

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
COORDENAÇÃO DE PESQUISA

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC  
Programa de Iniciação Científica Voluntária - PICVOL

Análise das aproximações de alta ordem por meio da interpolação  
espectral aplicadas ao Método dos Elementos Finitos (MEF)  
para problemas elastostáticos

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Bolsista: Luís Philipe Ribeiro Almeida

Orientador: Prof. Dr. Fabio Carlos da Rocha  
Departamento de Engenharia Civil

Relatório Final

Período  
2016/2017

## RESUMO

Erros numéricos podem ser obtidos durante a formulação do método dos elementos finitos ao se tentar reproduzir geometrias complexas, a depender do polinômio de interpolação, da base dos pontos nodais, do número de elementos e do grau aproximador. Para contornar essas dificuldades, aproximações de alta ordem associadas às bases ortogonais de Lobatto, Legendre, Tchebychev e da base nodal equidistante são aplicadas na análise de problemas uni e bidimensionais da elastostática. Um estudo comparativo entre as bases nodais é feito com o intuito de verificar a convergência à medida que é elevado a ordem polinomial, levando-se em conta parâmetros quantificadores como a constante de Lebesgue e o número de condição. A partir desses parâmetros é realizada uma análise quanto a capacidade das interpolações em minimizar efeitos oscilatórios, conhecido como fenômeno Runge, quando se busca reconstruir geometrias complexas a partir de polinômios de alto grau. Para o caso do MEF bidimensional, uma análise da eficiência da interpolação frente a parâmetros, tais como o número de elementos e grau da aproximação do domínio é feito a fim de obter máxima eficiência com baixo custo computacional. Exemplos são avaliados e constatado a melhora da solução quando é utilizada expansões espectrais em detrimento da interpolação de base igualmente espaçada.

**Palavras-chave:** Método dos elementos finitos, Polinômios ortogonais, Elementos espectrais de alta ordem, Fenômeno Runge, Constante de Lebesgue.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Primeiros polinômios das bases ortogonais de Legendre, Tchebychev e Lobatto....	18
Figura 2. Ilustração da distribuição igualmente espaçada de nós sobre o triângulo.....	27
Figura 3. Redistribuição dos nós das bases nodais do triângulo retângulo padrão para o equilátero. ....	29
Figura 4. Cinemática da viga de Euler-Bernoulli .....	30
Figura 5. Equilíbrio do corpo rígido .....	32
Figura 6. Exemplo de elemento de viga com 4 graus de liberdade. ....	35
Figura 7 . Discretização por elementos triangulares.....	37
Figura 8. Reprodução da geometria senoidal para as bases nodais empregando-se polinômios de alta e baixa ordem. ....	44
Figura 10. Erro na escala logarítmica na reprodução da função senoidal (à esquerda) e polinomial (à direita) para polinômios de baixa e alta ordem. ....	46
Figura 11. Efeito da distribuição da base na interpolação polinomial.....	47
Figura 12. Erro absoluto na reprodução da função racional entre as bases nodais. ....	48
Figura 13. Gráfico da constante de Lebesgue para as bases nodais. ....	48
Figura 14. Número de condição para as bases nodais. ....	49
Figura 15. Comparação da distribuição de pontos para as bases nodais com o comportamento analítico da função para triângulo padrão á medida que o grau da aproximação é elevado. ...	51
Figura 16. Comparação entre as bases nodais e a função analítica para uma borda do triângulo padrão. ....	52
Figura 17. Comparação entre as bases nodais e a função analítica para uma borda do triângulo padrão. ....	53
Figura 20. Comparação entre as bases nodais com relação ao erro no deslocamento máximo de uma viga em hiperestática sobre um carregamento triangular. ....	57
Figura 22. Comparação entre as bases nodais com relação ao log do erro absoluto no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada sobre uma carga concentrada. ....	59
Figura 23. Comparação entre as bases nodais com relação ao log do erro absoluto no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada sobre uma carga uniformemente distribuída. ....	60

Figura 24. Análise bidimensional do erro relativo no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada sobre um carregamento racional com grau do domínio = 2.....	61
Figura 25. Análise bidimensional do erro relativo no deslocamento máximo de uma viga biapoiada sobre um carregamento racional com grau do domínio = 6.....	62
Figura 26. Análise bidimensional do erro relativo no deslocamento máximo de uma viga biapoiada sobre um carregamento racional com grau do domínio = 10.....	63
Figura 27. Figura que caracteriza a mudança do espaço físico para adimensional .....	73

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>7</b>
<b>2.</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>9</b>
<b>2.2.</b>	<b>Objetivo específico.....</b>	<b>9</b>
<b>3.</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>10</b>
<b>3.1.</b>	<b>Breve revisão histórica do Método dos Elementos Finitos (MEF).....</b>	<b>10</b>
<b>3.2.</b>	<b>Interpolação Espectral .....</b>	<b>11</b>
<b>3.3.</b>	<b>Método dos elementos Finitos de alta ordem .....</b>	<b>13</b>
<b>3.4.</b>	<b>Interpolação de alta ordem.....</b>	<b>15</b>
3.4.1.	Matriz de Vandermond generalizada .....	15
<b>3.5.</b>	<b>Bases nodais .....</b>	<b>16</b>
3.5.1.	Base nodal igualmente espaçada .....	16
3.5.2.	Base nodal espectral .....	17
3.5.2.1.	Polinômios de Legendre .....	17
3.5.2.2.	Polinômios de Tchebychev .....	18
3.5.2.3.	Polinômios de Lobatto.....	19
<b>3.6.</b>	<b>Erro na interpolação .....</b>	<b>20</b>
<b>3.7.</b>	<b>Número de condição .....</b>	<b>22</b>
<b>3.8.</b>	<b>Interpolação em domínio triangular.....</b>	<b>23</b>
3.8.1.	Interpolação de Proriot .....	24
3.8.2.	Base nodal uniforme em domínio triangular.....	38
3.8.3.	Base nodal ortogonal em domínio triangular .....	28
<b>3.9.</b>	<b>Formulação do Método dos Elementos Finitos Elastostático .....</b>	<b>29</b>
<b>3.10.</b>	<b>Formulação Forte para vigas de Euler-Bernoulli: abordagem unidimensional.....</b>	<b>29</b>
3.10.1	.Formulação Fraca .....	33
<b>3.11.</b>	<b>MEF unidimensional .....</b>	<b>34</b>
<b>3.12.</b>	<b>Formulação do MEF bidimensional .....</b>	<b>35</b>
3.12.1.	Discretização no estado plano de tensão .....	36
3.12.2.	Formulação forte e fraca.....	
3.12.3.	Interpolações de Ordem Superior.....	39
3.12.4.	MEF de alta ordem .....	40
<b>4.</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>41</b>

4.1.	Cronograma .....	42
<b>5.</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>43</b>
<b>5.1.</b>	<b>Interpolação para função trigonométrica e polinomial .....</b>	<b>43</b>
<b>5.2.</b>	<b>Fenômeno Runge .....</b>	<b>46</b>
<b>5.3.</b>	<b>Condicionamento das bases ortogonais .....</b>	<b>48</b>
<b>5.4.</b>	<b>Interpolação triangular de ordem qualquer .....</b>	<b>49</b>
5.4.1.	Mapeamento bidimensional .....	49
5.4.2.	Mapeamento das bordas do triângulo.....	51
<b>5.5.</b>	<b>Aplicações.....</b>	<b>54</b>
5.5.1.	MEF unidimensional .....	54
5.5.1.1.	Carregamento simples .....	55
5.5.1.2.	Carregamento complexo.....	57
5.5.2.	MEF bidimensional .....	58
5.5.2.1.	Carregamento simples .....	58
5.5.2.2.	Carregamento complexo.....	60
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>64</b>
<b>7.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>66</b>
	<b>APÊNDICES .....</b>	<b>71</b>
	<b>Apêndice A Mudança de variável uni e bidimensional.....</b>	<b>72</b>
	<b>Apêndice B Integração numérica uni e bidimensional.....</b>	<b>75</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A simulação computacional vem ganhando significativos avanços no que diz respeito a modelagem e reprodução de problemas de sistemas físicos grandes e complexos. A engenharia estrutural, ao longo das últimas décadas, cada vez mais prioriza a eficiência e precisão na reprodução de geometrias reais. Precisão essa adquirida através de métodos que possibilitem a obtenção de soluções numéricas com rápida convergência. O Método dos Elementos Finitos (MEF), em geral, possui boa eficiência quando se analisa problemas simples a partir de elementos de baixa ordem, não necessitando, assim, a utilização de elementos mais sofisticados. Entretanto, cada vez mais a mecânica computacional vem se deparando com problemas de natureza singular, ou seja, de difícil representação e de obtenção de solução, obrigando então a utilização de ferramentas que assegurem a qualidade da solução física do problema. No caso da mecânica do contínuo, essas singularidades podem resultar de fontes geométricas, tais como entalhes e fraturas, descontinuidades das propriedades dos materiais, efeitos externos, como carregamentos com descontinuidade acentuada e, também, devido às condições de contorno.

A implementação de aproximações de alta ordem surge como forma de contornar essas dificuldades encontradas em problemas mais complexos, cuja solução numérica é de difícil reprodução. Entretanto, encontra-se resistência em sua utilização seja por caráter teórico ou computacional (KARNIADAKIS; SHERWIN, 1999, apud ROCHA; KZAM, 2013). Como forma de assegurar a convergência uniforme, a estimativa de erro a posteriori agora é considerada tão importante quanto à análise de elementos finitos em si, sendo de razoável dificuldade a utilização do MEF sem a tolerância da capacidade dos resultados. (ZIENKIEWICZ; RANK, 1987).

Uma forma de estimar esse erro é a adoção de parâmetros quantificadores, como a constante de Lebesgue, definida como a soma dos valores máximos absolutos das funções de interpolação sobre todos os nós (BLYTH; POZRIKIDIS, 2005). Tal erro associado a efeitos oscilatórios devido a utilização de aproximações de alta ordem é denominado de fenômeno Runge e pode ser quantificado pela constante de Lebesgue.

Neste trabalho são utilizadas aproximações de alta ordem, onde os nós são colocados cuidadosamente nos zeros dos polinômios ortogonais de Lobatto, Tchebychev, Legendre e da

base igualmente espaçada (este último não ortogonal), verificando-se a convergência na análise de problemas elastostáticos unidimensionais e bidimensionais via MEF. Para a estimativa do erro, o presente trabalho utilizou como parâmetros quantificadores o número de condição e a constante de Lebesgue, já comentada anteriormente. Desta maneira, busca-se então a identificação da distribuição de pontos que minimize o erro da interpolação. Diante do explanado acima, este trabalho será dividido da seguinte maneira.

### **1.1. Organização do trabalho**

- a) Capítulo 3: Além do que será exposto no capítulo 2 referente a objetivos gerais e específicos, na seção 3 será abordada a revisão da Literatura, no item 3.1 é apresentado uma introdução do método dos elementos finitos, no 3.2 interpolação espectral e 3.3 MEF de alta ordem.
- b) Capítulo 4: São feitos comentários a respeito da interpolação de alta ordem, e nos itens 4.1 e 4.2 aplica-se estratégias de interpolação através do estudo da matriz de Vandermonde e bases nodais, respectivamente. A seção 4.3 traz comentários sobre o erro de interpolação e a 4.4 e 4.5 traz explicações sobre o número de condição e interpolação sobre domínio triangular.
- c) Capítulo 5: Traz a formulação forte e fraca para vigas de Euller-Bernoulli e no item 5.4 é retratado a formulação do MEF para 2 dimensões.
- d) Capítulo 6: Traz a metodologia do trabalho, detalhando todas as etapas até a obtenção dos resultados.
- e) Capítulo 7: Traz os principais comentários decorrentes da análise dos resultados.

Ainda têm-se as referências e Apêndices onde são expostos a mudança de variável e o método de integração utilizado para o programa unidimensional e bidimensional.



## **2. OBJETIVOS**

### **2.1. Objetivo geral**

Desenvolver e implementar computacionalmente a formulação do Método dos Elementos Finitos aplicados a problemas uni e bidimensionais da elastostática, a partir das funções interpoladoras espectrais de alta ordem.

### **2.2. Objetivo específico**

- Desenvolver e implementar computacionalmente algoritmos para geração de elementos unidimensional e bidimensional (triangular) de alta ordem com característica espectral (Legendre, Lobatto e Tchebychev);
- Desenvolver e implementar computacionalmente algoritmos para geração de elementos unidimensional e bidimensional (triangular) de alta ordem sem característica espectral (Lagrange);
- Desenvolver e implementar computacionalmente a formulação do MEF uni e bidimensional para problemas da elastostática aplicando os elementos de alta ordem.

### **3. REVISÃO DA LITERATURA**

Nesta seção é realizada uma breve revisão do MEF, tanto na contextualização histórica quanto na aplicação de elementos de alta ordem para resolver problemas elastostático.

#### **3.1. Breve revisão histórica do Método dos Elementos Finitos (MEF)**

Um ponto lógico predecessor ao Método dos elementos Finitos é atribuído pelas grandes realizações da escola francesa, tal como Navier e St. Venant, de 1850 a 1875 (Apud GALLAGHER, 1975). Os conceitos de análise estrutural surgiram durante este período, devido aos esforços de Maxwell, Castigliano, Mohr e entre outros. Conceitos estes que representaram a base metodológica, que aproximadamente 80 anos mais tarde, dar-se-ia o nome de análise matricial das estruturas.

O progresso no desenvolvimento da teoria e das técnicas que auxiliaram ao surgimento da análise dos elementos finitos foi lenta no período de 1875 a 1920. Esta lentidão foi ocasionada, em grande parte, por limitações práticas em resolver equações algébricas com algumas poucas incógnitas. Sendo que neste período, o interesse estrutural estava atrelado aos problemas de treliças e pórticos baseados em distribuição de tensão com parâmetros de forças incógnitas.

Em aproximadamente 1920, devido aos esforços de Maney, nos Estados Unidos, e Ostenfeld, na Dinamarca, a ideia básica de análise de treliças e pórticos passou a ser abordado tendo os deslocamentos como parâmetros incógnitos. Esta ideia apresentou os conceitos percussores da análise matricial dos dias atuais. Diversas limitações no tamanho do problema, seja ele com incógnita força ou deslocamento, continuou até 1932, quando Hard Cross introduziu o método da distribuição de momento. Este método tornou possível a solução de problemas da análise estrutural com magnitude mais complexas que o mais sofisticado problema tratado pelas abordagens anteriores.

O método da distribuição do momento tornou a parte mais importante para a análise prática das estruturas por durante 25 anos (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003).

A aparição do primeiro computador digital, por volta de 1950, teve uma contribuição desprezível para a evolução dos conceitos numéricos para resolver problemas de Engenharia.

Esta pouca contribuição dos computadores foi devido à dificuldade de codificação de procedimentos bem estabelecidos para a análise estrutural em formato adequado aos computadores: o formato de matriz. Dois notáveis desenvolvimentos foram publicados, um por Agryris e Kelsey e o outro por Turner, Clough, Martin e Topp. Essas publicações uniram os conceitos de análise estrutural e análise do contínuo, tendo como resultado a criação de desenvolvimentos no formato matricial. Estes autores influenciaram no desenvolvimento do método dos elementos finitos nos anos seguintes. No entanto, pode parecer impreciso atribuir o surgimento do MEF a estes trabalhos, pois características importantes do MEF apareceram até mesmo antes de 1950, nos artigos de Courant, McHenry e Hrenikoff (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003). O trabalho de Courant é particularmente significativo, pois este se preocupa com problemas governados por equações aplicáveis a outras situações diferentes da mecânica, não apenas à análise estrutural. Entretanto, como este breve histórico é focado no método dos elementos finitos aplicados à mecânica estrutural, não seria nenhuma injustiça atribuir as importâncias devidas às duas publicações citadas acima.

A tecnologia da análise por elementos finitos teve avanços em numerosas fases desde 1950 e para maiores detalhes é aconselhado ver o trabalho de Zienkiewicz (1970). Motivado por formulações de elementos para tensão plana, pesquisadores estabeleceram elementos associados para sólidos, placas, vigas, chapas e outras formas estruturais. Uma vez conhecida a abordagem para a análise linear, estática e elástica, a atenção foi destinada a fenômenos especiais tais como dinâmica, flambagem e não linearidades físicas e geométricas. Este avanço foi marcado por um período de intenso desenvolvimento de programas de computadores, os quais eram destinados a aproximar o MEF às aplicações práticas.

Nos dias atuais, muitos pesquisadores continuam a se preocupar com a formulação de novos elementos, ao desenvolvimento de formulações do MEF melhoradas, além da criação de novos algoritmos para capturar fenômenos especiais, principalmente, os fenômenos não-lineares e de interesses interdisciplinares.

### **3.2. Interpolação Espectral**

Os métodos que utilizam elementos espectrais/ $hm$  combinam a flexibilidade geométrica das técnicas clássica dos elementos finitos e do volume finito tipo  $h$  com as propriedades desejáveis de resolução dos métodos espectrais. Nesta abordagem, uma expansão polinomial de ordem  $m$  é aplicada a cada domínio elementar da malha, com poucos elementos, na

formulação de elementos finitos. Esta técnica foi aplicada em muitos estudos fundamentais da mecânica dos fluidos (SHERWIN; KARNIADAKIS, 1996) e, mais recentemente, ganhou maior popularidade na modelagem de fenômenos baseados em ondas, tais como no eletromagnetismo computacional (HESTHAVEN; WARBURTON, 2002) e em problemas de águas rasas (BERNARD; REMACLE; COMBIEN; LEGAT; HILLEWAERT, 2009), em especial quando aplicado dentro de uma formulação de Galerkin descontínuo.

Métodos dos elementos espectrais/ $hm$  podem ser considerados como uma extensão de alta ordem do método dos elementos finitos clássicos (de baixa ordem) onde a convergência não só é possível através da redução do tamanho  $h$  característico da malha, mas também através do aumento da ordem polinomial local  $m$  dentro de um subdomínio elementar. No entanto, o conceito de discretizações de alta e baixa ordem podem ter diferentes significados para diversas comunidades científicas. Por exemplo, nas obras seminais de Zienkiewicz e Taylor (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1989) e Hughes (HUGHES, 1987) listam exemplos de expansões elementar somente até o terceiro ou, eventualmente, até a quarta ordem, implicando nestas ordens serem consideradas elevadas para a comunidade de elementos finitos tipo  $h$ . Em contraste, as bibliografias da comunidade de elementos espectrais/ $hm$  (SZABO; BABUSKA, 1991; KARNIADAKIS; DEVILLE; FISCHER; MUND, 2002; SHERWIN, 2005; HESTHAVEN; WARBURTON, 2008) mostram exemplos típicos de problemas que vão desde aproximação de baixa ordem, minimamente considerado como de quarta ordem, até expansões polinomiais que vão de décima a décima-quinta ordem. Na outra extremidade do espectro, estão os grupos de pesquisa dos métodos espectrais global (GOTTLIEB; ORSZAG, 1977) que consideram uma expansão global de ordem 16 como sendo relativamente baixa para a aproximação.

Pode-se perguntar se essas diferentes definições de baixa e alta ordem é apenas inerente à tradição ou folclore de cada uma das comunidades ou se existem razões mais práticas para estas distintas interpretações. Os proponentes dos métodos de baixa ordem podem destacar que alguns problemas de interesse prático são tão geometricamente complexos que não se pode, computacionalmente, dar ao luxo de usar técnicas de alta ordem em malhas pesadas para capturar a geometria. Alternativamente, os proponentes dos métodos de alta ordem destacam que, caso o problema de interesse possa ser capturado em um domínio computacional a um custo razoável, utilizando aproximações de ordem superior para soluções suficientemente suaves, então sua aplicação torna-se recomendada, pois irão proporcionar

uma precisão mais alta (VOS; SHERWIN; KIRBY, 2010). Esta maior precisão é devido ao fato de que os nós da base de interpolação são colocados cuidadosamente nas posições correspondentes aos zeros dos polinômios ortogonais, obtendo assim a expansão do elemento espectral (ROCHA e KZAM, 2013).

Como pode ser observado, há uma divergência conceitual nas mais diversas comunidades científicas do que vem a ser elementos de alta ordem. Entretanto, neste trabalho é considerado elementos de alta ordem para o espectro de valores de  $m$  maior que ordem 4.

