acordo com a topologia da rede). Iremos então

discutir como isso pode ser utilizado para controlar a propagação de estados quânticos ao longo da rede e estabelecer protocolos eficientes de transferência de estado quântico. O estudo de transmissão de estados quânticos em CCAs é de fundamental importância uma vez que, como mencionado na seção anterior, cavidades ópticas formam blocos essenciais na construção de redes quânticas. Nossos resultados portanto se inserem em uma vasta gama de aplicações em processamento de informação quântica.

Para um bom entendimento da tese, é suficiente que o leitor esteja familiarizado com conceitos básicos de mecânica quântica e segunda quantização. Ótimas introduções sobre estes tópicos podem ser encontradas nas Refs. [2] (voltada para computação quântica) e [31], respectivamente. Outros assuntos serão introduzidos no decorrer deste trabalho, de acordo com a necessidade (e.g., eletrodinâmica quântica de cavidades).

A presente tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 vamos introduzir o modelo Jaynes-Cummings (JC) [96], que descreve a interação de um átomo com um modo de um campo eletromagnético em uma cavidade óptica, e sua extensão para uma série de cavidades acopladas, i.e., o modelo JCH. Vamos então focar a discussão nas propriedades do modelo JCH no subespaço de uma excitação, que servirá de base para os capítulos subsequentes. O Capítulo 3 será baseado na Ref. [83], onde consideramos o modelo JCH definido em uma cadeia unidimensional com um padrão alternado de hopping (acoplamento cavidade-cavidade). Mostramos que estas estruturas induzem auto-estados fortemente localizados e isolados energeticamente. Em determinados regimes de interação átomo-campo, o sistema serve de plataforma para a realização de protocolos de transferência de estado quântico entre longas distâncias. Além disso, introduzimos um procedimento para controle do tempo de transmissão em cadeias escalonadas particionadas. No Capítulo 4, baseado na Ref. [80], vamos investigar a propagação de excitações fotônicas e atômicas em uma rede (complexa) de Apolônio e discutir os diferentes regimes dinâmicos que

podem ser estabelecidos a depender dos parâmetros do sistema e das condições iniciais. Vamos analisar as diversas formas de conectividade entre os vértices da rede e mostrar formas de controle de dispersão e escala temporal da dinâmica. No Capítulo 5 fornecemos uma visão geral dos nossos resultados e discutimos sobre futuras direções do nosso trabalho.

Capítulo 2

Eletrodinâmica quântica de cavidades

Em 1963, E. James e F. Cummings [96] propuseram um modelo teórico para investigar a relação entre a mecânica quântica e a teoria semi-clássica da radiação. Para tal, eles exploraram como a radiação proveniente do modo de um campo eletromagnético monocromático interagia com um sistema de dois níveis (qubit). Apesar de ser um modelo simples, este se tornou crucial no desenvolvimento do campo da *Óptica Quântica* que, basicamente, lida com a teoria da interação entre luz e matéria. Diversas extensões do modelo Jaynes-Cummings envolvendo múltiplos átomos, sistemas de N níveis, entre outras, podem ser encontradas em [97]. Uma derivação completa e detalhada do modelo está disponível em praticamente todos os livros de óptica quântica (ver, por exemplo, Refs. [98, 99]).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Introduzimos o modelo JC e sua estrutura de auto-estados (poláritons) na Seção 2.1. Em seguida, na Seção 2.2 vamos introduzir o modelo Jaynes-Cummings-Hubbard, que descreve uma rede de cavidades (do tipo JC) dispostas de tal maneira que fótons podem se propagar entre sítios vizinhos. Na Seção 2.3 vamos discutir as propriedades do modelo JCH no subespaço de uma excitação, que servirá de base para os Capítulos 3 e 4.

2.1 Modelo Jaynes-Cummings

Considere um átomo de dois níveis com frequência de transição ω_a confinado em uma cavidade óptica e interagindo com um modo do campo eletromagnético de frequência ω_f . Sejam a e a^\dagger os operadores de criação e aniquilação bosônicos, respectivamente, para o modo do campo eletromagnético, onde $\hat{n} = a^\dagger a$ é o operador número. A base do espaço de Hilbert representando apenas a cavidade pode então ser expressa por estados de Fock $\{|n\rangle\}$ com auto-valores n (i.e., número de fótons). Os operadores mencionados acima atuam nesta base de acordo com

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.1)$$

e $a|0\rangle = 0$. O Hamiltoniano para o campo eletromagnético livre corresponde, portanto, ao de um oscilador harmônico quântico de frequência ω_f (vamos assumir $\hbar = 1$ daqui em diante),

$$H_{\text{campo}} = \omega_f \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.2)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Por conveniência, daqui em diante vamos redefinir $H_{\text{campo}} \rightarrow H_{\text{campo}} - \omega_f/2$.

O átomo de dois níveis é descrito pela usual álgebra que descreve um partícula de spin 1/2, i.e., gerada pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Dessa forma, os operadores de levantamento e abaixamento (escada) são definidos por

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y), \quad (2.4)$$

e atuam no átomo segundo $\sigma_+ |g\rangle = |e\rangle$ e $\sigma_- |e\rangle = |g\rangle$ (a operação é nula caso contrário), onde $|g\rangle$ e $|e\rangle$ formam a base para o átomo de dois níveis, representando o estado fundamental (“*ground*”) e excitado, respectivamente. O Hamiltoniano para o átomo livre é então simplesmente expresso por

$$H_{\text{átomo}} = \omega_a \sigma_+ \sigma_-. \quad (2.5)$$

Assumindo a aproximação de dipolo, isto é, considerando que o campo eletromagnético é uniforme mediante as dimensões atômicas, o termo de interação entre átomo e a cavidade é proporcional ao acoplamento entre o campo elétrico quantizado $\hat{\epsilon} = a + a^\dagger$ e o operador polarização $\hat{S} = \sigma_+ + \sigma_-$,

$$H_{\text{int}} = g\hat{\epsilon}\hat{S} = g(\sigma_+a + \sigma_-a^\dagger + \sigma_+a^\dagger + \sigma_-a), \quad (2.6)$$

onde a constante de proporção g é a taxa de acoplamento átomo-campo (também denominada de frequência de Rabi no vácuo).

Ao considerar o sistema composto átomo-campo, o espaço de Hilbert passa a ser constituído pela base $|s, n\rangle \equiv |s\rangle \otimes |n\rangle$, onde $s \in \{g, e\}$. Note que a interação (3.25) conecta subespaços com diferentes números de partículas. De modo a simplificar o modelo (e deixá-lo analiticamente tratável), podemos proceder com a tão conhecida *aproximação de onda girante*. Para entender melhor, vamos escrever o Hamiltoniano e seus operadores na representação da interação, i.e., fazendo a transformação $H_{\text{int},I}(t) = e^{iH_0t}H_{\text{int}}e^{-iH_0t}$ com $H_0 = H_{\text{campo}} + H_{\text{átomo}}$. Os operadores bosônicos e atômicos se transformam da mesma maneira. Expandindo-os até primeira ordem em t , obtemos $a_I(t) = ae^{-i\omega_f t}$ e $\sigma_{-,I}(t) = \sigma_-e^{-i\omega_a t}$. Substituindo estas expressões em $H_{\text{int},I}$, teremos

$$H_{\text{int},I}(t) = g(\sigma_+ae^{i(\omega_f-\omega_a)t} + \sigma_-a^\dagger e^{-i(\omega_f-\omega_a)t} + \sigma_+a^\dagger e^{-i(\omega_f+\omega_a)t} + \sigma_-ae^{i(\omega_f+\omega_a)t}). \quad (2.7)$$

Assumindo que $|\omega_f + \omega_a| \gg |\omega_f - \omega_a|$, os dois últimos termos da Eq. (2.7), que denotam a dependência temporal dos processos que criam ou destroem duas partículas, oscilam muito rapidamente em relação aos outros dois primeiros e, portanto, podem ser descartados. Dessa forma, retornando para a representação usual de Schrödinger, o Hamiltoniano total do sistema, i.e., o modelo JC é escrito da seguinte forma [99]:

$$\begin{aligned} H_{\text{JC}} &= H_{\text{campo}} + H_{\text{átomo}} + H_{\text{int}} \\ &= \omega_f a^\dagger a + \omega_a \sigma_+ \sigma_- + g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \end{aligned} \quad (2.8)$$

O Hamiltoniano de JC obtido acima é o modelo mais fundamental para descrever a interação coerente entre luz e matéria. Em um sistema real (i.e., em contato com o

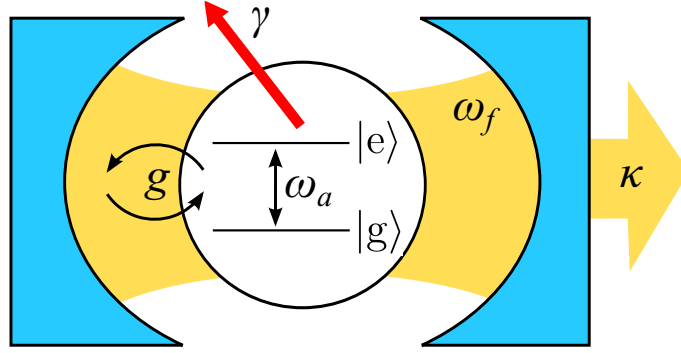


Figura 2 – Principais parâmetros e processos de uma cavidade óptica. Um átomo de dois níveis com frequência de transição ω_a interage com um modo do campo de frequência ω_f a uma taxa g . Neste trabalho, assumimos que processos dissipativos ocorrem em uma escala temporal muito maior (da ordem κ^{-1} , γ^{-1}) do que a interação átomo-campo propriamente dita e portanto não serão levados em conta.

ambiente), outros processos podem ocorrer tais como a irradiação de um fóton para fora da cavidade a uma certa taxa κ e a emissão espontânea do átomo a uma taxa γ (ver Fig. 2). Nesta tese, consideramos que a cavidade óptica está operando no regime de forte acoplamento $g \gg \kappa, \gamma$ e assim podemos descartar efeitos de dissipação. A condição acima é plausível tendo em vista que este regime é experimentalmente acessível em diversas plataformas [40, 42, 100, 101].

É importante notar que no Hamiltoniano (2.8), o número total de excitações (atômica + fotônica) é conservado e, assim, H_{JC} pode ser diagonalizado analiticamente em blocos, uma vez que o termo de interação (proporcional a g) conecta os estados $|g, n\rangle$ e $|e, n-1\rangle$, ou seja, cada bloco é formado por uma matriz 2×2 correspondendo a um número fixo de excitações n . Os auto-estados podem então ser expressos por [45]

$$|\pm, n\rangle = \frac{[-(\Delta/2) \pm \Omega(n)] |g, n\rangle + g\sqrt{n} |e, n-1\rangle}{\sqrt{2\Omega^2(n) \mp \Omega(n)\Delta}}, \quad (2.9)$$

para todo $n \geq 1$, onde $\Omega(n) = \sqrt{ng^2 + \Delta^2/4}$ é a frequência generalizada de Rabi para n fótons e $\Delta = \omega_f - \omega_a$ é a *dessintonia* átomo-campo. Os auto-estados acima são combinações lineares de excitações fotônicas e atômicas e são conhecidos como

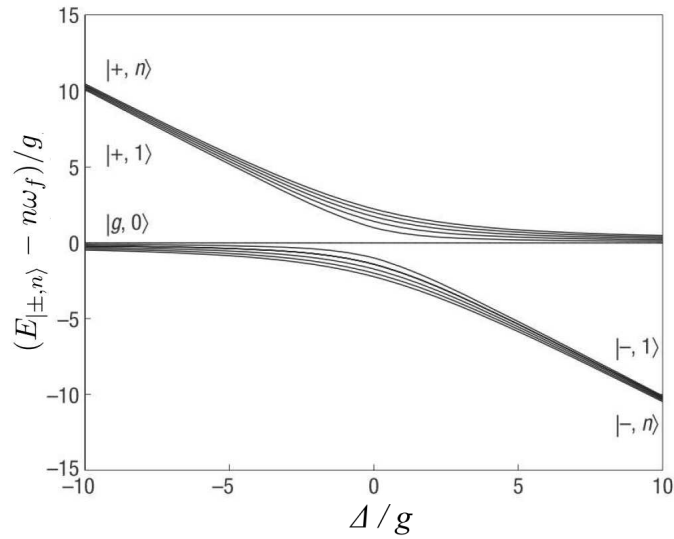


Figura 3 – Auto-energias de uma cavidade descrita pelo modelo JC para diversos valores da dessintonia Δ . As duas bandas de polárítons, $\{|-, i\rangle\}$ e $\{|+, i\rangle\}$ (o estado $|g, 0\rangle$ é único), se anti-cruzam quando $\Delta = 0$, onde a diferença entre os dois níveis é dada por $2g\sqrt{n}$. Fonte: adaptada da Ref. [45].

polárítons. Suas auto-energias são dadas por

$$E_{|\pm, n\rangle} = n\omega_f \pm \Omega(n) - \Delta/2, \quad (2.10)$$

como mostra a Fig. 3. Note que o estado $|g, 0\rangle$, que corresponde ao vácuo, também é um auto-estado de (2.8) com energia $E_{|g, 0\rangle} = 0$.

Note que o espectro de auto-energia do modelo JC possui uma propriedade interessante. De acordo com a Eq. (2.10), é fácil ver que o espaçamento de energia entre os polárítons varia por um fator \sqrt{n} quando $\Delta = 0$ (ver Fig. 3). Essa não-linearidade é a chave para induzir interações efetivas entre fótons (e polárítons), assim tornando CCAs potenciais simuladores quânticos [17] de sistemas fortemente correlacionados, como veremos logo a seguir.

2.2 Modelo Jaynes-Cummings-Hubbard

Assumindo que os modos locais do campo se sobrepõem em cavidades muito próximas, ou seja, a função de onda possui uma amplitude não-nula nas bordas da cavidade, fótons podem tunelar entre cavidades vizinhas a uma certa taxa que

chamaremos de J (parâmetro equivalente ao hopping t no modelo Bose-Hubbard), como ilustrado na Fig. 4.

Considere então uma rede com N cavidades ópticas acopladas dessa forma e dispostas em uma estrutura definida pela matriz de adjacência \mathbf{A} , onde $A_{ij} = 1$ quando os sítios i e j forem conectados e $A_{ij} = 0$ caso contrário. Em cada sítio há uma cavidade contendo um átomo de dois níveis (um qubit, em geral) interagindo com um modo do campo eletromagnético. Esta interação local pode ser descrita pelo modelo JC discutido na seção anterior,

$$H_{\text{JC},i} = \omega_f a_i^\dagger a_i + \omega_a \sigma_i^+ \sigma_i^- + g(\sigma_i^+ a_i + \sigma_i^- a_i^\dagger), \quad (2.11)$$

onde a_i^\dagger (a_i) e σ_i^+ (σ_i^-) são, respectivamente, operadores de criação (aniquilação) fotônico e atômico em uma determinada cavidade i .

O Hamiltoniano da CCA pode ser expresso de acordo com o modelo JCH [44, 45]

$$H_{\text{JCH}} = \sum_{i=1}^N H_{\text{JC},i} - J \sum_{i,j=1}^N A_{ij} a_i^\dagger a_j, \quad (2.12)$$

que opera na base de estados da forma

$$|s_1, n_1\rangle \otimes |s_2, n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |s_N, n_N\rangle. \quad (2.13)$$

Agrupando os estados acima pelo número total de excitações, o Hamiltoniano (2.12) pode ser expresso como $H_{\text{JCH}} = \text{diag}[H_{\text{JCH}}^0, H_{\text{JCH}}^1, H_{\text{JCH}}^2, \dots]$, onde H_{JCH}^m é a matriz expressa na base de estados com um número fixo m de excitações.

Como o Hamiltoniano de JCH definido acima pode representar um sistema fortemente correlacionado e simular transições de fase quântica de maneira análoga ao modelo Bose-Hubbard, uma vez que, aparentemente, não há termos expressando uma interação entre fótons? A não-linearidade das auto-energias de uma cavidade variando em \sqrt{n} (ver Fig. 3) gera o efeito de *bloqueio de fótons* [47], onde o forte acoplamento entre o átomo de uma cavidade e um modo do campo eletromagnético altera a frequência da cavidade de maneira que um segundo fóton não pode ser

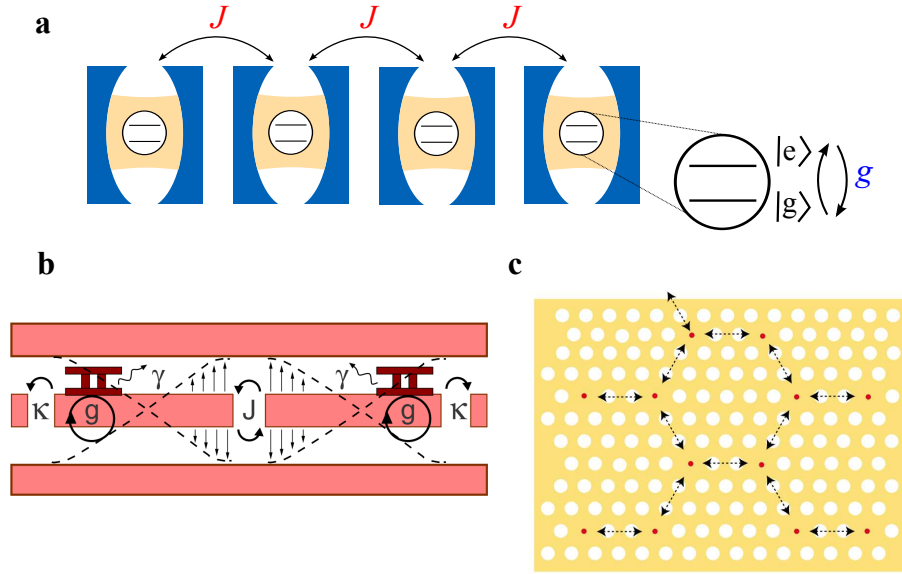


Figura 4 – (a) Modelo conceitual de uma rede unidimensional de cavidades acopladas. Fótons tunelam entre cavidades vizinhas a uma taxa J . Cada cavidade contém um átomo de dois níveis (qubit) interagindo com o campo, a uma taxa g , de acordo com o modelo JC. (b) Dímero de cavidades acopladas em um circuito supercondutor (implementado experimentalmente em [63]). Duas linhas de transmissão de microondas são acopladas em série à taxa J , definida pela capacitância efetiva dos ressonadores. Cada uma destas é fortemente acoplada com um qubit supercondutor a uma intensidade dada por g . Efeitos dissipativos são indicados por κ , que é a taxa na qual os fótons escapam do sistema, e γ que é a taxa de emissão espontânea do qubit. Fonte: Ref. [61]. (c) Modelo experimental de uma rede bidimensional de cavidades em um cristal fotônico. O cristal é definido por variações periódicas no índice de refração, causados pelas vacâncias. As cavidades por sua vez são representadas pela região ao redor dos átomos. Fonte: Ref. [50]

inserido. Para entender melhor essa repulsão efetiva entre fótons, considere o caso ressonante, onde $\Delta = 0$, de maneira que as auto-energias de uma cavidade são dadas por $E_{|\pm, n\rangle} = n\omega_f \pm g\sqrt{n}$. Para apenas um fóton, a menor energia é $E_{|-, 1\rangle} = \omega_f - g$. Para duas cavidades independentes (isto é, que não interagem entre si) a energia total seria de $2E_{|-, 1\rangle} = 2\omega_f - 2g$. Porém, para uma cavidade contendo dois fótons a energia mínima é $E_{|-, 2\rangle} = 2\omega_f - g\sqrt{2}$. Sendo assim, a grosso modo, há um certo custo energético de $E_{|-, 2\rangle} - 2E_{|-, 1\rangle} = (2 - \sqrt{2})g$ para adicionar um outro fóton na cavidade.

Portanto, no regime de forte acoplamento átomo-campo ($g \gg J$), uma repulsão efetiva entre fótons é gerada induzindo o sistema ao estado de isolante de Mott,

contendo um número fixo de excitações por cavidade [43–45]. A competição entre este efeito e o hopping de fótons dá origem à transição de fase quântica [37] de isolante de Mott para superfluido, em analogia ao modelo Bose-Hubbard [35]. Além disso, a natureza composta das partículas no modelo JCH fornece novas direções ao problema. Por exemplo, ajustando a dessintonia Δ é possível acessar outros tipos de fases associados às componentes fotônicas, atômicas ou polaritônicas (híbridas) [58, 60].

2.3 Subespaço de uma excitação

De modo a estudar a dinâmica de excitações fotônicas, atômicas e híbridas, nesta tese vamos especificamente lidar com o subespaço de uma excitação (H_{JCH}^1). Neste limite, a base é formada por estados denotando um fóton $|g, 1\rangle_i$ ou uma excitação atômica $|e, 0\rangle_i$ localizada em uma cavidade i , enquanto as outras cavidades encontram-se no vácuo $|g, 0\rangle_j \forall j \neq i$ (a dimensão do espaço de Hilbert é portanto $2N$). Daqui em diante vamos utilizar a notação

$$\begin{aligned} |1_i\rangle &\equiv |g, 0\rangle_1 |g, 0\rangle_2 \cdots |g, 1\rangle_i \cdots |g, 0\rangle_N, \\ |e_i\rangle &\equiv |g, 0\rangle_1 |g, 0\rangle_2 \cdots |e, 0\rangle_i \cdots |g, 0\rangle_N. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Convém salientar que, nesse caso, efeitos de não-linearidade, como discutidos na seção anterior, são inexistentes. No Capítulo 5 voltaremos a discutir (brevemente) a dinâmica quando interações fóton-fóton estão presentes.

Uma propriedade interessante deste subespaço é que o Hamiltoniano de JCH pode ser desacoplado em termos dos modos normais fotônicos e atômicos, resultando em interações efetivas do tipo JC (o que simplifica bastante o problema). Para provar isto, vamos considerar um Hamiltoniano arbitrário de hopping (campo livre) para uma rede formada por N cavidades da forma

$$H_{\text{hop}} = - \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} (a_i^\dagger a_j + \text{h.c.}), \quad (2.15)$$

onde o fóton tunela apenas entre cavidades adjacentes. Suponha que os auto-estados deste Hamiltoniano sejam expressos por $|\alpha_n\rangle = \sum_{i=1}^N c_{ni} |1_i\rangle$, onde $\{c_{ni}\}$ são coeficientes reais, satisfazendo $H_{\text{hop}}|\alpha_n\rangle = \omega_n|\alpha_n\rangle$. Note que enquanto $\{\alpha_n\}$ forma uma base que diagonaliza H_{hop} , o mesmo não se aplica a H_{JCH} . Dessa forma, aplicando o Hamiltoniano de JCH [como o da Eq. (2.12)] e considerando que g e ω_a não são uniformes ao longo da rede, obtemos ($\omega_f = 0$ por simplicidade)¹

$$\begin{aligned} H_{\text{JCH}}|\alpha_n\rangle &= \sum_i H_{\text{JC},i}|\alpha_n\rangle + H_{\text{hop}}|\alpha_n\rangle \\ &= \sum_i g_i c_{ni} |e_i\rangle + \omega_n|\alpha_n\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Assumindo $g_i = g$ e definindo auto-estados atômicos da forma $|\beta_n\rangle \equiv \sum_{i=1}^N c_{ni} |e_i\rangle$ (i.e., possuindo a mesma distribuição espacial dos modos normais de campo), a equação acima se reduz a

$$H_{\text{JCH}}|\alpha_n\rangle = \omega_n|\alpha_n\rangle + g|\beta_n\rangle. \quad (2.17)$$

Da mesma forma, teremos $H_{\text{JCH}}|\beta_n\rangle = \omega_a|\beta_n\rangle + g|\alpha_n\rangle$ se (e somente se) ω_a for uniforme ao longo da CCA. Assim, de acordo com as condições acima fica claro que podemos reescrever o Hamiltoniano de JCH no subespaço de uma excitação como

$$H_{\text{JCH}} = \sum_n \left[\omega_n \alpha_n^\dagger \alpha_n + \omega_a \beta_n^\dagger \beta_n + g(\beta_n^\dagger \alpha_n + \text{H.c.}) \right], \quad (2.18)$$

onde $\alpha_n = |\alpha_n\rangle \langle \text{vac}|$ ($\beta_n = |\beta_n\rangle \langle \text{vac}|$) é o operador de modo normal fotônico (atômico) e $|\text{vac}\rangle$ é o vácuo.