### **3.3. Método dos elementos Finitos de alta ordem**

O Método dos elementos Finitos é atualmente o método numérico mais utilizado para resolver equações diferenciais e sendo o MEF presente em numerosos softwares comerciais disponíveis no mercado. No MEF, o domínio do problema é dividido em um certo número de subdomínios (ou elementos finitos) com a conectividade entre os elementos fornecidas através de pontos nodais comuns. Funções de aproximação por partes para as variáveis desconhecidas são então selecionada para cada elemento finito que satisfaçam alguns requisitos mínimos de continuidade entre os elementos no contorno, que dependerão das suposições feitas no modelo matemático básico. O conjunto de equações simultâneas, normalmente, com coeficientes simétricos, obtêm-se através da formulação fraca da equação diferencial obtida pelo método dos resíduos ponderados, ou aplicando a condição de estacionária ao funcional para o problema, se disponível.

A qualidade da solução aproximada depende da proximidade do modelo finito com o modelo matemático que representa o problema em análise. A proximidade é controlada pelos atributos do problema, pelo algoritmo numérico usado, pela distribuição e natureza do grau de liberdade, pelo número de dígitos de precisão utilizado na computação, e pelo tipo de algoritmo utilizado para calcular as integrais e para resolver o sistema de equações. No caso de problemas elípticos, todo o domínio espacial precisa ser refinado pois as condições de contorno afetam toda a região. No caso de problemas de valor inicial, o modelo de refinamento reque estratégias diferentes da utilizada para problemas elípticos, no sentido de que nos problemas de valor inicial, o futuro não afeta o presente e o refinamento pode ser variado de um estágio para outro, dependendo do comportamento local da solução.

No caso de problemas elípticos, a qualidade da solução é dependente do modelo utilizado, ou seja, dependente do tamanho e da ordem dos elementos, assim como da sua distribuição. O uso da forma fraca para a equação diferencial (ou, minimização do funcional no sentido variacional) conduz a resultados em que as derivadas da função aproximadora são menos precisas que a própria função, a menos que as derivadas sejam também aproximadas, o que é menos conveniente na formulação clássica do MEF. A qualidade da solução pode ser melhorada por refinamento do modelo de elementos finitos, seja por usando mais elementos de menor tamanho (conhecido como extensão  $h$ ), ou por aumentar a ordem da função aproximadora por partes em uma malha fixa (conhecido como extensão  $p$ ), ou, ainda, por uma combinação ótima das duas extensões (conhecido como extensão  $hp$ ). Azabó (BABUSKA; SZABO; KATZ, 1981) e seus colaboradores foram responsáveis, não somente por iniciar os estudos das extensões  $p$  e  $hp$ , mas também por identificar o conjunto de funções base baseada nos polinômios de Legendre (ou suas integrais) como a melhor escolha a ser usado na formulação do MEF de alta ordem, devido a sua propriedade ortogonal e a sua natureza hierárquica (BABUSKA; SZABO; KATZ, 1981, BASU; PEANO, 1983). Uma outra alternativa para melhorar o modelo é realizar a redistribuição dos graus de liberdades por meio de mudanças estratégicas do tamanho dos elementos, reduzindo seus tamanhos e aumentando a ordem das funções de aproximação de modo que o número total de graus de liberdade permaneça inalterado (conhecido como extensão  $r$ ). Nos elementos que fazem fronteira com ponto singular, ao invés de usar polinômios regulares ( $u = \sum_{j=2}^{p+1} u_j N_j(\xi)$  com  $-1 \leq \xi \leq 1$  e  $N_j$  como função base), usa-se polinômios de Legendre, ou de Chebyshev ou de Jacobi para capturar a singularidade (BASU; JORGE; BADRI; LIN, 2003).

A qualidade da solução pode ser verificada, erroneamente, no sentido a posteriori usando informação não satisfatória, como por exemplo, devido a aplicações indevidas das condições de contorno naturais, e devido a violação dos requisitos de continuidade das derivadas dos funcionais, assim como, devido ao uso do grau das funções aproximadoras inadequados. Outro indicador indireto pode ser a grandeza do resíduo obtido quando a solução aproximada é substituída nas equações diferenciais que regem o problema de análise. Métodos têm sido propostos para estimar o erro por diferentes normas (por exemplo, norma de energia) em níveis elementar e global usando estimativas melhoradas da solução através de pós-processamento da solução atual. Estimativas pontuais do erro nos valores da função e das derivadas podem também ser obtidas comparando a solução atual com as estimativas

melhoradas da solução. Após a determinação das estimativas do erro global e local, o modelo de elementos finitos pode ser perfeitamente melhorado usando uma das extensões h, p, hp ou r (BASU; JORGE; BADRI; LIN, 2003).

### 3.4. Interpolação de alta ordem

Nesta seção é apresentada a fundamentação teórica para o desenvolvimento dos elementos de alta ordem por meio da construção da matriz de Vandermond generalizada. É ainda apresentada a construção das bases espectrais (Legendre, Lobatto, Tchebthev) e não espectral, Lagrange, para interpolações unidimensionais e bidimensionais.

#### 3.4.1. Matriz de Vandermond generalizada

A estratégia para aumentar a ordem polinomial é obtida através da determinação da matriz de Vandermond. Este procedimento é empregado por ser de fácil generalização na geração de funções de forma para elementos uni e bidimensionais de ordem qualquer. (POZRIKIDIS, 2005, apud, ROCHA E KZAM, 2013).

O termo geral do polinômio interpolador é obtido por:

$$\varphi_i(\xi) = \sum_{j=0}^m a_{ij} \xi^j = a_{i0} + a_{i1} \xi + \dots + a_{im} \xi^m. \quad (3)$$

Fish e Belytschko (2007) ressaltam uma propriedade importante das funções de forma denominada delta de Kronecker ( $\delta_{ij}$ ). A partir de tal propriedade, conclui-se que essas funções possuem valor unitário nos nós analisados, enquanto que nos demais nós, seu valor é nulo. Matematicamente tem-se:

$$\delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

ao impor as propriedades da partição da unidade, a equação 3 fica escrita como:

$$\varphi_i(\xi = \xi_k) = \sum_{j=0}^n a_{ij} \xi_k^j = a_{i0} + a_{i1} \xi_k + \dots + a_{im} \xi_k^m = \delta_{im}, \quad (4)$$

sendo  $\varphi_i$ , as funções de forma avaliadas nos pontos  $i = 1, \dots, (m + 1)$ ,  $a_{ij}$  os coeficientes dos polinômios e  $\delta_{ik}$ , o delta de Kronecker. Tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k0} & \cdots & a_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^m & \cdots & \xi_k^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

esta representação simbólica fica:

$$MV = I, \quad (5)$$

em que M, é a matriz com os coeficientes dos polinômios interpoladores, V é a matriz de Vandermonde e I é a matriz identidade. A matriz que contém as potências das coordenadas adimensionais é denominada de matriz de Vandermonde e os seus coeficientes são obtidos diretamente pelo cálculo de sua inversa.

$$M = V^{-1}, \quad (6)$$

calculado os valores dos coeficientes, as funções de forma em um ponto de coordenadas adimensional qualquer, podem ser calculadas a partir:

$$\varphi_i(\xi_p) = \sum_{j=0}^m a_{ij}(\xi_p)^j. \quad (7)$$

### 3.5. Bases nodais

Na tentativa de obtenção da função aproximadora para a resolução do problema físico, a base interpoladora utilizada torna-se de imprescindível importância. Uma vez que esta interfere diretamente na eficiência e precisão da análise numérica, seja por erros cometidos na representação geométrica, seja por erros obtidos na resposta mecânica do problema. Uma correta distribuição dos pontos nodais dentro de uma base é fundamental no estudo da convergência uniforme quando se utiliza funções de alta ordem. A seguir são apresentadas as bases nodais estudadas durante esse trabalho.

#### 3.5.1. Base nodal igualmente espaçada



Para a construção do conjunto de pontos igualmente espaçados,  $\{\xi_k \in \mathbb{R}; -1 \leq \xi_k \leq +1\}$ , é obtido pela expressão:

$$\xi_k = \xi_1 + r(k - 1), \quad (8)$$

sendo  $k = 1, \dots, (n + 1)$ , a partição do intervalo,  $\xi_1 = -1$ , o ponto inicial,  $r = \frac{2}{n}$  a razão da progressão e  $n$  o grau da interpolação.

### 3.5.2. Base nodal espectral

Para construção da base nodal espectral têm-se de fundamental importância os polinômios ortogonais, uma vez que a posição destes pontos da base é obtida pelos zeros dos polinômios com característica de ortogonalidade.

Os Polinômios Ortogonais vem sendo utilizados na matemática aplicada para a resolução de diversos problemas, por serem uma base apropriada para a aproximação de funções. Entre os principais polinômios ortogonais, sendo estes os utilizados neste trabalho, tem-se: os polinômios de Legendre, Tchebychev e Lobatto.

#### 3.5.2.1. Polinômios de Legendre

Os Polinômios de Legendre estão definidos no intervalo  $[-1, 1]$ , segundo o produto:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)d(x) \quad (9)$$

Seus primeiros polinômios são:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

De acordo com Pozrikidis (2005), os polinômios de Legendre podem ser obtidos pela fórmula de recorrência abaixo, onde  $P_0(x) = 1$  e  $P_1(x) = x$ . A figura 1 mostra o comportamento dos polinômios de Legendre, além dos polinômios de Lobatto e Tchebychev.

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), n \geq 1. \quad (10)$$

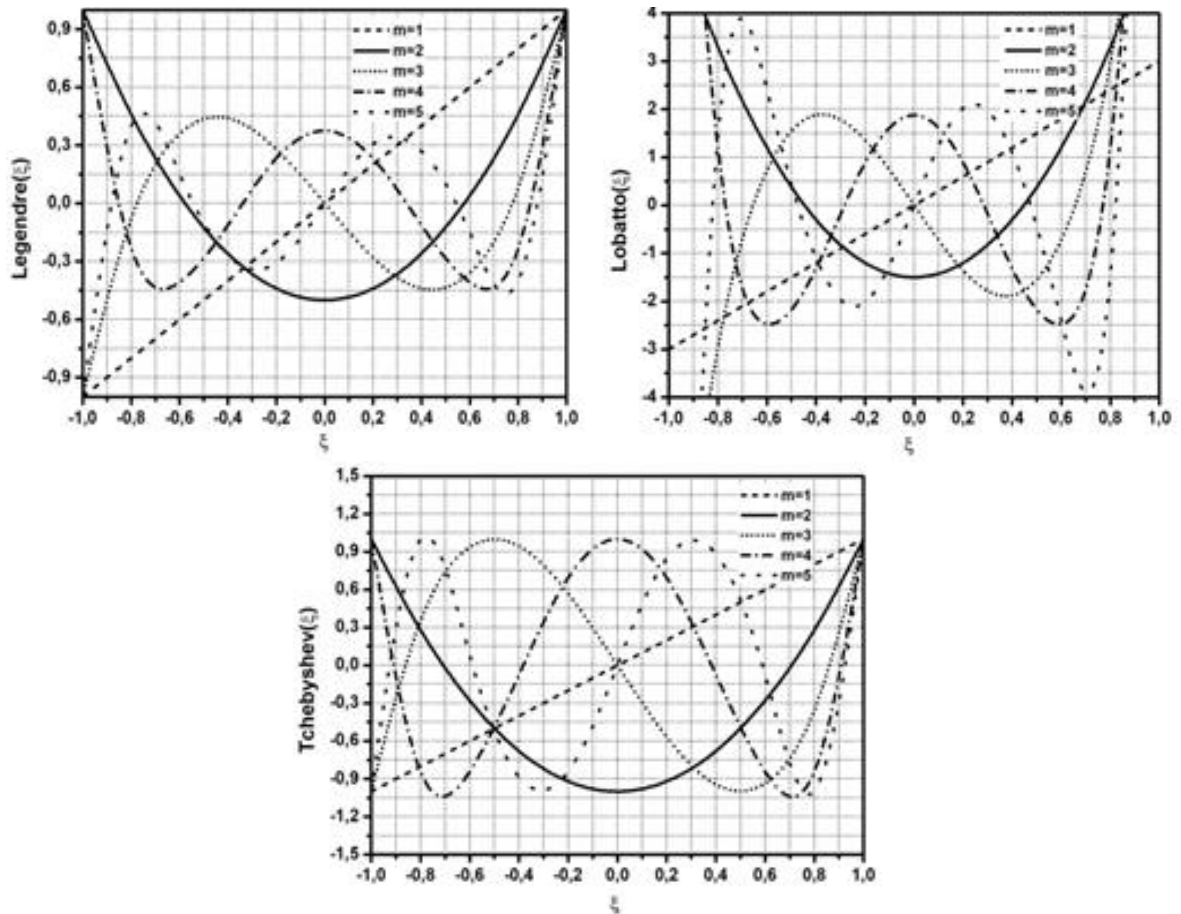


Figura 1. Primeiros polinômios das bases ortogonais de Legendre, Tchebychev e Lobatto.

### 3.5.2.2. Polinômios de Tchebychev

São definidos no intervalo  $[-1,1]$  pelo produto:

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx, \quad (11)$$

Seus primeiros polinômios são descritos abaixo:

$$T_0 = 0,$$

$$T_1 = x,$$

$$T_2 = 2x^2 - 1,$$

$$T_3 = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Sua função de recorrência segundo Pozrikidis (2005) é:

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), n \geq 1, \quad (12)$$

com,  $T_0(x) = 1$  e  $T_1(x) = x$ .

### 3.5.2.3. Polinômios de Lobatto

Os polinômios de Lobatto são definidos no intervalo  $[-1,1]$  e formados por:

$$(L_n, L_m) = \int_{-1}^1 (1 - x^2) L_n(x) L_m(x) dx, \quad (13)$$

em que, sua fórmula de recorrência segundo Pozrikidis (2005) é:

$$L_n(x) = \frac{1}{x^2 - 1} [(n+1)x P_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x)], n \geq 0, \quad (14)$$

com,  $P_n$  e  $P_{n+1}$ , polinômios de Legendre. Os primeiros polinômios de Lobatto são descritos abaixo.

$$P_0 = 1,$$

$$P_1 = 3x,$$

$$P_2 = \frac{5}{2}(5x^2 - 1),$$

$$P_3 = \frac{5}{2}(7x^3 - 3x).$$

A maior razão para a escolha dos polinômios de Lobatto é que a interpolação nodal sempre irá variar em uma amplitude de  $[-1,1]$ , independente da ordem polinomial utilizada:

$$\varphi_i(\xi) \leq 1., \quad (15)$$

devido a essa propriedade, as oscilações Runge são suprimidas, acarretando em uma melhor eficiência na interpolação e o raio de convergência na interpolação com respeito ao grau  $m$ , é mais rápido do que qualquer potência  $1/m$  (POZRIKIDIS, 2005).

### 3.6. Erro na interpolação

A estimativa do erro mostra-se hoje em dia tão importante quanto a análise dos resultados em si. Considerando uma função  $f(x)$  a qual é interpolada por polinômios,  $P_m(x)$ , de grau igual ou menor a  $m$ . A diferença entre o valor da função exata e a função aproximadora é o erro da interpolação.

$$e(x) = P_m(x) - f(x), \quad (16)$$

as condições de interpolação garantem que nos pontos de interpolação  $x_i$ ,

$$e(x_i) = 0. \quad (17)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ ,  $e(x)$  tem no mínimo  $m + 1$  zeros no domínio de interpolação. Em geral,  $e(x) \neq 0$  quando  $x \neq x_i$ .

Quando a função  $f(x)$  é suficientemente suave, o erro ocorrido pela interpolação polinomial é dado por (Davis, 1975).

$$e(x) = -\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)(x - x_{m+1}). \quad (18)$$

Segundo Rocha e Kzam (2013), a análise da convergência de uma função requer a utilização de parâmetros quantificadores da magnitude do erro. Essa medida do erro será realizada pela norma máxima de uma função  $f(x)$  denotada por  $\|f(x)\|$ , ou seja, o valor absoluto máximo de  $f(x)$ . Para todos os polinômios de grau  $n$  de aproximação de uma função  $f(x)$ , existe um polinômio ótimo, denotado de  $P_m^{oti}(x)$ , que exibe o erro mínimo  $\|e(x)\|$ ,

chamado de erro minimax e denotado de  $\rho_m[f(x)]$ . Esse polinômio ótimo não necessariamente é um polinômio de interpolação da função  $f(x)$ .

Considerando para todas as funções  $f(x)$  com a norma máxima unitária,  $\|f(x)\| = 1$ , a correspondente norma do erro de interpolação é:

$$\begin{aligned}\|e(x)\| &\equiv \|P_m(x) - f(x)\| = \|(P_m(x) - P_m^{oti}(x)) + (P_m^{oti}(x) - f(x))\| \\ &\leq \|P_m(x) - P_m^{oti}(x)\| + \|P_m^{oti}(x) - f(x)\| \\ &= \|P_m(x) - P_m^{oti}(x)\| + \rho_m[f(x)],\end{aligned}\tag{19}$$

para enfatizar que o polinômio  $P_m(x)$  aproxima a função  $f(x)$ , é utilizado como notação  $P_m(x, f)$ . Em seguida é aplicado o lema de Lebesgue (Karniadakis e Sherwin, 1999), e desenvolve a desigualdade.

$$\begin{aligned}\|P_m(x, f) - P_m^{oti}(x)\| &= \|P_m(x, f) - P_m(x, P_m^{oti})\| \\ &\leq \|P_m\| \cdot \|f(x) - P_m^{oti}(x)\|,\end{aligned}\tag{20}$$

sendo que:

$$P_m = \max\|P_m(f(x))\|,\tag{21}$$

$\|e(x)\|$  máximo é calculado sobre todas as funções admissíveis,  $f(x)$ . Assim,

$$\|e(x)\| \leq (1 + \|P_m\|)\rho_m[f(x)].\tag{22}$$

Para obter um limite para a norma  $\|P_m\|$ , o polinômio interpolante é expresso em termos dos polinômios da equação 5. Relembrando a condição que  $\|f(x)\| = 1$ , pode-se escrever:

$$\|P_m\| \equiv \max\left(\left|\sum_{i=1}^{m+1} f(x_i)\varphi_i(x)\right|\right) \leq \max\left(\sum_{i=1}^{m+1} |f(x_i)| |\varphi_i(x)|\right) \leq \max(\mathfrak{I}_m(x)),\tag{23}$$

em que:

$$\mathfrak{I}_m(x) \equiv \sum_{i=1}^{m+1} |\varphi_i(x)| \quad (24)$$

é a função de Lebesgue, cujo máximo valor é a constante de Lebesgue,

$$\Lambda_m \equiv \max(\mathfrak{I}_m(x)) \quad (25)$$

É conhecido que a constante de Lebesgue possui o comportamento crescente á medida que  $m$  tende ao infinito. O teorema de *Erdős* coloca um limite inferior para o crescimento possível da constante (RIVLIN, 1969)

$$\Lambda_m \leq \frac{2}{\pi} \ln m + 1 - c, \quad (26)$$

onde  $c$  é uma constante positiva. Assim, a constante de Lebesgue cresce tão rápido quanto  $\ln m$ . Quando os pontos são igualmente espaçados no intervalo definido, a constante de Lebesgue cresce rapidamente com o aumento de  $m$ , exibindo o comportamento:

$$\Lambda_m \sim \frac{2^m}{m \log m}. \quad (27)$$

É possível provar que quando os nós de interpolação são colocados nos zeros dos polinômios ortogonais a constante de Lebesgue, cresce muito lentamente á quase taxa logarítmica ideal segundo Fejér, (1932a) e Fejér, (1932b), apud Rocha e Kzam (2013). Para a interpolação de Lobatto, a análise numérica revela o limite (BOS, 1983; HESTHAVEN e TENG, 2000, apud ROCHA e KZAM (2013)

$$\Lambda_m \leq \frac{2}{\pi} \ln(m+1) + 0,685. \quad (28)$$

### 3.7. Número de condição

Para a resolução de sistemas lineares, um aspecto é bastante significativo e deve ser considerado, quando a solução de determinada equação é muito sensível a pequenas

mudanças nos seus coeficientes. Esse Fenômeno é denominado de mal condicionamento e está relacionado a singularidade da matriz dos coeficientes (Franco, 2010). Este aspecto pode ser quantificado e expresso por meio de:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A\|^{-1}, \quad (29)$$

sendo  $\|A\|$  a norma euclidiana da matriz analisada, e  $\|A\|^{-1}$  sua inversa.  $\|A\|$  pode ser expresso através de:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \text{ (norma euclidiana)}. \quad (30)$$

### 3.8. Interpolação em domínio triangular

Segundo Pozrikidis (2005), para a interpolação de uma função  $f(\xi_1, \xi_2)$ , é necessário realizar uma expansão polinomial sobre a área de um triângulo padrão no plano paramétrico  $\xi_1 - \xi_2$ :

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) = & a_{00} \\ & + a_{10}\xi_1 + a_{01}\xi_2 + \\ & a_{20}\xi_1^2 + a_{11}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + \\ & a_{30}\xi_1^3 + a_{21}\xi_1^2\xi_2 + a_{12}\xi_1\xi_2^2 + a_{03}\xi_2^3 + \\ & a_{m0}\xi_1^m + a_{(m-1)1}\xi_1^{(m-1)}\xi_2 + \dots + a_{1(m-1)}\xi_1\xi_2^{(m-1)} + a_{0m}\xi_2^m, \end{aligned} \quad (30)$$

cuja soma dos índices  $i + j$  dos coeficientes  $a_{ij}$  é constante a cada linha e o número de coeficientes é determinado por:

$$N = \binom{m+2}{2} = \frac{1}{2}(m+1)(m+2). \quad (31)$$

A expansão polinomial pode ser escrita como:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m \left[ \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij} M_{ij}(\xi_1, \xi_2) \right]. \quad (32)$$

Para o processo de interpolação, é introduzido a função de interpolação cardinal para o nó  $i$ ,  $\psi_i(\xi_1, \xi_2)$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , com a propriedade:

$$\psi_i(\xi_1^j, \xi_2^j) = \delta_{ij}, \quad (33)$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. A interpolação polinomial sobre o triângulo paramétrico pode ser escrito da seguinte forma:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=1}^N \psi_i(\xi_1^j, \xi_2^j) f(\xi_1^j, \xi_2^j). \quad (34)$$

As funções de interpolação podem ser apresentadas como combinações lineares de um conjunto  $N$  de polinômios independentes,  $\phi_j(\xi_1, \xi_2)$ , sendo assim, a função de interpolação cardinal para o nó  $i$  de ordem  $m$  no plano  $\xi_1 - \xi_2$  é escrito da seguinte forma :

$$\begin{aligned} \psi_i(\xi_1, \xi_2) = & c_N \phi_1(\xi_1, \xi_2) + c_{N-1} \phi_2(\xi_1, \xi_2) + \dots + \\ & + c_2 \phi_{N-1}(\xi_1, \xi_2) + c_1 \phi_N(\xi_1, \xi_2), \end{aligned} \quad (35)$$

onde  $c_j$  corresponde a  $N$  coeficientes de expansão para o nó desejado, e sendo  $j = 1, 2, \dots, N$ .  $\phi_j$ , é o vetor das funções de base e para isso.

Diversas são as escolhas possíveis, sendo as melhores os polinômios de Appel e Proriol. Porém estudos realizados por Blyth e Pozrikidis (2005) revelaram que Proriol tem uma melhor eficiência quando comparado ao polinômio de Appel.

### 3.8.1. Interpolação de Proriol

A base mais desejável segundo Proriol (1957) apud Rocha (2015) é constituída pelo polinômio de Proriol, o qual é totalmente ortogonal sobre a área do triângulo. Independente da escolha da base deve-se impor a condição de interpolação cardinal, que pode ser escrita pela Equação (36):

$$V_i^T \cdot c = e_i, \quad (36)$$



em que  $V_\phi$  é dado por:

$$V_\phi = \begin{pmatrix} \phi_1(\xi_1^1, \xi_2^1) & \cdots & \phi_1(\xi_1^N, \xi_2^N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(\xi_1^1, \xi_2^1) & \cdots & \phi_N(\xi_1^N, \xi_2^N) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

sendo o termo  $V_\phi$  a matriz de Vandermonde generalizada  $N \times N$  com componentes  $V_{\phi i} = \phi_i(\xi_1^j, \xi_2^j)$ . E tendo como coeficientes da expansão:

$$c = \begin{pmatrix} C_N \\ C_{N-1} \\ C_3 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

ainda, sendo  $e_i$  o vetor unitário no espaço de dimensão  $n$  associado ao nó. Assim, tem-se que:

$$\psi_i = \phi(\xi_1, \xi_2) \cdot [V_\phi^T]^{-1} \cdot e_i, \quad (39)$$

em que  $\phi(\xi_1, \xi_2)$ , é o vetor de função da base. Aplicando para todos os nós se tem:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \phi(\xi_1, \xi_2) \cdot [V_\phi]^{-1}, \quad (40)$$

então rearranjando o problema:

$$V_\phi \cdot \psi(\xi_1, \xi_2) = \phi(\xi_1, \xi_2). \quad (41)$$

Para introduzir o Polinômio de Proriol, inicialmente é mapeado o triângulo contido no plano  $\xi_1 - \xi_2$  para o quadrado padrão  $-1 \leq \xi_1' \leq 1, -1 \leq \xi_2' \leq 1$ , usando a transformação de Duff, de acordo com Pozrikidis (2005):

$$\xi_1' = \frac{(1 + \xi_1')(1 - \xi_2')}{4}, \quad \xi_2' = \frac{(1 + \xi_2')}{2}. \quad (42)$$

O Polinômio de Proriol,  $PR_{kl}$ , envolve monômios da forma  $\xi_1^p \xi_2^{(j-p+q)}$  com ordem  $k+q$  combinada e com  $p = 1, 2, \dots, k$  e  $q = 1, 2, \dots, l$ . Então, segundo Rocha (2015). Pode-se escrever o polinômio de proriol da seguinte maneira:

$$PR_{kl} = \left[ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{k-i} \left( \frac{\xi_1-1}{2} \right)^{k-i} \left( \frac{\xi_1+1}{2} \right)^i \left( \frac{1-\xi_2}{2} \right)^k \right] \cdot \left[ \sum_{j=0}^l \binom{l+2k+1}{j} \binom{l}{l-j} \left( \frac{\xi_2-1}{2} \right)^{l-j} \left( \frac{\xi_2+1}{2} \right)^j \right]. \quad (43)$$

Os primeiros polinômios de Proriol são:

$$PR_{00} = 1 ,$$

$$PR_{10} = 2\xi_1 + \xi_2 ,$$

$$PR_{01} = 3\xi_2 - 1 ,$$

$$PR_{20} = 6\xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - 6\xi_1 - 2\xi_2 + 1 ,$$

### 3.8.2. Base nodal uniforme em domínio triangular

Para polinômio interpolador de grau  $m$ , a distribuição igualmente espaçada é dada por (POZRIKIDIS, 2005).

$$v_i = \frac{(i-1)}{m} , \quad (44)$$

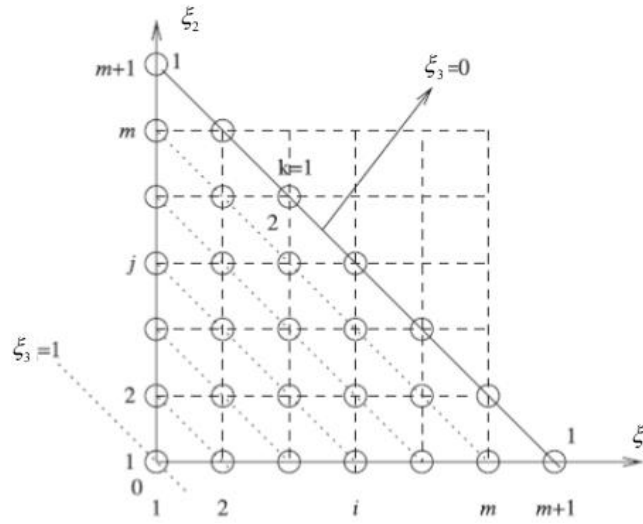
com  $i = 1, 2, \dots, m+1$  e  $v_i$  são valores adimensionais.

Para garantir a interpolação sobre  $m+1$  pontos,  $v_1 = 0$  e  $v_{m+1} = 1$ , as linhas dos nós vertical e horizontal são descritas abaixo, com  $j = 1, 2, \dots, m+1$ .

$$\xi_1^i = v_i , \quad \xi_2^j = 1 - v_{m+2-j} . \quad (45)$$

Os nós ao longo da hipotenusa do triângulo estão localizados pelo movimento vertical para cima a partir dos nós no eixo  $\xi_1$ , ou horizontalmente para a direita a partir dos nós no eixo  $\xi_2$ , os nós interiores são colocados nas linhas vertical e horizontal, produzindo  $(\xi_1^i, \xi_2^i)$  (Rocha, 2013). A figura 2 demonstra como ocorre a distribuição igualmente espaçada dos nós ao longo do triângulo retângulo.

Fonte - Adaptado do Rocha, 2015.



**Figura 2. Ilustração da distribuição igualmente espaçada de nós sobre o triângulo.**

Para  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ . As linhas diagonais correspondem a valores constantes da coordenada baricêntrica  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ , variando de  $\xi_3 = 0$  a  $\xi_3 = 1$  dentro da área do triângulo. Cada linha diagonal é identificada pelo índice:

$$k = m + 3 - i - j, \quad (46)$$

De acordo com Pozrikidis (2005), para cada nó  $(i, j)$  formado pela intersecção entre as linhas  $i$ , verticais e as horizontais,  $j$ , a expressão de interpolação pode ser escrita como o produto entre três funções:

$$\psi_{ij}(\xi_1, \xi_2) = \Xi_i^{(i-1)}(\xi_1) \cdot H_j^{(j-1)}(\xi_2) \cdot Z_k^{(k-1)}(\xi_3), \quad (47)$$

em que  $\Xi_i^{(i-1)}(\xi_1)$  é um polinômio de grau  $(i - 1)$  definido por:

$$\Xi_i^{(0)} = 1,$$

$$\Xi_i^{(i-1)}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - v_1)(\xi_1 - v_2) \dots (\xi_1 - v_{i-2})(\xi_1 - v_{i-1})}{(v_i - v_1)(v_i - v_2) \dots (v_i - v_{i-2})(v_i - v_{i-1})}, \quad (48)$$

para  $i = 2, 3, \dots, m + 1$ . E  $H_j^{(j-1)}(\xi_2)$  é um polinômio de grau  $(j - 1)$  definido por:

$$H_j^{(0)}(\xi_2) = 1,$$

$$H_j^{(j-1)}(\xi_2) = \frac{(\xi_2 - v_1)(\xi_2 - v_2) \dots (\xi_2 - v_{j-2})(\xi_2 - v_{j-1})}{(v_j - v_1)(v_j - v_2) \dots (v_j - v_{j-2})(v_j - v_{j-1})}, \quad (49)$$

para  $j = 2, 3, \dots, m + 1$ . E por fim,  $Z_k^{(k-1)}(\xi_3)$  é um polinômio de grau  $(k - 1)$  definido por:

$$Z_k^{(0)} = 1,$$

$$Z_k^{(k-1)}(\xi_3) = \frac{(\xi_3 - v_1)(\xi_3 - v_2) \dots (\xi_3 - v_{k-2})(\xi_3 - v_{k-1})}{(v_k - v_1)(v_k - v_2) \dots (v_k - v_{k-2})(v_k - v_{k-1})}, \quad (50)$$

sendo  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ , para  $k = 2, 3, \dots, m + 1$ .

### 3.8.3. Bases nodais ortogonais em domínio triangular

Para a distribuição nodal das bases ortogonais. Emprega-se os nós nos zeros escalados dos polinômios ortogonais de grau  $m - 1$ , definido por:

$$v_1 = 0, \quad v_i = (1 + t_{i-1}) \text{ e } v_{m+1} = 1, \quad (51)$$

em que  $t_i$ , para  $i = 2, 3, \dots, m$ , são os zeros do polinômio de grau  $m - 1$  distribuídos no intervalo de  $(-1, 1)$ .

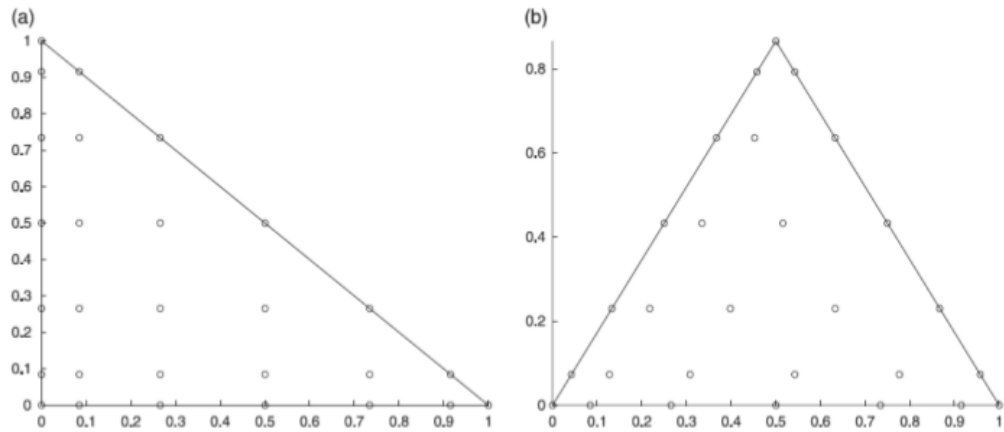
De acordo com Blyth e Pozrikidis (2005), a assimetria da distribuição nodal em relação aos três vértices é uma deficiência que pode ser contornada por meio da redistribuição dos nós. Para tanto é realizado o mapeamento para o espaço  $\xi_1^i$  e  $\xi_2^j$  dado pela Equação (52), com  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m + 2 - i$  e  $k = m + 3 - i - j$ . Cabe ressaltar que a

Equação (52) é aplicada apenas aos pontos internos, os dois valores extremos permanecem inalterados.

$$\xi_1^i = \frac{1}{3}(1 + 2v_i - v_j - v_k), \quad \xi_2^j = \frac{1}{3}(1 + 2v_j - v_i - v_k). \quad (52)$$

A figura abaixo mostra como ocorre a redistribuição dos pontos do triângulo retângulo padrão para o triângulo equilátero:

Fonte - Adaptado do Rocha, 2015.



**Figura 3. Redistribuição dos nós das bases nodais do triângulo retângulo padrão para o equilátero.**

### 3.9. Formulação do Método dos Elementos Finitos Elastostático

Nesta seção é apresentado a formulação do MEF para estruturas unidimensionais e bidimensionais. Na abordagem unidimensional, é realizado o desenvolvimento formulacional do MEF para a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Já para a abordagem bidimensional, é realizada a modelagem do MEF para problemas de estado plano.

### 3.10. Formulação Forte para vigas de Euler-Bernoulli: abordagem unidimensional

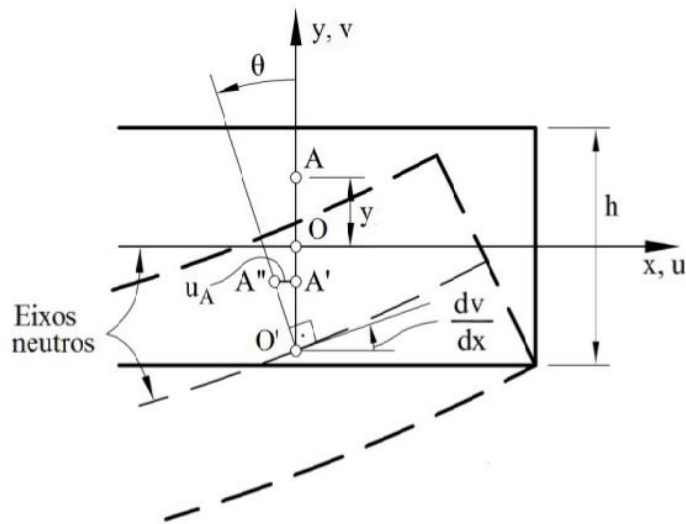
Para a modelagem matemática existem algumas hipóteses que devem ser consideradas na formulação de vigas de Euler-Bernoulli (OÑATE, 2013):

- a) O deslocamento vertical  $v$  de pontos da seção transversal são pequenos e iguais à deflexão de um ponto no eixo neutro da mesma seção;

- b) O deslocamento lateral  $u$  de um ponto na seção transversal é nulo;
- c) As seções transversais planas normais ao eixo neutro da viga permanecem ortogonais e planas ao eixo após a deformação;
- d) O material é assumido como elástico e isotrópico.

A hipótese-chave na teoria de vigas é que secções normais á linha central de uma viga permanecem retilíneas e normais. A figura abaixo mostra uma viga antes e depois de receber um determinado carregamento.

Fonte - Adaptado do Oñate, 2013.



**Figura 4. Cinemática da viga de Euler-Bernoulli.**

É de fácil compreensão que antes de receber o carregamento, o ponto A está a uma posição mais acima, tomando então após o carregamento uma nova posição  $A'$ . Além disso, a seção transversal sofre uma rotação  $\theta = \frac{dv}{dx}$  e o ponto  $A'$  assume uma nova posição  $A''$ , gerando um deslocamento  $u_a$  no sentido negativo do eixo x. E  $G'$  passa a ser o ponto correspondente ao eixo neutro. Pode-se ver que a hipótese de normalidade conclui que a componente x do deslocamento pela profundidade da viga é:

$$u = -y \sin \theta(x), \quad (53)$$

a rotação é determinada por:

$$\theta = \frac{dv}{dx}.$$

aplicando a relação tensão-deslocamento é possível escrever a equação da deformação longitudinal:

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2},$$

considerando o caso geral em que a linha central é mais alongada:

$$u(x) = u_m(x) - y \frac{dv(x)}{dx}, \quad (54)$$

as deformações então são dadas por:

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2},$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0,$$

utilizando a relação tensão-deformação elástico linear, é possível escrever:

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E \left( \frac{du_m(x)}{dx} - y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right),$$

usando a definição do momento como o produto da força e do braço de momento:

$$m = - \int y \sigma_{xx} dA, \quad (55)$$

ao substituir a lei de Hooke pela expressão da força temos que:

$$m = - \int_A y E \left( \frac{du_m(x)}{dx} - y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) dA = \int_A E y^2 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dA,$$

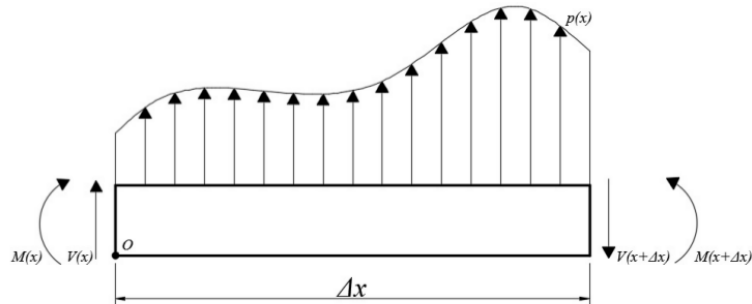
considerando  $EI$  constante sobre a seção transversal:

$$m = E \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \int_A y^2 dA = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2},$$

em que  $I$  é o momento de inércia da seção transversal. Portanto conclui-se:

$$m = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = EI. \quad (56)$$

Fonte - Adaptado do Belytschko, 2009.



**Figura 5. Equilíbrio do corpo rígido**

Ao considerarmos o equilíbrio vertical da viga mostrada na figura acima, pela soma das forças verticais obtemos:

$$-v(x + \Delta x) + v(x) + p \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta(x) = 0,$$

dividindo por  $\Delta(x)$  e fazendo  $\Delta(x) \rightarrow 0$ , temos que:

$$\frac{dv}{dx} - p(x) = 0,$$

considerando o equilíbrio do momento tem-se:

$$-m(x) + m(x + \Delta(x)) - v(x + \Delta(x))\Delta(x) + p(x)\Delta(x)\frac{\Delta(x)}{2} = 0,$$

portanto obtém-se:

$$\frac{dm}{dx} - v(x) = 0, \quad (57)$$

combinando as duas equações pode-se obter:



$$\begin{aligned}\frac{d^2 m}{dx^2} - \frac{dv}{dx} &= 0, \\ \frac{d^2 m}{dx^2} - p(x) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p(x) &= 0,\end{aligned}$$

se  $EI$  for constante tem-se:

$$EI \frac{d^4}{dx^4} - p(x) = 0. \quad (58)$$

A equação apresentada acima é denominada de equação que governa o problema e juntamente com as condições de contorno apresentadas a seguir forma a formulação forte para a teoria de vigas de Euler-bernoulli.

$$\begin{aligned}v &= \bar{v} \text{ em } \Gamma v, \\ \frac{dv}{dx} &= \theta \text{ em } \Gamma \theta, \\ mn &= -EI \frac{d^2 v}{dx^2} \text{ em } \Gamma m, \\ vn &= -EI \frac{d^3 v}{dx^3} \text{ em } \Gamma v.\end{aligned}$$

### 3.10.1. Formulação Fraca

A determinação de uma solução aproximada é de fundamental importância na engenharia, já que o desenvolvimento analítico utilizando equações diferenciais se torna muito complexo e menos prático. O desenvolvimento da formulação fraca visa resolver esse problema, sendo efetuado, multiplicando a equação de equilíbrio e as condições de contorno por uma função peso  $w(x)$  e integrada no seu domínio correspondente.

$$\int_D w \left[ \frac{d^2 m}{dx^2} - p(x) \right] dx = 0, \quad (59)$$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} (m - \bar{m}) \Big|_{\Gamma_m} &= 0, \\ w(vn - \bar{v}) \Big|_{\Gamma_v} &= 0.\end{aligned}$$

Utilizando a técnica de integração por partes, podemos escrever a equação integral (fraca) equivalente à forma forte da seguinte forma:

$$\int \frac{d^2 w}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int w p(x) dx + \left( \frac{dw}{dx} m \right) \Big|_{\Gamma_m} + w v \Big|_{\Gamma_v} \text{ para } \forall w \in v_0, \quad (61)$$

com:

$$v = \left\{ v; v \in H^2, v = \bar{v} \text{ em } \Gamma_v, \frac{d\bar{v}}{dx} = \theta \text{ em } \Gamma_\theta \right\},$$

$$v_0 = \left\{ w; w \in H^2, w = v \text{ em } \Gamma_v, \frac{dw}{dx} = 0 \text{ em } \Gamma_\theta \right\}.$$

Sendo  $H^2$ , o conjunto das funções suaves com continuidade  $c^1$ .