A Eq. (2.18) então descreve N interações do tipo JC desacopladas entre si. Dessa forma, podemos novamente diagonalizar cada bloco (consistindo em uma matriz bidimensional) e obter os auto-estados e auto-energias de maneira análoga às Eqs. (2.9) e (2.10). O polárítos do modelo JCH são, portanto, combinações lineares entre excitações fotônicas e atômicas distribuídas em toda a CCA, i.e., entre

¹Geralmente assumimos esta condição para centralizar o espectro de frequências normais em torno de zero. Para os Hamiltonianos considerados nesta tese, isso pode ser feito sem perda de generalidade. Dessa forma, a dessintonia átomo-campo Δ fica por conta da frequência de transição atômica ω_a .

$|\alpha_n\rangle$ e $|\beta_n\rangle$, respectivamente. Manipulando ω_a e g/J podemos controlar a formação destes ao longo do espectro de modos normais. Dessa forma podemos gerar diversos regimes dinâmicos a depender destes parâmetros, das condições iniciais e da topologia da rede. Por exemplo, vamos considerar o modelo JCH definido em uma cadeia unidimensional uniforme [Fig. 4(a)],

$$H_{\text{JCH}} = \sum_{i=1}^N H_{\text{JC},i} + H_{\text{hop}}, \quad (2.19)$$

onde o termo de hopping é dado por

$$H_{\text{hop}} = -J \sum_{x=1}^{N-1} (a_{x+1}^\dagger a_x + \text{H.c.}). \quad (2.20)$$

No regime $g \gg J$, i.e., quando o acoplamento átomo-campo é muito mais intenso que a taxa de hopping, e considerando o caso $\Delta = 0$, os auto-estados de (2.19) consistem em poláritons completamente híbridos, de maneira que um estado inicial da forma

$$|\Psi(0)\rangle = (\pm |1_x\rangle + |e_x\rangle)/\sqrt{2} \quad (2.21)$$

i.e., um poláriton do modelo JC [ver Eqs. (2.9) e (2.14)] preparado em uma dada cavidade x , irá se propagar através da rede mantendo sua superposição intacta [75, 80] e satisfazendo a dinâmica de acordo com a dispersão dos modos normais característicos de uma rede uniforme (isto se tornará mais claro nos capítulos subsequentes desta tese). Por outro lado, quando $g \ll J$, o hopping fotônico prevalece e o espectro de H_{JCH} é composto, a princípio, por auto-estados puramente fotônicos e puramente atômicos. Os primeiros correspondem diretamente aos modos normais de campo livre. Os modos normais atômicos, por sua vez, formam uma banda (quasi) degenerada em ω_a . Neste caso, poláritons só serão formados se ω_a for posto em ressonância com uma das frequências normais do campo ω_k [77, 80, 83]. Assim, uma interação átomo-campo pode ser efetuada localmente. Note, porém, que no limite termodinâmico, essa ressonância local não é possível já que a rede uniforme induz um espectro contínuo.

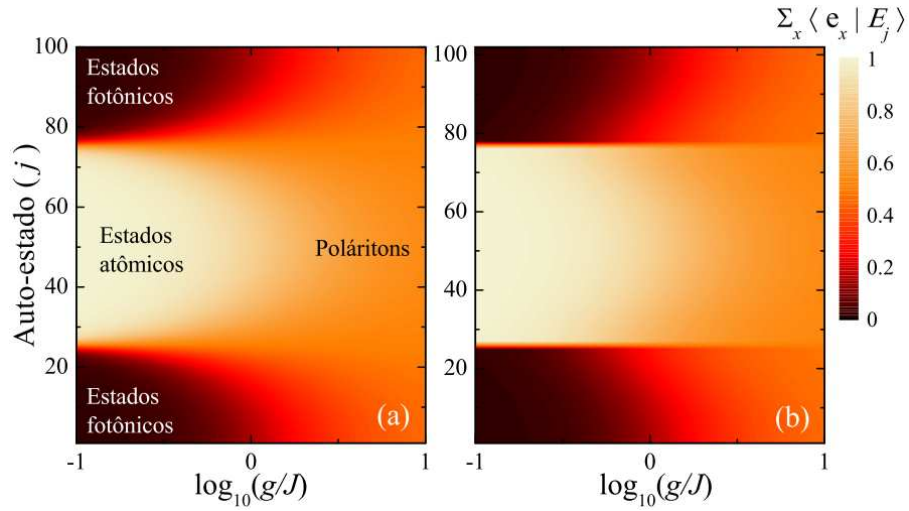


Figura 5 – Formação de polárítions no modelo JCH no subespaço de uma excitação em uma cadeia (a) uniforme com $N = 50$ cavidades e (b) escalonada com $N = 51$ cavidades ($\eta = 0.5$). A frequência atômica ω_a está no centro da banda ($\omega_a = 0$) e os auto-vetores estão organizados em ordem crescente de energia (de baixo para cima).

O cenário muda significativamente ao considerar estruturas que induzem estados localizados. Considere, por exemplo, uma cadeia unidimensional com um padrão alternado de taxas de hopping (que será tratada em detalhes no Capítulo 3) [77, 83]

$$H_{\text{hop}} = -J \sum_{x=1}^{N-1} [1 - (-1)^x \eta] (a_{x+1}^\dagger a_x + \text{H.c.}), \quad (2.22)$$

onde $\eta \neq 0$ é um parâmetro de distorção. Considerando um número ímpar N de cavidades, foi mostrado em [77] que o espectro de campo livre é composto por duas bandas contínuas e um modo discreto de frequência ω_b , correspondendo a um estado fortemente localizado em uma das extremidades da rede (a depender do sinal de η). Levando em conta que este modo normal é localizado e isolado energeticamente, é possível induzir uma ressonância local, assim formando um par de polárítions, *independentemente* do tamanho da CCA, quando $g \ll J$ e $\omega_a = \omega_b$. Neste caso, uma grande quantidade de energia pode ser trocada entre as componentes fotônicas e atômicas do sistema a depender das condições iniciais do sistema.

Para visualizar melhor o que foi dito acima, na Fig. 5 analisamos a contribuição das componentes atômicas em cada auto-estado $|E_j\rangle$ do modelo JCH calculando

$\Lambda_j \equiv \sum_x \langle e_x | E_j \rangle$ em todo o espectro em vários regimes de interação, i.e., variando g/J . Se $\Lambda = 1$ (0) então dizemos que o estado é inteiramente atômico (fotônico) e se $\Lambda_j = 0.5$, é porque o estado é perfeitamente híbrido, ou seja, um estado igualmente distribuído entre as componentes atômicas e fotônicas. A Fig. 5(a) mostra a distribuição de Λ_j para a rede uniforme. Quando $g \ll J$, temos um par de estados híbridos, uma banda de estados completamente atômicos e duas bandas correspondentes aos modos normais do campo. Note que a medida que aumentamos g/J ($\omega_f = \omega_a = 0$) os outros estados vizinhos logo passam a ser hibridizados, o que demonstra a continuidade do espectro. Em contrapartida, para uma rede escalonada [Fig. 5(b)] a ressonância local exclusiva é mantida para uma janela maior de valores de g/J , uma testemunha do caráter discreto do modo normal.

No capítulo a seguir, vamos explorar detalhadamente o Hamiltoniano (2.22) para um número *par* de sítios. Vamos mostrar que o modo discreto no centro da banda se desdobra em um par de modos normais fortemente localizados (i.e., possuindo uma maior amplitude) em *ambas* as extremidades da rede. Essa correlação de longo alcance é um dos principais ingredientes para transferir estados quânticos. Uma vez estando nos regimes de energia apropriados (i.e., para certas configurações de ω_a e g/J), é possível transmitir estados fotônicos, atômicos e híbridos.

Capítulo 3

Transferência de estado quântico em cadeias de cavidades acopladas

Neste capítulo, exploramos uma CCA unidimensional atuando como um canal de comunicação quântica com o objetivo de realizar protocolos de transferência de estado quântico (QST)¹ com alta fidelidade e sem a necessidade de controle dinâmico ou medidas. Os resultados apresentados aqui também são encontrados na Ref. [83].

QST é um procedimento fundamental em redes quânticas [18] e tem sido investigado principalmente no contexto de cadeias de spin desde a proposta inicial formulada por S. Bose em [102] (uma revisão sobre o assunto está disponível em [103]). Dada uma rede de qubits (tal como uma cadeia de spin-1/2), o objetivo da QST é estritamente transferir um estado quântico arbitrário de um qubit para outro. Isto deve ser realizado simplesmente fazendo com que todo o sistema evolua no tempo naturalmente, i.e., de acordo com o seu Hamiltoniano. Note que este protocolo difere bastante do teleporte quântico [9], sendo que este faz uso de pares de partículas emaranhadas e necessita de um canal de comunicação clássico. Realizar uma QST com alta eficiência não é uma tarefa tão simples quanto parece. Por exemplo, isso não é possível em cadeias com uma distribuição uniforme de acoplamentos spin-spin [102],

¹Do inglês “quantum-state transfer”.

especialmente se esta for longa o bastante, devido à dispersão da função de onda inicial. Para resolver isso, diversos esquemas foram propostos. Foi mostrado, em particular, que uma QST perfeita e independente do tamanho da cadeia pode ser efetivada ao pré-fabricar os acoplamentos spin-spin de modo a gerar uma relação de dispersão linear [104, 105]. Esta configuração gera uma QST balística, significando que o tempo de transmissão é proporcional ao comprimento da cadeia. Um ajuste local e eficiente de *todos* os acoplamentos da cadeia, porém, não é algo facilmente implementado experimentalmente. QST balística também pode ser obtida por meio de um ajuste nos acoplamentos das extremidades da cadeia [106, 107].

Uma outra proposta é baseada em definir interações fracas entre o emissor (Alice) e o receptor (Bob) com o restante da cadeia (uniforme) [108, 109]. Configurações deste tipo exploram a indução de auto-estados *bilocalizados* nas extremidades da cadeia (i.e., nos sítios fracamente conectados) que geram uma dinâmica efetiva de Rabi [108]. Um cenário similar pode ser obtido ao aplicar campos magnéticos de alta magnitude nesses qubits ou nos seus primeiros vizinhos [110–112]. Em comparação com protocolos de QST balística, uma desvantagem nestes mecanismos envolvendo estados bilocalizados é que estes possuem, tipicamente, um tempo de transmissão muito longo, i.e., o tempo no qual o estado a ser transferido atinge sua amplitude máxima no local desejado (Bob).

Aqui, vamos assumir um padrão escalonado (alternado) de taxas de hopping de fótons, isto é, acoplamentos cavidade-cavidade, inspirado na chamada cadeia distorcida de Peierls [113], que já foi considerada para protocolos de QST [114, 115] e teleporte quântico [88, 116, 117] em sistemas de spin. Este modelo também pertence à classe de protocolos de QST suportados por estados bilocalizados (dinâmica de Rabi efetiva), sendo então caracterizado por tempos de transmissão relativamente longos. Um de nossos objetivos é manter uma QST de alta qualidade e ao mesmo tempo reduzir o tempo de transferência. Mostramos que isto pode ser feito ao *particionar* a estrutura em unidades idênticas de cadeias de Peierls. Vamos primeiro discutir esta

possibilidade em detalhes para uma CCA sem átomos, que é isomórfica a uma cadeia de spin no subespaço de uma excitação. Nossos resultados, portanto, fornecem uma nova perspectiva no controle temporal em QST, independentemente da plataforma de realização². Em seguida, mostramos como utilizar essas propriedades quando a CCA é acoplada a átomos de maneira a desenvolver métodos para transferir estados atômicos e polaritônicos (híbridos).

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 3.1, estudamos o espectro de campo livre (uma partícula) e os auto-estados de uma CCA escalonada, destacando particularmente as propriedades que são cruciais para QST. Na Seção 3.2, revisamos os procedimentos básicos de QST em cadeias de spin focando nos métodos que envolvem estados bilocalizados. Na Seção 3.3, exploramos a QST em CCAs escalonadas sem átomos. Na Seção 3.4, mostramos como a CCA pode ser modificada de modo a reduzir significativamente o tempo de transmissão do protocolo. Na Seção 3.5, acoplamos os átomos às CCAs e discutimos os regimes que são relevantes para a QST. Na Seção 3.6, mostramos efetivamente o protocolo de QST envolvendo qubits atômicos e polaritônicos. Finalmente, na Seção 3.7, apresentamos nossas conclusões.

3.1 Cadeia com hopping escalonado

O sistema em questão consiste em uma CCA contendo um número par N de cavidades idênticas de alta qualidade (fator Q). Cavidades adjacentes são acopladas de acordo com um padrão alternado de taxas de hopping J_1 e J_2 ao longo de uma cadeia unidimensional. Além disso, cada cavidade é acoplada a um átomo de dois níveis³ (ver Fig. 6).

²De fato, os métodos para QST em cadeias de spin podem ser aplicados em CCAs uma vez que, no subespaço de uma excitação, temos um modelo genérico de hopping onde a partícula quântica se propaga de acordo com sua matriz de adjacência.

³Neste capítulo, utilizaremos o termo “qubit” no contexto apropriado, isto é, quando estivermos nos referindo a codificar a informação quântica.

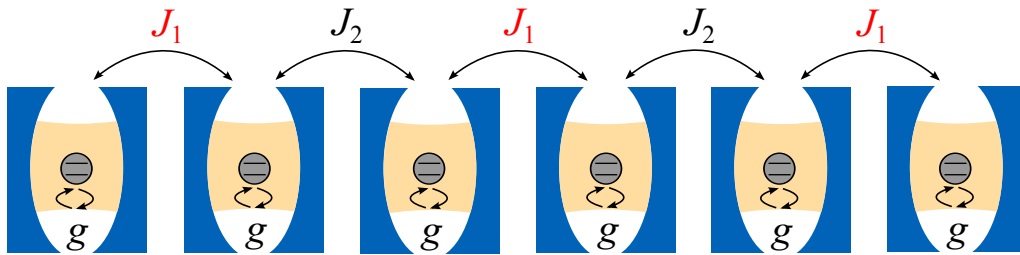


Figura 6 – Esboço de uma CCA com hopping escalonado, onde $J_1 = (1 + \eta)J$ e $J_2 = (1 - \eta)J$. O modo de campo eletromagnético confinado em cada cavidade pode interagir com um átomo de dois níveis a uma taxa g .

Nesta e nas próximas três seções, vamos focar no Hamiltoniano de *campo livre*, isto é, uma rede de cavidades sem átomos. Vamos considerar o sistema completo, incluindo os átomos, a partir da Seção 3.5.

O Hamiltoniano de campo livre de uma CCA escalonada é dado por

$$H_{\text{hop}} = -J \sum_{x=1}^{N-1} [1 - (-1)^x \eta] (a_{x+1}^\dagger a_x + \text{H.c.}), \quad (3.1)$$

onde o operador bosônico do tipo “escada” (segunda quantização) a_x^\dagger (a_x) cria (aniquila) um fóton na x -ésima cavidade. Note que para x ímpar (par) o termo entre colchetes na Eq. (3.1) se iguala a $J_1 = (1 + \eta)J$ [$J_2 = (1 - \eta)J$], onde J define a escala de hopping e $-1 \leq \eta \leq 1$ um parâmetro de distorção adimensional (expressa o quanto J_1 difere de J_2). Neste capítulo, todas as grandezas de energia (taxas) estarão em unidades de J . Para $\eta = 0$, recuperamos a CCA uniforme, geralmente considerada em modelos JCH [75]. Deve-se também notar que para N par, quando $\eta \rightarrow -1^+$ as duas cavidades das bordas ($x = 1$ e $x = N$, respectivamente) são fracamente ligadas ao restante da rede (canal), propriedade que se mostrará crucial para os nossos objetivos. Considerando o Hamiltoniano de campo livre da Eq. (3.1), não estamos levando em conta o termo usual $\sum_x \omega_f a_x^\dagger a_x$, onde ω_f é a frequência do campo local de cada cavidade. Isso é simplesmente equivalente a definir a escala de energia de maneira que $\omega_f = 0$.

Nossa primeira tarefa será então diagonalizar o Hamiltoniano (3.1) no subespaço de um fóton, gerado pela base $\{|x\rangle\}$ com $|x\rangle = a_x^\dagger |\text{vac}\rangle$ e $|\text{vac}\rangle$ representando o vácuo. Lembrando que N deve ser par, H_{hop} evidentemente possui uma simetria (espelho)

em relação ao seu ponto central, i.e., o Hamiltoniano é invariante sob a transformação $P|x\rangle = |N - x + 1\rangle$, onde P é o operador de paridade. Dessa forma, H_{hop} pode ser diagonalizado em blocos, cada bloco correspondendo ao subespaço definido por uma dada paridade (par ou ímpar). O subespaço par (ímpar) possui $N/2$ dimensões e é gerado pela base $\{|x\rangle_+\}$ ($\{|x\rangle_-\}$) com $|x\rangle_{\pm} = (|x\rangle \pm |N - x + 1\rangle)/\sqrt{2}$, onde x varia de 1 a $N/2$. Agora, assumimos que o número de cavidades é tal que $N/2$ deve ser ímpar, o que é equivalente a demandar que N , além de ser par, não é um múltiplo de 4. Para nossos objetivos, esta restrição não terá relevância.

É fácil checar que cada subespaço mencionado anteriormente gera uma representação efetiva para o Hamiltoniano (3.1) dada por

$$H_{\text{hop}}^{(\pm)} = -J \sum_{x=1}^{N/2-1} [1 - (-1)^x \eta] (a_{x+1}^{(\pm)\dagger} a_x^{(\pm)} + \text{H.c.}) \mp J_1 a_{N/2}^{(\pm)\dagger} a_{N/2}^{(\pm)} \quad (3.2)$$

com $a^{(\pm)\dagger}|\text{vac}\rangle = |x\rangle_{\pm}$ (se $N/2$ é par, chegamos a uma expressão semelhante mas devemos substituir $J_1 \rightarrow J_2$ no último termo). Note que, diferentemente da Fig. 6 onde as cavidades da borda são ligadas por J_1 , agora temos que os acoplamentos das extremidades são J_1 (esquerda) e J_2 (direita). Portanto, o Hamiltoniano $H_{\text{hop}}^{(\pm)}$ descreve uma cadeia efetiva constituída por um número ímpar de cavidades com um padrão escalonado de hopping acrescida de um defeito na cavidade situada no canto direito ($x = N/2$). Este defeito é expresso na forma de uma variação de $\mp J_1$ na frequência local da cavidade.

Por conveniência, vamos definir $M = N/2$ e $V_{\pm} = \mp J_1 a_M^{(\pm)\dagger} a_M^{(\pm)}$, onde o último representa o defeito na Eq. 3.2. Agora podemos resolver o Hamiltoniano utilizando teoria de perturbação tratando V_{\pm} como a perturbação (i.e., expandindo em J_1) em uma CCA escalonada sem defeitos com um número ímpar de cavidades, modelo no qual soluções exatas já são conhecidas no subespaço de uma excitação [77].

3.1.1 Diagonalização de $H_{\text{hop}}^{(\pm)}$ para $V_{\pm} = 0$

Como pode ser visto na Ref. [77], para $V_{\pm} = 0$ (sem defeito) o espectro de $H_{\text{hop}}^{(\pm)}$ consiste em um par de bandas (separadas por uma diferença de energia $\Delta\omega$) junto com uma frequência discreta $\omega_b = 0$ (para $\omega_f = 0$) situada bem no meio da banda. Esta última corresponde ao estado $|\alpha_b\rangle$, fortemente localizado na vizinhança de uma das bordas da rede (a depender do sinal de η). Este é expresso por

$$|\alpha_b\rangle = \mathcal{C} \sum_{x=1}^{\frac{M+1}{2}} \mathcal{D}^{x-1} |2x-1\rangle_{\pm} \quad (3.3)$$

com

$$\mathcal{D} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad \mathcal{C} = \frac{2}{\eta-1} \sqrt{\frac{\eta}{\mathcal{D}^{M+1}-1}}, \quad (3.4)$$

onde \mathcal{D} pode ser interpretado como a proporção de distorção. Note que a amplitude espacial do modo normal localizado, ${}_{\pm}\langle x|\alpha_b\rangle$, decai exponencialmente com x se distanciando do sítio da borda. Também observe que ${}_{\pm}\langle x|\alpha_b\rangle = 0$ para $|x\rangle_{\pm}$ par.

Os autovalores restantes, por outro lado, são dados por $\omega_{k\mu} = -\mu E_k$ com $\mu = \pm$ (índice de banda) e

$$E_k = 2J \sqrt{\cos^2 \frac{k}{2} + \eta^2 \sin^2 \frac{k}{2}}, \quad (3.5)$$

onde $k = 2\pi j/(M+1)$ para $j = 1, 2, \dots, (M-1)/2$. Estes descrevem o par de bandas energéticas separadas por $\Delta\omega \leq 4J$, com a identidade valendo apenas quando $|\eta| = 1$. Os auto-estados correspondentes a $\omega_{k\mu}$ são calculados como [77]

$$|\alpha_{k\mu}\rangle = \sqrt{\frac{2}{M+1}} \left(\sum_{x=1}^{\frac{M-1}{2}} \sin(kx) |2x\rangle_{\pm} + \mu \sum_{x=1}^{\frac{M+1}{2}} \sin(kx + \vartheta_k) |2x-1\rangle_{\pm} \right), \quad (3.6)$$

onde a fase ϑ_k é definida de acordo com a identidade $e^{i\vartheta_k} = J(1-\eta)(e^{-ik} - \mathcal{D})/E_k$.

3.1.2 Diagonalização perturbativa de $H_{\text{hop}}^{(\pm)}$

Vamos agora diagonalizar todo o Hamiltoniano H_{hop}^{\pm} (levando em conta o defeito V). Se $J_1 \ll J_2$, significando que as cavidades da borda estão fracamente acopladas ao

canal (ver Fig. 6), V_{\pm} pode ser tratado como uma pequena perturbação. Aplicando teoria de perturbação até primeira ordem, a frequência do modo localizado, ω_b , é então corrigida por

$$\omega_{b_{\pm}} \simeq \omega_b \mp J_1 \langle \alpha_b | a_M^{(\pm)\dagger} a_M^{(\pm)} | \alpha_b \rangle = \mp \frac{4J\eta \mathcal{D}^M}{(\eta - 1)(\mathcal{D}^{M+1} - 1)}, \quad (3.7)$$

onde termos $\sim O(J_1^2)$ foram desconsiderados. A perturbação então separa ω_b em duas frequências discretas separadas por uma diferença de energia

$$\delta\omega = \omega_{b_-} - \omega_{b_+} = \frac{8J\eta}{\eta - 1} \frac{\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{N/2}}{\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{N/2+1} - 1}, \quad (3.8)$$

onde utilizamos Eqs. (3.4) e (3.7), e $M = N/2$.