### 3.11. MEF unidimensional

Como concluído na seção anterior, as soluções tentativa e as funções peso precisam ser funções com grau de continuidade  $c^1$ . Foi utilizada a classe de função dos polinômios para garantir os requisitos de interpolação, sendo então descrito abaixo:

$$v(x) = a_0 + a_1 \xi + \dots + a_{m+1} \xi^{m+1}, \quad (62)$$

onde  $a_0, \dots, a_{m+1}$  são os coeficientes polinomiais e  $\xi$  são pontos adimensionais. Os deslocamentos e forças são expressos da seguinte maneira:

$$d^e = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ v_{m+1} \\ \theta_{m+1} \end{bmatrix},$$

em que  $v$  se refere aos deslocamentos verticais e  $\theta$  a rotações para cada nó do referente elemento (ver figura 4).

As funções peso e tentativa são interpoladas com as mesmas funções de forma ,assim:

$$v^e = N^e d^e, \quad w^e = N^e w^e,$$

pode-se então concluir que:

$$\frac{d^2 N^e}{dx^2} = B^e, \quad \frac{d^2 v^e}{dx^2} = B^e d^e,$$

a matriz de rigidez elementar é, portanto expressa como:

$$K^e = \int EIB^e{}^T B^e dx. \quad (63)$$

Vetor de forças:

$$f^e = \int_D N^e{}^T p dx + (N^e{}^T \bar{v})|_{\Gamma_v} + \left( \frac{dN^e{}^T}{dx} \bar{m} \right) \Big|_{\Gamma_m}.$$

Fonte - Adaptado de Oñate, 2013.



Figura 6. Exemplo de elemento de viga com 4 graus de liberdade.

### 3.12. Formulação do MEF bidimensional

A formulação para o método dos elementos finitos bidimensional segue procedimento semelhante à abordagem unidimensional. Este trabalho fará uma abordagem para problemas encontrados na categoria de estado plano de tensão, onde uma das dimensões é considerada muito pequena em relação a outra, podendo então ocorrer uma simplificação para efeito de cálculo. Entre os problemas que podem ser abordados utilizando essa análise estão as vigas, placas e entre outras. O vetor deslocamento em um ponto é representado por:

$$u(x, y) = [u(x, y) \ v(x, y)]^T.$$

O campo de deformação para o estado plano de tensão, derivada da teoria da elasticidade é dado por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \quad .$$

O vetor deformação, composto pelas deformações longitudinal e cisalhante, é escrito da seguinte forma:

$$\epsilon = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T ,$$

tensão e deformação são relacionadas por:

$$\sigma = D\epsilon, \tag{65}$$

para o estado plano de tensão, pode-se determinar

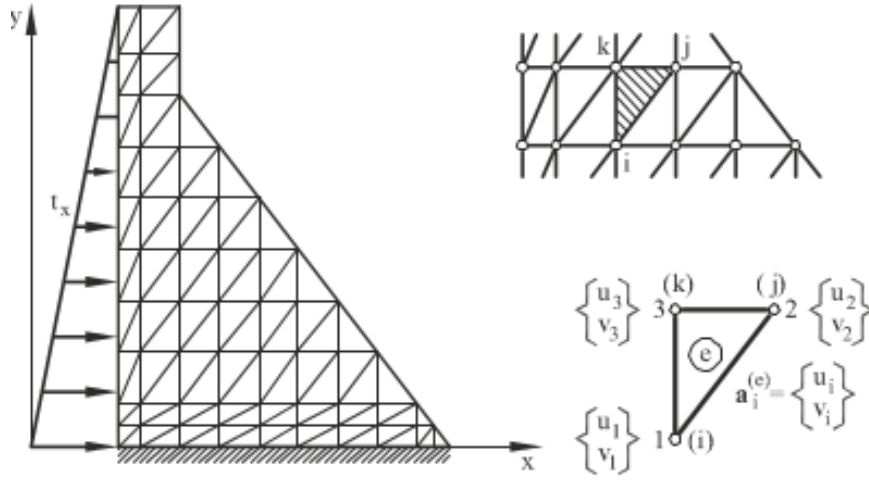
$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

em que  $\nu$  é o módulo de Poisson e  $E$  refere-se ao módulo de Elasticidade.

### 3.12.1. Discretização no estado plano de tensão

A figura abaixo mostra a discretização de um elemento triangular retirado de uma malha de elementos triangulares para um dado problema no estado plano de tensões.

Fonte - Adaptado de Oñate, 2013.



**Figura 7. Discretização por elementos triangulares.**

Para esse elemento triangular, as coordenadas  $x, y$  (vemos que  $x, y$ , e  $u, v$  são funções de  $\xi$  e  $\eta$ ). Portanto  $u = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$  e de modo semelhante,  $v = v[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$  podem ser expressas como;

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2, \dots, N_{m+1} u_{m+1}, \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2, \dots, N_{m+1} v_{m+1}, \end{aligned} \quad (66)$$

em que  $m$  refere-se ao grau da aproximação utilizada. Pode-se concluir que:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{m+1}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{m+1}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{m+1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{m+1}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

pode ser aferido então que:

$$\epsilon = B \mathbf{a}^{(e)}, \quad (67)$$

em que:

$$B = [B_1, B_2, \dots, B_{m+1}].$$

### 3.12.1.1. Formulação forte e fraca

Resumo das relações que podem ser estabelecidas para elasticidade linear 2D:

#### 1. Equação de equilíbrio:

$$\nabla_s^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Segundo Belytschko (2009), a partir do equilíbrio de forças de um corpo de formato arbitrário e espessura unitária pode-se obter:

$$\nabla_s^T \sigma + b = 0, \text{ ou } \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x + b_x = 0 \text{ e } \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y + b_y = 0 \quad (68)$$

#### 2. Equação cinemática (relação deformação-deslocamento):

$$\epsilon = B a^{(e)}, \quad (69)$$

#### 3. Equação constitutiva (relação tensão-deformação):

$$\sigma = D \epsilon, \quad (70)$$

em que  $\vec{\sigma}_x$  e  $\vec{\sigma}_y$  são os vetores de tração ao longo dos eixos x e y,  $b_x$  e  $b_y$  são as forças de campo ao longo dos eixos x e y. As condições de contorno de deslocamento são escritas como:

$$u = \bar{u} \text{ sobre } \Gamma_u,$$

sobre qualquer porção de contorno, o deslocamento ou tração precisam ser prescritos, então:

$$\Gamma_u \cap \Gamma_t = \Gamma.$$

Para obter a formulação fraca, primeiro é definido as funções pesos admissíveis e as soluções tentativas, em seguida multiplica-se as equações de equilíbrio nas direções x e y sobre as funções peso correspondentes e integra-se sobre os domínios correspondentes :

$$a) \int_D w_x \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x dD + \int_D w_x b_x dD = 0 \quad \forall w_x \in U_0,$$

$$b) \int_D w_y \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y dD + \int_D w_y b_y dD = 0 \quad \forall w_y \in U_0,$$

$$c) \int_{\Gamma_t} w_x (t_x - \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0 \quad \forall w_x \in U_0,$$

$$d) \int_{\Gamma_t} w_y (t_y - \vec{\sigma}_y \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0 \quad \forall w_y \in U_0,$$

em que:

$$w = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j}.$$

O teorema de Green é então aplicado ao primeiro termo nas equações anteriores e fornece:

$$\int_D w_x \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x dD = \oint_{\Gamma} w_x \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_D w_x \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x dD,$$

$$\int_D w_y \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y dD = \oint_{\Gamma} w_y \vec{\sigma}_y \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_D w_y \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y dD,$$

adicionando as duas equações e lembrando que as funções peso  $w_x$  e  $w_y$  desaparecem sobre  $\Gamma_u$ , é obtido:

$$\int_D (\vec{\nabla} w_x \cdot \vec{\sigma}_x + \vec{\nabla} w_y \cdot \vec{\sigma}_y) dD = \oint_{\Gamma} (w_x \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n} + w_y \vec{\sigma}_y \cdot \vec{n}) d\Gamma + \int_D (w_x b_x + w_y b_y) dD,$$

simplicando a expressão e colocando em forma matricial, pode ser obtido:

$$\int_D (\nabla_s w^T) \sigma dD = \int_{\Gamma} w^T t d\Gamma + \int_D w^T b dD \quad (71)$$

em que:

$$U = \{u; u \in H^1, u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u \}.$$

$$U_0 = \{w; w \in H^1, w = 0 \text{ em } \Gamma_u \}.$$

### 3.13. Interpolações de Ordem Superior

A qualidade da solução está fortemente associada ao nível de refinamento dos elementos, podendo ser, pelo aumento do grau  $m$  da função interpoladora, pela diminuição do tamanho  $h$  do elemento ou ainda uma combinação de ambos ( $hm$ ). Além disso, a escolha da base influencia fortemente a estabilidade e eficiência dos procedimentos numéricos utilizados ao se reproduzir numericamente a geometria analisada (NOGUEIRA e BITTHENCOURT, 2007). A obtenção de interpolações de alta ordem segue os mesmos passos anteriormente descritos, mudando-se apenas as funções de forma.

### 3.14. MEF de alta ordem

Tanto para elementos bidimensionais quanto para unidimensionais, os conceitos apresentados anteriormente podem ser facilmente estendidos para elementos isoparamétricos de alta ordem. Somente as funções de forma  $N$  serão alteradas, mantendo as exigências expostas anteriormente. Vale ressaltar que para o estudo unidimensional os deslocamentos podem ser obtidos em apenas uma direção (vertical ou horizontal), já pra o bidimensional é feito um mapeamento nessas duas direções. Portanto para a formulação isoparamétrica, podemos expressar as coordenadas de um ponto dentro do elemento em termos nodais como:

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + \cdots + N_{m+1}x_{m+1},$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + \cdots + N_{m+1}y_{m+1}.$$

A geração de rigidez do elemento segue os mesmos passos de rotina:

$$u = Nq,$$

$$\epsilon = Bq,$$

$$K^e = t_e \int_A B^T(\xi_1, \xi_2) DB(\xi_1, \xi_2) detJ dA. \quad (71)$$



## 4. METODOLOGIA

A reprodução de geometrias complexas exige a utilização de ferramentas que assegurem a eficiência na interpolação. Expansões espectrais são então implementadas com o intuito de garantir a convergência uniforme da solução física do problema. Para problemas uni e bidimensionais do MEF os nós de colocação espectrais são posicionados nos zeros dos polinômios de Lobatto, Tchebychev e Legendre, com base no estudo feito por Blyth e Pozrikidis (2005), em que um conjunto triangular de Lobatto, construído por regras simples, goza de propriedades de convergência na interpolação comparáveis ao conjunto de pontos mais desejáveis de Fekete, garantindo uma boa precisão na reprodução de problemas de difícil modelagem numérica. Entretanto a implementação de alta ordem do método dos elementos finitos é muitas vezes dificultada devido ao seu caráter teórico e computacional, especificamente a versão  $m$  do FEM precisa de alta qualidade na integração numérica e diferenciação numérica, funções de forma apropriadas, continuidade inter-elemento  $C^0$ , numeração dos graus de liberdade, aplicações das condições de contorno e pós-processamento dos resultados (NOGUEIRA; BITTENCOURT, 2007).

Diante do exposto acima, neste projeto são utilizadas expansões espectrais onde os nós de colocação serão dispostos nos zeros dos polinômios ortogonais de Lobatto, Tchebychev e Legendre, frente aos nós distribuídos uniformemente. Será feito um estudo comparativo entre essas bases, com o intuito de verificar a convergência uniforme a medida que o grau aproximador é elevado. Como parâmetro para quantificar o desempenho dos conjuntos nodais, é utilizada a constante de Lebesgue, definida como a máxima soma dos valores absolutos das funções de interpolação dos nós (BLYTH; POZRIKIDIS, 2005) e o número de condição pela norma euclidiana.

A implementação computacional de alta ordem espectral para as bases ortogonais e equidistante é realizada na linguagem Fortran. As geometrias reproduzidas, desde função racional, trigonométrica e polinomial, são analisadas em um estudo comparativo para resultados que utilizam tanto elementos de baixa ordem quanto de alta ordem. Além do estudo de interpolação, é feito uma aplicação ao MEF unidimensional e bidimensional para problemas elastostáticos, onde serão aplicadas expansões espectrais, posicionando-se cuidadosamente os nós sobre os zeros dos polinômios ortogonais. No caso bidimensional será utilizada a função interpolante de Proriot.

Para o desenvolvimento da formulação será utilizada a teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli e por fim os resultados do presente trabalho são comparados com estudos já feitos por autores que utilizaram tanto elementos de baixa quanto alta ordem, como é o caso nos estudos feitos por Rocha; Kzam (2013) e Pozrikidis (2006).

#### 4.1. Cronograma

A tabela a seguir representa o cronograma de atividades ao longo do primeiro até o 12º mês, completando 1 ano de duração. A parte colorida indica qual atividade foi feita em cada mês e em seguida é apresentada cada atividade.

**Tabela 1. Cronograma do projeto ao longo de 12 meses.**

Atividade	2016					2017						
	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
A-1												
A-2												
A-3												
A-4												
A-5												
A-6												
A-7												
A-8												
		Previsto					Desenvolvido					

- Atividade (A-1): Revisão bibliográfica,
- Atividade (A-2): Construção e implementação computacional dos elementos uni e bidimensionais de alta ordem,
- Atividade (A-3): Estudo comparativo entre as funções aproximadoras,
- Atividade (A-4): Implementação computacional do MEF espectral de alta ordem,
- Atividade (A-5): Validação para o MEF de alta ordem,
- Atividade (A-6): Escrita do relatório parcial,
- Atividade (A-7): Escrita do relatório final,
- Atividade (A-8): Preparação de artigos para congressos e/ou revistas internacionais.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

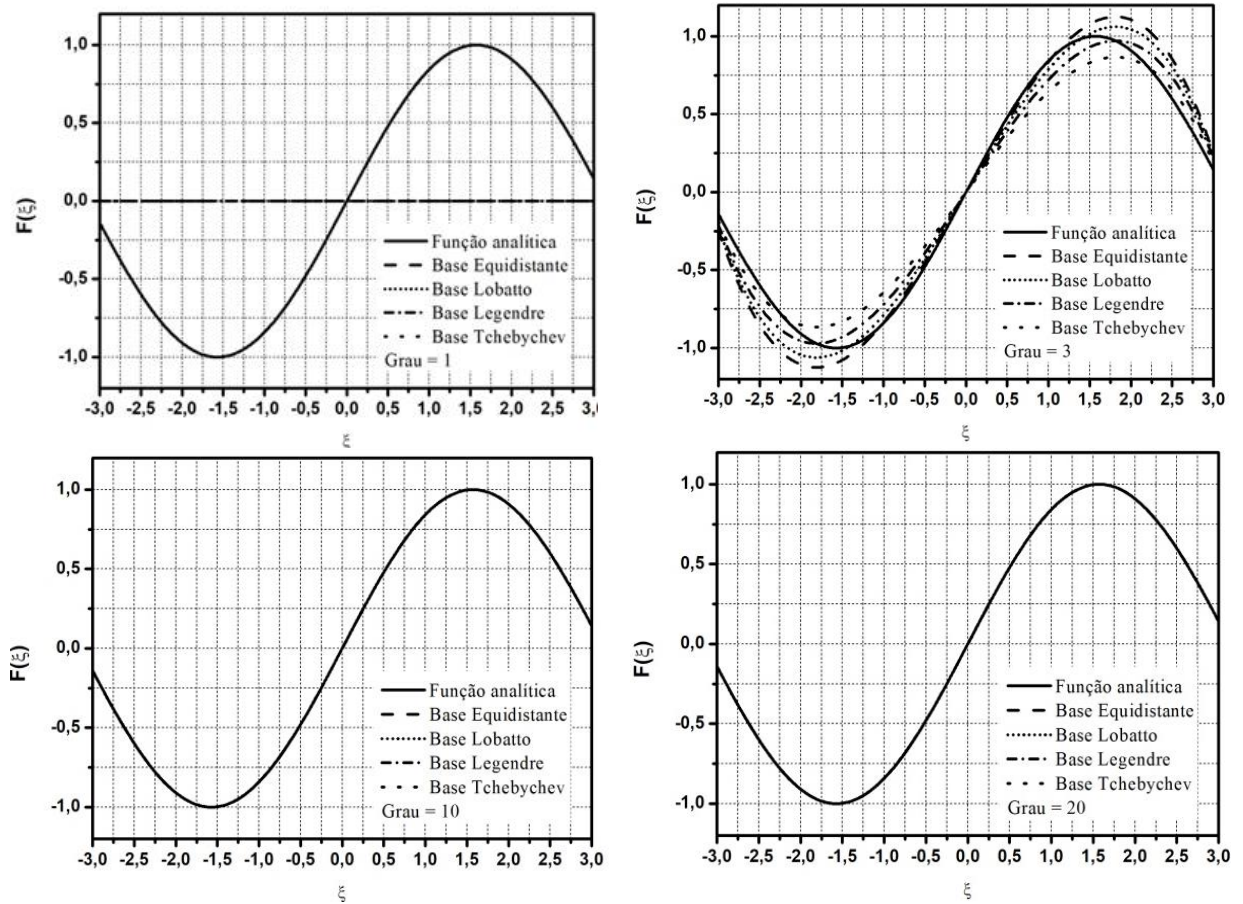
Nesta seção são apresentados alguns exemplos de problemas utilizados como forma de validação computacional. Inicialmente foi feito um estudo da reprodução de geometrias, tanto simples quanto complexas, a partir das bases nodais anteriormente apresentadas. Após isso foi feito uma análise do erro por meio de parâmetros como a constante de Lebesgue e o número de condição. A seguir é introduzido os resultados encontrados para interpolações de alta ordem aplicadas ao MEF unidimensional e bidimensional para problemas elastostáticos.

### 5.1. Interpolação para função trigonométrica e polinomial

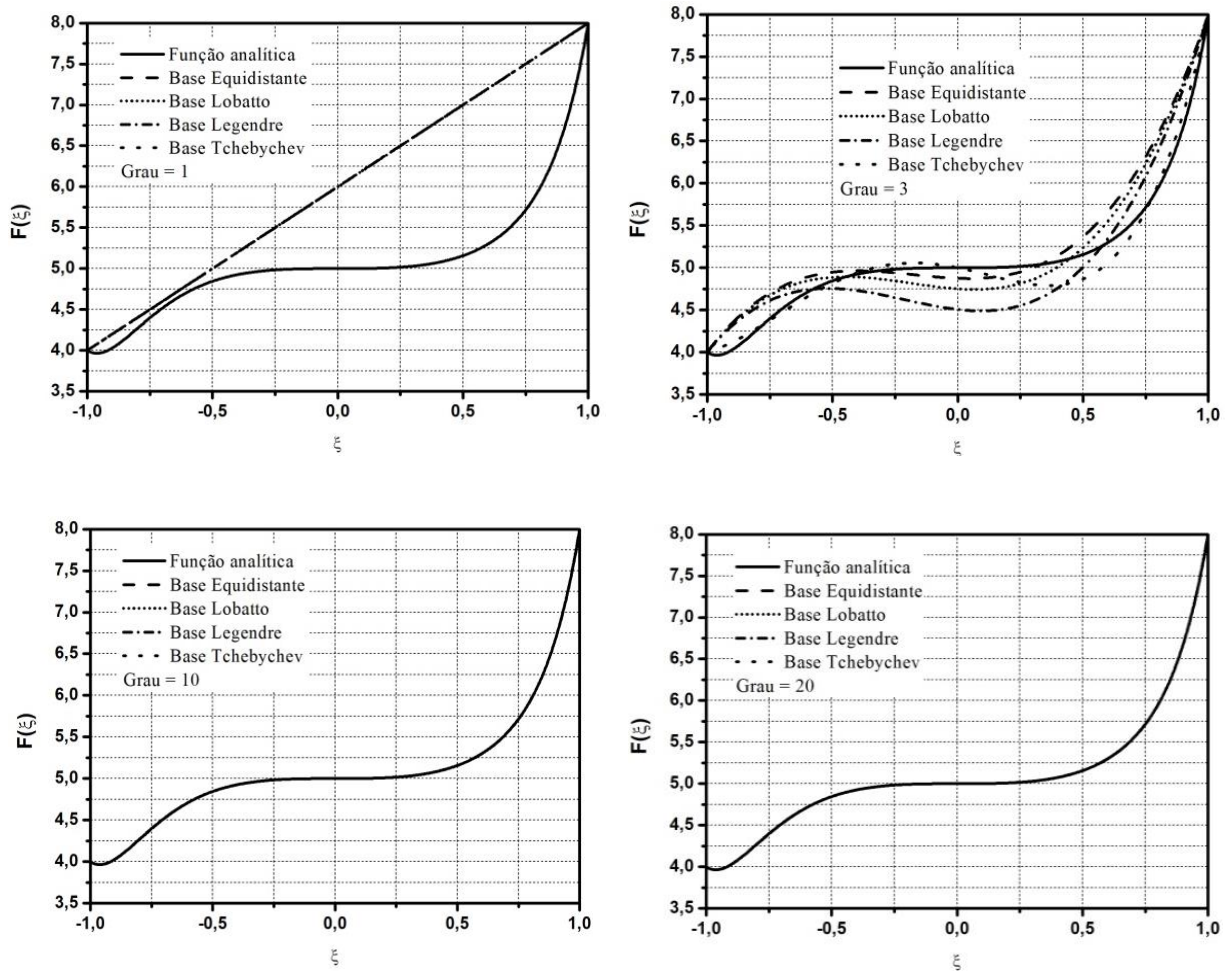
Para ilustrar a eficiência na reprodução de geometrias simples, é feito um estudo comparativo entre as bases nodais para uma geometria senoidal (Figura 8) e polinomial (Figura 9). A figura 8 mostra essa reprodução para as 4 bases nodais, podendo então ser verificado uma melhor convergência para aproximações superiores ao grau 3. As funções reproduzidas foram:

$$F(x) = \sin(x) \ ; \ F(x) = x^{10} + x^5 + x^3 + 5 \quad (72)$$

Por serem geometrias relativamente simples, a convergência ocorre rapidamente, sendo fácil a verificação de uma boa eficiência entre todas as bases nodais.

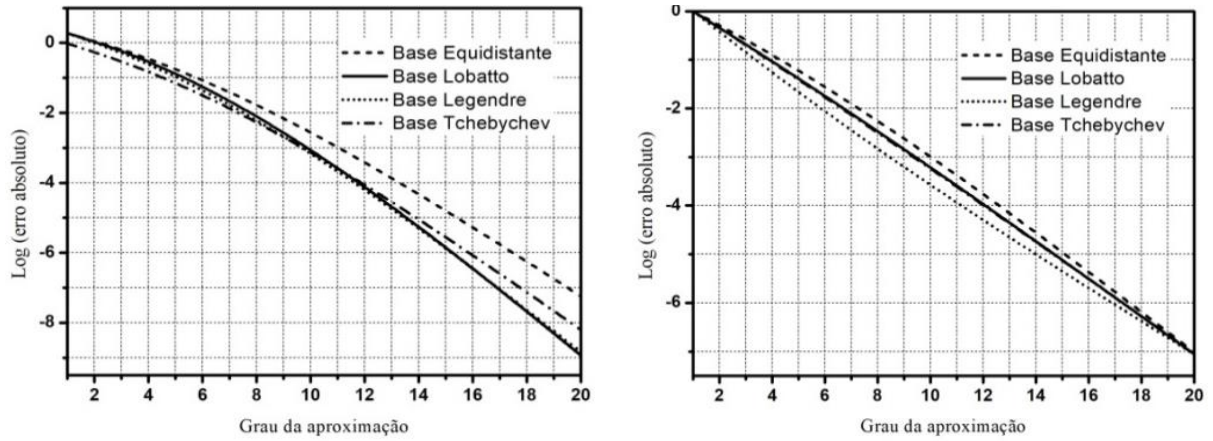


**Figura 8. Reprodução da geometria senoidal para as bases nodais empregando-se polinômios de alta e baixa ordem.**



**Figura 9.** Reprodução da geometria senoidal para as bases nodais empregando-se polinômios de alta e baixa ordem.

Os erros apresentados são de difícil percepção, por isso, a figura 10 mostra na escala logarítmica, o erro absoluto em detrimento do aumento do grau de aproximação. É de fácil compreensão que com o aumento do grau interpolante, o erro diminui gradativamente, sendo que a base de Lobatto é a que apresenta menores erros. Outra análise realizada é com relação a menor velocidade de convergência da aproximação para a função senoidal com relação à polinomial. Mostrando que mesmo sendo uma função relativamente simples, quando comparada com outra ainda mais simples, mostra uma menor precisão.



**Figura 10.** Erro na escala logarítmica na reprodução da função senoidal (à esquerda) e polinomial (à direita) para polinômios de baixa e alta ordem.

## 5.2. Fenômeno Runge

Considerando a função analítica a ser aproximada:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}. \quad (73)$$

É feito um estudo do fenômeno Runge, a partir da convergência entre as bases ortogonais, equiparando-as com a equidistante. O intervalo de mapeamento se dá em  $[-1,1]$ , sendo possível observar o péssimo desempenho da base igualmente espaçada. Esse desempenho está localizado nas regiões próximas as bordas, como pode ser visto na figura 11.



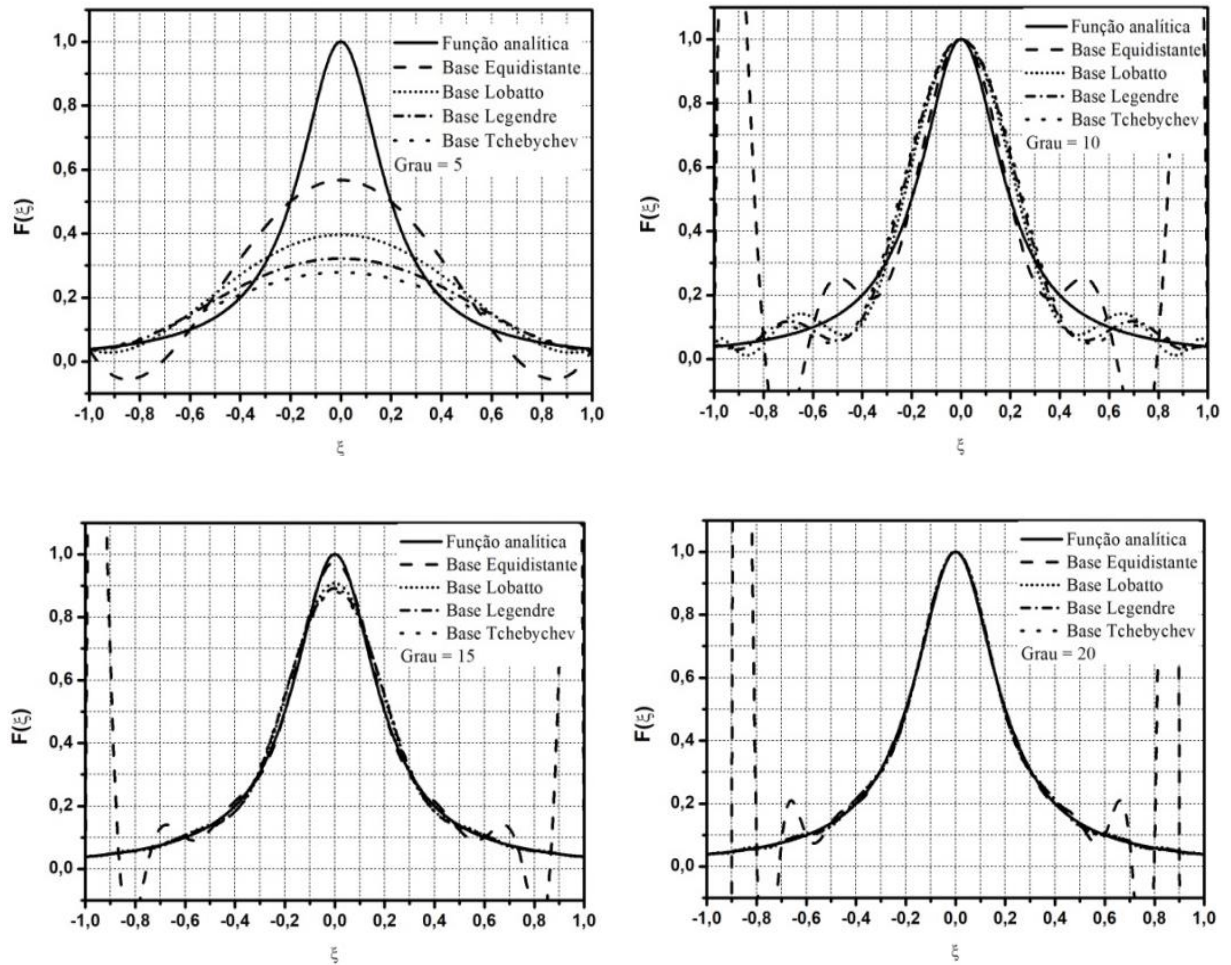


Figura 11. Efeito da distribuição da base na interpolação polinomial racional (fenômeno Runge).

Para reproduzir o desempenho da base equidistante frente as ortogonais, a figura a seguir relaciona o erro absoluto à medida que o grau aproximador é aumentado (Figura 12). Fica clara a alta taxa de deterioração da base equidistante com o aumento do grau polinomial.

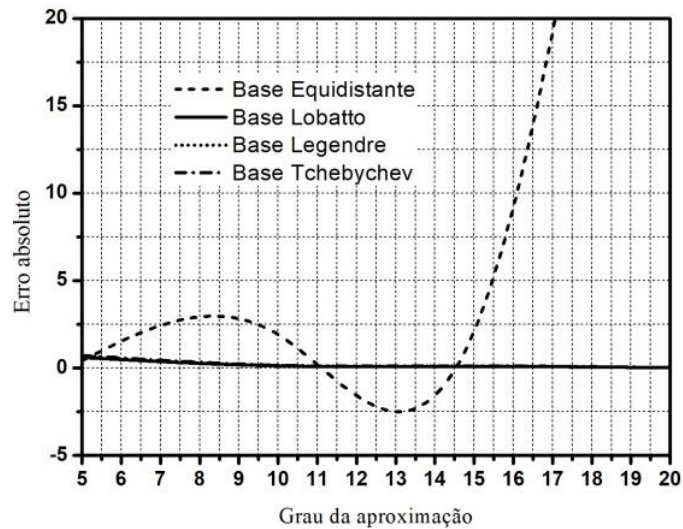


Figura 12. Erro absoluto na reprodução da função racional entre as bases nodais.

Para quantificar o efeito Runge, a seguir é plotada a constante de Lebesgue versus o grau do polinômio interpolador (Figura 13). Considerando os valores obtidos pela imagem mostrada abaixo, percebe-se uma grande velocidade no crescimento para a base equidistante, enquanto que para Lobatto, Legendre e Tchebychev essa constante cresce muito lentamente, tornando então o erro limitado. Dentre as ortogonais, Lobatto foi a que obteve a melhor eficiência.

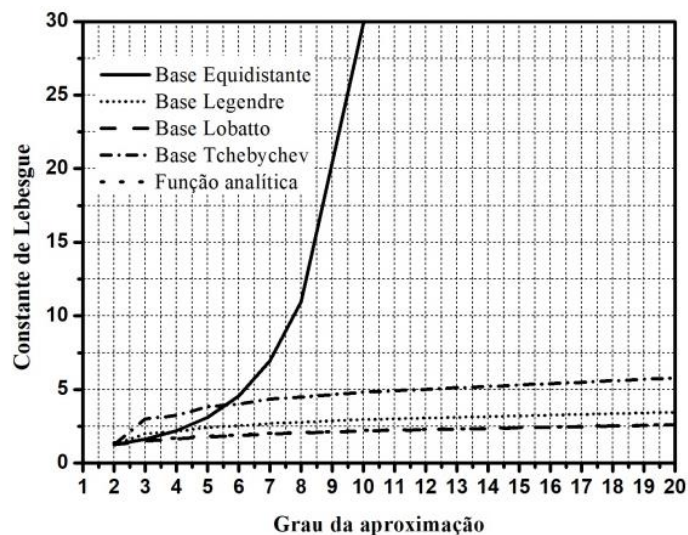


Figura 13. Gráfico da constante de Lebesgue para as bases nodais.

### 5.3. Condicionamento das bases ortogonais



Em seguida é avaliado o condicionamento da matriz de Vandermonde, a medida que é aumentado o grau de aproximação do polinômio interpolador, a figura 14, traz esse conceito aplicando a norma euclidiana, equação 29, proporcionando uma quantificação do erro para as bases ortogonais e equidistante. É possível perceber que para a base com nós equidistantes, o número de condição cresce em uma velocidade ilimitada com o aumento do grau de interpolação, já para as bases ortogonais, esse valor cresce mais lentamente.

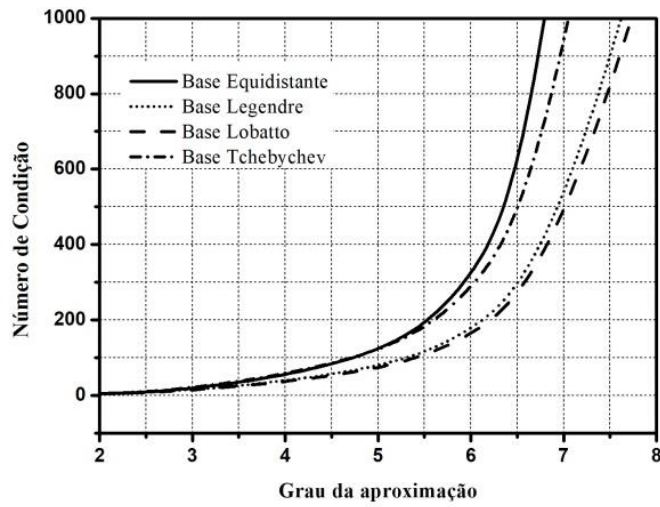


Figura 14. Número de condição para as bases nodais.

#### 5.4. Interpolação triangular de ordem qualquer

A seção a seguir apresenta o mapeamento de uma geometria complexa para o problema bidimensional. A fim de destacar o fenômeno Runge é feita a reprodução das 3 bordas do triângulo.

##### 5.4.1. Mapeamento bidimensional

O mapeamento de um triângulo padrão no plano  $\xi_1 - \xi_2$  é realizado pela equação descrita abaixo. Considerando que  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , são os pontos das bases nodais. Esse mapeamento é feito pelas funções:

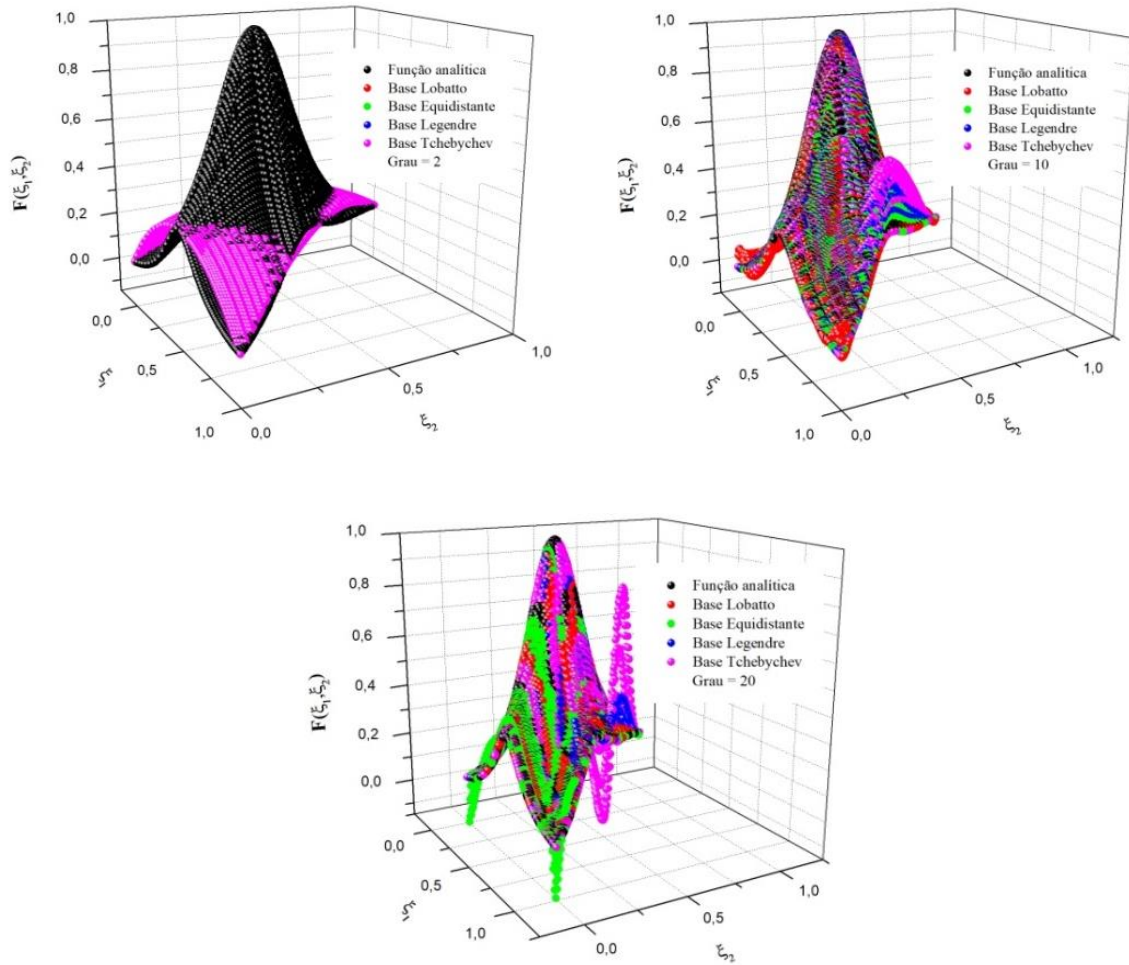
$$\xi_1 = \hat{\xi}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\xi}_2, \quad (74)$$

$$\xi_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{\xi}_2.$$

A função de interesse é definida por:

$$f(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) = \frac{1}{1 + 25(\hat{\xi}_1 - \xi_1^c)} \frac{1}{1 + 25(\hat{\xi}_2 - \xi_2^c)}, \quad (75)$$

esta função tem o domínio de validade sobre o triângulo equilátero de lados unitários e o centroide do triângulo é  $(\xi_1^c, \xi_2^c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ . Esta análise bidimensional revela um desempenho ruim para os nós distribuídos uniformemente, quando se aumenta o grau da aproximação, devido as oscilações nas bordas do intervalo interpolado. Isso é fácil de ser entendido pelo fato de que a base equidistante deteriora mais facilmente quando é aumentado o grau da aproximação, devido ao fenômeno Runge, que é facilmente visualizado nas extremidades do triângulo de grau 20, mostrado na figura 15. Outro fator que vale ressaltar, foi a péssima eficiência da base Tchebychev para o grau 20 com relação as outras bases ortogonais.



**Figura 15.** Comparação da distribuição de pontos para as bases nodais com o comportamento analítico da função para triângulo padrão à medida que o grau da aproximação é elevado.

#### 5.4.2. Mapeamento das bordas do triângulo

As figuras 16, 17 e 18 revelam melhor a deterioração das aproximações, ficando claro que a constante de Lebesgue para a base equidistante tem um crescimento muito superior em relação as bases ortogonais, principalmente quando é aplicado aproximações de ordem muito elevada, como a de 40, constatando-se um erro ilimitado para essa base, diferentemente das ortogonais que mantiveram ótima eficiência. Vale ressaltar que para o problema bidimensional, a taxa de deterioração da base equidistante se deu mais devagar que no unidimensional, podendo ser observado nas figuras abaixo. A figura 15 mapeia a borda onde  $\xi_2 = 0$ , já a figura 17 mapeia diagonal onde  $\xi_2 + \xi_1 = 1$ , a figura 17 mostra a interpolação da borda para  $\xi_1 = 0$ .