Os auto-estados associados são dados por

$$\begin{aligned} |\alpha_{b_{\pm}}\rangle &\simeq |\alpha_b\rangle \mp J_1 \sum_{k,\mu} \frac{\langle \alpha_{k\mu} | a_M^\dagger a_M | \alpha_b \rangle}{\omega_b - \omega_{k\mu}} |\alpha_{k\mu}\rangle \\ &= |\alpha_b\rangle \mp 4JC \left(\frac{\eta + 1}{M + 1}\right) \mathcal{D}^{\frac{M-1}{2}} \sum_k \sum_{x=1}^{\frac{M-1}{2}} \frac{\sin(kx)}{E_k} \\ &\quad \times \sin \left[\left(\frac{M+1}{2}\right) k + \vartheta_k \right] |2x\rangle_{\pm}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Os estados não-localizados (correspondentes ao par de bandas quasicontínuas) de $H_{\text{hop}}^{(\pm)}$ também podem ser facilmente obtidos, mas suas expressões são extensas e então não os escreveremos aqui por questão de conveniência. Estes basicamente formam um grupo de estados não-localizados onde as amplitudes espaciais são distribuídas pelo canal da CCA.

Na Fig. 7, consideramos a situação onde $\eta = -0.25$ e $N = 50$ e mostramos o espectro de energia do Hamiltoniano (3.1) junto com a distribuição espacial da função de onda dos estados localizados (3.9) na rede real (i.e., na base $\{|x\rangle\}$). Notamos que ambos os estados localizados são bastante isolados dos outros modos normais (o par de bandas). Há um espaçamento $\delta\omega$ entre eles que, mesmo sendo muito menor do que $\Delta\omega$, é diferente de zero. Além disso, cada modo discreto é fortemente localizado em *ambas* as bordas da rede (i.e., cavidades $x = 1$ e $x = N$), decaindo exponencialmente nos sítios vizinhos, propriedade que vamos nos referir como *bilocalização*.

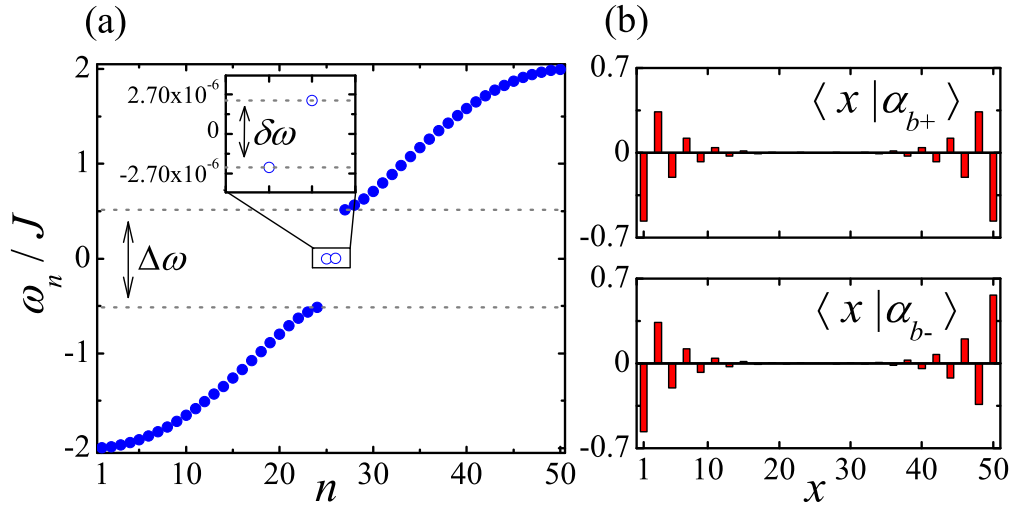


Figura 7 – (a) Espectro do Hamiltoniano (3.1) no espaço de uma excitação (em unidades de J). $\Delta\omega$ é o espaçamento entre o par de bandas correspondente aos modos não-localizados, enquanto que $\delta\omega = \omega_{b-} - \omega_{b+}$ (ver quadro embutido) é a diferença de energia entre os modos discretos [ver Eq. (3.8)]. (b) Distribuição espacial de $|\alpha_{b\pm}\rangle$. Os gráficos foram obtidos por diagonalização numérica da Eq. (3.1) para $\eta = -0.25$ e $N = 50$ (os resultados obtidos por teoria da perturbação, Eqs. (3.7) e (3.9), mostram-se em ótima concordância com os exatos).

Tais propriedades são fundamentais para o protocolo de QST, como vamos discutir a seguir.

3.2 Transferência de estado quântico: uma breve revisão

Protocolos de QST são tipicamente formulados em cadeias de spin unidimensionais do tipo XX, que podem ser descritas em termos de operadores de spin do tipo escada de acordo com um Hamiltoniano da forma

$$H_{\text{spin}} = \sum_{x=1}^N B_x \sigma_x^+ \sigma_x^- + \sum_{x=1}^{N-1} J_x (\sigma_{x+1}^+ \sigma_x^- + \text{H.c.}), \quad (3.10)$$

onde B_x é um campo magnético local e $\sigma_x^+ = [\sigma_x^-]^\dagger = |1\rangle_x \langle 0|$ com $\{|0\rangle_x, |1\rangle_x\}$ consistindo em uma base ortonormal de um spin. Note que o Hamiltoniano (3.10) conserva

o número total de excitações⁴, portanto $[\sum_x \sigma_x^+ \sigma_x^-, H_{\text{spin}}] = 0$ e então podemos diagonalizar H_{spin} em termos de um conjunto ortonormal de estados com um número fixo de excitações (i.e., auto-estados do operador número $\sum_x \sigma_x^+ \sigma_x^-$). No subespaço de uma excitação, o Hamiltoniano se reduz à uma matriz tridiagonal descrevendo um modelo de hopping usual.

3.2.1 Protocolo básico

De acordo com o esquema introduzido em [102], QST é estabelecido da seguinte forma: Alice deseja enviar um qubit para Bob e então prepara um estado arbitrário $|\phi\rangle_1 = c_0 |0\rangle_1 + c_1 |1\rangle_1$ no primeiro sítio deixando o resto da cadeia no estado fundamental, i.e., $|0\rangle_2 \cdots |0\rangle_N$. O estado inicial de todo o sistema é então dado por $|\Psi(0)\rangle = |\phi\rangle_1 |0\rangle_2 \cdots |0\rangle_N$. Este evolui de acordo com o Hamiltoniano H_{spin} tal que, em um tempo t seu estado se torna $|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle$ com $U(t) = e^{-iH_{\text{spin}}t}$. O objetivo da QST é fazer uso da dinâmica natural do sistema (gerada pelo Hamiltoniano) para transferir o estado $|\phi\rangle$ para o N -ésimo spin (ao qual Bob tem acesso) em um certo tempo τ , de modo que a função de onda total do sistema $|\Psi(\tau)\rangle$ seja a mais próxima possível de $|0\rangle_1 \cdots |0\rangle_{N-1} |\phi\rangle_N$. O estado recebido por Bob (que é misto, em geral) é calculado aplicando o traço parcial nos spins restantes, i.e., $\rho_N(\tau) = \text{Tr}_{1,\dots,N-1} |\Psi(\tau)\rangle \langle \Psi(\tau)|$. Por conseguinte, a intenção é tornar a fidelidade de transmissão $F_\phi(\tau) = \langle \phi | \rho_N(\tau) | \phi \rangle$ tão alta quanto possível (a fidelidade F_ϕ mede o quão próximo o estado recebido por Bob é do estado preparado por Alice $|\phi\rangle$).

A fidelidade introduzida acima depende do estado de entrada específico $|\phi\rangle$. De modo a obter uma medida de eficiência para a QST independentemente dos parâmetros de entrada, é necessário realizar a média de F_ϕ sobre todos os estados de entrada possíveis, isto é, na esfera de Bloch ($|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$). Para Hamiltonianos da forma (3.10), que conserva o número de excitações, e dado que a evolução temporal

⁴Observe que o segundo termo da Eq. (3.10) representa uma interação de troca entre os spins, isto é, uma excitação (spin up) é transferida entre sítios vizinhos, $|0\rangle_1 \cdots |1\rangle_x |0\rangle_{x+1} \cdots |0\rangle_N \rightarrow |0\rangle_1 \cdots |0\rangle_x |1\rangle_{x+1} \cdots |0\rangle_N$, assim mantendo o número total de excitações.

de $|\Psi(0)\rangle$ está restrita a ocorrer nos subespaços de zero e uma excitação, o primeiro sendo invariante sob a ação de $U(t)$, a *fidelidade média* é dada por [102]

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2} + \frac{|f(t)|}{3} + \frac{|f(t)|^2}{6}, \quad (3.11)$$

onde

$$f(t) = \langle N | e^{-iH_{\text{spin}}t} | 1 \rangle \quad (3.12)$$

é a amplitude de transição da excitação do primeiro ao último spin. (utilizamos a notação compacta $|x\rangle \equiv \sigma_x^+ |0\rangle_1 \cdots |0\rangle_N$). Note que $|f(\tau)| = 1$ resulta em $\mathcal{F}(\tau) = 1$ (QST perfeita). A fidelidade média é uma função monotônica da amplitude de transição e portanto a performance da QST pode ser medida apenas acompanhando o transporte da excitação ao longo da cadeia.

Quando o estado é codificado em mais de dois níveis (*um qutrit*, por exemplo) e/ou a cadeia não é apropriadamente inicializada (resultando em excitações espúrias) a fidelidade média não é dada pela Eq. (3.11), mesmo que ela ainda dependa das amplitudes de transição envolvidas, como é de se esperar [118, 119].

3.2.2 Estados bilocalizados

No subespaço de uma excitação, a decomposição espectral do Hamiltoniano (3.10) é expressa por $H_{\text{spin}} = \sum_{j=1}^N \omega_j |v_j\rangle\langle v_j|$, onde ω_j é o j -ésimo autovalor de energia correspondendo ao estado $|v_j\rangle = \sum_{j=1}^N v_{jx} |x\rangle$. Nesta representação, a amplitude de transição introduzida anteriormente é dada por

$$f(t) = \sum_{j=1}^N e^{-i\omega_j t} v_{jN}^* v_{j1} = \sum_{j=1}^N e^{-i\omega_j t} \langle v_j | \sigma_1^+ \sigma_N^- | v_j \rangle. \quad (3.13)$$

A última identidade mostra que cada auto-estado contribui para a Eq. (3.13) através da quantidade $\langle v_j | \sigma_1^+ \sigma_N^- | v_j \rangle$, evoluindo no tempo a uma taxa ω_j . Daqui em diante, vamos nos referir a isso como *amplitude de borda*.

Diversos protocolos de QST de alta qualidade [108, 110, 111, 114, 120] se baseiam na situação onde os estados de borda $|1\rangle$ e $|N\rangle$ possuem uma forte amplitude em

apenas dois auto-estados, digamos os indexados por $j = 1, 2$ (bilocalização). Neste caso, a Eq. (3.13) pode ser aproximada por

$$f(t) \simeq e^{-i\frac{\delta\omega t}{2}} \langle v_1 | \sigma_1^+ \sigma_N^- | v_1 \rangle + e^{i\frac{\delta\omega t}{2}} \langle v_2 | \sigma_1^+ \sigma_N^- | v_2 \rangle \quad (3.14)$$

com $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ (assumimos $\omega_1 > \omega_2$). Isto implica em uma dinâmica de Rabi efetiva que ocorre com uma certa frequência associada a $\delta\omega$. Dessa forma, $\tau \sim \delta\omega^{-1}$ o que denota que a ordem de magnitude do tempo de transmissão é definida pela diferença de energia entre os dois auto-estados bilocalizados.

Bilocalização é geralmente induzida ao introduzir uma perturbação no Hamiltoniano, assim desacoplando efetivamente os spins da borda do restante da cadeia (canal). Isso pode ser feito: (i) aplicando campos magnéticos de alta intensidade nas extremidades da cadeia [110, 120], ou em (ii) suas proximidades [111] ou (iii) definindo fracos acoplamentos (interação spin-spin) entre os spins da borda e o canal [108, 114]. Enquanto todos os procedimentos acima induzem um par de auto-estados fortemente bilocalizados nos sítios das extremidades, a diferença de energia típica entre estes dois estados – e portanto o tempo de transmissão (inversamente proporcional) – depende do modelo em consideração. Suponhamos que $\xi \ll 1$ seja um parâmetro de perturbação arbitrário (e.g., a intensidade do campo magnético ou a taxa de hopping). Em (i), o tempo de transmissão varia em N com $\tau \sim \xi^N$, resultando em um período que cresce exponencialmente com o comprimento da rede, enquanto que em (ii) e (iii) o tempo é da ordem de $O(\xi^2)$ e $O(\xi^{-2})$, respectivamente. De qualquer maneira, esses tempos de transmissão são, em geral, longos e podem facilmente exceder o tempo de coerência. Sendo assim, é de fundamental importância desenvolver métodos para encurtar o tempo de transferência.

3.3 Transferência de estado quântico em cadeias escalonadas sem átomos

Comparando as Eqs. (3.1) e (3.10), deve ser evidente que dentro do subespaço de uma excitação, podemos considerar a cadeia de spin como uma CCA sem átomos (ou $g = 0$). De fato, neste caso o mapeamento é efetuado por $\sigma_x^+ \rightarrow a_x^\dagger$, $\sigma_x^- \rightarrow a_x$. Da mesma forma, o protocolo de QST discutido anteriormente na Seção 3.2.1 agora é definido nos setores de vácuo e de uma excitação (um fóton) $\{|\text{vac}\rangle, |x\rangle\}$. Até a Seção 3.4, vamos discutir QST através da CCA escalonada sem átomos. Por um lado, tal análise irá fornecer a base para QST em CCAs acopladas a átomos (descritas pelo modelo JCH), a qual vamos tratar a partir da Seção 3.5. Pelo outro lado, isso tem sua própria relevância uma vez que nossos resultados não são restritos a CCAs, assim podendo ser aplicados em qualquer modelo de hopping com um padrão análogo de acoplamentos.

Como foi visto nas Seções 3.1 e 3.2, a CCA escalonada sem átomos é adequada para implementar QST baseada em estados bilocalizados (ver Seção 3.2.2) no regime $J_1 \ll J_2$. Para entender melhor, considere o caso limite $J_1 = 0$, i.e., $\eta = -1$. Neste cenário (dimerização), a cadeia se reduz a um par de cavidades isoladas nas extremidades e um canal constituído de dímeros desacoplados [ver ilustração no topo da Fig. 8(a)]. O par de estados ligados [ver Eq. (3.9)] então se reduz a $|\alpha_{b\pm}\rangle = (|1\rangle \pm |N\rangle)/\sqrt{2}$ com $\omega_{b\pm} = 0$, estes sendo, evidentemente, os únicos estados estacionários possuindo uma amplitude não nula nas bordas da cadeia. Isso transforma a Eq. (3.14) em uma identidade exata com $\{|\alpha_{b\pm}\rangle\}$ representando o par $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$. Porém, sendo $\omega_{b\pm} = 0$, o tempo de transmissão τ seria infinito já que $\delta\omega = 0$. Para torná-lo finito, devemos então trabalhar no regime $J_1 \ll J_2$, o que justifica a teoria de perturbação aplicada na Seção 3.1.2.

A seguir, com base nas Eqs. (3.3) e (3.9), nota-se que as amplitudes de borda

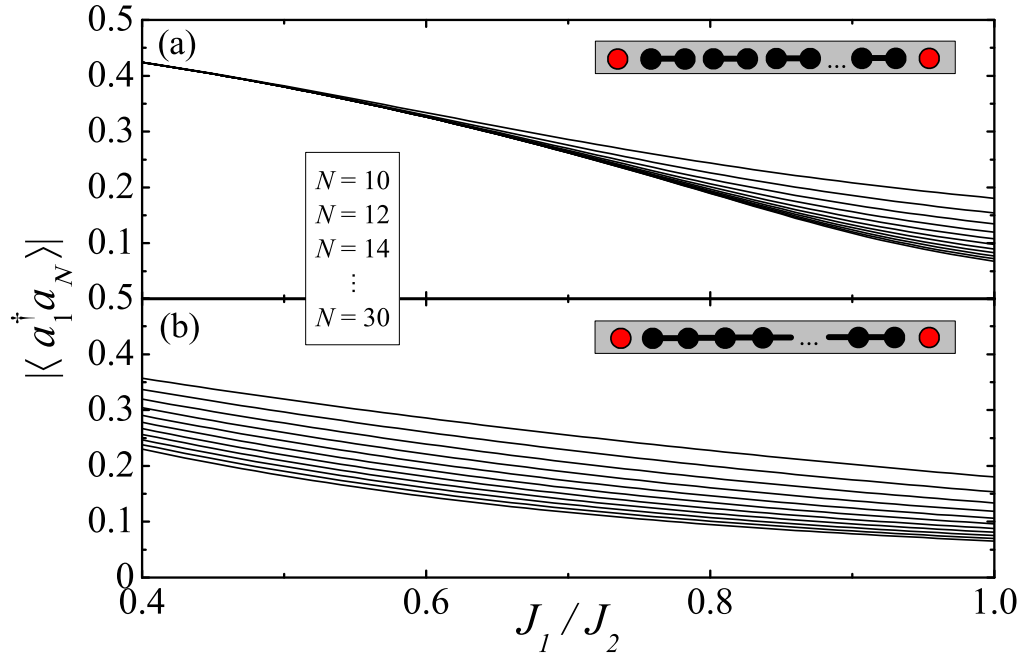


Figura 8 – Amplitude de borda $|\langle \alpha_{b\pm} | a_1^\dagger a_N | \alpha_{b\pm} \rangle|$ vs. J_1/J_2 para diversos valores de N (em ordem crescente de cima para baixo) no caso de uma cadeia escalonada (a) descrita pelo Hamiltoniano (3.1) e um canal uniforme (b) descrito pelo Hamiltoniano (3.17). Note que J_1/J_2 decresce da direita para esquerda. Cada gráfico foi obtido por diagonalização numérica exata do Hamiltoniano.

que entram na Eq. (3.14) satisfazem

$$\langle \alpha_{b\pm} | a_1^\dagger a_N | \alpha_{b\pm} \rangle = \pm \frac{c^2}{2} + O(J_1^2). \quad (3.15)$$

Portanto, o módulo da amplitude de transição é dado por

$$|f(t)| = 2 \left| \langle a_1^\dagger a_N \rangle \sin \left(\frac{\delta\omega}{2} t \right) \right|, \quad (3.16)$$

onde $\langle a_1^\dagger a_N \rangle$ é a notação para a amplitude de borda.

Nos instantes $t = 2n\pi/\delta\omega$ com n sendo um número inteiro ímpar, a Eq. (3.16) atinge o valor $2|\langle a_1^\dagger a_N \rangle|$. Então, idealmente, se o valor absoluto da amplitude de borda é igual a $1/2$, uma QST perfeita é estabelecida com tempo de transmissão $\tau = 2\pi/\delta\omega$.

Na Fig. 8(a), baseada em uma diagonalização numérica exata da Eq. (3.1), analisamos como a amplitude de borda é afetada com o tamanho do sistema N e a razão J_1/J_2 . Para um dado valor de J_1/J_2 , a amplitude diminui com N , até saturar para

um valor assintótico. Para $J_1/J_2 = 1$ (cadeia uniforme) o valor saturado está bem abaixo de $1/2$ e só atinge este valor quando J_1/J_2 se aproxima de zero. Ao mesmo tempo, notavelmente, a rapidez na qual $|\langle a_1^\dagger a_N \rangle|$ satura para este valor, em função de N , cresce de maneira que para J_1/J_2 pequeno o suficiente, a amplitude se torna, de fato, independente de N . Isto está de acordo com a Eq. (3.15) [ver também a Eq. (3.4)].

Em outras palavras, para uma cadeia bastante distorcida, o efeito de bilocalização necessário para uma QST de alta fidelidade é insensitivo ao tamanho do sistema. Esta propriedade é relacionada com o que se chama de *emaranhamento de longa distância*, presente no estado fundamental de cadeias de spin escalonadas [116], em oposição ao emaranhamento de longa distância parcial, apresentando correlações quânticas que decrescem com N . O último ocorre, por exemplo, em cadeias de spin com o canal uniforme (i.e., todos os sítios exceto o primeiro e o último) [108, 116]. Estas duas propriedades refletem diretamente na fidelidade da QST. Para mostrar isso, vamos considerar uma CCA onde – diferentemente da cadeia escalonada – as cavidades do canal são acopladas uniformemente à taxa J_2 [ver ilustração no topo da Fig. 8(b)]. O Hamiltoniano para tal estrutura é então expresso por

$$H'_{\text{hop}} = -J_1(a_2^\dagger a_1 + a_N^\dagger a_{N-1}) - J_2 \sum_{x=2}^{N-2} a_{x+1}^\dagger a_x + \text{H.c.} \quad (3.17)$$

Já que os sítios das extremidades são fracamente ligados ao canal, um par de estados bilocalizados também é formado [108]. Na Fig. 8(b), plotamos a amplitude de borda correspondente como função de J_1/J_2 e N . As diferenças em relação ao caso da CCA escalonada são bastante expressivas. Enquanto que para $J_1/J_2 = 1$ (cadeia completamente uniforme) ambos os modelos coincidem, a amplitude de borda para o caso do *canal* uniforme decresce com N , em variância com o comportamento estável apresentado pelo sistema escalonado. Isso engloba algumas das vantagens apresentadas por cadeias escalonadas no que se refere à fidelidade da QST.

3.4 Cadeia particionada

As propriedades destacadas na seção anterior vem com um preço em termos do tempo de transmissão τ necessário para realizar a QST. Lembrando que $\tau \sim \delta\omega^{-1}$, a Eq. (3.8) de fato mostra que, no regime $J_1 \ll J_2$ (i.e., $\eta \simeq -1$), a diferença de energia $\delta\omega$ (entre os estados ligados) decai exponencialmente com o tamanho N . Como consequência, τ cresce exponencialmente com N . Podemos então nos perguntar se, para um dado tamanho do sistema, a cadeia escalonada pode ser modificada de modo a aumentar $\delta\omega$ ao mesmo tempo em que mantemos a intensidade de bilocalização para os estados $|\alpha_{b\pm}\rangle$ (crucial para uma transferência de alta fidelidade). Nesta seção, mostramos que isso pode ser feito ao *particionar* a cadeia escalonada.

A configuração que mostramos a seguir é inspirada no conceito de *emaranhamento modular*, introduzido na Ref. [121]. Vamos considerar um conjunto de m cadeias escalonadas idênticas, cada uma possuindo N sítios, de modo que o número total sítios é $L = mN$. Cavidades vizinhas entre partições (módulos) adjacentes são acopladas a uma taxa J_{mod} . Assim, o Hamiltoniano total lê-se

$$H_{\text{mod}} = \sum_{j=1}^m H_{\text{hop}}^{(j)} - J_{\text{mod}} \sum_{j=1}^{m-1} (a_{jN+1}^\dagger a_{jN} + \text{H.c.}), \quad (3.18)$$

onde o Hamiltoniano de partição livre $H_{\text{hop}}^{(j)}$ é o mesmo da Eq. (3.1) [a soma agora sendo ao longo de $x = (j-1)N + 1, jN - 1$].

Para $J_{\text{mod}} = J_2$, todo o sistema se reduz a uma CCA escalonada padrão contendo L cavidades. Por outro lado, no limite $J_{\text{mod}} = 0$ (sem acoplamento entre partições), o espectro de energia de H_{mod} e seus auto-estados associados são os mesmos de uma CCA de tamanho N , como discutidos na Seção 3.1, mas agora tornando-se m vezes degenerado. Para valores intermediários $0 < J_{\text{mod}} < J_2$, a degenerescência é removida resultando em um conjunto de $2m$ estados ligados não degenerados. Entre estes, vamos denotar $\delta\omega_{m,N}$ como sendo a diferença de energia entre os pares mais internos (no espectro) e $|\langle a_1^\dagger a_L \rangle|$ o valor absoluto da amplitude de borda. Assim, para $J_{\text{mod}} = J_2$, $\delta\omega_{m,N}$ e $|\langle a_1^\dagger a_L \rangle|$ são respectivamente o mesmo que $\delta\omega$ e a amplitude

de borda associada a uma cadeia escalonada de tamanho L [ver Eq. (3.8) e Fig. 8(a)]. No limite oposto, $J_{\text{mod}} = 0$, $\delta\omega_{m,N}$ é maior, uma vez que coincide com a diferença de energia entre os estados ligados de uma cadeia escalonada de tamanho $N < L$, enquanto $|\langle a_1^\dagger a_L \rangle| = 0$ já que as partições estão desconectadas entre si.