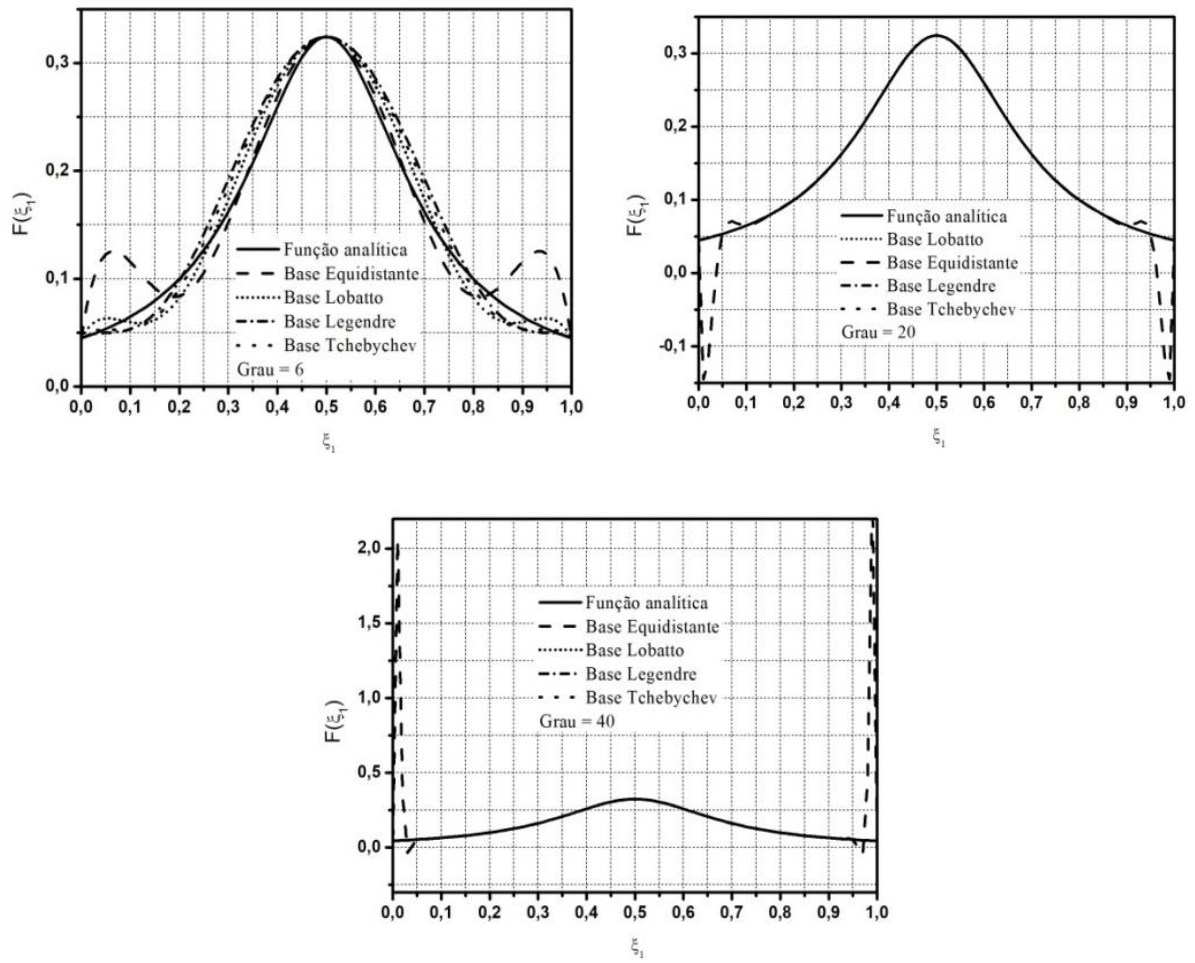


Figura 16. Comparação entre as bases nodais e a função analítica para uma borda do triângulo padrão.

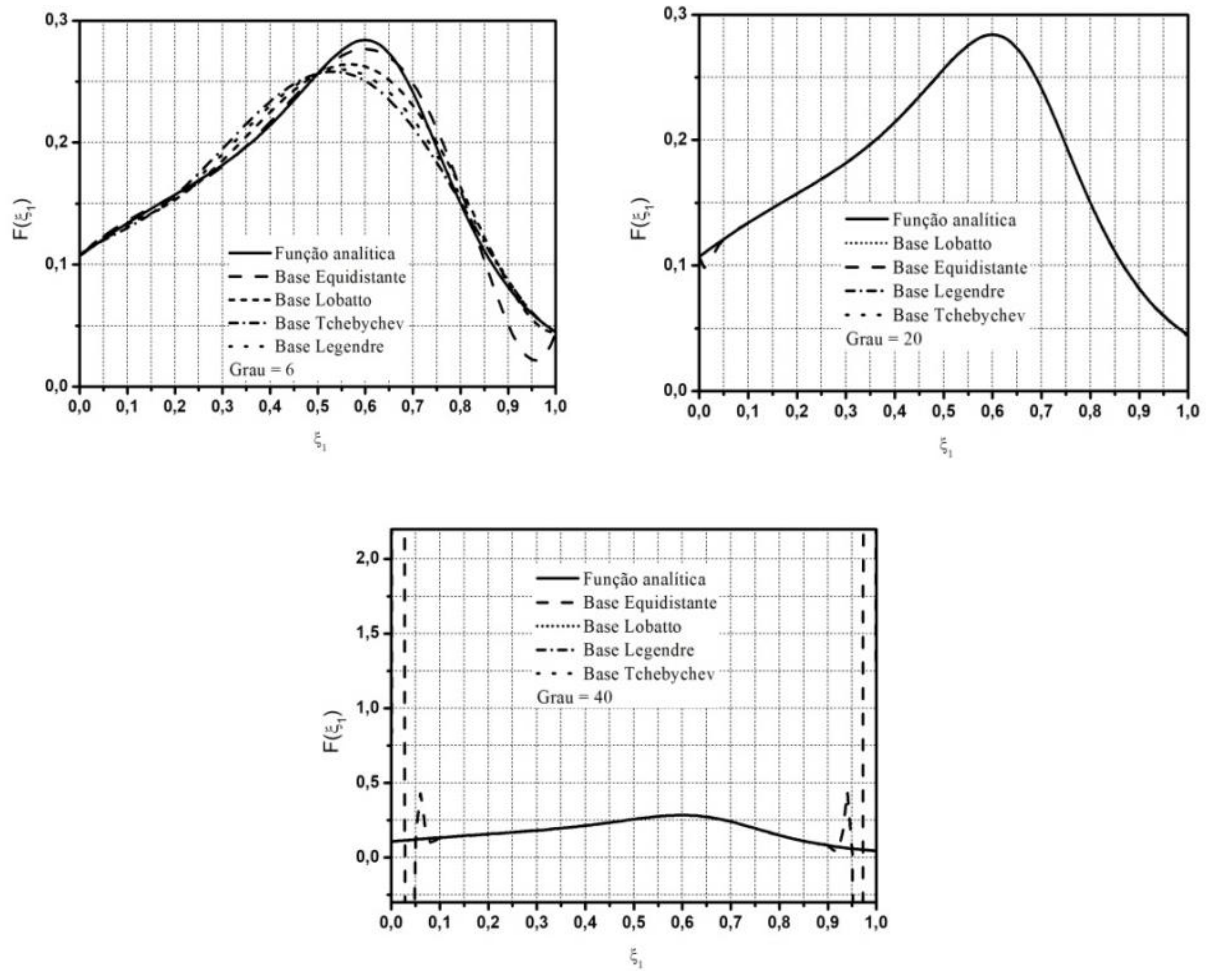


Figura 17. Comparação entre as bases nodais e a função analítica para uma borda do triângulo padrão.

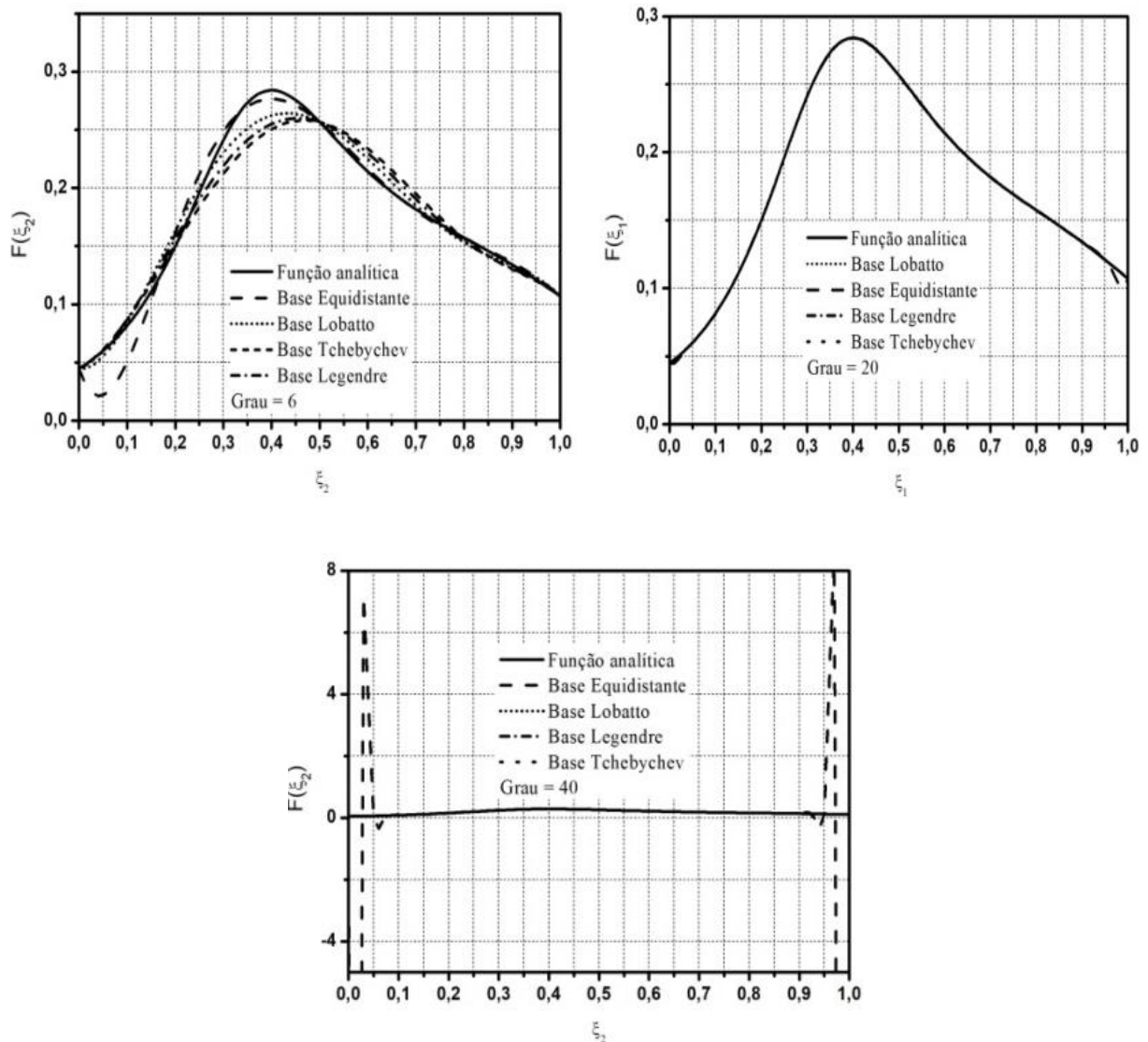


Figura 18. Comparação entre as bases nodais e a função analítica para uma borda do triângulo padrão.

## 5.5. Aplicações

Nesta seção serão avaliadas as estratégias de interpolação apresentadas nas seções anteriores aplicadas ao MEF com o intuito de verificar a convergência uniforme da solução para as bases nodais estudadas. São tratados problemas físicos uni e bidimensionais.

### 5.5.1. MEF unidimensional

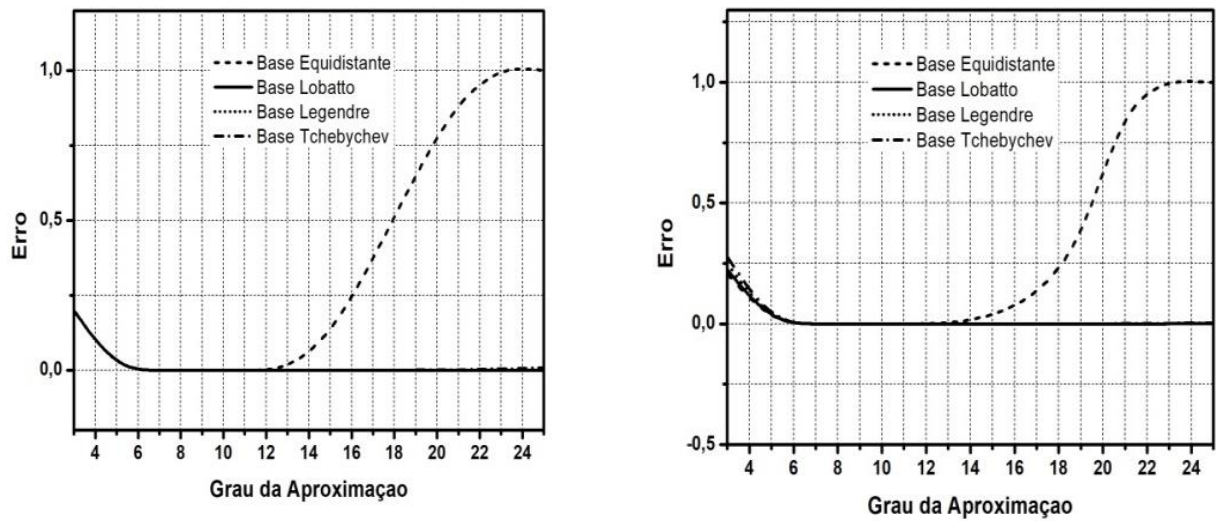
Como forma de avaliação das bases nodais estudadas, é apresentado a seguir, problemas físicos unidimensionais. São estudados 3 tipos de geometrias, que posteriormente serão submetidas a vários tipos de carregamentos. As geometrias estudadas variam entre uma viga

bi apoiada, em balanço e uma viga hiperestática com um engaste e apoio. Todos os exemplos hipoteticamente citados possuem comprimento de 1 m e são feitas do mesmo material, portanto possuem módulo de elasticidade e Inércia iguais e unitários.

#### **5.5.1.1. Carregamento simples**

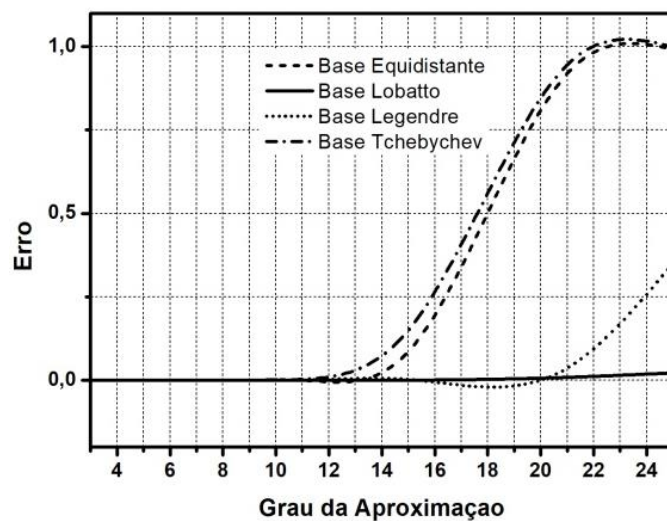
As vigas mostradas na figura 19 foram submetidas a vários tipos de carregamentos, classificados como simples à complexos. Os carregamentos simples se caracterizaram por serem compostos de uma carga concentrada, carregamento uniformemente distribuído, carregamento senoidal ou carregamento triangular. Já o complexo se caracterizou por ser formado pela função racional, abordada anteriormente na equação 73. Para a análise pelo MEF foram utilizadas aproximações que variaram o grau de 3 a 25, sendo então feito um estudo comparativo entre as bases nodais, com o parâmetro quantificador do erro relativo. A primeira geometria analisada foi a mais simples, uma viga bi apoiada, e os carregamentos analisados foram respectivamente, distribuído uniformemente com módulo de  $4000N$  e a função  $\sin(x)$ . Pode ser visualizado um erro relativamente maior das bases nodais no grau 3, pelo motivo de que essa interpolação apenas reflete valores exatos em 2 nós das extremidades dos elementos, portanto para o ponto de deslocamento máximo, onde foi capturado o erro relativo, a aproximação com grau 3 não conseguiu obter uma boa eficiência. Entretanto a medida que a ordem era elevada, o erro foi se aproximando a zero, com a ressalva de que a base equidistante começou a deteriorar a partir do grau 12 para 13, diferentemente das bases ortogonais que continuaram com uma excelente eficiência.





**Figura 19.** Comparação entre as bases nodais com relação ao erro no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada sobre carregamento uniformemente distribuído (à esquerda) e senoidal (à direita).

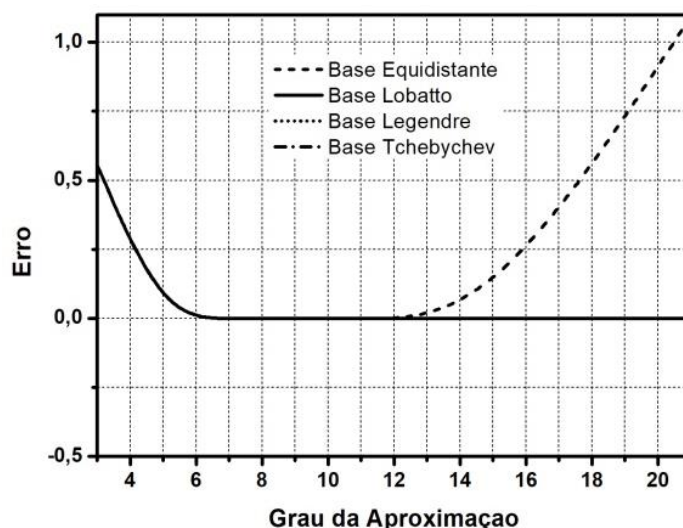
Outra geometria estudada foi a de uma viga engastada em balanço, posteriormente submetida a uma carga concentrada de módulo de  $900\text{ N}$  (Figura 20). Diferentemente do gráfico acima analisado, a base de Tchebychev não conseguiu um bom desempenho frente as outras bases ortogonais. As bases de Lobatto e Legendre mantiveram uma boa eficiência com a elevação da ordem, em contraste com a base igualmente espaçada, que novamente não obteve uma boa eficiência.



**Figura 20.** Comparação entre as bases nodais com relação ao erro no deslocamento máximo de uma viga em balanço com uma carga concentrada na extremidade.



Por último foi analisado uma viga hiperestática, submetida a um carregamento distribuído triangular de módulo de  $900\text{ N}$  que apresentou características semelhantes aos gráficos anteriores mostrados (ver Figura 21).



**Figura 21.** Comparação entre as bases nodais com relação ao erro no deslocamento máximo de uma viga em hiperestática com um carregamento triangular.

#### 5.5.1.2. Carregamento complexo

Para o estudo desse tipo de carregamento, foi aplicada uma carga descrita pela função racional expressa na equação 73. Foi feito o estudo para 2 tipos de geometrias, uma viga bi apoiada e em balanço. Para essas geometrias percebeu-se uma rápida deterioração da base equidistante a medida que o grau interpolador era aumentado, em contraste, as bases ortogonais convergiam com a elevação desse grau (ver Figura 22). Outro ponto importante foi a baixa convergência da base Tchebychev quando a geometria estudada foi a viga em balanço.