Para investigar a dependência de $\delta\omega_{m,N}$ e $|\langle a_1^\dagger a_L \rangle|$ com J_{mod} , na Fig. 9 consideramos os casos de uma cadeia com dois e três partições ($\delta\omega_{m,N}$ é plotado em unidades de $\delta\omega_{1,L}$, isto é, seu valor quando $J_{\text{mod}} = J_2$). À medida que J_{mod} aumenta, a diferença de energia e a amplitude de borda tendem monotonicamente aos seus respectivos valores para $J_{\text{mod}} = J_2$ (i.e., o caso discutido anteriormente). Interessantemente, a amplitude de borda em particular satura-se muito rapidamente [ver Figs. 9(a) e (b)]. Ao contrário, $\delta\omega_{m,N}$ desenvolve um crescimento mais regular. Isso significa que, partindo de $J_{\text{mod}} = J_2$ (cadeia escalonada de tamanho L) podemos diminuir J_{mod} em uma quantidade significativa – assim particionando a CCA – e manter a amplitude de borda praticamente imutável mas amplificando a diferença de energia substancialmente. Por exemplo [ver Figs. 9(a) e (c)], no caso de duas partições ($m = 2$) para $N = 14$ quando $J_{\text{mod}} \simeq 0.01J$ a amplitude de borda é efetivamente mantida enquanto que a diferença de energia aumenta em torno de cem vezes, resultando na mesma fidelidade para a QST mas com um tempo de transmissão menor em duas ordens de magnitude. Isto ainda pode ser otimizado se aumentarmos o número de partições, mantendo o tamanho total do sistema, L , resultando em partições menores.

Na Fig. 9, notamos que a saturação de $|\langle a_1^\dagger a_L \rangle|$ ocorre para valores menores de J_{mod} na medida em que N cresce. Portanto, intensidades menores de J_{mod} tornam-se necessárias para estabelecer bilocalização. Isto pode ser atribuído ao fato de que a diferença de energia $\delta\omega$ para cada partição (isolada), coincidindo com $\delta\omega_{m,N}$ para $J_{\text{mod}} = 0$, decresce com N . Do ponto de vista de teoria de perturbação, o efeito de ligar a interação entre as partições será significativo quando J_{mod} for comparável a $\delta\omega$ que, porém, diminui com N .

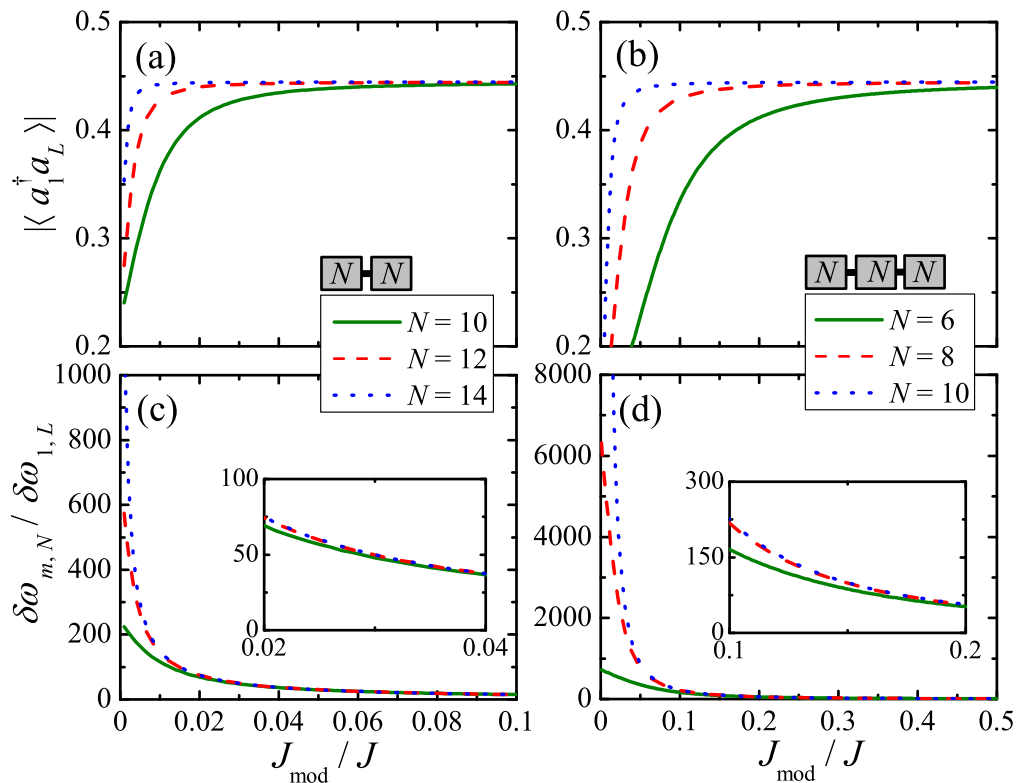


Figura 9 – Amplitude de borda total $|\langle a_1^\dagger a_L \rangle|$ [(a) e (b)] e razão da diferença de energia $\delta\omega_{m,N}/\delta\omega_{1,L}$ [(c) e (d)] em função de J_{mod}/J para diferentes valores de N no caso de uma CCA escalonada particionada. Lado esquerdo [(a) e (c)] refere-se a uma cadeia com duas partições ($m = 2$), enquanto que o lado direito [(b) e (d)] corresponde a uma cadeia com três partições ($m = 3$). Para ambas as configurações, fixamos a distorção em cada partição para $\eta = -0.5$ (aproximadamente $J_1/J_2 = 0.33$).

Em suma, para uma cadeia escalonada de um dado tamanho, particioná-la em diversas partes pode resultar em tempos de transmissão mais curtos sem afetar a sua fidelidade. Na Fig. 10, evidenciamos tal comportamento ao considerar uma CCA de tamanho $L = 24$ com diferentes números de partições $m = 2, 3, 4$, e 6 . Note, por exemplo, que a cadeia particionada em seis partes fornece uma fidelidade acima de $\simeq 95\%$ enquanto que o tempo de transmissão τ é encurtado em três ordens de magnitude. Podemos também melhorar o tempo de transmissão mesmo para um m menor. Note que enquanto τ cresce polinomialmente com J_{mod} , a fidelidade apresenta um comportamento não-monotônico dada a contribuição residual proveniente de outros auto-estados à amplitude de transição [ver Eq. (3.13)].

Como mencionado anteriormente, as propriedades discutidas acima não se apli-

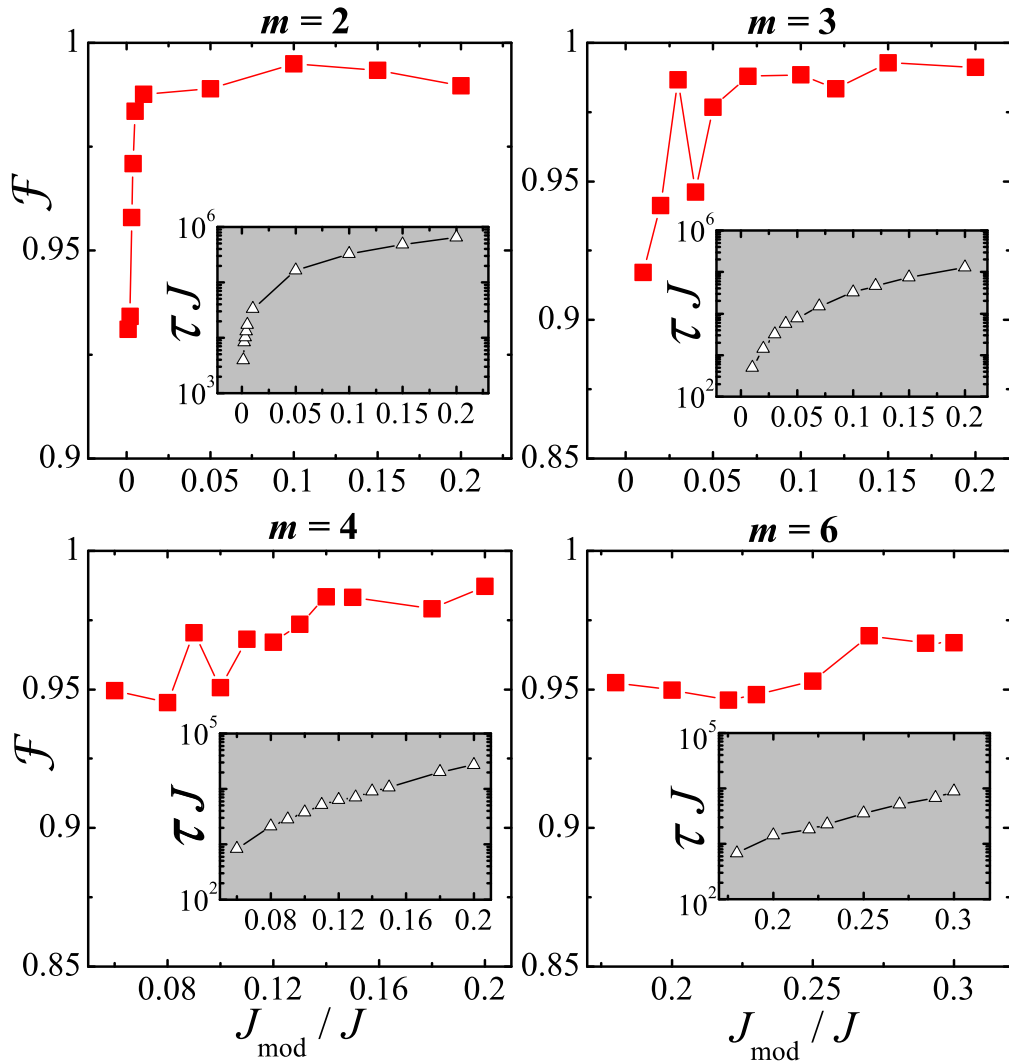


Figura 10 – Máximo valor da fidelidade média \mathcal{F} [Eq. 3.11] após um período de oscilação de Rabi, isto é $\tau = 2\pi/\delta\omega_{m,N}$, em função de J_{mod}/J . Consideramos $L = 24$, $J_1 = 0.3J$ e $J_2 = J$, e diferentes configurações de partição (cada uma especificada por m). Em cada painel, a figura interna mostra o tempo de transmissão τ (em unidades de J^{-1}) em função de J_{mod}/J em escala logarítmica-linear. Para a cadeia não-particionada ($m = 1$), a fidelidade máxima e o tempo de transmissão são, respectivamente, $\mathcal{F} \simeq 0.98$ e $\tau \simeq 3 \cdot 10^6 J^{-1}$.

cam somente a CCAs, mas a cadeias de spin em geral (ou qualquer modelo de hopping satisfazendo tal distribuição de acoplamentos), independentemente de sua implementação física. No que segue, vamos tratar da CCA acoplada a átomos com o objetivo de formular protocolos de QST envolvendo os graus de liberdade fotônico e atômico.

3.5 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Hubbard

Agora consideramos uma CCA onde cada cavidade interage com um átomo de dois níveis de frequência ω_a de acordo com o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [96]

$$H_x^{(\text{JC})} = \omega_f a_x^\dagger a_x + \omega_a \sigma_x^+ \sigma_x^- + g (\sigma_x^+ a_x + \sigma_x^- a_x^\dagger), \quad (3.19)$$

onde agora $\sigma_x^+ \equiv |e\rangle_x \langle g|$ com $|g\rangle$ ($|e\rangle$) representando o estado fundamental (excitado), e g sendo a intensidade do acoplamento átomo-campo. Aqui vamos novamente definir $\omega_f = 0$, por simplicidade. Para um padrão alternado de taxas de hopping (ver Fig. 6), o Hamiltoniano total é escrito por

$$H = H_{\text{hop}} + \sum_{x=1}^N H_x^{(\text{JC})}, \quad (3.20)$$

onde o Hamiltoniano de hopping é o mesmo da Eq. (3.1). Daqui em diante, consideramos a notação $|1_x\rangle \equiv a_x^\dagger |\text{vac}\rangle |g\rangle_1 \cdots |g\rangle_N$ e $|e_x\rangle \equiv \sigma_x^+ |\text{vac}\rangle |g\rangle_1 \cdots |g\rangle_N$, onde o primeiro é o estado que representa *um* fóton localizado na x -ésima cavidade com todos os outros átomos permanecendo no estado fundamental enquanto que o último corresponde ao estado no qual apenas o x -ésimo átomo encontra-se excitado (e o campo, assim como os outros átomos, no estado fundamental). No subespaço de uma excitação, o espaço de Hilbert total possui $2N$ dimensões e é gerado pela base $\{|1_x\rangle, |e_x\rangle\}$.

Como visto no Capítulo 2, vamos considerar $\{|\alpha_n\rangle\}$ o conjunto de N auto-estados do Hamiltoniano de campo livre H_{hop} , i.e., $H_{\text{hop}} |\alpha_n\rangle = \omega_n |\alpha_n\rangle$, cada um da forma $|\alpha_n\rangle = \sum_x c_{nx} |1_x\rangle$. Estes estados englobam apenas excitações fotônicas (o índice n representa tanto os estados ligados quanto os não-ligados). Da mesma forma, podemos definir outro conjunto de N estados $\{|\beta_n\rangle\}$ tal que $|\beta_n\rangle = \sum_x c_{nx} |e_x\rangle$, apresentando, por sua vez, somente excitações atômicas. Convém lembrar que cada $|\beta_n\rangle$ possui os mesmos coeficientes de $|\alpha_n\rangle$, i.e., distribuição espacial. Os estados $\{|\alpha_n\rangle\}$ ($\{|\beta_n\rangle\}$) podem ser assumidos como provenientes dos operadores de modos normais do campo (átomo) $\{\alpha_n\}$ ($\{\beta_n\}$) definidos como $\alpha_n \equiv \sum_x c_{nx} a_x$ ($\beta_n \equiv \sum_x c_{nx} \sigma_x^-$).

Note que na Eq. (3.20) ambos g e ω_a são uniformes através da rede. Sendo assim, H pode ser reescrito da forma (ver Capítulo 2 e Refs. [74, 75, 77]),

$$H = \sum_n \left[\omega_n \alpha_n^\dagger \alpha_n + \omega_a \beta_n^\dagger \beta_n + g(\beta_n^\dagger \alpha_n + \text{H.c.}) \right]. \quad (3.21)$$

Portanto, no subespaço de uma excitação, o sistema se comporta como um conjunto de N modelos JC *desacoplados*, cada um correspondendo a um modo normal fotônico de frequência ω_n acoplado ao seu análogo atômico de frequência ω_a à taxa g . Isto permite uma diagonalização direta de H uma vez que os auto-estados do Hamiltoniano de campo livre H_{hop} , $\{|\alpha_n\rangle\}$, são conhecidos. Portanto, de maneira análoga ao modelo JC, os auto-estados resultam em

$$|\psi_n^{(\pm)}\rangle = A_n^{(\pm)} |\alpha_n\rangle + B_n^{(\pm)} |\beta_n\rangle, \quad (3.22)$$

onde

$$A_n^{(\pm)} = \frac{2g}{\sqrt{(\Delta_n \pm \Omega_n)^2 + 4g^2}}, \quad B_n^{(\pm)} = \frac{\Delta_n \pm \Omega_n}{\sqrt{(\Delta_n \pm \Omega_n)^2 + 4g^2}}, \quad (3.23)$$

com $\Delta_n = \omega_a - \omega_n$ e $\Omega_n = \sqrt{\Delta_n^2 + 4g^2}$ sendo a dessintonia e a frequência de Rabi, respectivamente, do n -ésimo modelo JC efetivo. Os níveis de energia correspondentes são

$$\varepsilon_n^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\omega_a + \omega_n \pm \Omega_n). \quad (3.24)$$

3.5.1 Regime de fraco acoplamento átomo-campo

Dentre todo o conjunto das N interações de JC efetivas [ver Eq. (3.21)] podemos ativar seletivamente apenas uma delas ao ajustar precisamente a frequência atômica ω_a no regime $g \ll J$ (este procedimento foi discutido anteriormente no Capítulo 2). Vamos agora mostrar como ativar uma interação efetiva envolvendo o auto-estado bilocalizado $|\alpha_{b+}\rangle$ [ver Eq. (3.9)]. Na representação da interação (ver Capítulo 2), o Hamiltoniano (3.21) se transforma em (agora destacamos explicitamente as contribuições dos estados localizados e dos associados a banda contínua, i.e., não-

localizados)

$$H_I(t) = g \left[\sum_{j=\pm} \beta_{bj}^\dagger \alpha_{bj} e^{i\Delta_{bj}t} + \sum_{k\mu} \beta_{k\mu}^\dagger \alpha_{k\mu} e^{i\Delta_{k\mu}t} + \text{H.c.} \right] \quad (3.25)$$

com $\Delta_{b\pm} = \omega_a - \omega_{b\pm}$ e $\Delta_{k\mu} = \omega_a - \omega_{k\mu}$. Sintonizando ω_a em ressonância com ω_{b+} , isto é, definindo $\omega_a = \omega_{b+}$ o primeiro termo da (Eq. 3.25) se torna independente do tempo. Se, além disso, $g \ll \{\Delta_{k\mu}, \Delta_{b-}\}$ todos os termos restantes na Eq. (3.25) podem ser descartados pois praticamente não influenciam na dinâmica do sistema (aproximação de onda girante). Retornando à representação de Schrödinger, acabamos por obter um Hamiltoniano efetivo da forma

$$H_{\text{eff}} = \sum_{n \neq b+} (\omega_n \alpha_n^\dagger \alpha_n + \omega_a \beta_n^\dagger \beta_n) + g(\beta_{b+}^\dagger \alpha_{b+} + \text{H.c.}). \quad (3.26)$$

Note que teríamos um resultado análogo se a frequência atômica fosse ajustada para ω_{b-} . O Hamiltoniano (3.26) consiste, portanto, em uma dinâmica ressonante do tipo JC envolvendo $|\alpha_{b+}\rangle$ e seu análogo atômico, à medida que todos os modos normais restantes (fotônicos e atômicos) evoluem livremente. Dessa forma, apenas um par de estados híbridos $|\psi_{b+}^{(\pm)}\rangle$ são gerados [ver Eq. (3.22)]. Note que, devido à condição de ressonância $\Delta_{b+} = 0$, obtemos $|A_{b+}^{(\pm)}| = |B_{b+}^{(\pm)}|$ [ver Eq. (3.23)]. Consequentemente, $|\psi_{b+}^{(\pm)}\rangle$ são poláritons perfeitamente híbridos, i.e., apresentando emaranhamento máximo entre os graus de liberdade atômicos e fotônicos.

3.5.2 Regime de forte acoplamento átomo-campo

Vale salientar que o regime de interação descrito acima é válido *somente* quando $g \ll \delta\omega$, sendo que $|\alpha_{b-}\rangle$ é o estado mais próximo energeticamente. Caso contrário, termos de acoplamento entre outros modos normais aparecem na Eq. (3.26). Considere, em particular, o regime de forte acoplamento átomo-campo [75, 80] tal que g é muito maior do que todo o espectro de frequências, $g \gg \omega_n, \omega_a$. Assim, nenhum dos termos de acoplamento na Eq. (3.21) pode ser descartado de maneira que cada interação correspondente do tipo JC é ativada. Além disso, sendo que $\Delta\omega_n$ é desprezível ($g \gg \Delta\omega_n \forall n$), todos os pares e poláritons da Eq. (3.22) são gerados, cada um

da forma $|\psi_n^{(\pm)}\rangle \simeq (|\alpha_n\rangle \pm |\beta_n\rangle)/\sqrt{2}$, portanto constituindo um conjunto de estados completamente híbridos. Da mesma forma, os seus auto-valores [ver Eq. (3.24)] se reduzem a $\varepsilon_n^{(\pm)} \simeq \omega_n/2 \pm g$ (pois $\Omega_n \simeq 2g$). Desse modo, esse regime é caracterizado pela formação de duas bandas de poláritons, cada uma composta por estados híbridos pares (ímpares) $|\psi_n^{(+)}\rangle$ ($|\psi_n^{(-)}\rangle$). Em cada uma dessas, a dinâmica do sistema reduz-se para a de um poláriton do modelo JC (ou seja, de *uma* cavidade) sujeito a um Hamiltoniano de hopping análogo à Eq. (3.1) [ou Eq. (3.18), no caso de uma cadeia particionada] mas com as taxas de acoplamento reescaladas por um fator $1/2$. Assim, se a CCA é preparada em um estado inicial tal como $(|e_1\rangle \pm |1_1\rangle)/\sqrt{2}$, apenas uma das bandas de poláritons estará envolvida na evolução temporal do sistema, a dinâmica sendo idêntica à analisada nas seções anteriores, agora com os estados de um fóton $|x\rangle$ substituídos por poláritons locais $(|e_x\rangle \pm |1_x\rangle)/\sqrt{2}$ [auto-estados do modelo JC; Eq. (2.9)].

3.6 Transferência de estados atômicos e poláritons

A depender do regime de interação estabelecido, isto é, ressonância local de um modo ou ressonância total (regime de forte acoplamento átomo-campo) discutidos nas seções anteriores, podemos apropriadamente realizar transferência de estados atômicos ou poláritons, respectivamente, como veremos a seguir.

3.6.1 Transferência de estado atômico

Definindo $\omega_a = \omega_{b+}$ e $g \ll \delta\omega$, o último sendo a diferença de energia entre estados bilocalizados $|\alpha_{b\pm}\rangle$, o Hamiltoniano de JCH é efetivamente da forma da Eq. (3.26). Se os parâmetros da Eq. (3.1) [ou Eq. (3.18) para CCAs particionadas] são tais que uma forte bilocalização é estabelecida (ver Seções 3.1, 3.3 e 3.4), então ambos os estados atômicos $|e_1\rangle$ e $|e_N\rangle$ podem ser expressos, em boa aproximação,

apenas em termos de $|\beta_{b\pm}\rangle$. Isto implica em $|e_1\rangle \simeq \sum_{j=\pm} \langle\beta_{bj}|e_1\rangle |\beta_{bj}\rangle$ e, fazendo uso das propriedades de paridade de $|\beta_{b\pm}\rangle$, $|e_N\rangle \simeq -\langle\beta_{b-}|e_1\rangle |\beta_{b-}\rangle + \langle\beta_{b+}|e_1\rangle |\beta_{b+}\rangle$. Escrevendo $|\beta_{b+}\rangle$ em termos dos estados híbridos [ver Eq. (3.22)], obtemos $|\beta_{b+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_{b+}^{(+)}\rangle - |\psi_{b+}^{(-)}\rangle \right)$, onde $|\psi_{b+}^{(\pm)}\rangle$ possui energia $\omega_0 \pm g$. Substituindo esta expressão na decomposição acima para $|e_1\rangle$ e aplicando o operador de evolução temporal $U(t)$, temos que

$$U(t)|e_1\rangle \simeq \langle\beta_{b-}|e_1\rangle |\beta_{b-}\rangle + \frac{\langle\beta_{b+}|e_1\rangle}{\sqrt{2}} \left(e^{-igt} |\psi_{b+}^{(+)}\rangle - e^{igt} |\psi_{b+}^{(-)}\rangle \right) \quad (3.27)$$

Expressando os poláritons em termos de $|\alpha_{b+}\rangle$ e $|\beta_{b+}\rangle$,

$$U(t)|e_1\rangle \simeq \langle\beta_{b-}|e_1\rangle |\beta_{b-}\rangle + \langle\beta_{b+}|e_1\rangle [\cos(gt) |\beta_{b+}\rangle - i \sin(gt) |\alpha_{b+}\rangle]. \quad (3.28)$$

Para $gt = \pi$, obtemos então (ver acima) $U(t)|e_1\rangle \simeq |e_N\rangle$.