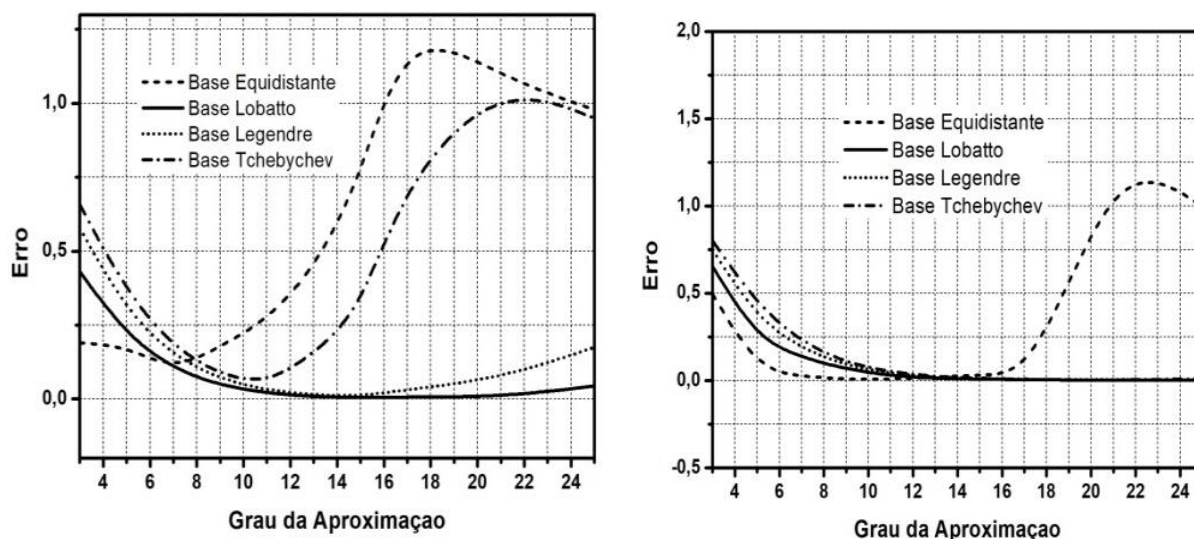


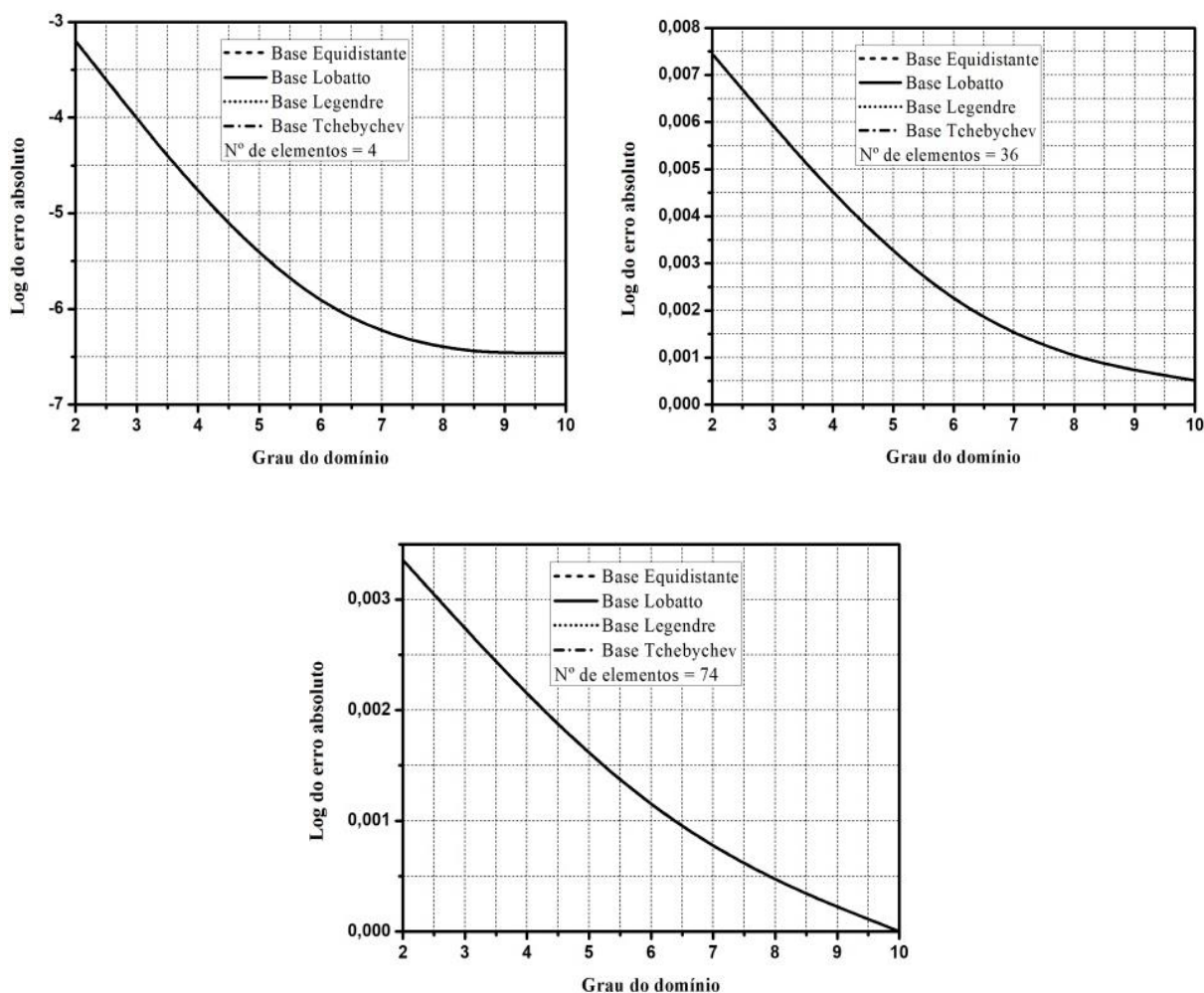
Figura 22. Comparação entre as bases nodais com relação ao erro no deslocamento máximo de uma viga em balanço (à esquerda) e bi apoiada (à direita) com um carregamento racional.

### 5.5.2. MEF bidimensional

Uma abordagem em duas direções é a seguir apresentado, tendo como parâmetros o grau do domínio, do carregamento, o número de elementos, tipo de geometria e tipo de base interpoladora. Todas as geometrias hipoteticamente estudadas possuíam propriedades similares: módulo de elasticidade igual a  $2 \cdot 10^8$  Pa, espessura unitária, coeficiente de Poisson igual a 0,2 e geometria retangular.

#### 5.5.2.1. Carregamento simples

Foi utilizado dois tipos, carga concentrada com módulo de 900 N e Uniformemente distribuído de módulo 4000 N. Devido a difícil visualização do erro, foi feito um estudo através da escala logarítmica do erro relativo, observado nas figuras a seguir (Figura 23). A primeira figura faz uma análise do erro para um carregamento concentrado em uma viga com 2 apoios, a análise leva em consideração o erro no ponto de maior deslocamento, ou seja, no meio da viga, considerando como parâmetro as bases nodais, o número de elementos e o grau interpolador. Pode-se perceber que todas as bases nodais apresentam boa convergência, e a quantidade de elementos é um importante fator para uma boa eficiência da solução. Já que a medida que foi aumentado de 4 para 36 e depois para 74, a precisão da solução sofre um grande crescimento.



**Figura 23.** Comparação entre as bases nodais com relação ao log do erro absoluto no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada com uma carga concentrada.

Para a figura abaixo (Figura 24), é analisado um carregamento distribuído na mesma configuração de viga anteriormente estudada. Pode se concluir o mesmo aferido anteriormente, com a ressalva de que a convergência se deu mais lentamente que a função anterior, devido ao tipo de carregamento estudado, sendo possível então afirmar que, mesmo se tratando de um carregamento relativamente simples (uniformemente distribuído), quando comparado com outros ainda mais simples, obteve uma precisão inferior.

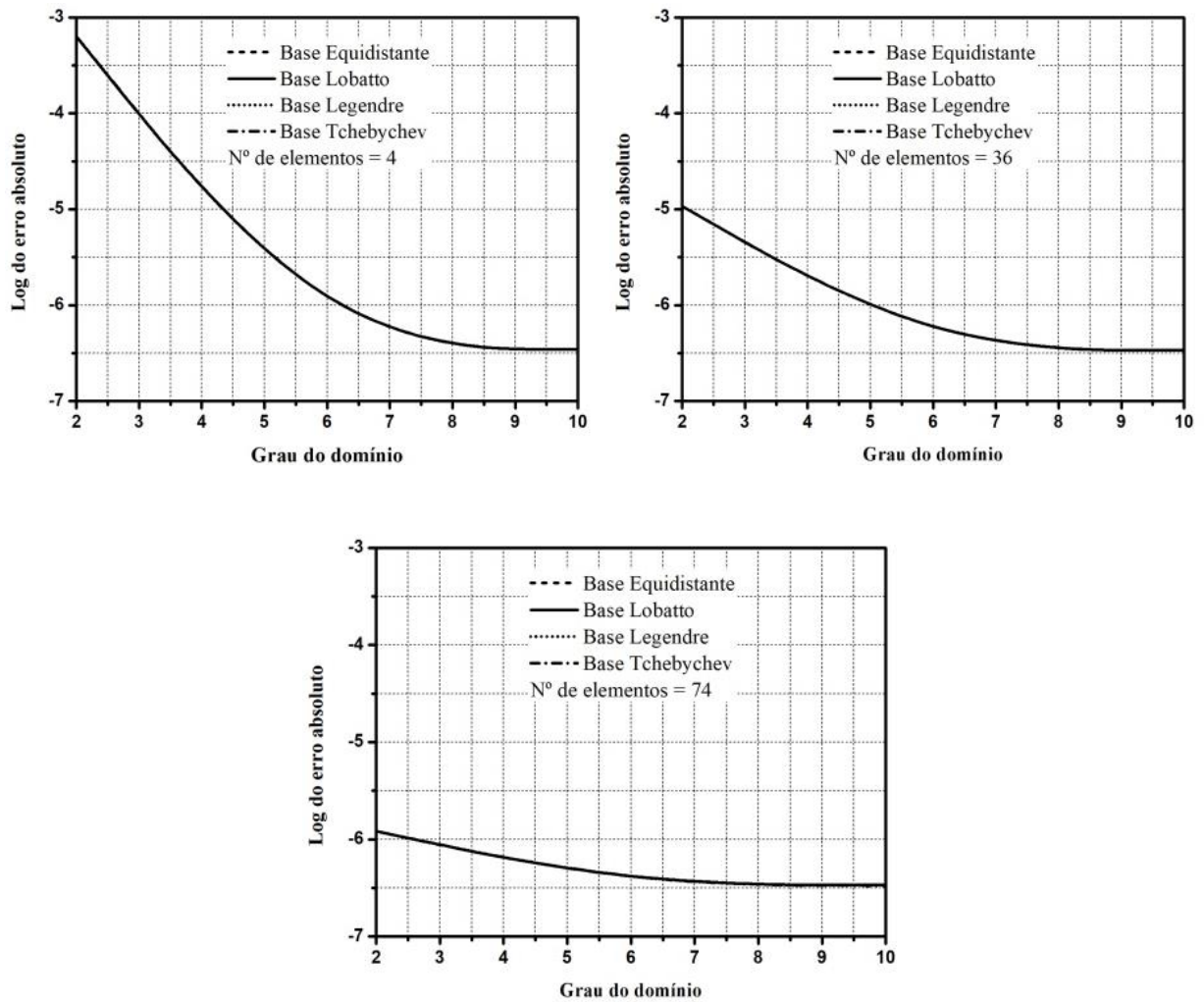


Figura 24. Comparação entre as bases nodais com relação ao log do erro absoluto no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada com uma carga uniformemente distribuída.

#### 5.5.2.2. Carregamento complexo

Assim como no estudo em uma direção, foi analisado o efeito de se trabalhar com um carregamento de difícil reprodução descrito pela equação 73. Os mesmos parâmetros estudados no tópico anterior também foram abordados nessa seção, em que se priorizou o estudo do grau da aproximação do carregamento, frente a aproximação do domínio e da quantidade de elementos para o deslocamento máximo em uma viga bi apoiada (Figura 25 - 27). Nota-se de imediato a boa eficiência das bases ortogonais, em especial a de Lobatto, obtendo uma boa taxa de convergência com o aumento da ordem do carregamento. As figuras abaixo retratam a eficiência na interpolação das Bases nodais, variando o grau do domínio, do carregamento e dos elementos. Percebe-se, assim como visto anteriormente, que a base igualmente espaçada apresenta um crescimento muito rápida do erro com o avanço do grau do

carregamento, diferentemente das bases ortogonais que mantiveram uma boa eficiência. A quantidade de elementos também foi um fator importante para a precisão da solução, já que pode ser observado que a mudança do número de elementos, principalmente de 4 para 32 acarretou numa maior estabilidade da solução, destacando-se o efeito ocasionado principalmente com aproximações de ordem mais baixa. Entretanto, com a estabilização, já com 36 elementos, foi pouca a diferença quando a quantidade foi modificada para 74. Podendo então ser afirmado que um grande número de elementos apenas acarreta um aumento no tempo computacional. Em relação a variação da aproximação do domínio, houve pouco avanço entre os graus trabalhados, podendo ser observado uma maior melhora na mudança do grau 2 para 6.

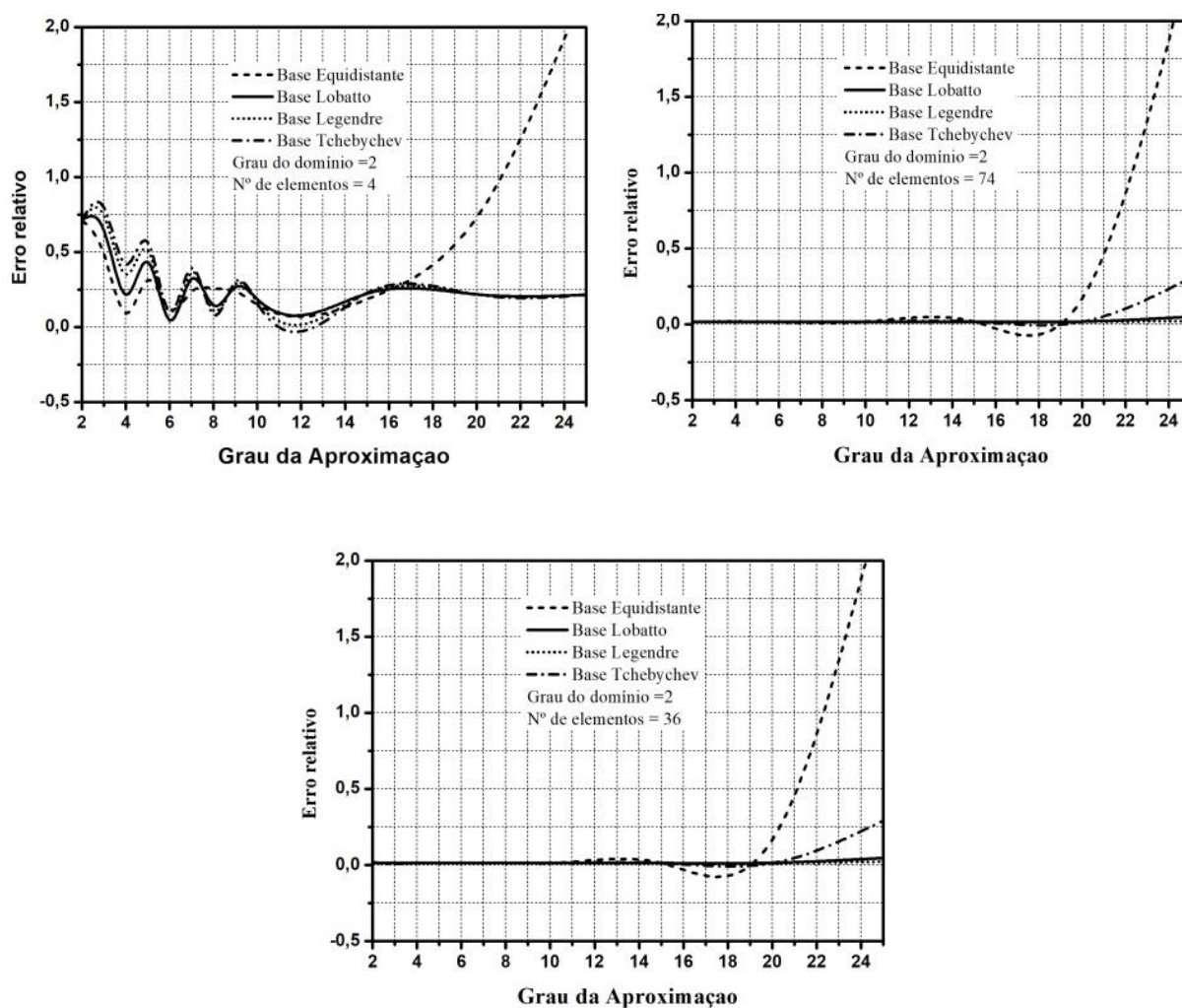


Figura 25. Análise bidimensional do erro relativo no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada com um carregamento racional com grau do domínio = 2.



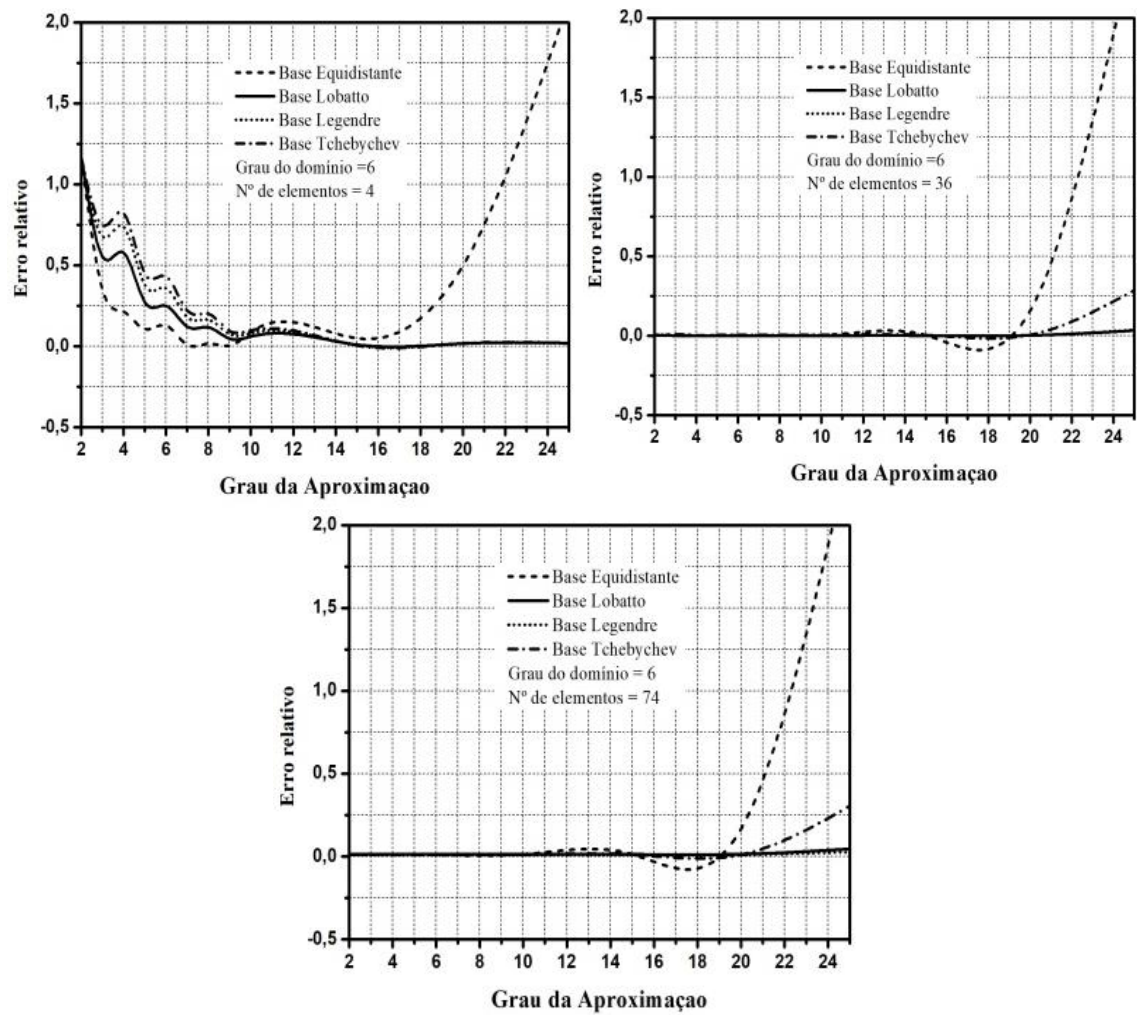


Figura 26. Análise bidimensional do erro relativo no deslocamento máximo de uma viga bi apoiada com um carregamento racional com grau do domínio = 6.