Tendo em vista que o estado da CCA que não contém excitação, seja atômica ou fotônica, não evolui no tempo, o átomo de dois níveis se insere como uma opção conveniente para codificar o qubit lógico (i.e., a *informação* a ser enviada), como visto na Seção 3.2. Portanto, um protocolo de QST pode ser efetuado entre os átomos das extremidades da CCA (Alice e Bob) com tempo de transmissão $\tau = \pi/g \gg 1/J$. Sendo assim, podemos definir a transição de amplitude como (ver Seção 3.2) como $f(t) = \langle e_N|U(t)|e_1\rangle$ e medir a eficiência da QST utilizando a Eq. (3.11) para a fidelidade média.

Na Fig. 11, analisamos a evolução temporal da excitações fotônica e atômica (onde $|\Psi(0)\rangle = |e_1\rangle$), e da amplitude de transição definida anteriormente. Definimos $p_{f,x}(t) = |\langle 1_x|\Psi(t)\rangle|^2$ e $p_{a,x}(t) = |\langle e_x|\Psi(t)\rangle|^2$ como a probabilidade de encontrar um fóton e um átomo excitado na x -ésima cavidade, respectivamente. Como mostrado na Fig. 11, a transferência ocorre com o envolvimento de toda a CCA, incluindo o canal (especialmente na forma de excitações atômicas). Note que mesmo conside-

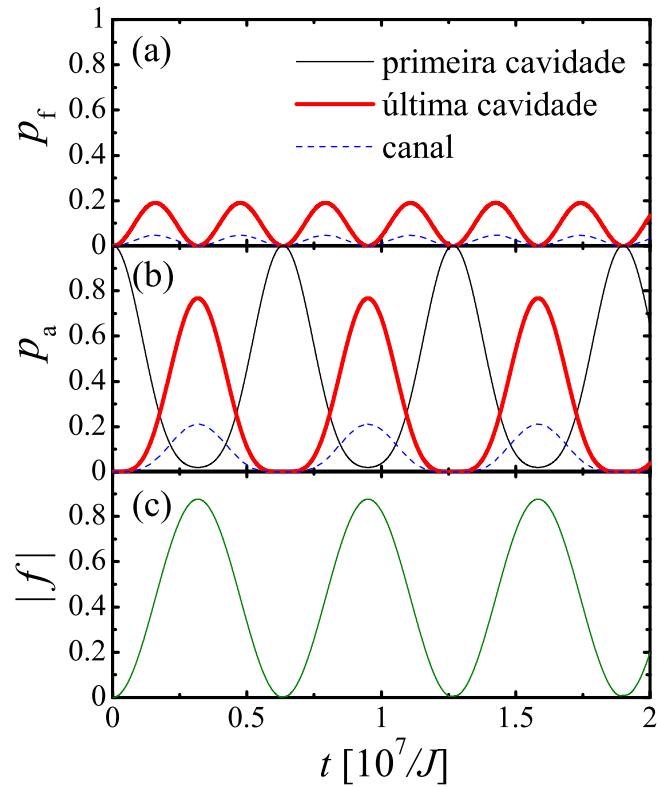


Figura 11 – Evolução temporal da excitação (a) fotônica, (b) atômica e da (c) amplitude de transição ao longo de uma CCA escalonada com 10 sítios preparada inicialmente em $|\Psi(0)\rangle = |e_1\rangle$. Em (a) [(b)], mostramos a probabilidade de encontrar a excitação fotônica (atômica) na primeira cavidade (curva fina preta), na última (curva espessa vermelha) e nas cavidades do canal $2 \leq x \leq N - 1$ (curva tracejada azul). No painel (a), as curvas representando a probabilidade de ocupação fotônica na primeira e na última cavidade estão sobrepostas. Os gráficos foram obtidos por diagonalização numérica da Eq. (3.20) para $\eta = -0.5$, $g = 10^{-6}J$ e $\omega_a = \omega_{b+}$.

rando uma cadeia moderadamente distorcida ($\eta = -0.5$), $|f|$ atinge um máximo de $\simeq 0.9$

3.6.2 Transferência de poláriton

No procedimento discutido anteriormente, o tempo de transmissão τ é na verdade definido pelo acoplamento átomo-campo g , que deve ser muito menor do que a diferença de energia entre os modos bilocalizados $\delta\omega$. Como esta torna-se ainda menor com a distorção da CCA (ver Seção 3.1), tal configuração pode se tornar um tanto exigente para CCAs fortemente distorcidas. No cenário que vamos discutir

agora, as propriedades de uma CCA sem átomos, vistas nas Seções 3.1, 3.3 e 3.4, podem ser exploradas para transferir polárítions entre as extremidades da cadeia.

No regime de forte interação átomo-campo (ver Seção 3.5.2), a dinâmica do sistema é ditada pelo par de bandas de auto-estados híbridos. Em cada uma destas, um poláríton de uma cavidade (auto-estado do modelo JC), com uma certa paridade, propaga-se na cadeia exatamente da mesma maneira com que um fóton se propaga na CCA sem átomos (ver Seções 3.1, 3.3 e 3.4) a menos de um fator $1/2$ que redefine a escala das taxas de hopping (portanto com metade da velocidade de propagação). Sendo que as bandas de polárítions estão desacopladas, a preparação de um estado inicial misto em uma certa cavidade, digamos $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |1_1\rangle)$, com uma paridade definida, ativa uma dinâmica onde somente a banda de polárítions com a mesma paridade torna-se envolvida. Dessa maneira, a princípio, podemos codificar o estado de um qubit em termos de estados lógicos híbridos $|\text{vac}\rangle |g\rangle_1 \cdots |g\rangle_N$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e_x\rangle + |1_x\rangle)$. Assim, neste caso temos que a amplitude de transição é definida por $f(t) = \frac{1}{2}(\langle e_N| + \langle 1_N|)U(t)(|e_1\rangle + |1_1\rangle)$ (ver Seção 3.2), podendo então ser utilizada como figura de mérito para medir a eficiência com a qual um poláríton pode ser transmitido na CCA, de acordo com outros estudos [71, 72, 74, 75].

É interessante notar que, para efetuar essa transferência de poláríton, o requerimento $g \gg \omega_n \forall n$ não é tão restrito quanto parece. As propriedades dinâmicas das CCAs sem átomos investigadas nas Seções 3.1, 3.3 e 3.4 deixam claro que para uma cadeia suficientemente distorcida, g deve ser de tal intensidade ao ponto de estabelecer a formação de *quatro* estados híbridos bilocalizados $|\psi_{b\pm}^{(\pm)}\rangle$. Na Fig. 12, mostramos a influência desse processo de hibridização na fidelidade de transmissão de um poláríton à medida que a CCA é progressivamente distorcida, para um valor fixo do acoplamento átomo-campo g . Para uma cadeia uniforme, i.e. $\eta = 0$ [ver Fig. 12(a)], a transmissão é bastante ineficiente. Na Fig. 12, consideramos $\omega_a = 0$ (no meio do espectro de campo livre), assim configurando a frequência dos estados atômicos em dessintonia com os modos normais de campo. Dessa forma, tendo que

g é de baixa intensidade, a evolução é dominada pelos modos do campo.

Na Fig. 12(a), a componente atômica presente no estado inicial (poláriton) praticamente não evolui no tempo [75,80] (ver também o Capítulo 2) enquanto o fóton se propaga livremente através da rede, eventualmente atingindo as bordas da CCA, mas perdendo sua amplitude gradativamente já que a dinâmica é induzida por modos estendidos (i.e., não localizados) A amplitude de transição polaritônica aumenta significativamente ao introduzir um pequeno grau de distorção [ver Fig. 12(b)]. Agora, os estados bilocalizados dominam a dinâmica e a amplitude de transição passa a exibir um comportamento periódico. Devido a uma pequena contribuição proveniente dos estados não-localizados, ainda podemos ver algumas oscilações espúrias em uma escala temporal bem menor. Além disso, g ainda não satisfaz $g \gg \delta\omega$, e portanto a hibridização dos estados bilocalizados ainda não é máxima. Na Fig. 12(c), distorcemos a CCA novamente ao ponto em que a amplitude de transição atinge valores consideravelmente mais altos. Como consequência, nota-se que o tempo de transmissão também aumenta uma vez que a distorção da cadeia faz com que a diferença de energia $\delta\omega$ tenda a zero muito rapidamente. Porém, baseando-se no esquema de partição introduzido na Seção 3.4, este problema pode ser evitado. Na Fig. 12(d), consideramos uma CCA particionada em 3 (5) módulos fracamente acoplados compostos por 10 (6) cavidades cada. Note, ao comparar com a Fig. 12(c), que o tempo de transmissão requerido é consideravelmente diminuído enquanto que o valor máximo de amplitude de transição é praticamente mantido.

Independentemente do regime de interação a ser induzido, o fator crucial que define a fidelidade do protocolo de QST é a amplitude de borda, i.e., a ocorrência de estados bilocalizados tanto no caso de uma CCA escalonada padrão ou particionada. O ponto chave é então gerar bilocalização nos modos normais do campo e sintonizar os átomos nesta região. A velocidade de transmissão, por sua vez, pode ser manipulada ao estabelecer um regime de interação apropriado e/ou particionar a CCA como discutido na Seção 3.4.

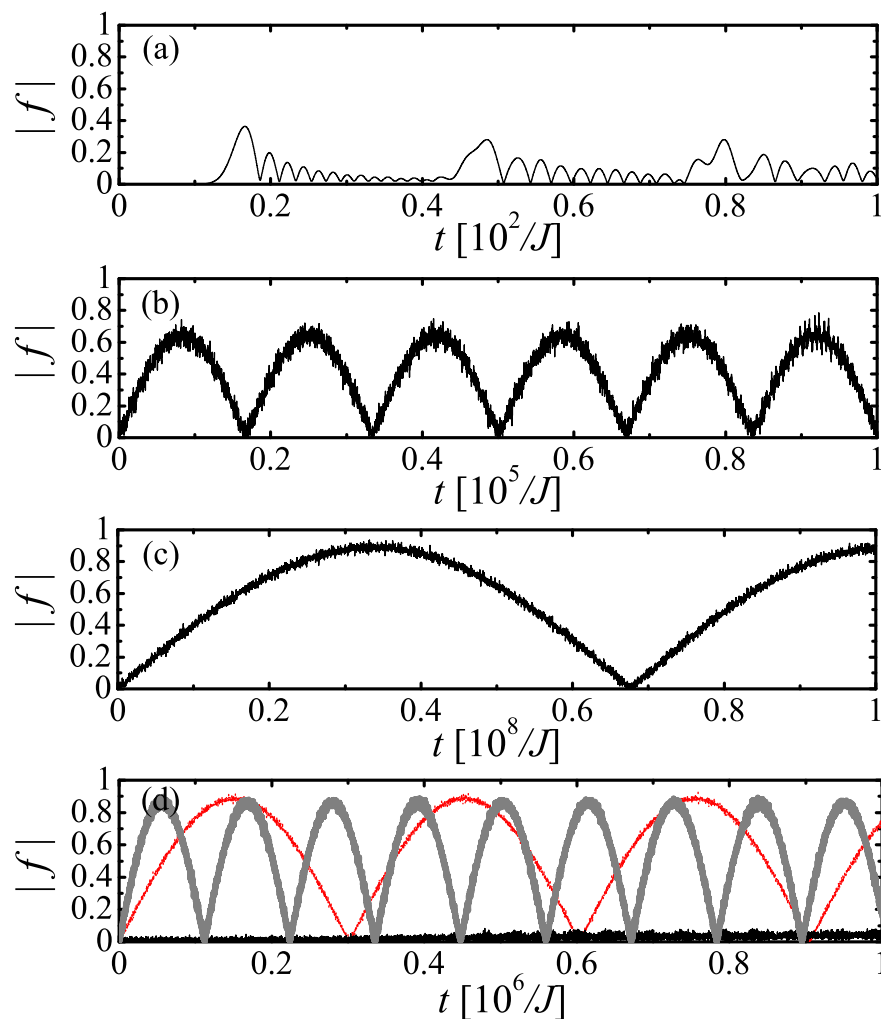


Figura 12 – Evolução temporal da amplitude de transição para um poláriton simétrico preparado na primeira cavidade de uma CCA escalonada contendo 30 cavidades para (a) $\eta = 0$, (b) $\eta = -0.25$ w (c) $\eta = -0.5$. Em (d), mostramos o caso de uma CCA particionada para $m = 3$ com $J_{\text{mod}} = 0.1J$ (curva pontilhada vermelha) e para $m = 5$ com $J_{\text{mod}} = 0.3J$ (curva espessa cinza). Note que J_{mod} foi ligeiramente ajustado de modo a garantir a formação de estados bilocalizados (ver Seção 3.4). O parâmetro de distorção foi fixado para $\eta = -0.5$, $g = 0.01J$ e $\omega_a = 0$. Os gráficos foram obtidos por uma diagonalização numérica da Eq. (3.20) [com H_{hop} sendo substituído por H_{mod} em (d)].

3.7 Conclusões

Neste capítulo, exploramos a transferência de estados quânticos em uma CCA. Em contraste com o protótipo uniforme, investigamos um padrão alternado de taxas de acoplamento cavidade-cavidade (i.e., hopping). De início, focamos na QST através de uma CCA sem átomos e introduzimos um método para diagonalizar ana-

liticamente o Hamiltoniano para uma cadeia altamente distorcida. Mostramos que a distorção induz o aparecimento de estados discretos fortemente bilocalizados nas bordas da cadeia. De acordo com protocolos de QST que fazem uso de bilocalização, a CCA escalonada permite a realização destes estados com alta fidelidade. Uma característica peculiar da CCA escalonada é o comportamento da fidelidade de transmissão em função de seu tamanho. No caso de uma cadeia bastante distorcida, a fidelidade é praticamente independente do comprimento da cadeia (diferentemente do caso de canal uniforme, com os sítios da borda fracamente acoplados ao restante do sistema), o que a torna ideal para protocolos de QST e até geração de emaranhamento envolvendo longas distâncias. A única desvantagem é, porém, o custo de obter tempos de transmissão relativamente longos. Para contornar este problema, desenvolvemos uma estratégia baseada em particionar a CCA em subunidades idênticas. Mostramos que, em certas instâncias, essa estratégia pode resultar em uma redução significativa no tempo de transmissão ao mesmo tempo em que a fidelidade é efetivamente mantida. Apesar de termos investigado essas propriedades em uma CCA sem átomos, nossos resultados são aplicados em qualquer cadeia de spin, não importando a sua implementação física.

Também voltamos nossa atenção para uma CCA onde cada cavidade interage um átomo de dois níveis (i.e., o modelo JCH) com o objetivo de explorar as propriedades descritas acima para realizar protocolos de QST envolvendo qubits codificados em estados atômicos e polaritônicos (híbridos) entre as duas extremidades da rede (usuários Alice e Bob). No regime de fraca interação átomo-campo, onde a frequência de transição atômica ω_a é sintonizada com um dos modos normais de campo bilocalizados $\omega_{b\pm}$, QST de estados atômicos pode ser estabelecida em uma escala temporal definida pela intensidade do acoplamento. Para fortes interações átomo-campo, $g \gg \omega J, \omega n, \omega n$, podemos, ao invés disso, tirar vantagem da formação de pares de estados híbridos bilocalizados para eficientemente transmitir um polaríton de uma dada paridade através da CCA em uma escala temporal induzida pela

diferença de energia entre o par de modos normais bilocalizados do campo.

Capítulo 4

Cavidades acopladas em redes complexas

O presente capítulo é baseado na Ref. [80] e engloba nossos principais resultados em CCAs definidas em redes quânticas complexas¹.

Vamos agora estudar a dinâmica de excitações atômicas e fotônicas no modelo JCH onde as cavidades são conectadas formando uma rede de Apolônio [122]. Diagonalizando numericamente o Hamiltoniano no subespaço de uma excitação, calculamos a evolução temporal de estados iniciais localizados em uma dada cavidade, considerando vários regimes dinâmicos. Também discutimos detalhadamente a caminhada quântica contínua de uma partícula na rede de Apolônio e mostramos como uma interação efetiva do tipo JC pode ser obtida no regime de forte acoplamento cavidade-cavidade (hopping), dada a existência de modos normais discretos fortemente localizados. Quando este parâmetro e a interação átomo-fóton possuem intensidades da mesma ordem, a excitação é convertida entre ambas as componentes de maneira não trivial. Neste caso, diferentes cavidades irão contribuir de maneiras distintas para uma das componentes, a depender da dessintonia entre ω_a e ω_f e das

¹Todas as figuras presentes neste capítulo também foram reproduzidas ou adaptadas de [80]. De acordo com a *American Physical Society*, é permitida a reprodução total ou parcial de um artigo publicado em uma tese.

condições iniciais. No caso em que a interação átomo-campo prevalece, os dois tipos de excitação se propagam de maneira idêntica.

No que segue, vamos introduzir a rede de Apolônio e suas propriedades. Na Seção 4.2 definimos o modelo JCH. Na Seção 4.3 fazemos uma análise do espectro de auto-estados de uma partícula (campo livre). Em seguida, Seção 4.4, calculamos a evolução temporal para uma variedade de parâmetros e discutimos a dinâmica em termos da estrutura de auto-estados induzida pela rede de Apolônio. Na Seção 4.5 discutimos os diversos regimes de interação átomo-campo que podem ser manipulados e como isso afeta a dinâmica resultante. Comentários finais são reservados à Seção 4.6.

4.1 Redes de Apolônio

Recentemente, um tipo de rede complexa que não é nem completamente regular nem aleatória, denominada *rede de mundo pequeno* [123] – onde a distância média do caminho mais curto, l , entre dois sítios distintos aumenta com o tamanho da rede N de acordo com $l \propto \ln N$ – têm sido bastante explorada em diferentes contextos: de sistemas sociais e biológicos [123, 124] até dinâmica de transporte clássico e quântico [125–127]. Em particular, uma classe de redes complexas, denominadas redes de Apolônio (RA) [122], que são simultaneamente de mundo pequeno, livre de escala (na qual o grau de distribuição segue uma lei de potência) e podem ser inseridas no espaço Euclidiano, tem se destacado. Exemplos de sistemas estudados neste tipo de estrutura são: gás de elétrons [128], modelos magnéticos [129], modelos *tight-binding* [130], sistemas de elétrons fortemente correlacionados [131], caminhadas quânticas [132, 133], condensação de Bose-Einstein [134] e transições de fase quântica envolvendo poláritons [135].

Redes de Apolônio surgem do antigo problema de empacotamento de esferas [136]. A rede pode ser determinística ou aleatória, dependendo da configuração

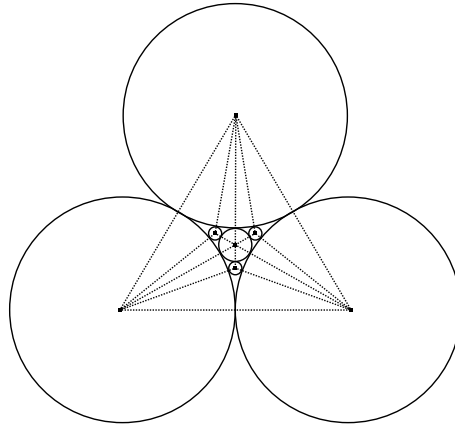


Figura 13 – Segunda geração ($n = 2$) do empacotamento de esferas (linhas contínuas) e a rede de Apolônio correspondente (linhas pontilhadas).

inicial. A forma mais comum surge de três círculos mutualmente conectados. A primeira geração, $n = 1$, é obtida inserindo um novo círculo (de maior tamanho possível) no interstício formado pelos anteriores. Gerações seguintes são formadas ao repetir esse processo sucessivamente. A rede de Apolônio propriamente dita é obtida ao se conectar os centros de todos os pares de círculos tangentes, como mostra a Fig. 13.

Em uma dada geração n , o número de vértices é dado por $N(n) = (3^n + 5)/2$ e o número de conexões por $C(n) = (3^{n+1} + 3)/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). A cada nova geração, um novo grupo de vértices possuindo o mesmo grau γ é criado. Mais precisamente, há $3^{n-1}, 3^{n-2}, 3^{n-3}, \dots, 3^2, 3, 1$ e 3 vértices de grau $\gamma = 3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, \dots, 3 \cdot 2^{n-2}, 3 \cdot 2^{n-1}$ e $2^n + 1$, respectivamente, onde o último representa os três vértices das extremidades. O vértice central, que chamaremos de *hub*, possui o maior grau.

4.2 Modelo Jaynes-Cummings Hubbard

Vamos considerar um sistema de cavidades acopladas dispostas como vértices de uma rede de Apolônio. O sistema de dois níveis $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ acoplado com o modo do campo eletromagnético será descrito pelo modelo JC [96, 97] (na aproximação de

onda-girante),

$$H_i^{\text{JC}} = \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + \omega_f a_i^\dagger a_i + g(\sigma_i^+ a_i + \sigma_i^- a_i^\dagger), \quad (4.1)$$

onde $\sigma_z |g\rangle = -|g\rangle$ e $\sigma_z |e\rangle = |e\rangle$, σ_i^+ (σ_i^-) e a_i^\dagger (a_i) são, respectivamente, os operadores de criação (aniquilação) atômico e fotônico para a cavidade i , g é a intensidade de acoplamento átomo-campo, ω_a é a frequência de transição atômica e ω_f é a frequência do campo.

Considerando que as cavidades estão configuradas de maneira que fótons podem tunelar entre sítios vizinhos, O Hamiltoniano do sistema passa a ser

$$H = \sum_{i=1}^{N(n)} H_i^{\text{JC}} - J \sum_{i,j=1}^{N(n)} A_{ij}^{(n)} a_i^\dagger a_j, \quad (4.2)$$

onde J é o acoplamento cavidade-cavidade (taxa de hopping fotônico), $N(n)$ é o número de cavidades em uma dada geração n da RA e $A_{ij}^{(n)}$ são os elementos da matriz de adjacência. Aqui, vamos restringir o espaço de Hilbert para os estados contendo apenas uma excitação. Podemos então ter um fóton ou um átomo excitado, isto é, $|1_k\rangle$ ou $|e_k\rangle$, respectivamente, onde $k \in \{1, \dots, N(n)\}$ denota a cavidade. Sendo assim, o estado completo é escrito pelo produto tensorial dos estados de cada cavidade, onde uma excitação deve ser conservada (o restante das cavidades estão no estado fundamental $|g, 0\rangle$). O espaço de Hilbert terá então $D = 2N(n) = 3^n + 5$ dimensões. Na referida base, a forma matricial do Hamiltoniano (4.2) é expressa por [75]

$$H_{1exc} = \frac{\Delta}{2} I_{N(n)} \otimes \sigma_z + g I_{N(n)} \otimes \sigma_x - J A_n \otimes \frac{I_2 + \sigma_z}{2}, \quad (4.3)$$

onde $\Delta = \omega_f - \omega_a$, I_m é a matriz identidade $m \times m$, σ_x e σ_z são as matrizes de Pauli usuais e A_n é a matriz de adjacência. Note que o estado $\otimes_{k=1}^{N(n)} |k\rangle |g, 0\rangle$ não está incluído neste subespaço, isto é, todo sistema está efetivamente isolado e é inicializado com uma excitação.

A matriz de adjacência A_n descreve a maneira na qual todos os vértices da rede

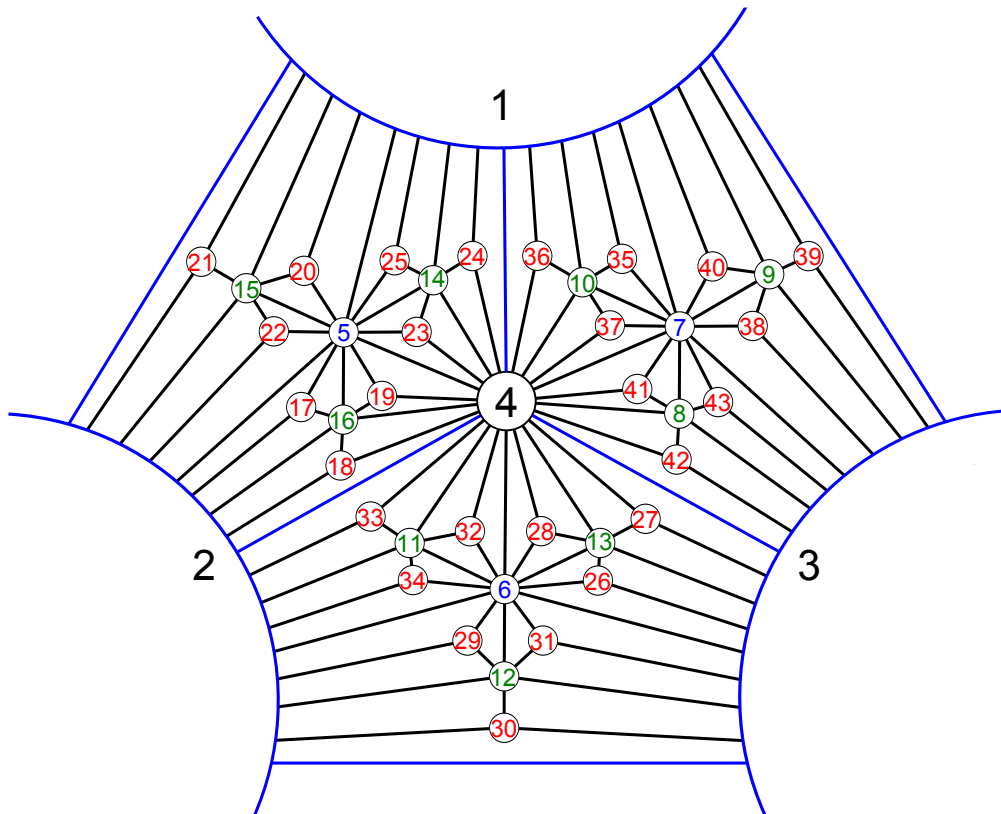


Figura 14 – Rede de Apolônio para $n = 4$ (43 vértices). A primeira geração é formada pelos vértices 1 a 4, a segunda inclui 5 a 7, a terceira 8 a 16 e a quarta 17 a 43. Os vértices da extremidade foram representados em maior tamanho por pura conveniência. Este é o esquema de numeração que utilizaremos aqui.

estão conectados. Para $n = 2$, por exemplo, ela pode ser escrita como

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

(ver Fig. 13). Nas próximas seções, será necessária uma identificação para cada vértice (cavidade) da rede. A Fig. 14 mostra a numeração que iremos considerar neste trabalho, até a quarta geração da rede.

4.3 Espectro de campo livre

A topologia da RA induz auto-estados fortemente localizados e estendidos, e o seu espectro é caracterizado por regiões, algumas destas com um alto grau de degenerescência. Tal configuração, quando comparada com redes regulares, muda completamente a maneira pela qual os graus de liberdade fotônicos e atômicos interagem entre si, a depender dos parâmetros do sistema. Portanto, para se ter uma idéia de como os poláritons [auto-estados do Hamiltoniano (4.2), i.e., combinações lineares entre $|1_k\rangle$ e $|e_k\rangle$] serão distribuídos na rede, vamos antes analisar o espectro de uma partícula na rede de Apolônio. O Hamiltoniano de campo livre (i.e. hopping) é dado por

$$H_{\text{hop}} = -J \sum_{i,j=1}^{N(n)} A_{ij}^{(n)} a_i^\dagger a_j. \quad (4.5)$$

Os auto-estados e seus respectivos auto-valores serão obtidos por diagonalização numérica. Para caracterizar o grau de localização de cada auto-estado, calculamos a *razão de participação*, definida por

$$\xi_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N(n)} |\langle i|\phi_j\rangle|^4}, \quad (4.6)$$

para uma dada geração n , onde $|\phi_j\rangle$ representa um auto-estado e $|i\rangle$ um fóton localizado no vértice i . Esta grandeza pode assumir valores entre 1, para estados completamente localizados, e N , para estados estendidos ($\langle i|\phi_j\rangle = 1/\sqrt{N}$ para todo i). Na Fig. 15(a), comparamos a razão de participação com a distribuição da amplitude de certos vértices i , $|\langle \phi_j|i\rangle|^2$, para a quarta geração da RA. Isso nos fornece uma visão geral da maneira pela qual cada vértice contribui para o espectro. As frequências dos modos normais, ϕ_j , são mostradas na Fig. 15(b). Primeiramente, note que o vértice central $i = 4$, de grau $\gamma = 24$, possui sua maior amplitude no estado com maior grau de localização, $\xi_{j=43}/N \approx 0.07$, correspondendo à frequência $\phi_{j=43}/J \approx 3.8$ que, a partir de agora, vamos indicar por ϕ^{hub} . Para os outros vértices $i = 3, 8$ e 18 , representando o grupo de $\gamma = 17, 6$ e 3 , respectivamente, mais

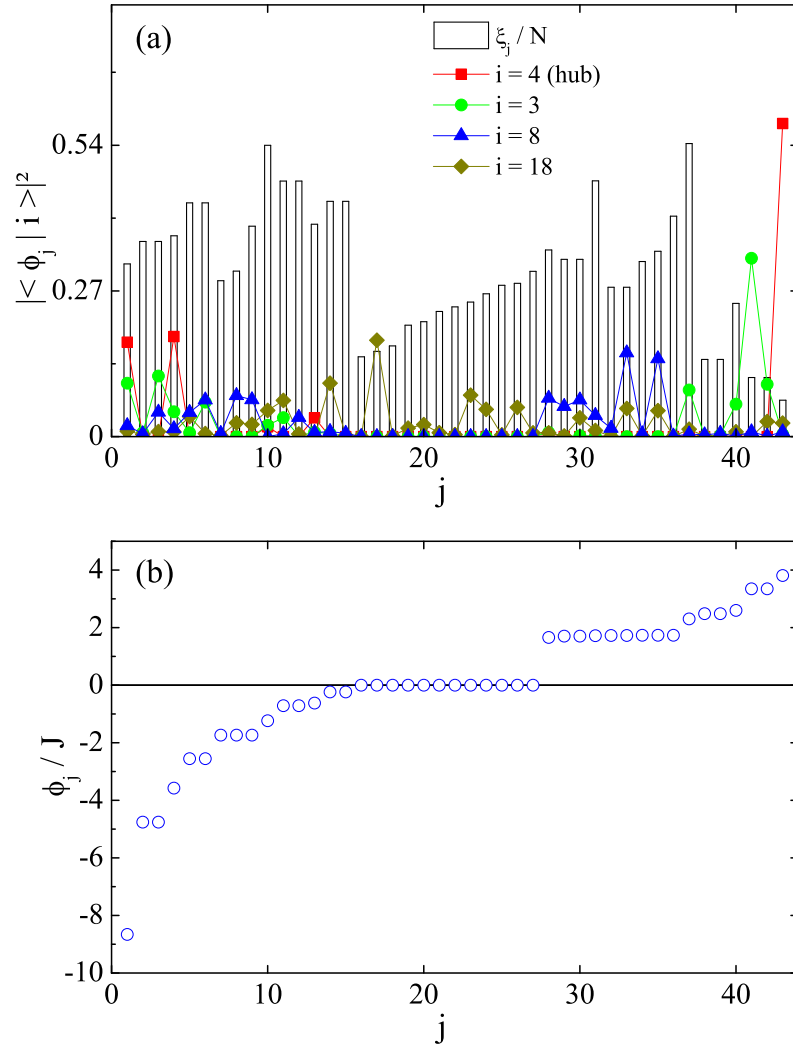


Figura 15 – (a) A razão de participação dos auto-estados ξ_j/N (colunas) de H_{hop} e as amplitudes $|\langle \phi_j | i \rangle|^2$ para $i = 4, 3, 8$ e 18 para $n = 4$ (43 vértices). (b) Banda de frequência dos modos normais. Os auto-estados estão dispostos de acordo com os valores de ϕ_j em ordem crescente (em unidades de J) ou, em cada grupo degenerado, pelos valores de ξ_j/N .

auto-estados estão envolvidos mas ainda há um pico em um estado razoavelmente localizado. Acontece que uma distribuição similar ocorre para todos os vértices i , mas com diferentes graus de localização. O vértice central, $i = 4$, sempre terá o auto-estado associado mais fortemente localizado, independentemente da geração n . Mesmo em um certo grupo de vértices associado a um γ , podem haver diferenças no grau de localização, uma vez que há diversos grupos de simetria na estrutura (note que a rede de Apolônio tem uma simetria rotacional em $2\pi/3$). Enfim, o que mais deve ser enfatizado é que, assim como o vértice central possui um auto-estado

associado fortemente localizado com frequência ϕ^{hub} , sempre haverá um auto-estado com um certo grau de localização associado (não univocamente) a um vértice, com uma certa frequência $\phi_j/J \geq 0$ dependendo de γ (altas frequências são associadas a altos valores de γ). Nas Figs. 15(a) e 15(b), por exemplo, podemos identificar a frequência $\phi_j/J = 0$ como sendo a correspondente ao grupo de vértices com $\gamma = 3$ (17 a 43). Frequências abaixo deste valor englobam estados estendidos.

Apesar de só termos discutido as propriedades para a quarta geração da rede de Apolônio, sua estrutura apresenta auto-similaridade com o aumento da rede e portanto isto é refletido diretamente em suas propriedades. As regiões do espectro contendo auto-estados fortemente localizados para um dado γ induz efeitos dinâmicos interessantes no modelo JCH como veremos na próxima seção. Mais detalhes sobre estados localizados e estendidos na rede de Apolônio para o espectro de uma partícula podem ser encontrados em [130].

4.4 Evolução temporal

Nesta seção mostramos os resultados da evolução temporal de uma excitação no modelo JCH disposto na RA. Os auto-estados do sistema (poláritons) $|E_j\rangle$ e seus correspondentes auto-valores E_j foram obtidos por diagonalização numérica exata do Hamiltoniano (4.3). Para um estado inicial da forma $|\psi_k(0)\rangle = \cos\alpha|1_k\rangle + \sin\alpha|e_k\rangle$ completamente localizado na cavidade k , obtemos a dinâmica do sistema para diversos regimes de energia. O estado em um tempo t é dado por $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$, onde $U(t) = e^{-iHt}$ é o operador de evolução temporal. Para um dado estado $|\psi_k(0)\rangle$, escrevemos

$$\pi_{\ell k}^{ph}(t) = \left| \sum_{j=1}^D e^{-iE_j t} \langle \psi_k(0) | E_j \rangle \langle E_j | 1_\ell \rangle \right|^2, \quad (4.7)$$

$$\pi_{\ell k}^{at}(t) = \left| \sum_{j=1}^D e^{-iE_j t} \langle \psi_k(0) | E_j \rangle \langle E_j | e_\ell \rangle \right|^2, \quad (4.8)$$

como a probabilidade de encontrar uma excitação fotônica e atômica, respectivamente, no vértice ℓ em um tempo t .

4.4.1 Regime de fraca interação átomo-campo

No regime onde o acoplamento cavidade-cavidade é muito mais intenso do que a interação entre o átomo e o campo, $J \gg g$, é possível estabelecer uma interação efetiva do tipo JC entre um conjunto reduzido de modos normais do campo e atômicos (ver Capítulo 2) fazendo um ajuste apropriado da dessintonia entre a frequência de transição atômica e a de campo. No caso da RA, isso pode ocorrer independentemente do tamanho da rede uma vez que os modos normais discretos são conservados [77, 83]. Isto significa que a componente atômica pode se propagar nesse regime (em uma escala temporal da ordem de $1/g$) onde a propagação de fótons ocorre em uma escala temporal muito menor. A dispersão atômica na rede (note que o átomo em si é estacionário) irá depender das interações efetivas geradas entre os modos normais atômicos e fotônicos.

A propriedade mencionada anteriormente é proveniente do fato de que, quando os parâmetros do sistema (acoplamentos e frequências) forem uniformes em toda a rede e, de alguma forma, o Hamiltoniano de campo livre possa ser expresso em termos de seus modos normais, o Hamiltoniano de JCH pode ser reescrito como uma soma de várias interações do tipo JC desacopladas, cada uma envolvendo um modo normal do campo e sua parte atômica [74, 75, 77]. Em outras palavras, quando $J \gg g$ temos poláritons bem definidos em termos de sua componente, isto é, no caso ideal, auto-estados puramente atômicos e fotônicos onde $\langle 1_i | E_j \rangle$ e $\langle e_i | E_j \rangle$, respectivamente, são nulos para todo i .

Por simplicidade, vamos novamente considerar $\omega_f = 0$ de maneira que o parâmetro de controle passa a ser a frequência de transição atômica ω_a que, ao ser apropriadamente ajustada para uma certa frequência normal do modo de campo, induz a aparição de um par de poláritons, isto é, estados que apresentam amplitude

nas duas componentes do sistema, e se estende em toda a rede a depender da distribuição espacial do modo normal de campo envolvido. Se a frequência for m -vezes degenerada, então m pares de polárítos serão envolvidos no processo. De qualquer forma, uma significativa quantidade de energia pode ser convertida entre as componentes atômica e fotônica se prepararmos o sistema em um estado apropriado. De modo a visualizar essa característica e estabelecer o quanto de energia é trocada devido a interação átomo-campo, para dadas condições iniciais, vamos iniciar o sistema em um estado puramente atômico. Dessa forma, restringimos os auto-estados envolvidos na dinâmica, isto é, o fóton não terá acesso a toda sua correspondente banda energética e, portanto, não se propagará livremente.

Nas Figs. 16(a) e 16(b) mostramos a probabilidade de ocupação total da componente fotônica (atômica), $\sum_{\ell} \pi_{\ell k}^{ph}$ ($\sum_{\ell} \pi_{\ell k}^{at}$), quando o estado inicial é preparado em uma excitação atômica localizada nos vértices 4 e 18, respectivamente. A frequência atômica ω_a foi sintonizada para ϕ^{hub} de modo a simular a dinâmica de polárítos fortemente localizados no vértice central. Observe que a transferência entre as componentes só ocorre significativamente quando o átomo é inicialmente preparado nesse vértice.

Na Fig. 17 mostramos como o processo acima ocorre de maneira mais detalhada. A energia puramente atômica é progressivamente convertida para as componentes do campo, com mais intensidade no vértice 4. Após os graus de liberdade fotônicos atingirem sua máxima probabilidade de ocupação, toda a energia é transferida de volta para os modos atômicos. Neste ponto a excitação não está mais localizada no vértice inicial, mas sim estendida entre diversas cavidades. Então, o processo reverso passa a ocorrer até que toda a energia é convertida para o vértice central na forma atômica, recuperando assim o estado inicial. Uma vez em que J/g é grande o suficiente e ω_a é precisamente ajustada para ϕ^{hub} , todo esse processo é cíclico. Nas Figs. 16(c) e 16(d), a frequência atômica é ajustada para a banda degenerada contendo todos os estados localizados correspondentes ao grupo de vértices de grau

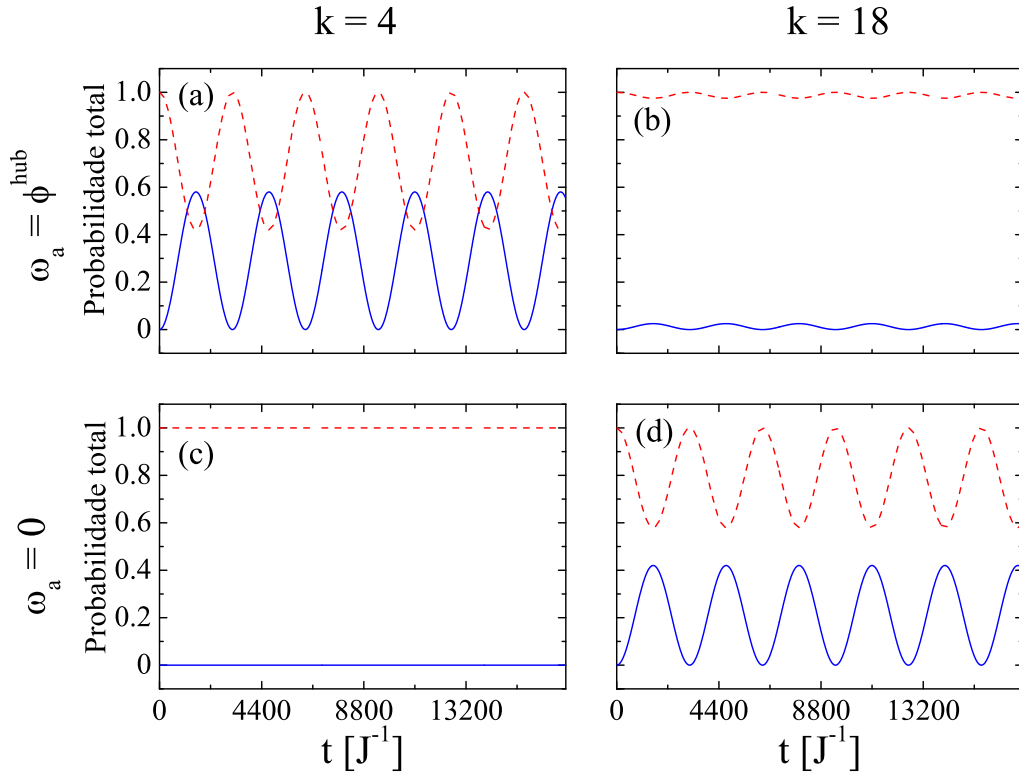


Figura 16 – Probabilidade total de ocupação das componentes fotônica (curva sólida) e atômica (curva tracejada), $\sum_{\ell} \pi_{\ell k}^{tipo}$, para um estado inicial puramente atômico, $|\psi_k(0)\rangle = |e_k\rangle$, na RA de quarta geração, no regime de fraco acoplamento átomo-campo com $J/g = 10^3$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} .

$\gamma = 3$. Neste caso, se prepararmos a excitação atômica no vértice central ela não se propaga [Fig. 16(c)], o que indica que a amplitude deste vértice nos polárítions interagentes envolvidos é mínima. Evidentemente, o mesmo não se aplica ao vértice $k = 18$ e então o átomo consegue liberar energia para a componente fotônica [Fig. 16(d)]. Apesar de haver um certo grau de degenerescência associado a esta banda, a amplitude do estado inicial com os auto-estados envolvidos é que irá definir o quanto de energia pode ser transferida entre ambas as componentes. Esta propriedade é válida para redes de qualquer tamanho uma vez que o espectro da RA é caracteristicamente discreto.

A princípio, a interação efetiva do tipo JC também é possível em redes regulares finitas. Porém, ao aumentar a rede, o espectro associado aos modos normais de campo tende a formar um contínuo de frequências e então definir uma certa

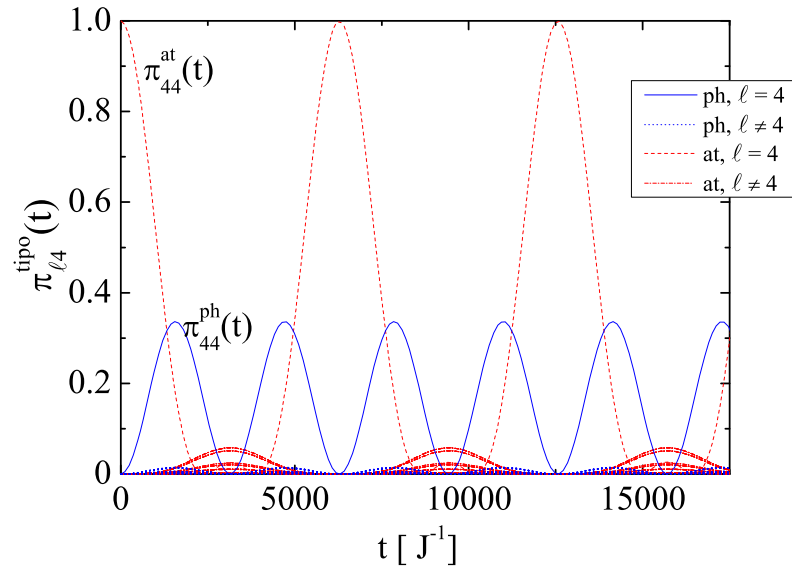


Figura 17 – Probabilidade de ocupação fotônica e atômica para o estado inicial $|\psi_4(0)\rangle = |e_4\rangle$ na quarta geração da RA. As curvas mais relevantes estão indicadas na figura. Os parâmetros do sistema são $J/g = 10^3$ e $\omega_a = \phi^{\text{hub}}$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} .

ressonância torna-se impraticável. Em adição, os auto-estados correspondentes se tornam estendidos e então a excitação atômica não se propaga, não importando onde o estado inicial é preparado [75].

Agora, vamos considerar um estado inicial da forma

$$|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}, \quad (4.9)$$

que é um auto-estado do modelo JC para uma excitação. Neste caso, toda a banda do campo está disponível para a propagação da componente fotônica enquanto que a dinâmica da excitação atômica ocorre de acordo com o discutido anteriormente. Portanto, o fóton descreve uma caminhada quântica na rede enquanto que a interação átomo-campo ocorre em uma escala temporal muito maior, já que $J \gg g$. Obviamente, a dinâmica atômica só torna-se relevante se ω_a coincidir com alguma das frequência de modos normais do campo. Porém, no regime de forte hopping, o modo fotônico se propaga praticamente livre sem ser perturbado pelas componentes atômicas. No restante desta seção vamos então descrever as propriedades de transporte quântico de uma partícula (neste caso, o fóton) na RA.

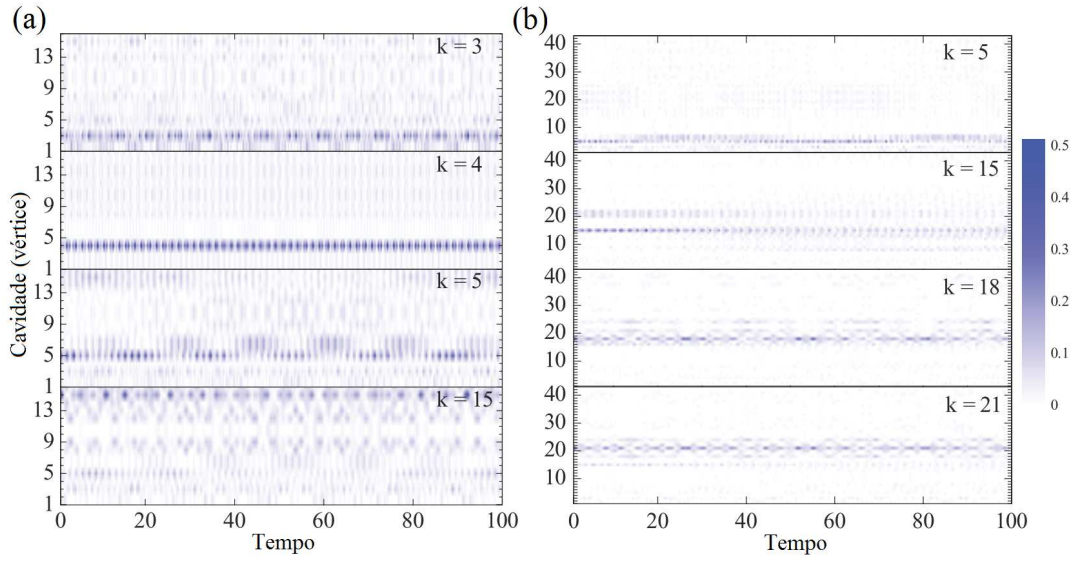


Figura 18 – Evolução temporal da excitação fotônica através da RA de (a) terceira geração (16 vértices) e (b) quarta geração (43 vértices) para o regime de forte interação caverna-caverna. O eixo vertical representa cada vértice (caverna) da rede. O estado inicial $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$ foi preparado para diversos k 's. Os parâmetros do sistema são $J/g = 10^3$ e $\omega_a = 0$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} . A numeração para cada vértice da RA está disponível na Fig. 14.