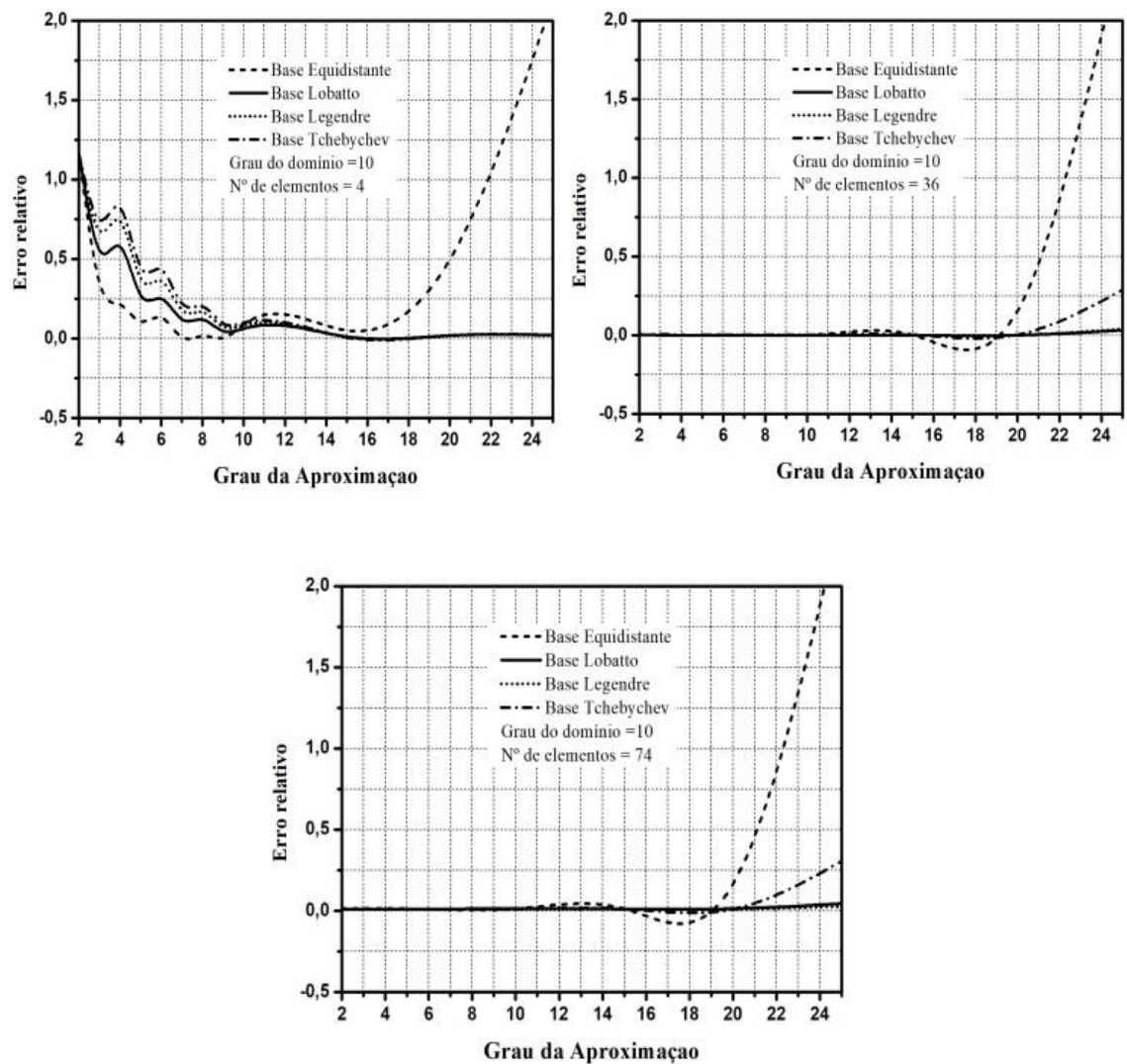


Figura 27. Análise bidimensional do erro relativo no deslocamento máximo de uma viga bia apoiada com um carregamento racional com grau do domínio = 10.

## 6. CONCLUSÃO

Uma nova abordagem foi apresentada para interpolações aplicadas ao MEF para problemas uni e bidimensionais da elastostática. Expansões espectrais foram implementadas para garantir a eficiência e precisão da solução física de problemas simples e complexos, cujos nós de colocação foram posicionados cuidadosamente nos zeros dos polinômios ortogonais de Lobatto, Legendre e Tchebychev. Para problemas bidimensionais, foi utilizada a função interpolante de Proriot aplicada nas posições selecionadas das bases nodais. Como critério quantificador foi apresentado a constante de Lebesgue e o número de condição na norma euclidiana. A partir destes parâmetros, foi avaliado a convergência das bases nodais frente a aproximações de alta ordem para problemas caracterizados por apresentar complexidades em sua geometria ou carregamento. Além dos Parâmetros citados acima, utilizou-se da abordagem do erro relativo, absoluto e ainda do logaritmo do erro para analisar a eficiência das bases frente a diversos problemas da eletrostática. Para o caso do MEF bidimensional, os parâmetros de análise foram o número de elementos e o grau da aproximação do domínio estudado. Para todos os problemas foram realizados estudos comparativo entre a base equidistante e as bases ortogonais com a elevação da ordem do polinômio interpolador frente a problemas quase singulares, como é o caso da função racional apresentada anteriormente.

Durante a reprodução de geometrias mais complexas foi verificada uma maior deterioração da base igualmente espaçada à medida que o grau aproximador era aumentado. Em contraste, as bases ortogonais apresentaram uma boa eficiência com a elevação da ordem polinomial, em especial a de Lobatto, que dentre todas as bases foi a que obteve uma maior eficiência na interpolação dessas geometrias. Com relação ao estudo bidimensional de alta ordem, foi verificado que a utilização da função interpoladora de Proriot nas posições dos nós de Lobatto apresentou uma melhor eficiência na interpolação quando comparada com as outras bases estudadas. Assim como na abordagem unidimensional, a taxa de deteriorização da base equidistante aumentou com a elevação do grau polinomial, porém, em uma velocidade menor que no unidimensional para problemas mais complexos.

Para a análise mecânica via MEF unidimensional, os resultados apresentaram características semelhantes aos obtidos na reconstrução das geometrias, sendo importante ressaltar um problema relacionado a base de Tchebychev que em algumas situações não apresentou boa convergência quando comparada as base de Lobatto e Legendre. Outros



parâmetros foram utilizados durante as interpolações aplicadas ao MEF bidimensional, como a quantidade de elementos e o grau da aproximação do domínio. À medida que o número de elementos era aumentado a precisão da solução crescia até um valor limite, quando alcançado, não é aconselhável a utilização de uma maior quantidade de elementos, pois a solução não obteve avanços em sua eficiência. Com relação ao grau de aproximação do domínio trabalhado, não foi verificado grande influencia do mesmo, pois pouco foi acrescido quanto a precisão, acarretando apenas em um maior custo computacional.

Pelos resultados apresentados, conclui-se que ao se tentar reproduzir geometrias e carregamentos complexos, a melhor escolha de bases nodais é a da família ortogonal, em especial a de Lobatto, que dentre todas as estudadas, foi a que teve uma melhor eficiência ao se empregar expansões espectrais. Por fim, é aconselhável a utilização de aproximações de alta ordem em regiões que apresentem singularidades, e de baixa ordem pra regiões suaves. Referente à abordagem bidimensional, um estudo a posteriore do erro pode ser indicado a fim de se determinar um número adequado de elementos, proporcionando máxima eficiência combinada com menor custo operacional.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A.C. Nogueira Jr. and M.L. Bittencourt. Spectral/HP finite elements applied to linear and non-linear structural elastic problems. *Latin American Journal of Solids and Structures* 4 (2007) 61–85.

BABUSKA, I.; SZABO, B. A.; KATZ, I. N. The p-version of the finite element method. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. V. 18. p. 515-545. 1981.

BASU, P. K.; PEANO, A. Adaptivity in p-version finite element analysis. *J. Structural Engineering*, V. 109. p. 2310-2323. 1983.

BASU, P.K; JORGE, A. B.; BADRI, S.; LIN, J. Higher-Order Modeling of Continua by Finite-Element, Boundary-Element, Meshless, and Wavelet Methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 2003. V. 46, p. 15-13, 2003.

BERNARD, P. –E.; REMACLE, J. –F.; COMBIEN, R.; LEGAT, V.; HILLEWAERT, K. High-order discontinuous Galerkin schemes on general 2D manifolds applied to the shallow water equations. *J. Comput. Phys*. V. 228. p. 6514-6535. 2009.

BOS, L., 1983. Bounding the Lebesgue function for Lagrange interpolation polynomial without Runge phenomenon. *Applied Mechanics and Materials*, n. 303-306, pp. 1085-1088.

BLYTH, M.G.; POZRIKIDIS, C. A Lobatto interpolation grid over the triangle *IMA Journal of applied Mathematics*, p. 1-17. 2005.

BURDEN, Richard L., Faires Douglas J. *Análise numérica*, São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CHANDRUPLATA, Tirupathi R.; BELEGUNDU, Ashok D. *Elementos Finitos*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

CHEN, Y. J., HE, H. Y., ZHANG, S.L., 2013. A new algebra interpolation polynomial without Runge phenomenon. *Applied Mechanics and Materials*, n. 303-306, pp. 1085-1088.

D. A. Dunavant. High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. *Int.J. Numer. Methods Engrg.*, 21:1129–1148, 1985.

DEVILLE, M. O.; FISCHER, P. F.; MUND, E. F. High-order methods for incompressible fluid flow. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press. Cambridge. 2002.

EISENBERGER, M. An Exact High Order Beam Element. Computers and Structures, p.147-152, 2002.

FEJÉR, L., 1932a. Lagrangesche interpolation und die zugehörigen konjugierten punkte. Mathematische Annalen., vol. 106, pp. 1-55.

FEJÉR, L., 1932b. Bestimmung derjenigen abszissen eines intervalles für welche die quadratsumme der grundfunktionem der Lagrangeschen interpolation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mt. Ser. II., vol. 1, pp. 263-273.

FISH, J.; BELYTSCHKO, Ted. Um Primeiro Curso em Elementos Finitos. Rio de Janeiro:LTC, 2009.

FRANCO. Neide Bertoldi. Cálculo numérico, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FRIEDMAN, Z.; KOSMATKA, J. B. An Improved Two-Node Timoshenko Beam Finite Element. Pergamon Press, p. 473–481, 1993.

GALLAGHER, R. Finite element analysis:fundamentals. New Jersey:Prentice-Hall,. P. 420. 1975.

GAUL, L.; KÖGL, M.; WAGNER, M. Boundary element Method for Engineers and Scientist: an introductory course with advanced topics. Germany: Spring-Verlag Berlin Heidelberg. New York. P.488. 2003.

G.E. Karniadakis, S.J. Sherwin, Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics. Numerical Mathematics and Scientific Computation, second ed., Oxford University Press, Oxford, 2005.

GOTTLIEB, D.; ORSZAG, S. A. Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. CBMS-NSF. Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia. 1977.

GHUGAL, Y.M.; SHIMPI, R.P. A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001.

HESTHAVEN, J; WARBURTON, T. C. E. Nodal high-order methods on unstructured grids: I. Time-domain solution of Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.* V. 181. p. 186-221. 2002.

HUGHES, T. J. R. *The finite element analysis*. Prentice-Hall. New Jersey. 1987.

HESTHAVEN, J. S. From electrostatics to almost optimal nodal sets for polynomial interpolation in a simplex. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, pp. 655-676. 1998.

HESTHAVEN, J. S.; WARBURTON, T. *Nodal discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, analysis and applications*. Springer Texts in Applied Mathematics. V. 54. Springer-Verlag. New York. 2008

HEYLIGER, P.R.; REDDY, J.N. A Higher Order Beam Finite Element for Bending and Vibration Problems. *Journal of Sound and Vibration*, p. 309-326, 1988.

KARNIADAKI, GE, Sherwin SJ. *Spectral/hp element methods for CFD*. Oxford: Oxford University Press; 1999.

KARNIADAKIS, G. E.; SHERWIN, S. J. *Spectral/hp Element methods for computational fluid dynamics*. Numerical mathematics and scientific computation. Oxford University Press. Oxford. 2005.

LEE, K.H.; REDDY, J.N.; WANG, C.M. Relationships between Bending Solutions of Classical and Shear Deformation Beam Theories. *International Journal of Solids and Structures*, p. 3373-3384, 1997.

LUO, X., SHEPHARD, M.S., O'BARA, R., Nastasia, R., Beall, M.: Automatic p-version mesh generation for curved domains. *Eng Comput.* 20(3), 273-285 (2004).

LUSTMAN, LEVI. Review: Bertrand Mercier, *An introduction to the numerical analysis of spectral methods*. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 23 (1990), no. 2, 626--629.

OÑATE, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics*. 1. ed. Barcelona: Springer, 2013. v. 1

OS, P. E. J.; SHERWIN, S. J.; KIRBY, R. M. From h to p efficiently: implementing finite and spectral/hp element methods to achieve optimal performance for low- and high-order discretisations. *Journal of Computational Physics*. V. 229. p. 5161-5181. 2010.

P.E.J. Vos, S.J. Sherwin, R.M. Kirby, From h to p efficiently, Technical Report UUCS-09-007, University of Utah, 2009.

PRORIOL, J. Sur une famille de polynomes à deux variables orthogonaux dans um triangle. *C. R. Acad. Sci.*, 1957. P. 2459-2461, 1957.

POZRIKIDIS, C. (1998) *Numerical Computation in Science and Engineering*. Oxford University.

POZRIKIDIS, C. A spectral-element method for particulate Stokes flow. *J. Comp. Phys*. V. 156.P . 360-381. 1999.

POZRIKIDIS, C. (2005) *Introduction to Finite and Spectral Element Methods Using Matlab*. Chapman & Hall/CRC.

RIVLIN, T. J., 1969. *An introduction to the approximation of functions*. Dover.

ROCHA, F. C.; KZAM, A. K. L. Análise das aproximações de alta ordem por meio da interpolação espectral aplicadas ao MEC potencial. In *proceeding XXXIV Iberian Latin-American Congresso n computational Methods in Engineering*, 2013.

ROCHA. Fábio Carlos. *Formulação do MEC considerando efeitos microestruturais e continuidade geométrica  $G^1$ : Tratamento de singularidade e análise de convergência*. São Carlos: USP, 2015.672f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas – Escola de Engenharia de São Carlos da universidade de São Paulo, 2015.

REDDY, J.N. On Locking-Free Shear Deformable Beam Finite Elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. P. 113-132, 1997.

SAYYAD, A.S. Comparison of Various Refined Beam Theories for the Bending and FreeVibration Analysis of Thick Beams. *Applied nd Computational Mechanics*, p.217-230, 2011.

S.J. Sherwin, G.E. Karniadakis, Tetrahedral hp finite elements: algorithms and flow simulations, J. Comput. Phys. 124 (1996) 14–45.

SUN, Z.; GAO, Y.; YANG, L. The Displacement Boundary Conditions for Reddy Higher-Order Shear Cantilever Beam Theory. Springer-Verlag Wien, 2014.

SZABO, B; BABUSKA, I. Finite element analysis. Wiley. New Yor. 1991.SHERWIN, S. J.;

KARNIADAKIS, G. E. Tetrahedral hp finite elements: algorithms and flow simulations. J. Comput. Phys. V. 124. p.14-45. 1996.

ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method: from intuition to generality. Appl. Mech. Rev.V.23.P.249-256.1970.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. The finite element method. Fourth Ed. McGraw-Hill. New York. 1989.

ZIENKIEWICZ O, Taylor R, Fox D. The finite element method for solid and structural mechanics. 7th ed. Butterworth-Heinemann; 2013.

## **Apêndices**

## APÊNDICE A Mudança de variável uni e bidimensional

A mudança de espaços físico e adimensional é feito através de:

$$\xi = \frac{2x}{l^e} - 1, \text{ logo } -1 \leq \xi \leq 1,$$

portanto derivando a equação acima é obtido:

$$\frac{d}{dx} = \frac{l}{2} \frac{d}{d\xi},$$

a matriz de rigidez elementar fica escrita como:

$$K^e = \int_{-1}^1 EIB^{eT} B^e dx = \int_{-1}^1 EIB^{eT}(\xi) B^e(\xi) \frac{l^e}{2} d\xi, \quad (75)$$

pode-se concluir que o vetor de forças nodais fica expreso através de:

$$f^e = \int_{-1}^1 N^t(\xi) p \frac{l^e}{2} d\xi. \quad (76)$$

Da mesma forma que no unidimensional, o bidimensional procede-se com a obtenção das funções de forma, expressas para interpolar uma geometria em termos das coordenadas nodais. A geometria para sólidos 2D é expressada como :

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} N_i(\xi_1, \xi_2) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^{m+1} N_i(\xi_1, \xi_2) y_i, \quad (77)$$

em que  $N_i(\xi_1, \xi_2)$  são as funções de forma relacionadas ao deslocamento. A expressão acima relaciona as coordenadas no espaço físico com o espaço adimensional, e isso é satisfeito através do Jacobiano da transformação entre os dois espaços.



Fonte - Adaptado de Onate, 2013.

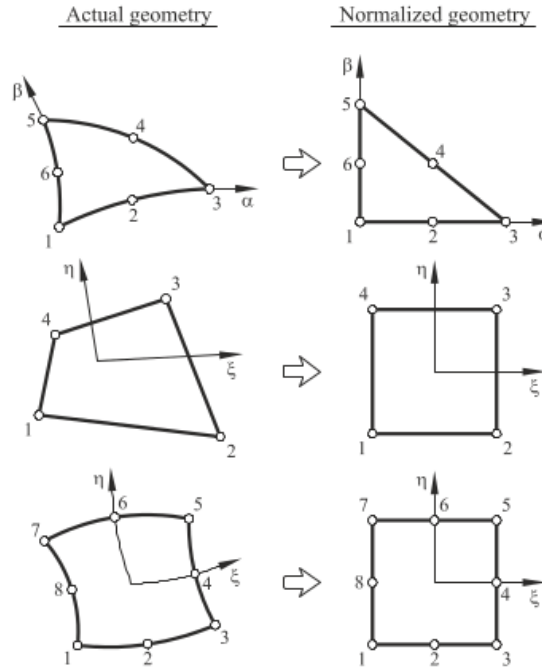


Figura 27. Figura que caracteriza a mudança do espaço físico para adimensional

Podemos relacionar  $N_i$  através de termos das corrdenadas adimensionais como :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J^{(e)}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix},$$

onde  $J^{(e)}$  é expresso como:

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}.$$

Com as expressões acima expostas, pode-se então expressão a matriz de rigidez elementar como:

$$k^e = t_e \int_A B^T DB dA = t_e \int_A B^T(\xi_1, \xi_2) DB(\xi_1, \xi_2) \det J dA. \quad (78)$$

O vetor de força de corpo pode ser encontrado de modo similar:

$$f^e = t^e \int_A N^t \det j d\xi_1 d\xi_2 \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (79)$$

## APÊNDICE B – Integração numérica uni e bidimensional

O emprego do método dos elementos finitos muitas vezes requer a resolução de integrais de complexa integração. Portanto faz-se necessário a utilização de ferramentas que possam contornar essa dificuldade computacionalmente. A matemática oferece inúmeros métodos de integração, entretanto o utilizado nesse trabalho foi o de Gauss-Legendre devido a sua simplicidade de implementação e alta taxa de convergência. Segundo esse método, podemos determinar a integral através de:

$$\int_a^b f(\xi^i) d\xi^i = \sum_{i=1}^{\infty} w_i f(\xi^i) \approx \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i f(\xi^i), \quad (80)$$

com  $n_{int}$  pontos de integração,  $w_i$  corresponde ao peso de integração associado ao ponto de integração  $\xi^i$ , pertencente ao intervalo de  $[-1, +1]$ .

Para a integração bidimensional, utiliza-se o mesmo recurso da quadratura de Gauss-Legendre estudado anteriormente. Os pontos de Gauss para a região triangular diferem dos pontos para uma região quadrada. Para a matriz de rigidez a integração numérica converge de modo a obter um valor bastante próximo do analítico.

$$k^e = t_e \int_A B^T DB dA = t_e \sum_{i=1}^{n_{int}} B^T(\xi_1^i, \xi_2^i) DB(\xi_1^i, \xi_2^i) detJ. \quad (81)$$

A expressão acima demonstra como se dá o procedimento de cálculo numérico da matriz de rigidez elementar. Onde  $n_{int}$  são o número de pontos de integração de Gauss-Legendre e  $\xi_1^i, \xi_2^i$  são os pontos de gauss.