Primeiramente, observe que a RA possui uma simetria de rotação em $2\pi/3$ e, portanto, há diversos subconjuntos de vértices equivalentes (veja a Fig. 14) como $\{1, 2, 3\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{8, 10, 11, 13, 14, 16\}$ e assim por diante, nos quais $|\psi_k(0)\rangle$ gera a mesma dinâmica. Da mesma forma, para um estado inicial preparado no vértice central ($k = 4$), as probabilidades de ocupação $\pi_{\ell 4}^{tipo}(t)$ são iguais para cada subconjunto mencionado anteriormente.

A Fig. 18 mostra a evolução temporal probabilidade local de encontrar o fóton em toda a rede para diversos estados iniciais quando $n = 3$ e $n = 4$. Apesar de exibir uma evolução um tanto complexa, podemos identificar alguns aspectos gerais da propagação. O mais nítido é a transição periódica entre estados localizados e estendidos. A probabilidade de retorno π_{kk}^{ph} atinge os valores mais altos e portanto o fóton é mais propenso a ser encontrado no vértice inicial. Isso é esperado devido a existência de vários estados localizados como discutido na Seção 4.3. Esta propriedade é mais evidente para o vértice central, $k = 4$. Em relação aos outros vértices, a

probabilidade pode atingir alguns valores significativos. A distribuição de probabilidade depende fortemente geração da RA e das condições iniciais. Na Fig. 18(a), ao examinar $\pi_{\ell k}^{ph}$ para $k = 3$, vemos que boa parte da probabilidade flui para os outros vértices pertencendo ao mesmo grupo (com o mesmo grau γ), isto é, vértices 1 e 2. O mesmo se aplica para π_{65}^{ph} e π_{75}^{ph} quando $k = 5$. Para $k = 15$, os vértices 10 e 11, mesmo pertencendo ao mesmo grupo, praticamente não são populados. Isso sugere que compartilhar o mesmo γ não implica em uma conexão privilegiada. Isto se torna mais claro na Fig. 18(b), quando $k = 18$ e 21, onde o fóton se espalha mais entre a subrede² gerada pelos vértices 1, 2 e 4. Quando $k = 5$ para $n = 4$, a excitação ainda se propaga entre os vértices 6 e 7 mas evitando a transferência para vértices pertencendo a gerações posteriores. Para $k = 15$, há uma probabilidade relevante de encontrar o fóton nos vértices 20, 21 e 22. Estes pertencem à subrede formada pelos vértices 1, 2 e 5, onde o vértice 15 passa a ser o central. Essas observações indicam que as subredes tem um papel fundamental na dinâmica de transporte da RA.

Uma maneira mais conveniente de visualizar como a excitação é distribuída entre a rede, dadas certas condições iniciais, é calcular a média da probabilidade $\pi_{\ell k}^{ph}(t)$ em uma escala temporal tendendo a infinito. Tal quantidade é definida por

$$\begin{aligned} \chi_{\ell k}^{ph} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \pi_{\ell k}^{ph}(t) dt \\ &= \sum_{i,j} \delta(E_i - E_j) \langle \ell, g | E_i \rangle \langle E_i | \psi_k(0) \rangle \times \\ &\times \langle \psi_k(0) | E_j \rangle \langle E_j | \ell, g \rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\delta(E_i - E_j) = 1$ para $E_i = E_j$ e $\delta(E_i - E_j) = 0$ para $E_i \neq E_j$. A Fig. 19 mostra a distribuição desta média para diferentes gerações da RA. Primeiro, note que $\chi_{\ell k}^{ph} = \chi_{k\ell}^{ph}$ para todo k e ℓ (isso é evidente uma vez em que a evolução é unitária) e portanto esta quantidade fornece uma visão mais clara da maneira pela qual os

²A RA possui uma estrutura auto-similar onde cada subrede, gerada por 3 novos vértices externos, preserva localmente a recorrência da RA mas quebra a simetria dos grupos de vértices que possuem o mesmo grau γ na RA original.

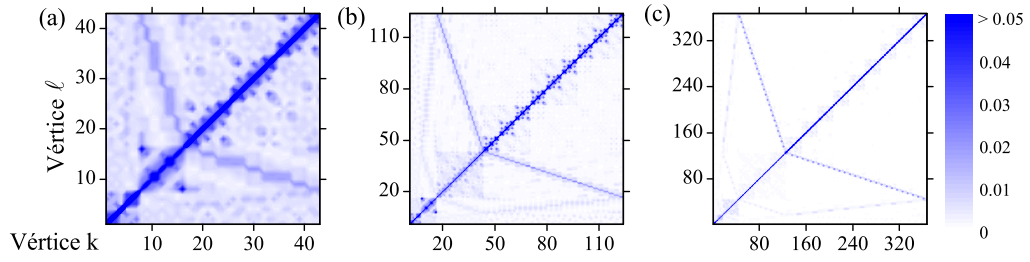


Figura 19 – Média da probabilidade de ocupação fotônica em um longo período, $\chi_{\ell k}^{ph}$, para (a) $n = 4$ (43 vértices), (b) $n = 5$ (124 vértices) e (c) $n = 6$ (367 vértices). Os parâmetros do sistema são $J/g = 10^3$ e $\omega_a = 0$. O formato das curvas é simétrico uma vez em que $\chi_{\ell k}^{ph} = \chi_{k\ell}^{ph}$ para todo k e ℓ , e os mais altos valores são χ_{kk}^{ph} , isto é, a média da probabilidade de retorno ao estado inicial, como já era esperado. Apesar de não disponibilizarmos a identificação dos vértices pertencendo a gerações mais altas do que $n = 4$, o objetivo desta figura é fornecer uma idéia de como as subredes e vértices de diferentes gerações são conectados entre si. Em cada geração acima, o ramo mais escuro representa a média da probabilidade de transporte entre vértices da atual geração para vértices pertencentes a anterior. As regiões em forma de quadrado indicam conexões entre vértices com o mesmo γ .

vértices estabelecem conexões entre si. Como já era previsto, as maiores médias são χ_{kk}^{ph} porém, ao observar as outras conexões, identificamos algumas zonas (estruturas quadradas) e ramos que apresentam auto-similaridade quando n aumenta. O ramo representando as conexões mais fortes (o mais escuro na Fig. 19) é sempre o que conecta vértices da geração em questão com os da anterior. De forma geral, estes representam as conexões entre os vértices centrais das 3^{n-2} subredes contendo 7 vértices para os seus três primeiros-vizinhos de grau $\gamma = 3$. Para maiores gerações, os ramos anteriores continuam presentes, porém apresentando menor intensidade uma vez em que os vértices centrais das subredes mencionadas anteriormente passam a possuir uma γ maior. Além disso, os vértices correspondentes a gerações distantes são fracamente conectados e os pertencentes a mesma geração apresentam conexões relevantes apenas em subredes compostas por 16 vértices no máximo. Por exemplo, em uma dada geração n , há 3^{n-m} subredes contendo $(3^m + 5)/2$ vértices.

4.4.2 Regime intermediário e de forte interação átomo-campo

No que segue, consideramos a situação onde $J \approx g$, na qual denominaremos de regime intermediário. Neste caso a dinâmica é não trivial já que não há interação do tipo JC isolada, nem o fóton se propaga livremente descrevendo uma caminhada quântica contínua na rede. Ao invés disso, ambas as componentes passam a interferir entre si.

No regime $J \gg g$, mostramos ser possível ajustar a frequência atômica através do espectro de auto-estados do modelo JCH de maneira a criar poláritons quando ω_a se iguala a qualquer auto-valor E_j . Caso contrário, temos auto-estados de caráter fotônico e atômico separadamente. Ao diminuir a razão J/g , tal ressonância exclusiva não é mais possível. Em outras palavras, no regime intermediário, não é possível isolar um par de poláritons sem perturbar os outros níveis energéticos do espectro total (obviamente, em uma região compatível com o valor de J/g). Então a excitação passa a vagar entre os graus de liberdade atômico e fotônico, em uma mesma escala temporal, de maneira mais complexa. Acontece que cada cavidade é mais propensa a sustentar uma das duas componentes, dependendo de ω_a e das condições iniciais do sistema. Portanto, um estado inicial da forma $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$ não manterá a superposição $1/2 : 1/2$ entre a parte fotônica e atômica do sistema, como ocorre quando $J \gg g$.

A Fig. 20 descreve como as condições iniciais mudam significativamente a susceptibilidade de cada cavidade em sustentar uma das componentes no regime intermediário de interação. Na Fig. 20(a), mostramos a distribuição da média da probabilidade de ocupação $\chi_{\ell k}^{tipo}$ quando o estado inicial é preparado no vértice central, $k = 4$. Note que $\chi_{k\ell}^{at}$ é calculado da mesma maneira que a Eq. (4.10), só que projetando os auto-estados em $|\ell, e\rangle$ ao invés de $|\ell, g\rangle$. Podemos ver que alguns grupos de vértices possuem um maior $\chi_{\ell 4}^{ph}$ (incluindo o vértice central), outros contribuem mais para $\chi_{\ell 4}^{at}$ e alguns praticamente permanecem indiferentes. A Fig. 20(b) mostra a probabilidade total de ocupação da componente fotônica (atômica), $\sum_{\ell} \pi_{\ell k}^{ph}$

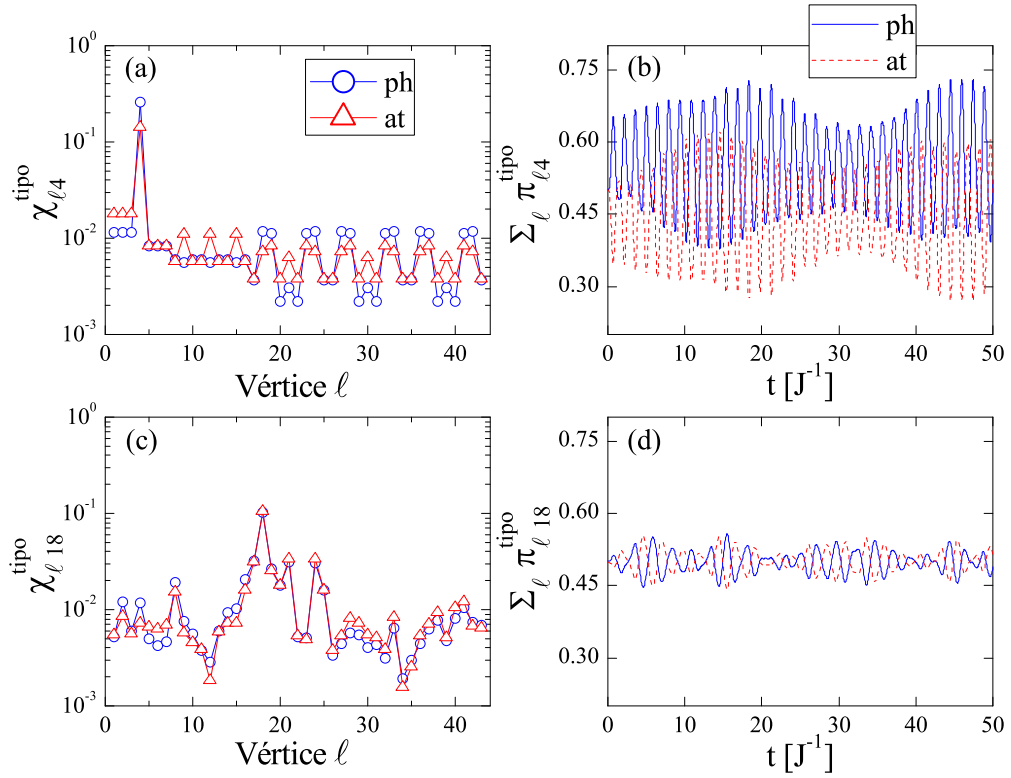


Figura 20 – As figuras (a) e (c) mostram a distribuição da média da probabilidade de ocupação fotônica e atômica para $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$ preparado nos vértices $k = 4$ e $k = 18$, respectivamente, e as figuras (b) e (d) mostram a probabilidade total da ocupação de ambas as componentes. Os parâmetros do sistema são $n = 4$, $J/g = 1$ e $\omega_a = 0$. O tempo está expresso em unidades de J^{-1} . A média das probabilidades de retorno são $\chi_{44}^{ph} \approx 0.26$, $\chi_{44}^{at} \approx 0.14$, $\chi_{1818}^{ph} \approx 0.103$ e $\chi_{1818}^{at} \approx 0.105$.

$(\sum_{\ell} \pi_{\ell k}^{at})$. Todo o sistema se “propaga” entre as duas componentes, principalmente devido a diferença entre χ_{44}^{ph} e χ_{44}^{at} e ao fato de que os polárítions que dominam a dinâmica são fortemente localizados.

As Figs. 20(c) e 20(d) fazem a mesma análise mas para $k = 18$ ($\gamma = 3$). Como $\omega_a = 0$, diversos pares de polárítions do tipo JC associados aos vértices com $\gamma = 3$ estão envolvidos na dinâmica fazendo com que $\chi_{1818}^{ph} \approx \chi_{1818}^{at}$. Porém, mesmo ocorrendo uma forte interação do tipo JC entre modos característicos de uma determinada frequência – resultando em pequenas variações da probabilidade total de ocupação das componentes – outros polárítions estão envolvidos, assim modificando a susceptibilidade do restante das cavidades em relação a ambas as componentes do sistema.

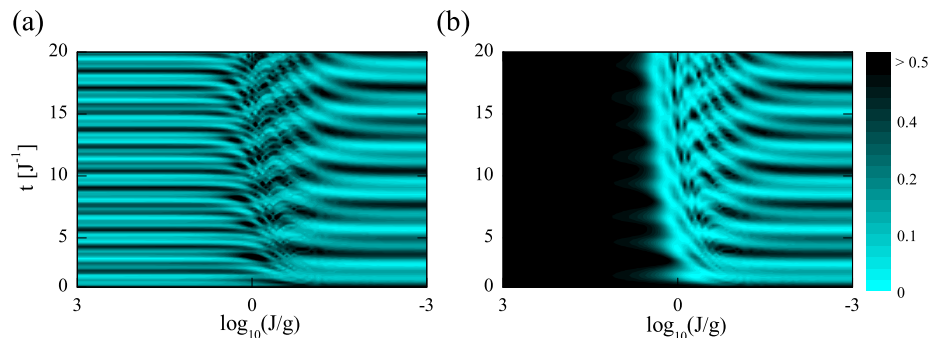


Figura 21 – Comparação entre a propagação atômica e fotônica do regime de forte hopping, $J/g = 10^3$ ao regime de forte acoplamento átomo-campo, $J/g = 10^{-3}$, para um estado inicial do tipo $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$ preparado em $k = 4$. Em (a), mostramos a probabilidade de retorno do fóton, π_{44}^{ph} , e em (b), sua correspondente atômica. Os parâmetros do sistema são $n = 4$ e $\omega_a = 0$.

O comportamento não-trivial discutido acima desaparece quando atingimos o regime $J \ll g$. Nestas condições, as dinâmicas do fóton e do átomo são idênticas e a dispersão na rede é a mesma de um fóton no regime $J \gg g$, mas com a velocidade reduzida a metade [75] [ver Capítulo 3; Eqs. (3.22), (3.23) e (3.24)]. Em outras palavras, se $|\psi_k(0)\rangle = (|1_k\rangle + |e_k\rangle)/\sqrt{2}$, a excitação se propaga criando novos auto-estados de uma cavidade. Esse comportamento é esperado ao notarmos que, enquanto J/g diminui, mais pares de polaritons do tipo JC são criados até que todo o espectro é afetado.

4.5 Regimes de interação: visão geral

Vamos agora discutir as principais características de cada regime de interação apresentado anteriormente. O que será descrito a seguir não necessariamente é restrito à RA, podendo assim ser válido para qualquer topologia. A diferença está na existência de auto-estados discretos e localizados, e se estes são mantidos para uma rede de grande tamanho.

Na Fig. 21, mostramos as probabilidades de retorno π_{44}^{ph} [Fig. 21(a)] e π_{44}^{at} [Fig. 21(b)] para diferentes regimes dinâmicos, de $J/g = 10^3$ até 10^{-3} , para um estado inicial híbrido da forma da Eq. (4.9). No regime de fraco acoplamento átomo-campo,

$J \gg g$, a interação entre as duas componentes ocorre em uma escala temporal muito maior que a da propagação de fótons. Isto significa que, para um estado inicial preparado como um poláriton localizado em uma cavidade, o sistema como um todo se mantém em uma superposição (entre as duas componentes) compartilhada meio a meio. Enquanto isso, o fóton realiza uma caminhada quântica livremente através da rede, sem sofrer grandes interferências dos átomos. A dinâmica atômica dependerá exclusivamente do conjunto de interações efetivas do tipo JC que foram estabelecidas. Se nenhuma interação desse tipo foi induzida, a excitação atômica não se propaga uma vez que seus auto-estados correspondentes formam uma banda degenerada. Se houver localização e ω_a é sintonizada para algum desses modos normais de campo, ao preparar um estado inicial apropriado (i.e., no vértice de maior amplitude) uma significativa troca de energia entre átomo e campo ocorre (em uma escala temporal da ordem de g^{-1}), como mostrado nas Figs. 16 e 17, onde consideramos um estado inicial puramente atômico de maneira a destacar o fenômeno.

Também analisamos as características de transporte na RA de maneira geral. Sempre há uma alta probabilidade da partícula ser encontrada no vértice inicial, assim como espera-se em redes de mundo pequeno [127]. Ao calcular a probabilidade média de ocupação em um longo período, para diferentes gerações da RA, mostramos as diversas conexões estabelecidas entre os vértices e as subredes e descobrimos que há um padrão auto-similar quando aumentamos o tamanho da rede (ver Fig. 19).

O regime intermediário $J \approx g$ é caracterizado por uma interferência de poláritons que leva o sistema a vagar entre os graus de liberdade fotônicos e atômicos de maneira não-trivial. Nesse caso, a dinâmica não é estritamente gerada por pares de auto-estados do tipo JC e nem o modo fotônico se propaga livremente. Ao invés disso, para uma dada dessintonia, mesmo se poláritons do tipo JC estão perfeitamente formados, outros poláritons de diferentes frequências passam a contribuir com a dinâmica. Isso gera diferenças entre a ocupação média das partes fotônicas e atômicas em cada

cavidade (ver Fig. 20). Isso pode ser evitado (pelo menos em uma cavidade) ao preparar o estado inicial em um dos vértices fortemente localizados.

O regime de forte acoplamento átomo-campo, $J \ll g$ é atingido quando a interação entre os modos normais é tão grande que todos estes passam a ser híbridos. Assim, as excitações atômica e fotônica propagam-se coerentemente ao longo da rede.

4.6 Conclusões

A rede de Apolônio induz um espectro bastante peculiar composto por estados localizados e estendidos e mantém suas características independentemente do tamanho da rede (da geração). Essa auto-similaridade é refletida diretamente na dinâmica do sistema considerado aqui, descrito pelo modelo JCH.

Mostramos uma variedade de regimes dinâmicos. Em particular, mostramos que no regime de fraca interação átomo-campo, $J \gg g$, é possível sintonizar a frequência atômica de modo a gerar interações do tipo JC em um número reduzido de modos normais, assim criando modos normais híbridos. Dessa forma, a excitação atômica pode se propagar na rede, mesmo que seja em uma escala de tempo muito maior do que a propagação fotônica. Tal controle evidentemente é perdido ao aumentar a intensidade da interação átomo-campo, $J \ll g$, quando ambas as componentes do sistema se propagam de maneira idêntica.

Capítulo 5

Considerações finais

Nesta tese investigamos a dinâmica de excitações atômicas, fotônicas e híbridas no modelo JCH, que descreve uma série de cavidades ópticas acopladas entre si, cada uma, em adição, interagindo com um átomo de dois níveis tendo em vista possíveis aplicações em protocolos de comunicação quântica. Sistemas híbridos envolvendo interações da radiação com a matéria se inserem como plataformas fundamentais para processamento de informação quântica distribuída em redes quânticas [18, 67–69], além de proporcionar novos horizontes na simulação de sistemas quânticos fortemente correlacionados [17, 19, 33, 46].

Particularmente, ao explorar as propriedades do subespaço de uma excitação mostramos que o modelo JCH fornece uma grande variedade de regimes dinâmicos envolvendo ambos os graus de liberdade atômicos e fotônicos. Estes podem ser *acessados* por um ajuste apropriado de apenas alguns parâmetros, são estes o acoplamento átomo-campo e a dessintonia entre a frequência de transição do átomo de dois níveis com a frequência do modo local do campo. Neste cenário, CCAs podem ser utilizadas como base para a realização de protocolos de comunicação quântica, tal como a QST mostrada no Capítulo 3. Nesta parte da tese, consideramos uma CCA escalonada (distorcida) de modo a induzir auto-estados bilocalizados nas bordas da cadeia, i.e., gerando uma dinâmica efetiva de duas cavidades. Dessa forma, para a

cadeia distorcida o suficiente, mostramos como transferir estados fotônicos, atômicos e híbridos com alta fidelidade entre longas distâncias. Também introduzimos uma técnica para acelerar o processo de QST de forma significativa. Ao particionar a cadeia em partes idênticas fracamente conectadas entre si, modos normais bilocalizados são mantidos com a mesma amplitude de localização enquanto que a diferença de energia entre estes aumenta, assim resultando em uma QST efetivamente mais rápida [83]. Vale mencionar que o resultado acima é válido para qualquer Hamiltoniano descrevendo uma partícula quântica (efetiva ou real) se propagando de acordo com o mesmo padrão alternado de taxas de tunelamento.

No Capítulo 4 investigamos a dinâmica de propagação de estados quânticos em um sistema de cavidades acopladas distribuídas em uma rede de Apolônio [80]. Mostramos que esta rede complexa gera uma dispersão de modos normais contendo diversos tipos de estados localizados e estendidos, assim gerando padrões de dinâmica e de conectividade que são mantidos independentemente do tamanho (geração) da rede. Além disso, os regimes de interação induzidos pelo acoplamento átomo-campo mostraram-se úteis no controle de propagação de ambas as componentes. Esses resultados podem ser utilizados como base para o desenvolvimento de protocolos de comunicação quântica em redes complexas de cavidades ópticas.

Devemos destacar que uma vez gerando estados híbridos, correlações átomo-campo de longa distância podem ser estabelecidas na CCA a depender dos parâmetros da estrutura em questão. Nossos resultados portanto fornecem mecanismos para QST, criação de emaranhamento, e controle da dinâmica de excitações fotônicas e atômicas em sistemas de cavidades acopladas. Possíveis extensões do nosso trabalho se inserem em diversas vertentes. Uma delas é obviamente estabelecer protocolos de QST entre sítios *arbitrários* de uma CCA. Também é importante a inclusão de efeitos de dissipação (perda de um fóton e emissão espontânea do átomo), desconsiderados nesta tese.

Próximos passos serão dados na direção de subespaços contendo mais excitações,

onde a não-linearidade inerente ao modelo JCH (interação efetiva entre fótons) passa a desempenhar um papel fundamental na dinâmica do sistema. Em particular, estudos sobre dinâmica de polárítons nas margens do ponto crítico da transição de fase quântica entre superfluido e isolante de Mott já estão sendo realizados [61–63, 65, 137]. No limite de várias excitações no regime de forte acoplamento átomo-campo (forte não-linearidade), estados híbridos com características de sólitons são gerados em toda a estrutura. Estes modos impedem a propagação de grandes populações fotônicas em escalas temporais curtas [61]. Em longos períodos, porém, é possível ter uma transmissão de estado quântico envolvendo sítios específicos da CCA [137]. Esses conjuntos de polárítons fortemente localizados são induzidos simultaneamente com o estado (fundamental) isolante de Mott. Dessa forma, assim como demonstrado experimentalmente em [63], mesmo considerando poucas cavidades e excitações, já é possível obter assinaturas de regimes fortemente correlacionados no modelo JCH.

A viabilidade de um controle local de parâmetros torna as CCAs fortes candidatas para implementação física de dispositivos de processamento de informação quântica. De forma geral, o principal objetivo desta tese foi explorar esses dispositivos quânticos híbridos como blocos fundamentais na arquitetura de redes quânticas. Sistemas de cavidades acopladas compõem uma área de pesquisa bastante promissora e ainda há diversos pontos a serem explorados, como por exemplo a distribuição de emaranhamento entre graus de liberdade atômico e fotônico e o desenvolvimento de métodos numéricos para tratar de configurações com um alto número de dimensões e métodos de caracterização experimental no regime dissipativo.

Referências

- 1 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 21, p. 467, 1982.
- 2 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- 3 DEUTSCH, D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 400, p. 97, 1985.
- 4 GEORGESCU, I. M.; ASHHAB, S.; NORI, F. Quantum simulation. *Reviews of Modern Physics*, v. 86, p. 153, 2014.
- 5 SHOR, P. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Journal on Computing*, v. 26, p. 1484, 1997.
- 6 GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: *28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC)*. [S.l.: s.n.], 1996. p. 212.
- 7 EKERT, A. K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical Review Letters*, v. 67, p. 661, 1991.
- 8 GISIN, N.; RIBORDY, G.; TITTEL, W.; ZBINDEN, H. Quantum cryptography. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, p. 145, 2002.
- 9 BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, v. 70, p. 1895, 1993.
- 10 CLARKE, J.; WILHELM, F. K. Superconducting quantum bits. *Nature*, v. 453, p. 1031, 2008.
- 11 XIANG, Z.-L.; ASHHAB, S.; YOU, J. Q.; NORI, F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, v. 85, p. 623, 2013.
- 12 KIELPINSKI, D.; MONROE, C.; WINELAND, D. J. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer. *Nature*, v. 417, p. 709, 2002.
- 13 BLOCH, I. Quantum coherence and entanglement with ultracold atoms in optical lattices. *Nature*, v. 453, p. 1016, 2008.

- 14 LADD, T. D. et al. Quantum computers. *Nature*, v. 464, p. 45, 2010.
- 15 BLAIS, A. et al. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 75, p. 032329, 2007.
- 16 SCHOELKOPF, R. J.; GIRVIN, S. M. Wiring up quantum systems. *Nature*, v. 451, p. 664, 2008.
- 17 HARTMANN, M. J.; BRANDAO, F. G. S. L.; PLENIO, M. B. Quantum many-body phenomena in coupled cavity arrays. *Laser & Photonics Reviews*, v. 2, p. 527, 2008.
- 18 RITTER, S. et al. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities. *Nature*, v. 484, p. 195, 2012.
- 19 SCHMIDT, S.; KOCH, J. Circuit QED lattices. *Annalen Der Physik*, v. 525, p. 395, 2013.
- 20 ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics*, v. 75, p. 715, 2003.
- 21 SAEEDI, K. et al. Room-temperature quantum bit storage exceeding 39 minutes using ionized donors in silicon-28. *Science*, v. 342, p. 830, 2013.
- 22 KOK, P. et al. Linear optical quantum computing with photonic qubits. *Reviews of Modern Physics*, v. 79, p. 135, 2007.
- 23 HORODECKI, R.; HORODECKI, P.; HORODECKI, M.; HORODECKI, K. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, p. 865, 2009.
- 24 KRAUTER, H. et al. Deterministic quantum teleportation between distant atomic objects. *Nature Physics*, v. 9, p. 400, 2013.
- 25 PFAFF, W. et al. Unconditional quantum teleportation between distant solid-state quantum bits. *Science*, v. 345, p. 532, 2014.
- 26 BUSSIÈRES, F. et al. Quantum teleportation from a telecom-wavelength photon to a solid-state quantum memory. *Nature Photonics*, v. 8, p. 775, 2014.
- 27 WANG, X.-L. et al. Quantum teleportation of multiple degrees of freedom of a single photon. *Nature*, v. 518, p. 516, 2015.
- 28 DIVINCENZO, D. P. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik*, v. 48, p. 771783, 2000.
- 29 SCHLOSSHAUER, M. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 76, p. 1267, 2005.
- 30 LLOYD, S. Universal quantum simulators. *Science*, v. 273, p. 1073, 1996.
- 31 BRUUS, H.; FLENSBERG, K. *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction*. New York: Oxford University Press, 2004.

- 32 BLOCH, I.; DALIBARD, J.; NASCIMBENE, S. Quantum simulations with ultracold quantum gases. *Nature Physics*, v. 8, p. 267, 2012.
- 33 HOUCK, A. A.; TÜRECI, H. E.; KOCH, J. On-chip quantum simulation with superconducting circuits. *Nature Physics*, v. 8, p. 292, 2012.
- 34 HUBBARD, J. Electron correlations in narrow energy bands. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 276, p. 238, 1963.
- 35 FISHER, M. P. A.; WEICHMAN, P. B.; GRINSTEIN, G.; FISHER, D. S. Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Physical Review B*, v. 40, p. 546, 1989.
- 36 BLOCH, I.; DALIBARD, J.; ZWERGER, W. Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, v. 80, p. 885, 2008.
- 37 SACHDEV, S. *Quantum Phase Transitions*. New York: Cambridge University Press, 2000.
- 38 GREINER, M. et al. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, v. 415, p. 39, 2002.
- 39 ARMANI, D. K.; KIPPENBERG, T. J.; SPILLANE, S. M.; VAHALA, K. J. Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip. *Nature*, v. 421, p. 925, 2003.
- 40 AKAHANE, Y.; ASANO, T.; SONG, B.-S.; NODA, S. High-Q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal. *Nature*, v. 425, p. 944, 2003.
- 41 HENNESSY, K. et al. Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot-cavity system. *Nature*, v. 445, p. 896, 2007.
- 42 WALLRAFF, A. et al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature*, v. 431, p. 162, 2004.
- 43 HARTMANN, M. J.; BRANDAO, F. G. S. L.; PLENIO, M. B. Strongly interacting polaritons in coupled arrays of cavities. *Nature Physics*, v. 2, p. 849, 2006.
- 44 ANGELAKIS, D. G.; SANTOS, M. F.; BOSE, S. Photon-blockade-induced Mott transitions and XY spin models in coupled cavity arrays. *Physical Review A*, v. 76, p. 031805(R), 2007.
- 45 GREENTREE, A. D.; TAHAN, C.; COLE, J. H.; HOLLENBERG, L. C. L. Quantum phase transitions of light. *Nature Physics*, v. 2, p. 856, 2006.
- 46 TOMADIN, A.; FAZIO, R. Many-body phenomena in QED-cavity arrays. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 27, p. A130, 2010.
- 47 BIRNBAUM, K. M. et al. Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom. *Nature*, v. 436, p. 87, 2005.

- 48 ROSSINI, D.; FAZIO, R. Mott-insulating and glassy phases of polaritons in 1d arrays of coupled cavities. *Physical Review Letters*, v. 99, p. 186401, 2007.
- 49 AICHHORN, M.; HOHENADLER, M.; TAHAN, C.; LITTLEWOOD, P. B. Quantum fluctuations, temperature, and detuning effects in solid-light systems. *Physical Review Letters*, v. 100, p. 216401, 2008.
- 50 MAKIN, M. I. et al. Quantum phase transitions in photonic cavities with two-level systems. *Physical Review A*, v. 77, p. 053819, 2008.
- 51 KOCH, J.; HUR, K. L. Superfluid–Mott-insulator transition of light in the Jaynes-Cummings lattice. *Physical Review A*, v. 80, p. 023811, 2009.
- 52 PIPPAN, P.; EVERTZ, H. G.; HOHENADLER, M. Excitation spectra of strongly correlated lattice bosons and polaritons. *Physical Review A*, v. 80, p. 033612, 2009.
- 53 SCHMIDT, S.; BLATTER, G. Strong coupling theory for the Jaynes-Cummings-Hubbard model. *Physical Review Letters*, v. 103, p. 086403, 2009.
- 54 SCHMIDT, S.; BLATTER, G. Excitations of strongly correlated lattice polaritons. *Physical Review Letters*, v. 104, p. 216402, 2010.
- 55 KNAP, M.; ARRIGONI, E.; LINDEN, W. von der. Spectral properties of coupled cavity arrays in one dimension. *Physical Review B*, v. 81, p. 104303, 2010.
- 56 HOHENADLER, M.; AICHHORN, M.; SCHMIDT, S.; POLLET, L. Dynamical critical exponent of the Jaynes-Cummings-Hubbard model. *Physical Review A*, v. 84, p. 041608, 2011.
- 57 D’SOUZA, A. G.; SANDERS, B. C.; FEDER, D. L. Fermionized photons in the ground state of one-dimensional coupled cavities. *Physical Review A*, v. 88, p. 063801, 2013.
- 58 IRISH, E. K.; OGDEN, C. D.; KIM, M. S. Polaritonic characteristics of insulator and superfluid states in a coupled-cavity array. *Physical Review A*, v. 77, p. 033801, 2008.
- 59 HARTMANN, M. J.; PLENIO, M. B. Migration of bosonic particles across a Mott insulator to a superfluid phase interface. *Physical Review Letters*, v. 100, p. 070602, 2008.
- 60 IRISH, E. K. Ground-state entanglement in a coupled-cavity model. *Physical Review A*, v. 80, p. 043825, 2009.
- 61 SCHMIDT, S. et al. Nonequilibrium delocalization-localization transition of photons in circuit quantum electrodynamics. *Physical Review B*, v. 82, p. 100507, 2010.
- 62 SCHETAKIS, N. et al. Frozen photons in Jaynes-Cummings arrays. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 46, p. 224025, 2013.

- 63 RAFTERY, J. et al. Observation of a dissipation-induced classical to quantum transition. *Physical Review X*, v. 4, p. 031043, 2014.
- 64 TOYODA, K. et al. Experimental realization of a quantum phase transition of polaritonic excitations. *Physical Review Letters*, v. 111, p. 160501, 2013.
- 65 COTO, R.; ORSZAG, M.; EREMEEV, V. Self-trapping triggered by losses in cavity QED. *Physical Review A*, v. 91, p. 043841, 2015.
- 66 ANGELAKIS, D. G.; SANTOS, M. F.; YANNOPAPAS, V.; EKERT, A. A proposal for the implementation of quantum gates with photonic-crystal coupled cavity waveguides. *Physics Letters A*, v. 362, p. 377, 2007.
- 67 CIRAC, J. I.; ZOLLER, P.; KIMBLE, H. J.; MABUCHI, H. Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network. *Physical Review Letters*, v. 78, p. 3221, 1997.
- 68 MOEHRING, D. L. et al. Quantum networking with photons and trapped atoms (invited). *Journal of the Optical Society of America B*, v. 24, p. 300, 2007.
- 69 KIMBLE, H. J. The quantum internet. *Nature*, v. 453, p. 1023, 2008.
- 70 LANGER, C. et al. Long-lived qubit memory using atomic ions. *Physical Review Letters*, v. 95, p. 060502, 2005.
- 71 NOHAMA, F. K.; ROVERSI, J. A. Quantum state transfer between atoms located in coupled optical cavities. *Journal of Modern Optics*, v. 54, p. 1139, 2007.
- 72 BOSE, S.; ANGELAKIS, D. G.; BURGARTH, D. Transfer of a polaritonic qubit through a coupled cavity array. *Journal of Modern Optics*, v. 54, p. 2307, 2007.
- 73 HU, F. M.; ZHOU, L.; SHI, T.; SUN, C. P. Coupled cavity QED for coherent control of photon transmission: Green-function approach for hybrid systems with two-level doping. *Physical Review A*, v. 76, p. 013819, 2007.
- 74 OGDEN, C. D.; IRISH, E. K.; KIM, M. S. Dynamics in a coupled-cavity array. *Physical Review A*, v. 78, p. 063805, 2008.
- 75 MAKIN, M. I. et al. Time evolution of the one-dimensional Jaynes-Cummings-Hubbard Hamiltonian. *Physical Review A*, v. 80, p. 043842, 2009.
- 76 LU, J.; ZHOU, L.; FU, H. C.; KUANG, L.-M. Quantum decoherence in a hybrid atom-optical system of a one-dimensional coupled-resonator waveguide and an atom. *Physical Review A*, v. 81, p. 062111, 2010.
- 77 CICCARELLO, F. Resonant atom-field interaction in large-size coupled-cavity arrays. *Physical Review A*, v. 83, p. 043802, 2011.
- 78 DONG, Y.-L.; ZHU, S.-Q.; YOU, W.-L. Quantum-state transmission in a cavity array via two-photon exchange. *Physical Review A*, v. 85, p. 023833, 2012.

- 79 DONG, G.; ZHANG, Y.; KAMRAN, M. A.; ZOU, B. Group delay of single-photon transmission in a waveguide side coupled with a Jaynes-Cummings chain. *Journal of Applied Physics*, v. 113, p. 143105, 2013.
- 80 ALMEIDA, G. M. A.; SOUZA, A. M. C. Quantum transport with coupled cavities on an Apollonian network. *Physical Review A*, v. 87, p. 033804, 2013.
- 81 QUACH, J. Q. Disorder-correlation-frequency-controlled diffusion in the Jaynes-Cummings-Hubbard model. *Physical Review A*, v. 88, p. 053843, 2013.
- 82 BIONDI, M.; SCHMIDT, S.; BLATTER, G.; TÜRECI, H. E. Self-protected polariton states in photonic quantum metamaterials. *Physical Review A*, v. 89, p. 025801, 2014.
- 83 ALMEIDA, G. M. A.; CICCARELLO, F.; APOLLARO, T. J. G.; SOUZA, A. M. C. Quantum-state transfer in staggered coupled-cavity arrays. *arXiv:1510.02733 [quant-ph]*, 2015.
- 84 ANGELAKIS, D. G.; BOSE, S. Generation and verification of high-dimensional entanglement from coupled-cavity arrays. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 24, p. 266, 2007.
- 85 CHO, J.; ANGELAKIS, D. G.; BOSE, S. Heralded generation of entanglement with coupled cavities. *Physical Review A*, v. 78, p. 022323, 2008.
- 86 SHEN, L.-T. et al. Steady-state entanglement for distant atoms by dissipation in coupled cavities. *Physical Review A*, v. 84, p. 064302, 2011.
- 87 XUE, P.; FICEK, Z.; SANDERS, B. C. Probing multipartite entanglement in a coupled Jaynes-Cummings system. *Physical Review A*, v. 86, p. 043826, 2012.
- 88 GIAMPAOLO, S. M.; ILLUMINATI, F. Long-distance entanglement and quantum teleportation in coupled-cavity arrays. *Physical Review A*, v. 80, p. 050301, 2009.
- 89 YANG, Z.-B.; WU, H.-Z.; SU, W.-J.; ZHENG, S.-B. Quantum phase gates for two atoms trapped in separate cavities within the null- and single-excitation subspaces. *Physical Review A*, v. 80, p. 012305, 2009.
- 90 ZHOU, L. et al. Controllable scattering of a single photon inside a one-dimensional resonator waveguide. *Physical Review Letters*, v. 101, p. 100501, 2008.
- 91 GONG, Z. R.; IAN, H.; ZHOU, L.; SUN, C. P. Controlling quasibound states in a one-dimensional continuum through an electromagnetically-induced-transparency mechanism. *Physical Review A*, v. 78, p. 053806, 2008.
- 92 LONGO, P.; SCHMITTECKERT, P.; BUSCH, K. Few-photon transport in low-dimensional systems: Interaction-induced radiation trapping. *Physical Review Letters*, v. 104, p. 023602, 2010.
- 93 FELICETTI, S. et al. Photon transfer in ultrastrongly coupled three-cavity arrays. *Physical Review A*, v. 89, p. 013853, 2014.

- 94 LOMBARDO, F.; CICCARELLO, F.; PALMA, G. M. Photon localization versus population trapping in a coupled-cavity array. *Physical Review A*, v. 89, p. 053826, 2014.
- 95 TIECKE, T. G. et al. Nanophotonic quantum phase switch with a single atom. *Nature*, v. 508, p. 241, 2014.
- 96 JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, p. 89, 1963.
- 97 SHORE, B. W.; KNIGHT, P. L. Topical review. the Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Optics*, v. 40, p. 1195, 1993.
- 98 GERRY, C. C.; KNIGHT, P. L. *Introduction to Quantum Optics*. New York: Cambridge University Press, 2005.
- 99 HAROCHE, S.; RAYMOND, J. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. New York: Oxford University Press, 2006.
- 100 AOKI, T. et al. Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator. *Nature*, v. 443, p. 671, 2006.
- 101 NIEMCZYK, T. et al. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. *Nature Physics*, v. 6, p. 772, 2010.
- 102 BOSE, S. Quantum communication through an unmodulated spin chain. *Physical Review Letters*, v. 91, p. 207901, 2003.
- 103 APOLLARO, T. J. G.; LORENZO, S.; PLASTINA, F. Transport of quantum correlations across a spin chain. *International Journal of Modern Physics B*, v. 27, p. 1345035, 2013.
- 104 CHRISTANDL, M.; DATTA, N.; EKERT, A.; LANDAHL, A. J. Perfect state transfer in quantum spin networks. *Physical Review Letters*, v. 92, p. 187902, 2004.
- 105 FRANCO, C. D.; PATERNOSTRO, M.; KIM, M. S. Perfect state transfer on a spin chain without state initialization. *Physical Review Letters*, v. 101, p. 230502, 2008.
- 106 APOLLARO, T. J. G. et al. 99%-fidelity ballistic quantum-state transfer through long uniform channels. *Physical Review A*, v. 85, p. 052319, 2012.
- 107 ZWICK, A.; ÁLVAREZ, G. A.; STOLZE, J.; OSENDA, O. Spin chains for robust state transfer: Modified boundary couplings versus completely engineered chains. *Physical Review A*, v. 85, p. 012318, 2012.
- 108 WÓJCIK, A. et al. Unmodulated spin chains as universal quantum wires. *Physical Review A*, v. 72, p. 034303, 2005.
- 109 VENUTI, L. C.; BOSCHI, C. D. E.; RONCAGLIA, M. Qubit teleportation and transfer across antiferromagnetic spin chains. *Physical Review Letters*, v. 99, p. 060401, 2007.

- 110 PLASTINA, F.; APOLLARO, T. J. G. Local control of entanglement in a spin chain. *Physical Review Letters*, v. 99, p. 177210, 2007.
- 111 LORENZO, S.; APOLLARO, T. J. G.; SINDONA, A.; PLASTINA, F. Quantum-state transfer via resonant tunneling through local-field-induced barriers. *Physical Review A*, v. 87, p. 042313, 2013.
- 112 PAGANELLI, S. et al. Routing quantum information in spin chains. *Physical Review A*, v. 87, p. 062309, 2013.
- 113 PEIERLS, R. E. *Quantum Theory of Solids*. New York: Oxford University Press, 1955.
- 114 HUO, M. X.; LI, Y.; SONG, Z.; SUN, C. P. The Peierls distorted chain as a quantum data bus for quantum state transfer. *Europhysics Letters*, v. 84, p. 30004, 2008.
- 115 KUZNETSOVA, E. I.; ZENCHUK, A. I. *Physics Letters A*, v. 372, p. 6134, 2008.
- 116 VENUTI, L. C.; GIAMPAOLO, S. M.; ILLUMINATI, F.; ZANARDI, P. Long-distance entanglement and quantum teleportation in xx spin chains. *Physical Review A*, v. 76, p. 052328, 2007.
- 117 GIAMPAOLO, S. M.; ILLUMINATI, F. Long-distance entanglement in many-body atomic and optical systems. *New Journal of Physics*, v. 12, p. 025019, 2010.
- 118 LATMIRAL, L.; FRANCO, C. D.; MENNEA, P. L.; KIM, M. S. State-transfer simulation in integrated waveguide circuits. *Physical Review A*, v. 92, p. 022350, 2015.
- 119 LORENZO, S. et al. Transfer of arbitrary two-qubit states via a spin chain. *Physical Review A*, v. 91, p. 042321, 2015.
- 120 LINNEWEBER, T.; STOLZE, J.; UHRIG, G. S. Perfect state transfer in XX chains induced by boundary magnetic fields. *International Journal of Quantum Information*, v. 10, p. 1250029, 2012.
- 121 GUALDI, G.; GIAMPAOLO, S. M.; ILLUMINATI, F. Modular entanglement. *Physical Review Letters*, v. 106, p. 050501, 2011.
- 122 ANDRADE, J. S.; HERRMANN, H. J.; ANDRADE, R. F. S.; SILVA, L. R. da. Apollonian networks: Simultaneously scale-free, small world, euclidean, space filling, and with matching graphs. *Physical Review Letters*, v. 94, p. 018702, 2005.
- 123 WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, v. 393, p. 440, 1998.
- 124 NEWMAN, M. E. J. Scientific collaboration networks. II. shortest paths, weighted networks, and centrality. *Physical Review E*, v. 64, p. 016132, 2001.

- 125 LATORA, V.; MARCHIORI, M. Efficient behavior of small-world networks. *Physical Review Letters*, v. 87, p. 198701, 2001.
- 126 KIM, B. J.; HONG, H.; CHOI, M. Y. Quantum and classical diffusion on small-world networks. *Physical Review B*, v. 68, p. 014304, 2003.
- 127 MULKEN, O.; PERNICE, V.; BLUMEN, A. Quantum transport on small-world networks: A continuous-time quantum walk approach. *Physical Review E*, v. 76, p. 051125, 2007.
- 128 OLIVEIRA, I. N. de et al. Free-electron gas in the Apollonian network: Multifractal energy spectrum and its thermodynamic fingerprints. *Physical Review E*, v. 79, p. 016104, 2009.
- 129 ANDRADE, R. F. S.; HERRMANN, H. J. Magnetic models on Apollonian networks. *Physical Review E*, v. 71, p. 056131, 2005.
- 130 CARDOSO, A. L.; ANDRADE, R. F. S.; SOUZA, A. M. C. Localization properties of a tight-binding electronic model on the Apollonian network. *Physical Review B*, v. 78, p. 214202, 2008.
- 131 SOUZA, A. M. C.; HERRMANN, H. Correlated electron systems on the Apollonian network. *Physical Review B*, v. 75, p. 054412, 2007.
- 132 XU, X.-P.; LI, W.; LIU, F. Coherent transport on Apollonian networks and continuous-time quantum walks. *Physical Review E*, v. 78, p. 052103, 2008.
- 133 SOUZA, A. M. C.; ANDRADE, R. F. S. Discrete time quantum walk on the Apollonian network. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 46, p. 145102, 2013.
- 134 OLIVEIRA, I. N. de et al. Bose-einstein condensation in the Apollonian complex network. *Physical Review E*, v. 81, p. 030104, 2010.
- 135 HALU, A.; GARNERONE, S.; VEZZANI, A.; BIANCONI, G. Phase transition of light on complex quantum networks. *Physical Review E*, v. 87, p. 022104, 2013.
- 136 BOYD, D. W. The osculatory packing of a three-dimensional sphere. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 25, p. 303, 1973.
- 137 ALMEIDA, G. M. A.; GHOSH, J.; FEDER, D. L.; SANDERS, B. C. Discrete solitons in Jaynes-Cummings-Hubbard arrays. *Em preparação*, 2015.